Легейда А.С.
ГУУ, г. Москва

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АСПЕКТЫ РАВНОВЕСНЫХ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Для моделирования экономических явлений могут быть использованы равновесные модели. Они описываются системой нелинейных уравнений (как правило, очень большой размерности), а нахождение равновесия в модели требует решения этой системы, что является тяжелой задачей даже для современных ЭВМ.

Пример такой математической конструкции описывается в статье [1]. Это прикладная модель равновесия в условиях экономики с двумя потребителями, двумя производствами и двумя факторами производства. В системе уравнений, описывающей эту модель, участвуют уже 17 уравнений и 14 неизвестных(!). Из этой же статьи следует, что при повышении числа потребителей и производителей, к примеру, до 5, число уравнений возрастает до 53, а количество неизвестных — до 46, и для решения такой системы необходимы мощные численные методы.

Приведем пример нескольких итерационных методов решения систем нелинейных уравнений, позволяющих эффективно справляться с вычислительными проблемами решения равновесных моделей.

Приведу общий вид задачи, стоящей перед всеми алгоритмами, описываемыми в данной статье. Имеется отображение $f : R^n \to R^n$, которое можно представить следующим образом:

$$f(X) = \begin{pmatrix} f_1(X) & f_2(X) & \dots & f_n(X) \end{pmatrix}^T, \tag{1}$$

где X — вектор-столбец переменных.

Задача алгоритма — путем последовательных приближений найти такое X^*, что $f_i(X^*) = 0, i = 1,2,...n$.

За $f'(x)$ обозначим матрицу Якоби отображения (1), такую, что $[f'(x)]_{i,j} = d\,\dfrac{F_i(x)}{dx_j}$.

Качество приближения определяется следующим образом:

$$F(x^k) = f(x^k)^T \cdot f(x^k). \tag{2}$$

Метод Ньютона-Рафсона, являющийся традиционной реализацией алгоритма решения задачи (1), определяет вектор коррекции, исходя из решения системы линейных уравнений

$$f'(x^k) \cdot \Delta x^k = -f(x^k). \tag{3}$$

Значение x для следующей итерации получается из формулы:

$$x^{k+1} = x^k + \Delta x^k.$$

Метод Ньютона-Рафсона не имеет свойства глобальной сходимости. Он не может работать в случае с сингулярной (система (3) не будет решена) или близкой к сингулярной (элементы вектора коррекции станут чрезмерно большими и следующая итерация будет хуже старой) матрицей Якоби.

Метод Левенберга-Марквардта свободен от этих недостатков (малая область сходимости и неспособность работать с сингулярной матрицей Якоби), так как вектор коррекции вычисляется из решения следующей системы линейных уравнений:

$$\left[\mu^k \cdot I + f'(x^k)^T \cdot f'(x^k)\right] \cdot \Delta x^k = -f'(x^k)^T \cdot f(x^k), \tag{4}$$

где I — единичная матрица, μ^k — неотрицательный скалярный параметр, контролирующий длину и направление вектора коррекции. При $\mu^k = 0$ система уравнений (4) сводится к системе (3) метода Ньютона-Рафсона. При $\mu^k \to \infty$

направление вектора коррекции будет направлением наискорейшего спуска, и его длина становится бесконечно малой.

В [2] указывается, что в нашем случае наилучшим значением μ^k будет $\mu^k = max\left|f'\left(x^k\right)\right|$.

Метод продолжения по параметру, подробно описанный в [3], был изначально разработан для решения параметрических уравнений и систем, но в последствие нашел широкое применение в численных методах решения нелинейных систем.

Введем функцию $G(X,\Theta) = f(x) - \Theta \cdot f(x_0)$ (5), при этом $G(X,1) = f(X_0)$, а $G(X,0) = f(X)$, где $\Theta \subset [0,1]$ — вещественный параметр.

Суть метода продолжения по параметру состоит в том, что если изменять Θ от 1 до 0 с достаточно малым шагом $\Delta\Theta$, то решение системы сводится к последовательности простых задач нахождения решения системы $G(X,\Theta) = 0$, каждую из которых можно решить, к примеру, методом Ньютона-Рафсона. Этот алгоритм обеспечивает более широкую область сходимости, чем предыдущие 2 метода.

Алгоритм CONLES был описан Мордечаем Шачамом в статье [2] и является попыткой комбинировать описанные выше методы, взяв из каждого самое лучшее.

Сначала мы полагаем $\Delta\Theta = 1$ и пытаемся решить систему самыми быстрыми, но и самыми ненадежными итерациями метода Ньютона-Рафсона либо Левенберга-Марквардта. Каждый шаг начинается с определения вектора коррекции методом Ньютона-Рафсона. Для того, чтобы принять этот вектор коррекции, он должен удовлетворять нескольким критериям: во-первых, матрица Якоби не должна быть сингулярной либо близкой к сингулярной, во-вторых, вектор коррекции не должен быть слишком большим, так как при этом велика вероятность расходимости итераций, и, в-третьих, качество следующей итерации не должно быть намного хуже качества текущей. Если вектор коррекции не удовлетворят хотя бы одному из этих критериев, он пересчитывается по методу Левенберга-Марквардта.

Если решить задачу методами Ньютона-Рафсона и Левенберга-Марквардта не удается (это случается когда алгоритм попадает в локальный минимум и/или уходит слишком далеко от начального приближения), мы используем метод продолжения по параметру с $\Delta\Theta = 0.1$, и на каждом его шаге уточняем x с помощью описанной выше комбинации методов Ньютона-Рафсона и Левенберга-Марквардта. Если в этом случае решение все еще не найдено, мы последовательно выполняем алгоритм метода продолжения, каждый раз уменьшая $\Delta\Theta$, например, как предложено в [2], в 10 раз.

В [2] показывается, что для большинства задач значение $\Delta\Theta = 0.001$ является более чем достаточно малым, поэтому, если в этом случае решение найти не удается, дальнейшее уменьшение значения $\Delta\Theta$ вряд ли будет целесообразным.

Литература

1. John B. Shoven, John Whalley «Applied General Equilibrium Models of Taxation and International Trade: An Introduction and Survey» // Journal of Economic Literature. Vol.XXII (September 1984), pp.1007-1051.
2. Mordechai Shacham «Numerical Solution of Constrained Non-Linear Algebraic Equations» // International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.23 (1980), pp.1455-1481.
3. Шалашилин В.И., Кузнецов Е.Б. Метод продолжения по параметру и наилучшая параметризация (в прикладной математике и механике). — М., «Эдиториал УРРС», 1999.