



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Московский государственный технический университет  
имени Н.Э. Баумана  
(национальный исследовательский университет)»  
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ \_\_\_\_\_ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАУКИ \_\_\_\_\_

КАФЕДРА \_\_\_\_\_ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ \_\_\_\_\_

# РАСЧЕТНО-ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА К ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЕ

**НА ТЕМУ:**

***Подавление ограниченных внешних возмущений с  
помощью метода инвариантных эллипсоидов.***

***Линейные оптимальные регуляторы***

Студент ФН12-81Б  
(Группа)

\_\_\_\_\_  
(Подпись, дата)

С.С. Погосян  
(И.О.Фамилия)

Руководитель ВКР

\_\_\_\_\_  
(Подпись, дата)

А.В. Юрченков  
(И.О.Фамилия)

Консультант

\_\_\_\_\_  
(Подпись, дата)

\_\_\_\_\_  
(И.О.Фамилия)

Консультант

\_\_\_\_\_  
(Подпись, дата)

\_\_\_\_\_  
(И.О.Фамилия)

Нормоконтролер

\_\_\_\_\_  
(Подпись, дата)

М.А. Велищанский  
(И.О.Фамилия)

2020 г.

# Реферат

Расчетно-пояснительная записка 91 с., 43 рис., 16 источников.

Объектом исследования дипломного проекта является линейная непрерывная система с ограниченным возмущением. Рассмотрен вариант построения оценки области достижимости методом инвариантных эллипсоидов. Решена задача анализа в виде построения инвариантных эллипсоидов для конкретной системы. Получено решение задачи синтеза управления по критерию минимальности следа инвариантного эллипсоида. В работе подробно рассмотрен метод линейных матричных неравенств, с помощью которого получены решения поставленных задач. Был проведен сравнительный анализ результатов моделирования при использовании подхода инвариантных эллипсоидов и линейно-квадратичного регулятора.

# Содержание

Введение . . . . .	5
1 Постановка задачи . . . . .	7
2 Инвариантные эллипсоиды. Анализ . . . . .	9
2.1 Непрерывная стационарная динамическая система . . . . .	9
2.2 Уравнение Ляпунова: гурвицева устойчивость . . . . .	10
2.3 Лемма Шура и следствия из нее . . . . .	14
2.4 S-теорема и следствия из нее . . . . .	15
2.5 Матричное описание эллипсоидов . . . . .	17
2.6 Критерии минимальности ограничивающего эллипсоида . . . . .	23
2.7 Наихудшее возмущение для системы . . . . .	25
2.8 Управление по состоянию . . . . .	26
2.8.1 Непрерывная стационарная динамическая система с управ- лением . . . . .	26
2.8.2 Задача поиска оптимального регулятора . . . . .	27
3 Метод инвариантных эллипсоидов в задачах управления линейными системами . . . . .	29
3.1 Двойной пружинный маятник . . . . .	29
3.1.1 Построение модели движения системы . . . . .	30
3.1.2 Численное интегрирование математической модели . . . . .	32
3.1.3 Построение инвариантного эллипсоида . . . . .	34
3.1.4 Алгоритм построения ограничивающего эллипса . . . . .	36
3.1.5 Построение минимального инвариантного эллипсоида . . . . .	37
3.1.6 Графическая оценка минимальности эллипсоида . . . . .	40
3.1.7 Наихудшее возмущение для системы . . . . .	42

3.2	Двухмассовая система . . . . .	43
3.2.1	Построение модели движения системы . . . . .	44
3.2.2	Нахождение инвариантного эллипсоида и синтез регуля- тора состояния . . . . .	45
3.2.3	Численное интегрирование системы с неоптимальным ре- гулятором состояния . . . . .	46
3.2.4	Переходные характеристики полученного решения . . . . .	50
3.2.5	Синтез регулятора состояния, обеспечивающего выпол- нение критерия минимальности следа эллипсоида . . . . .	51
3.2.6	Численное интегрирование системы с оптимальным регу- лятором состояния . . . . .	53
3.2.7	Сравнение переходных характеристик . . . . .	56
3.2.8	Дополнительное возмущение, приложенное к системе . . . . .	57
3.2.9	Численное интегрирование системы с дополнительным возмущением и оптимальным регулятором состояния . . . . .	59
3.3	Сравнение регулятора, полученного техникой минимальных эл- липсоидов, с LQR и LQG регуляторами . . . . .	62
	Заключение . . . . .	69
	Список использованных источников . . . . .	70
	Приложение А . . . . .	72

## Введение

Задача о подавлении внешних возмущений является одной из основных в теории линейного управления. Она исследуется в линейно-квадратичной оптимизации (LQG), где возмущения выбираются случайными из класса Гауссовских, в  $H_\infty$ -оптимизации, помехи рассматриваются в виде детерминированных либо из класса  $L_2$  (т.е. убывают с течением времени).

Задачей о подавлении произвольных ограниченных внешних возмущений стали интересоваться еще в середине прошлого века. В 40-е гг. так называемой проблемой о накоплении возмущений занимался Б.В. Булгаков [1]. Однако основное внимание тогда уделялось проблеме анализа — каково максимальное отклонение, вызываемое произвольными ограниченными внешними возмущениями, что, по сути, являлось задачей программного оптимального управления, поскольку внешние возмущения рассматривались как управления. Значительно позже появляются работы по компенсации ограниченных возмущений (см. [2]), в которых, впрочем, не предлагались методы синтеза оптимальных регуляторов.

Собственно задача об оптимальном подавлении произвольных ограниченных возмущений была сформулирована и решена в работе Е.Д. Якубовича [3]. Некоторые частные случаи рассмотрены в [4, 5]. Полное решение было построено в работах А.Е. Барабанова и О.Н. Граничина [6] и позже, М.А. Далеха и Д.Б. Пирсона [7]. Впоследствии она получила название  $l_1$ -оптимизации. Наряду с  $l_1$ -оптимальным управлением, хорошо известны также методы динамического программирования для подобных задач [8 — 10]. Приведенные выше результаты относятся к дискретным системам; их обобщение на непрерывный случай ( $L_1$ -оптимизация) вызывает дополнительные сложности. В целом, подавление произвольных ограниченных возмущений, традиционно считается трудной задачей в теории управления [11, 12].

В настоящей работе был предложен иной подход к данной проблематике, основанный на методе инвариантных множеств, в частности инвариантных эллипсоидов. Инвариантные множества довольно широко используются в различных задачах теории гарантированного оценивания, фильтрации и

минимаксного управления в динамических системах при наличии неопределенностей. Вспомогательными работами в этом направлении были работы Ф.К. Швеппе [13], Д.П. Бертсекаса [9, 14], А.Б. Куржанского [15] и Ф.Л. Черноусько [16]. Отметим, что инвариантные множества во многих случаях оказываются удобными аппроксимациями, например, областей достижимости динамических систем; это позволяет их широко использовать в задачах анализа. Однако концепция инвариантности также активно применяется и в других разделах теории автоматического управления.

В данной работе задача о подавлении произвольных ограниченных внешних возмущений формулируется в терминах инвариантных эллипсоидов. Рассматривается синтез статической обратной связи по состоянию, которая минимизирует размер инвариантных эллипсоидов динамической системы. При этом исходные задачи анализа и синтеза управления удается свести к эквивалентным условиям разрешимости в виде линейных матричных неравенств и задаче полуопределенного программирования, которые легко решаются численно.

# 1 Постановка задачи

Для двойного пружинного маятника, представленного на рис. 1, где возмущения выбираются из класса  $L_\infty$ , необходимо:

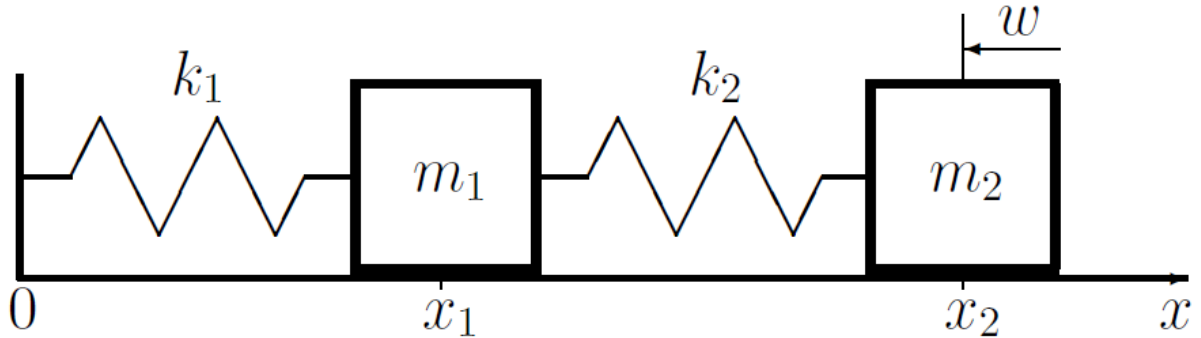


Рис. 1. Двойной пружинный маятник.

1. построить математическую модель движения;
2. найти инвариантный эллипсоид;
3. найти минимальный эллипсоид по критерию следа;
4. сформировать наихудшее возмущение для системы.

Используя результаты решенной задачи анализа (п. 2-3), решить задачу подавления ограниченных возмущений для системы, представленной на рис. 2

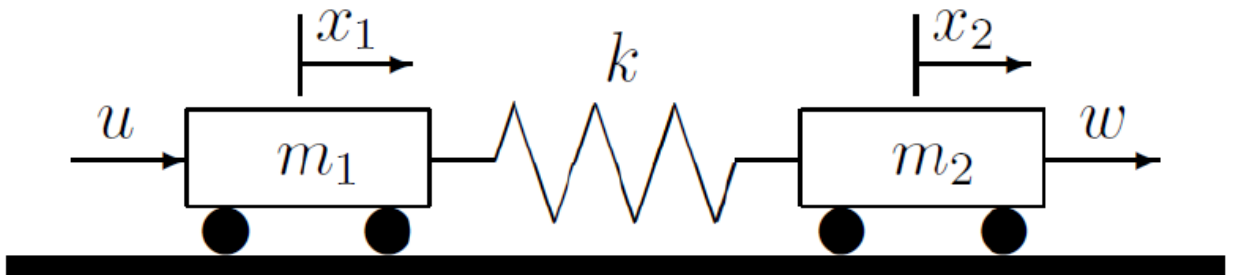


Рис. 2. Двухмассовая система.

Для системы, представленной на рис. 2, необходимо:

1. составить математическую модель движения;
2. найти статическую обратную связь по состоянию вида  $u = Kx$ , обеспечивающую выполнение критерия минимальности следа инвариантного эллип-

соида;

3. решить задачу из предыдущего пункта при дополнительном возмущении, приложенному к левой тележке;

4. сравнить результаты при построении закона управления на основе минимизации квадратичного критерия (LQR);

5. построить траекторию системы, изобразить инвариантный эллипсоид.



## 2 Инвариантные эллипсоиды. Анализ

Важно отметить, что в настоящей работе все предлагаемые подходы основаны на методе инвариантных эллипсоидов [11]. Точное определение понятия инвариантного эллипсоида, которое используется в работе, будет введено далее в соответствующем разделе. Но для корректности изложенного подхода, основанного на методе инвариантных эллипсоидов, необходимо дать определения базовых понятий, связанных с представленным материалом.

### 2.1 Непрерывная стационарная динамическая система

Рассмотрим линейную стационарную динамическую систему в непрерывном времени:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Dw, & x(0) = 0, \\ y = Cx, \end{cases} \quad (1)$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ ,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  — фазовое состояние системы,  $y(t) \in \mathbb{R}^l$  — выход системы,  $w(t)$  — одномерное внешнее возмущение, ограниченное в каждый момент времени:

$$|w(t)| \leq 1 \quad \forall t \geq 0, \quad (2)$$

где  $|\cdot|$  — евклидова норма вектора. Никаких иных ограничений на  $w(t)$  не накладывается; так, оно не предполагается ни случайным, ни гармоническим. Соответственно, рассматриваются только  $L_\infty$ -ограниченные внешние возмущения. В данной работе предполагается, что система (1) устойчива (матрица  $A$  гурвицева), пара  $(A, D)$  управляема,  $C$  — матрица максимального строчного ранга. Поскольку матрица  $A$  устойчива, то решения системы (1) при всех допустимых возмущениях  $w(t)$  будут ограничены:

$$\sup_{t \geq 0} |x(t)| \leq r.$$

Минимальное такое число, в западной литературе называют «peak-to-peak gain» — коэффициент усиления от возмущений (ограниченных единицей) к норме состояния системы (см. [10]). В настоящей работе было рассмотрено более точное описание системы с помощью эллипсоидов.

## 2.2 Уравнение Ляпунова: гурвицева устойчивость

Пусть рассматривается объект управления с уравнениями движения, заданными в пространстве состояний:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Dw, \\ y = Cx, \end{cases} \quad (3)$$

где  $x$  —  $n$ -мерный вектор состояния;  $y$  —  $l$ -мерный вектор выходных (регулируемых) переменных;  $u$  —  $m$ -мерный вектор управляющих воздействий;  $w$  —  $r$ -мерный вектор возмущающих воздействий;  $A$  — матрица, определяющая динамические свойства объекта управления, размерности  $n \times n$ ;  $B$  — матрица входа управляющих воздействий размерности  $n \times m$ ;  $D$  — матрица входа возмущающих воздействий размерности  $n \times r$ ;  $C$  — матрица выхода размерности  $l \times n$ ;  $n$  — порядок объекта управления.

**Определение 2.2.1.** [11, стр. 24]

Пусть  $A, R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Матричное уравнение

$$AP + PA^T = -R, \quad R = R^T, \quad (4)$$

называется уравнением Ляпунова относительно матрицы  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $P = P^T$ .

**Лемма 2.2.1.** [11, стр. 24] (*Уравнение Ляпунова; непрерывный случай*).

*Если выполнено условие*

$$\operatorname{Re}(\lambda_i + \lambda_j) \neq 0 \quad (5)$$

*для всех собственных значений  $\lambda_i$  матрицы  $A$  системы (3), то существует единственное решение  $P = P^T$  уравнения Ляпунова (4).*

*При этом, если  $R \succ 0$  или  $R = BB^T$  и матрица*

$$U = (B \quad AB \cdots A^{n-1}B)$$

*имеет ранг  $n$ , то уравнение Ляпунова (4) имеет положительно определенное решение*

$$P = \int_0^\infty e^{At} R e^{A^T t} dt \succ 0 \quad (6)$$

*тогда и только тогда, когда матрица  $A$  гурвицева.*

*Наконец, если матрица  $A$  гурвицева и  $R \succeq 0$ , то и  $P \succeq 0$ .*

### Доказательство.

Как известно, если квадратные матрицы  $A_1$  и  $A_2$  не имеют одинаковых собственных значений, то матричное уравнение  $A_1X = XA_2$  имеет только нулевое решение; при этом, очевидно, матричное уравнение  $A_1X - XA_1 = Y$  имеет единственное решение. Таким образом, при выполнении условий (5) уравнение Ляпунова (4) будет иметь единственное (симметрическое) решение. Пусть матрица  $A$  гурвицева. Тогда выполнено условие (5) и, по доказанному, уравнение Ляпунова имеет единственное решение.

В силу гурвицевости матрицы  $A$  интеграл (6) сходится. При этом он определяет симметрическую матрицу  $P = P^T$ , удовлетворяющую уравнению Ляпунова (4):

$$\begin{aligned} AP + PA^T &= \int_0^\infty (Ae^{At}Re^{A^Tt} + e^{At}Re^{A^Tt}A^T)dt = \\ &= \int_0^\infty \frac{d}{dt}(e^{At}Re^{A^Tt})dt = e^{At}Re^{A^Tt} \Big|_0^\infty = -R \end{aligned}$$

Очевидно, что  $P \succ 0$  при  $R \succ 0$ . Если же  $R = BB^T$  и ранг матрицы  $U$  равен  $n$ , то получим

$$\int_0^\infty e^{At}BB^Te^{A^Tt} \succ 0.$$

Покажем обратное. Пусть  $P \succ 0$  — решение уравнения Ляпунова (4). Предположим, что матрица  $A$  не является гурвицевой; тогда найдется ее собственное значение  $\lambda$ , такое, что  $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$ . Пусть  $v$  — левый собственный вектор, соответствующий собственному значению  $\lambda$ , то есть,

$$v^T A = \lambda v^T.$$

При  $R \succ 0$  имеем

$$v^T R v > 0.$$

Если же  $R = BB^T$ , а  $\operatorname{rank} U = n$ , то имеет  $v^T B \neq 0$ , откуда вновь

$$v^T R v = v^T B B^T v = |v^T B|^2 > 0.$$

С другой стороны

$$v^T R v = -v^T (AP + PA^T)v = -(\lambda + \bar{\lambda})v^T P v \leq 0.$$

Получили противоречие, что доказывает гурвицевость матрицы  $A$ . Заключительное утверждение леммы очевидно. □

**Следствие 2.2.1.** [11, стр. 26]

*Если матрица  $A$  гурвицева, то матричное неравенство*

$$AP + PA^T \prec 0 \quad (7)$$

*разрешимо, причем все его решения положительно определены.*

*Если неравенство (7) имеет положительно определенное решение, то матрица  $A$  гурвицева.*

*Если матрица  $A$  гурвицева, матричное неравенство*

$$AP + PA^T \preceq 0 \quad (8)$$

*разрешимо и все его решения неотрицательно определены.*

**Доказательство.**

Любое решение неравенства (7) является решением соответствующего матричного уравнения (4) при некоторой  $R = R^T \succ 0$ . Пусть матрица  $A$  гурвицева; тогда по Лемме 2.2.1 уравнение

$$AP + PA^T = -R$$

имеет решение  $P \succ 0$  при любой матрице  $R = R^T \succ 0$ . Эта матрица  $P$ , очевидно, удовлетворяет матричному неравенству (7).

Пусть  $P \succ 0$  является решением неравенства (7). Это означает, что

$$AP + PA^T = -R$$

при некоторой  $R = R^T \succ 0$ . Таким образом, матрица  $P \succ 0$  удовлетворяет уравнению Ляпунова с отрицательно определенной правой частью; по Лемме 2.2.1, матрица  $A$  гурвицева.

Наконец, что любое решение матричного неравенства (8) является решением соответствующего матричного уравнения при некоторой  $R = R^T \succeq 0$ . Пусть матрица  $P$  удовлетворяет неравенству (8), тогда

$$AP + PA^T = -R, \quad R \succeq 0.$$

По Лемме 2.2.1, с учетом гурвицевости матрицы  $A$ , имеем  $P \succeq 0$ .

□

**Определение 2.2.2.** [11, стр. 27]

Матричное неравенство

$$AP + PA^T \preceq -R, \quad R = R^T, \quad (9)$$

называется неравенством Ляпунова относительно матрицы  $P$ .

**Лемма 2.2.2.** [11, стр. 28] (*Неравенство Ляпунова*).

Пусть матрица  $A$  гурвицева. Если  $R \succ 0$  или  $R = BB^T$  и матрица

$$U = (B \quad AB \cdots A^{n-1}B)$$

имеет ранг  $n$ , то неравенство Ляпунова (9) разрешимо, причем для любого его решения  $P$  справедлива оценка

$$P \succeq P_-,$$

где  $P_- \succ 0$  — решение соответствующего уравнения Ляпунова (то есть,  $P_-$  — минимальное решение неравенства (9))

**Доказательство.**

Неравенство (9) разрешимо, поскольку в силу Леммы 2.2.1 существует решение соответствующего уравнения Ляпунова. Далее, имеем

$$AP + PA^T \preceq -R = AP_- + P_-A^T,$$

или

$$A(P - P_-) + (P - P_-)A^T \preceq 0,$$

откуда, по Следствию 2.2.1, в силу гурвицевости матрицы  $A$ ,

$$P - P_- \succeq 0.$$

□

**Следствие 2.2.2.** [11, стр. 28]

Пусть матрица  $A$  гурвицева и матрица

$$U = (B \quad AB \cdots A^{n-1}B)$$

имеет ранг  $n$ . Тогда для любого монотонного критерия  $f(P)$  решение задачи

$$f(P) \longrightarrow \min$$

при ограничении

$$AP + PA^T + BB^T \preceq 0$$

достигается на решении уравнения Ляпунова

$$AP + PA^T + BB^T = 0$$

В частности, в качестве  $f(P)$  можно рассматривать  $\text{tr}[CPC^T]$  при любой матрице  $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ , а также  $\|P\|_1$ .

### 2.3 Лемма Шура и следствия из нее

**Теорема 2.3.1.** [11, стр. 98] (Лемма Шура).

Пусть

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12} & M_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)},$$

где  $M_{11} = M_{11}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $M_{12} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $M_{22} = M_{22}^T \in \mathbb{R}^{m \times m}$ .

Тогда

$$M \succ 0 \Leftrightarrow M_{22} \succ 0, \quad M_{11} - M_{12}M_{22}^{-1}M_{12}^T \succ 0.$$

**Доказательство.**

Введем в рассмотрение вектор  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m}$ , разбиение которого соответствует разбиению матрицы  $M$ . Тогда

$$\begin{aligned} x^T M x &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12}^T & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^T M_{11} x_1 + x_1^T M_{12} x_2 + \\ &+ x_2^T M_{12}^T x_1 + x_2^T M_{22} x_2 = (M_{22}^{-1} M_{12}^T x_1 + x_2)^T M_{22} (M_{22}^{-1} M_{12}^T x_1 + x_2) + \\ &+ x_1^T (M_{11} - M_{12} M_{22}^{-1} M_{12}^T) x_1. \end{aligned}$$

Следовательно,  $M \succ 0 \Leftrightarrow M_{22} \succ 0$  и  $M_{11} - M_{12}M_{22}^{-1}M_{12}^T \succ 0$ .

□

**Следствие 2.3.1.** [11, стр. 98] (*Лемма Шура, нестрогое неравенство*).

*Пусть*

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12} & M_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)},$$

где  $M_{11} = M_{11}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $M_{12} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $M_{22} = M_{22}^T \in \mathbb{R}^{m \times m}$  — невырожденная матрица.

*Тогда*

$$M \succeq 0 \Leftrightarrow M_{22} \succ 0, \quad M_{11} - M_{12}M_{22}^{-1}M_{12}^T \succeq 0.$$

**Замечание 2.3.1.** [11, стр. 99]

Лемма Шура справедлива в следующей «симметричной» формулировке:

$$M \succ 0 \Leftrightarrow M_{11} \succ 0, \quad M_{22} - M_{12}^T M_{11}^{-1} M_{12} \succ 0,$$

которая оказывается в равной мере полезной; ее доказательство совершенно аналогично.

Основное применение леммы Шура — сведение нелинейных матричных неравенств к линейным, в частности, переход от обратных матриц к прямым, что будет использовано в дальнейшем в данной работе.

## 2.4 S-теорема и следствия из нее

Приводимые ниже результаты, наряду с леммой Шура, представляет собой ключевое средство при доказательстве последующий утверждений в текущей работе, где речь идет об инвариантных эллипсоидах.

**Теорема 2.4.1.** [11, стр. 110] (*S - теорема*).

*Пусть заданы однородные квадратичные формы*

$$f_i(x) = x^T A_i x, \quad i = 0, 1, \dots, m,$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $A_i = A_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , и числа  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m > 0$ . Если существуют числа  $\tau_i \geq 0, i = 1, \dots, m$ , такие, что

$$A_0 \preceq \sum_{i=1}^m \tau_i A_i, \quad \alpha_0 \geq \sum_{i=1}^m \tau_i \alpha_i, \quad (10)$$

то равенства

$$f_i(x) \leq \alpha_i, i = 1, \dots, m, \quad (11)$$

влекут неравенство

$$f_0(x) \leq \alpha_0. \quad (12)$$

Обратно, если из (11) следует (12) и выполняется любое из условий:

а)  $m = 1$ ;

б)  $m = 2, n \geq 3$  и существуют числа  $\mu_1, \mu_2$  и вектор  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  такие, что

$$\mu_1 A_1 + \mu_2 A_2 \succ 0, \quad f_1(x^0) < \alpha_1, \quad f_2(x^0) < \alpha_2, \quad (13)$$

то найдутся  $\tau_i \geq 0, i = 1, \dots, m$ , такие, что выполняются соотношения (10).

**Теорема 2.4.2.** [11, стр. 98] (формулировка  $S$ -теоремы в случае строгого неравенства.)

Пусть заданы однородные квадратичные формы

$$f_i(x) = x^T A_i x, i = 0, 1, \dots, m,$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $A_i = A_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Если существуют числа  $\tau_i \geq 0, i = 1, \dots, m$ , такие, что

$$A_0 \prec \sum_{i=1}^m \tau_i A_i, \quad (14)$$

то неравенства

$$f_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m, \quad (15)$$

влекут неравенство

$$f_0(x) < 0, \quad (16)$$

для всех  $x \neq 0$ . Обратно, если из (15) следует (16) и выполняется любое из условий:



а)  $m = 1$ ;

б)  $m = 2$ ,  $n \geq 3$  и существует вектор  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  такой, что

$$f_1(x^0) < 0, \quad f_2(x^0) < 0,$$

то найдутся  $\tau_i \geq 0, i = 1, \dots, m$ , такие, что выполняются соотношения (14).

**Замечание 2.4.1.** [11, стр. 111]

Утверждения Теорем 2.4.1 и 2.4.2 остаются справедливыми и в том случае, если одно или несколько неравенств (12) (соответственно, в (15)) заменить на равенства; при этом будет отсутствовать требование неотрицательности соответствующих коэффициентов  $\tau_i$ .

## 2.5 Матричное описание эллипсоидов

Прежде всего, эллипсоид можно описать как образ единичного шара при аффинном отображении:

$$\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad x = Ry + x_c, \quad \|y\|_2 \leq 1\}, \quad (17)$$

где  $R$  прямоугольная матрица, а  $x_c$  центр эллипсоида. Отметим выпуклость данного представления по совокупности  $R$  и  $x_c$ .

В частности, если  $R$  квадратная положительно определенная матрица, представлению (17) можно придать вид:

$$\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad (x - x_c)^T P^{-1} (x - x_c) \leq 1\}, \quad P = R^2. \quad (18)$$

или

$$\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad (x - x_c)^T Q (x - x_c) \leq 1\}, \quad Q = P^{-1}. \quad (19)$$

Такие формы записи наиболее удобны с точки зрения построения квадратичных функций Ляпунова и далее будут рассматриваться в качестве основных. Матрица  $P$  называется матрицей эллипсоида (18). Существует принципиальное различие форм (18) и (19) с точки зрения задач оптимизации. Представление (18) нелинейно по совокупности  $x_c$  и  $P$ , однако, оно может быть

приведено к линейному с помощью леммы Шура:

$$\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : \begin{pmatrix} 1 & (x - x_c)^T \\ x - x_c & P \end{pmatrix} \succeq 0\}$$

С другой стороны, представление (19) нелинейно по совокупности параметров  $Q$  и  $x_c$ , и избавиться от этой нелинейности не удастся.

**Определение 2.5.1.** [11, стр. 104]

Эллипсоид с центром в начале координат

$$\varepsilon_x = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T P^{-1} x \leq 1\}, \quad P \succ 0, \quad (20)$$

называется инвариантным по переменной  $x$  (по состоянию) для динамической системы (1), если из условия  $x(0) \in \varepsilon_x$  следует  $x(t) \in \varepsilon_x$  для всех моментов времени  $t > 0$ . Матрицу  $P$  называют матрицей эллипсоида  $\varepsilon_x$ .

**Лемма 2.5.1.** [11, стр. 159]

Пусть  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$  – заданные матрицы,  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha > 0$ ,  $0 < \beta \leq \alpha$ .

Тогда множества

$$\Omega_1 = \{(P, \alpha) : AP + PA^T + \alpha P + \frac{1}{\alpha} DD^T \preceq 0\}$$

и

$$\Omega_2 = \{(P, \alpha) : AP + PA^T + \alpha P + \frac{1}{\beta} DD^T \preceq 0\}$$

совпадают.

**Доказательство.**

Нетрудно видеть, что  $\Omega_1 \subset \Omega_2$ ; покажем обратное включение. Пусть  $(P, \alpha) \in \Omega_2$ , тогда существует  $0 < \beta \leq \alpha$  такое, что

$$AP + PA^T + \alpha P + \frac{1}{\beta} DD^T \preceq 0.$$

При этом

$$AP + PA^T + \alpha P + \frac{1}{\alpha} DD^T = AP + PA^T + \alpha P + \frac{1}{\beta} DD^T + \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right) DD^T \preceq 0,$$

то есть  $(P, \alpha) \in \Omega_1$ .

□

**Теорема 2.5.1.** [11, стр. 159]

Эллипсоид  $\varepsilon_x$  вида (20) является инвариантным по состоянию для динамической системы (1) тогда и только тогда, когда его матрица  $P \succ 0$  удовлетворяет линейному матричному неравенству

$$AP + PA^T + \alpha P + \frac{1}{\alpha} DD^T \preceq 0, \quad (21)$$

при некоторых  $\alpha > 0$ .

**Доказательство.**

Введем в рассмотрение функцию

$$V(x) = x^T Q x, \quad Q \succ 0,$$

построенную на решениях системы (1). Для того, чтобы траектории  $x(t)$  системы (1) не выходили за границу эллипсоида

$$\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq 1\}, \quad (22)$$

достаточно потребовать, чтобы при  $\dot{V}(x, w) < 0$  (и всех допустимых внешних возмущениях  $w$ ) выполнялось  $V(x) > 1$ . Это условие представимо в виде

$$\dot{V}(x, w) \leq 0 \quad \text{при} \quad V(x) \geq 1, \quad w^T w \leq 1 \quad (23)$$

С учетом того, что производная функции  $V(x)$  в силу системы (1) имеет вид

$$\dot{V}(x, w) = \dot{x}^T Q x + x^T Q \dot{x} = x^T (A^T Q + Q A) x + 2w^T D^T Q x,$$

условие (23) запишется так:

$$x^T (A^T Q + Q A) x + 2w^T D^T Q x \leq 0 \quad \text{при} \quad x^T Q x \geq 1, \quad w^T w \leq 1. \quad (24)$$

Введем в рассмотрение вектор  $s = \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m}$  и матрицы

$$M_0 = \begin{pmatrix} A^T Q + Q A & Q D \\ D^T Q & 0 \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} -Q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix};$$

тогда условие (24) примет вид:

$$f_0(s) \leq 0 \quad \text{при} \quad f_1(s) \leq -1, \quad f_2(s) \leq 1, \quad (25)$$

где  $f_i(s) = s^T M_i s, i = 0, 1, 2$ . Воспользуемся S-теоремой. Нетрудно видеть, что условия (13) в ее формулировке выполнены. Действительно, при любых  $\mu_1 < 0, \mu_2 > 0$  имеем

$$\mu_1 \begin{pmatrix} -Q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \succ 0,$$

а для вектора

$$s_0 = \begin{pmatrix} \gamma Q^{-1/2} e \\ 0 \end{pmatrix},$$

где  $\gamma > 1$ , а  $|e| = 1$ , верно

$$s_0^T \begin{pmatrix} -Q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} s_0 = -\gamma^2 < 1$$

и

$$s_0^T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} s_0 = 0 < 1.$$

Следовательно, условие (25) эквивалентно соотношению

$$M_0 - \alpha M_1 - \beta M_2 \preceq 0 \quad (26)$$

при неотрицательных  $\alpha$  и  $\beta$  таких, что  $\alpha \geq \beta$ .

Полученное неравенство представимо в виде

$$\begin{pmatrix} A^T Q + Q A + \alpha Q & Q D \\ D^T Q & -\beta I \end{pmatrix} \preceq 0.$$

Заметив, что  $\beta > 0$ , и воспользовавшись леммой Шура, приходим к соотношению

$$A^T Q + Q A + \alpha Q + \frac{1}{\beta} Q D D^T Q \preceq 0.$$

Умножив полученное неравенство слева и справа на матрицу  $P = Q^{-1}$ , получаем линейное матричное неравенство

$$A P + P A^T + \alpha P + \frac{1}{\beta} D D^T \preceq 0.$$

Полагая в силу Леммы 2.5.1

$$\beta = \beta_{max} = \alpha > 0,$$

приходим к матричному неравенству (21).

С другой стороны, необходимым условием инвариантности эллипсоида (22) является условие

$$\dot{V}(x, w) \leq 0 \quad \text{при} \quad V(x) = 1, \quad w^T w \leq 1. \quad (27)$$

Оказывается, оно также эквивалентно соотношению (21). Действительно, условие (27) записывается как

$$x^T(A^T Q + Q A)x + 2w^T D^T Q x \leq 0 \quad \text{при} \quad x^T Q x = 1, \quad w^T w \leq 1.$$

Воспользовавшись S-теоремой (с учетом Замечания 2.4.1) приходим к соотношению (26) при некоторых числах  $\alpha$  и  $\beta$  таких, что  $\beta \geq 0$  и  $\alpha \geq \beta$ . Поскольку при этом параметр  $\alpha$  оказывается неотрицательным, вновь получаем соотношение (21).

Таким образом, условие инвариантности эллипсоида с матрицей  $P \succ 0$  эквивалентно выполнению матричного неравенства (21) при некотором  $\alpha > 0$ .

□

**Лемма 2.5.2.** [11, стр. 109]

*Образом эллипсоида*

$$\epsilon_x = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad x^T P^{-1} x \leq 1\}, \quad P \succ 0,$$

*при линейном отображении  $y = Cx$ , где  $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$  — матрица полного строчного ранга, является эллипсоид*

$$\epsilon_y = \{y \in \mathbb{R}^l : \quad y^T (C P C^T)^{-1} y \leq 1\}.$$

**Доказательство.**

Известно, что при линейном отображении образом эллипсоида является эллипсоид. Далее, неравенство

$$x^T P^{-1} x \leq 1, \quad P \succ 0,$$

пол лемме Шура можно переписать в виде матричного неравенства

$$\begin{pmatrix} 1 & x^T \\ x & P \end{pmatrix} \succeq 0.$$

Домножив его слева на матрицу  $\text{diag}\{1 \quad C\}$  и справа на матрицу  $\text{diag}\{1 \quad C^T\}$ , получаем

$$\begin{pmatrix} 1 & y^T \\ y & CPC^T \end{pmatrix} \succeq 0$$

Поскольку  $C$  — матрица полного строчного ранга, то матрица  $CPC^T$  обратима. Поэтому по лемме Шура имеем

$$y^T(CPC^T)^{-1}y \leq 1,$$

т.е. образ эллипсоида  $\varepsilon_x$  принадлежит эллипсоиду  $\varepsilon_y$ .

С другой стороны, нетрудно показать, что точки, попадающие на границу образа эллипсоида  $\varepsilon_x$ , принадлежат эллипсоиду  $\varepsilon_y$ . В самом деле, если выбрать произвольны вектор  $d \neq 0$  и рассмотреть задачу

$$\max_{x^T P^{-1}x \leq 1} (Cx, d).$$

Нетрудно видеть, что ее решением является

$$x^* = PC^T \frac{d}{\|P^{1/2}C^T d\|} \in \varepsilon_x$$

и при этом для точки

$$y^* = Cx^* = CPC^T \frac{d}{\|P^{1/2}C^T d\|}$$

имеем

$$y^{*T}(CPC^T)^{-1}y^* = \frac{d^T CPC^T d}{\|P^{1/2}C^T d\|^2} = 1,$$

то есть,  $y^* \in \varepsilon_y$ .

□

### Замечание 2.5.1. [11, стр. 162]

По лемме Шура матричное неравенство (21) может быть записано в следующих эквивалентных видах:

$$\begin{pmatrix} AP + PA^T + \alpha P & D \\ D^T & -\alpha I \end{pmatrix} \preceq 0$$

или

$$\begin{pmatrix} A^T Q + Q A + \alpha Q & Q D \\ D^T Q & -\alpha I \end{pmatrix} \preceq 0,$$

где  $Q = P^{-1}$ . Несмотря на некоторое усложнение, именно такие формы записи позволили получить основные результаты, относящиеся к непрерывным системам вида (1).

Инвариантные эллипсоиды в данной работе рассматриваются как характеристика воздействия внешних возмущений на траекторию динамической системы. Точнее, задача состоит в оценке степени влияния внешних возмущений на выход системы. В этой связи было использовано такое понятие, как минимальные (в некотором смысле) эллипсоиды, содержащие вектор выхода.

В соответствии с Леммой (2.5.2) об образе эллипсоида при линейном отображении, имеем, что если  $\epsilon_x$  — инвариантный эллипсоид (20) с матрицей  $P$ , то выход  $y = Cx$  системы (1) при  $x_0 \in \epsilon_x$  принадлежит эллипсоиду

$$\epsilon_y = \{y \in \mathbb{R}^l : y^T (C P C^T)^{-1} y \leq 1\}, \quad (28)$$

который называется ограничивающим для выхода  $y$ .

## 2.6 Критерии минимальности ограничивающего эллипсоида

Итак, степень влияния  $L_\infty$  — ограниченных внешних возмущений  $w(t)$  на выход системы  $y(t)$  мы будем характеризовать минимальным ограничивающим эллипсоидом (28).

Минимальность эллипсоидов можно понимать по-разному; В данной работе в качестве основного был выбран линейный критерий следа

$$f(P) = \text{tr}[C P C^T], \quad (29)$$

соответствующий сумме квадратов длин полуосей эллипсоида  $\epsilon_y$ ; это, в частности, позволит сводить проблемы к стандартной задаче SDP (semidefinite programming).

**Следствие 2.6.1.** [11, стр. 163]

*Минимальный по критерию (29) ограничивающий эллипсоид системы*

(1) принадлежит однопараметрическому семейству эллипсоидов, порожденному матрицами  $P(\alpha)$ , которые удовлетворяют уравнению Ляпунова

$$AP + PA^T + \alpha P + \frac{1}{\alpha} DD^T = 0, \quad (30)$$

на интервале  $0 < \alpha < -2 \max_i \operatorname{Re} \lambda_i(A)$ .

При этом функция

$$\phi(\alpha) = \operatorname{tr}[CP(\alpha)C^T]$$

строго выпукла на указанном интервале.

### Доказательство.

Первое утверждение непосредственно вытекает из Следствия 2.2.2. Далее, уравнение (30) представимо в виде

$$(A + \frac{\alpha}{2}I)P + P(A + \frac{\alpha}{2}I)^T = -\frac{1}{\alpha}DD^T$$

и, согласно Лемме 2.2.1, имеет единственное положительно определенное решение тогда и только тогда, когда матрица  $A + \frac{\alpha}{2}I$  гурвицева:

$$\operatorname{Re} \lambda_i(A + \frac{\alpha}{2}I) < 0,$$

то есть,  $0 < \alpha < -2 \max_i \operatorname{Re} \lambda_i(A)$ .

Осталось доказать строгую выпуклость функции  $\phi(\alpha) = \operatorname{tr}[CP(\alpha)C^T]$  на интервале  $(0, -2 \max_i \operatorname{Re} \lambda_i(A))$ . Согласно Лемме 2.2.1, решение уравнения (30) представимо в явном виде как

$$P(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{(A + \frac{\alpha}{2}I)t} \frac{1}{\alpha} DD^T e^{(A + \frac{\alpha}{2}I)^T t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{\alpha t}}{\alpha} e^{At} DD^T e^{A^T t} dt \succ 0,$$

следовательно

$$\phi(\alpha) = \operatorname{tr}[CP(\alpha)C^T] = \int_0^{+\infty} \frac{e^{\alpha t}}{\alpha} \operatorname{tr}(Ce^{At} DD^T e^{A^T t} C^T) dt > 0.$$

В свою очередь, функция

$$\alpha \longrightarrow \frac{e^{\alpha t}}{\alpha}$$

при всех  $t \geq 0$  строго выпукла на интервале  $(0 < \alpha < -2 \max_i \operatorname{Re} \lambda_i(A))$ , а

$$\operatorname{tr}[Ce^{At} DD^T e^{A^T t} C^T] \geq 0,$$



причем при некоторых  $t \geq 0$  это неравенство является строгим.

В силу непрерывной зависимости функции  $\text{tr}[Ce^{At}DD^Te^{A^T t}C^T]$  от  $t$ , функция  $\phi(\alpha)$  строго выпукла на интервале  $(0 < \alpha < -2 \max_i \text{Re}\lambda_i(A))$ . Следствие доказано. □

Следствие 2.6.1 позволяет при поиске минимального ограничивающего эллипсоида ограничиться рассмотрением однопараметрического семейства (30), что сводит задачу к одномерной выпуклой минимизации на конечном интервале. Заметим также, что все минимальные ограничивающие эллипсоиды удовлетворяют уравнению (30) вне зависимости от конкретного выбора монотонного критерия.

## 2.7 Наихудшее возмущение для системы

В процессе доказательства Теоремы 2.5.1 была построена функция Ляпунова  $V(x)$  для системы (1) такая, что

$$\dot{V}(x, w) \leq 0 \text{ при } V(x) \geq 1 \text{ и } w^T w \leq 1.$$

Отсюда следует необходимость найти ограниченное внешнее возмущение  $\tilde{w}(t)$ , максимизирующее производную  $\dot{V}(x, w)$  функции Ляпунова в силу системы (так называемое «наихудшее» возмущение). Ответ дается следующей леммой.

**Лемма 2.7.1.** [11, стр. 165]

*Наихудшее возмущение  $\tilde{w}(t)$  для системы (1) задается формулой*

$$\tilde{w}(t) = \frac{D^T \hat{P}^{-1} x(t)}{\|D^T \hat{P}^{-1} x(t)\|}.$$

*В частности, если возмущение одномерно, то*

$$\tilde{w}(t) = \text{sign}(D^T \hat{P}^{-1} x(t)).$$

**Доказательство.**

Потребуем, чтобы

$$\dot{V}(x, w) \longrightarrow \max,$$

где  $V(x) = x^T \hat{P}^{-1}x$  — функция Ляпунова, построенная на решениях системы (1).

Имеем:

$$\dot{V}(x, w) = x^T (A^T \hat{P}^{-1} + \hat{P}^{-1}A)x + 2w^T D^T \hat{P}^{-1}x.$$

Тогда внешнее возмущение  $\hat{w}(t)$  является решением задачи

$$\max_{\|w\| \leq 1} (w, D^T \hat{P}^{-1}x),$$

откуда

$$\tilde{w}(t) = \frac{D^T \hat{P}^{-1}x(t)}{\|D^T \hat{P}^{-1}x(t)\|}.$$

В частности, при  $m = 1$  имеем

$$\tilde{w}(t) = \text{sign}(D^T \hat{P}^{-1}x(t)).$$

□

## 2.8 Управление по состоянию

Для компенсации влияния ограниченных внешних возмущений на выход стационарной динамической системы вводится статический регулятор в виде линейной обратной связи по состоянию. Рассматриваемый подход к синтезу управления заключается в том, что искомый регулятор, подавляющий внешние возмущения, задается инвариантным (в соответствующей главе и минимальным) ограничивающим эллипсоидом для выхода замкнутой системы.

### 2.8.1 Непрерывная стационарная динамическая система с управлением

Рассматривается линейная непрерывная динамическая система с управлением

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 u + Dw, & x(0) = 0, \\ y = Cx + B_2 u, \end{cases} \quad (31)$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_1 \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $B_2 \in \mathbb{R}^{l \times p}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ ,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  — фазовое состояние системы,  $y(t) \in \mathbb{R}^l$  — минимизируемый выход,  $u(t) \in \mathbb{R}^p$  —

управление,  $w(t) \in \mathbb{R}^m$  — внешнее возмущение, удовлетворяющее ограничению (2). Предполагается, что пара  $(A, B_1)$  управляема, а пара  $(A, C)$  наблюдаема. Под наблюдаемостью понимается свойство системы, показывающее, можно ли по выходу полностью восстановить информацию о состояниях системы.

В настоящей работе целью является нахождение регулятора  $K$  в форме обратной статической линейной связи по состоянию

$$u = Kx, \quad (32)$$

который стабилизирует замкнутую систему и оптимально (в смысле минимальности следа ограничивающего эллипсоида для выхода  $y$ ) подавляет воздействие внешних возмущений  $w(t)$ .

### 2.8.2 Задача поиска оптимального регулятора

В следующей теореме поиск оптимального регулятора сводится к задаче SDP и одномерной минимизации.

#### Теорема 2.8.1.

*Решение  $\hat{P}, \hat{Y}, \hat{Z}$  задачи минимизации*

$$\text{tr}[CPC^T + CY^TB_2^T + B_2YC^T + B_2ZB_2^T] \longrightarrow \min, \quad (33)$$

*при ограничениях*

$$AP + PA^T + B_1Y + Y^TB_1^T + \alpha P + \frac{1}{\alpha}DD^T \preceq 0, \quad (34)$$

$$\begin{pmatrix} Z & Y \\ Y^T & P \end{pmatrix} \succeq 0, \quad (35)$$

где минимизация проводится по матричным переменным  $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $Z = Z^T \in \mathbb{R}^{p \times p}$  и скалярному параметру  $\alpha$ , определяет матрицу

$$C\hat{P}C^T + C\hat{Y}^TB_2^T + B_2\hat{Y}C^T + B_2\hat{Z}B_2^T$$

минимального ограничивающего эллипсоида для выхода системы (31) и статический регулятор по состоянию

$$\hat{K} = \hat{Y}\hat{P}^{-1},$$

*оптимально подавляющий внешние возмущения.*

### **Доказательство.**

Замкнутая управлением (32) система (31) принимает следующий вид

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + B_1 K)x + Dw, \\ z = (C + B_2 K)x. \end{cases}$$

Применяя Теорему 2.5.1, сформулируем задачу минимизации

$$\text{tr}[(C + B_2 K)P(C + B_2 K)^T] \longrightarrow \min, \quad (36)$$

при ограничении

$$(A + B_1 K)P + P(A + B_1 K)^T + \alpha P + \frac{1}{\alpha} DD^T \preceq 0. \quad (37)$$

В матричное неравенство (37) переменные  $P$  и  $K$  входят нелинейным образом. Введем матричную переменную

$$Y = KP, \quad Y \in \mathbb{R}^{p \times n}.$$

Тогда неравенство (37) примет линейный (по переменным  $P$  и  $Y$ ) вид (34). Далее, с учетом введенной переменной  $Y$  целевая функция в (33) перепишется в виде

$$\text{tr}[CPC^T + CY^T B_2^T + B_2 Y C^T + B_2 Y P^{-1} Y^T B_2^T].$$

Таким образом

$$\text{tr}[CPC^T + CY^T B_2^T + B_2 Y C^T + B_2 Y P^{-1} Y^T B_2^T] \longrightarrow \min,$$

при ограничениях (34). Согласно лемме Шура, полученная задача эквивалентна задаче

$$\text{tr}[CPC^T + CY^T B_2^T + B_2 Y C^T + B_2 Z B_2^T] \longrightarrow \min,$$

при ограничениях (34) и

$$\begin{pmatrix} Z & Y \\ Y^T & P \end{pmatrix} \succeq 0,$$

где  $Z = Z^T \in \mathbb{R}^{p \times p}$  — вспомогательная матричная переменная.

□

### 3 Метод инвариантных эллипсоидов в задачах управления линейными системами

В настоящей работе предлагается подход к проблеме подавления ограниченных внешних возмущений на основе метода инвариантных эллипсоидов. Главным инструментом при этом является техника линейных матричных неравенств (Linear Matrix Inequalities, LMI). Рассмотрены системы в непрерывном времени. В качестве примера исследуется управление двойным пружинным маятником и двухмассовой системой. Данный подход дал возможность переформулировать исходные задачи к удобному для решения виду, который будет описан в следующих главах.

#### 3.1 Двойной пружинный маятник

Для двойного пружинного маятника, представленного на рис. 3, где возмущения выбираются из класса  $L_\infty$  необходимо:

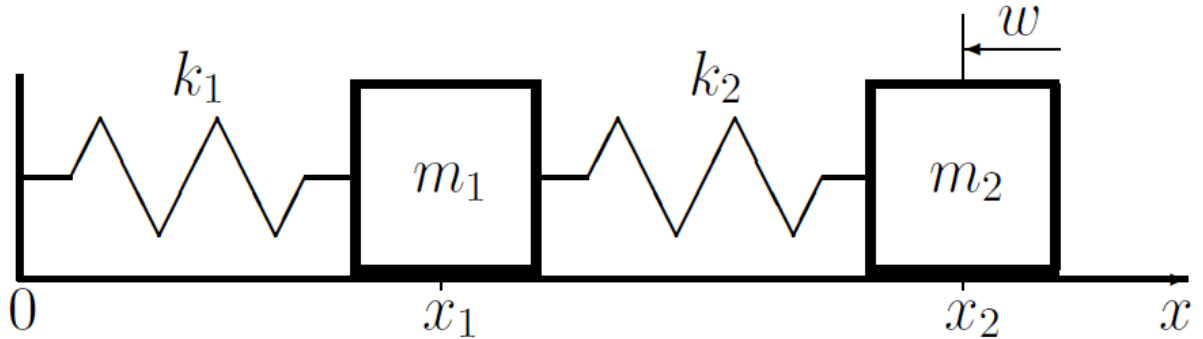


Рис. 3. Двойной пружинный маятник.

1. построить модель движения;
2. найти инвариантный эллипсоид;
3. найти минимальный эллипсоид по критерию следа;
4. сформировать наихудшее возмущение для системы.

Необходимо отметить, что полное и качественное выполнение поставленных выше задач подразумевает под собой не только множество второстепенных подпунктов, но и сравнительный анализ результатов для оценки и доказательства состоятельности подхода к решению поставленных задач.

### 3.1.1 Построение модели движения системы

Предположим, что  $x_1, x_2$  — координаты левого и, соответственно, правого тела.  $v_1, v_2$  — их скорости. На правое тело действует ограниченное внешнее возмущение  $|w| \leq 1$  (см. рис. 3). Тогда непрерывная модель возмущенных колебаний системы описывается уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = v_1, \\ \dot{x}_2 = v_2, \\ \dot{v}_1 = -\frac{k_1 + k_2}{m_1}x_1 + \frac{k_2}{m_1}x_2 - \gamma v_1, \\ \dot{v}_2 = \frac{k_2}{m_2}x_1 - \frac{k_2}{m_2}x_2 - \gamma v_2 + w, \end{cases}$$

где  $k_1, k_2$  — коэффициенты жесткости левой и правой пружины,  $m_1, m_2$  — массы левого и правого тела,  $\gamma$  — коэффициент сопротивления среды. В дальнейшем предполагается, что параметры системы единичны:

$$k_1 = k_2 = m_1 = m_2 = 1,$$

а коэффициент сопротивления среды равен  $\gamma = 0.2$ .

Вектор состояния имеет вид:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

В качестве выхода системы взят вектор:

$$y = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

В результате приходим к системе (1) с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -0.2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -0.2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

То есть системе вида:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -0.2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -0.2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} w, \\ y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x, \end{array} \right. \quad (38)$$

где  $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ ,  $x(t) \in \mathbb{R}^4$  — фазовое состояние системы,  $y(t) \in \mathbb{R}^2$  — выход системы,  $w(t)$  — внешнее возмущение, ограниченное в каждый момент времени.

### 3.1.2 Численное интегрирование математической модели

Уравнение динамики в пространстве состояний имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Dw, \\ y = Cx, \end{cases} \quad (39)$$

где матрицы  $A, D, C$  найдены ранее. Задав начальные условия на фазовые переменные и возмущение ( $w_0 = 0.8 < 1, x_0 = [1, 1, 1, 1]$ ) с помощью функции `ode_45` (метод Рунге-Кутты 4-го порядка) из MATLAB toolbox интегрируем систему (39) по времени  $t \in [0, 60]$ . Было получено решение задачи Коши, описывающее поведение системы (39), представленное на рисунках 4–7.

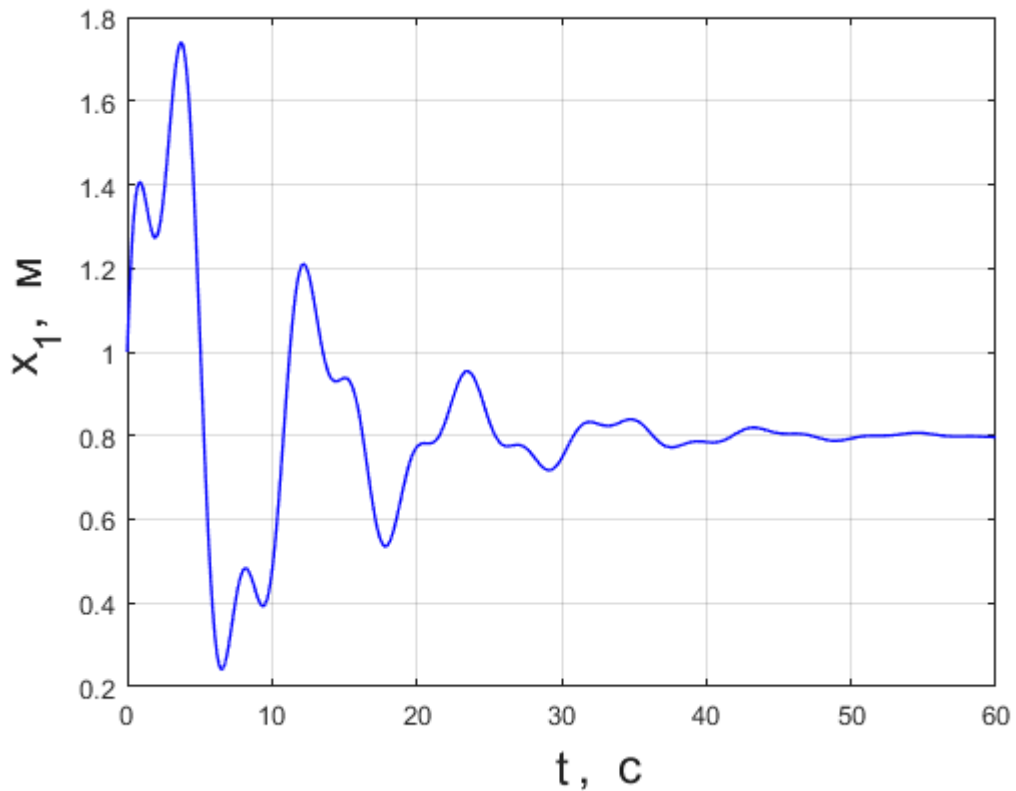


Рис. 4. График функции  $x_1(t)$ .



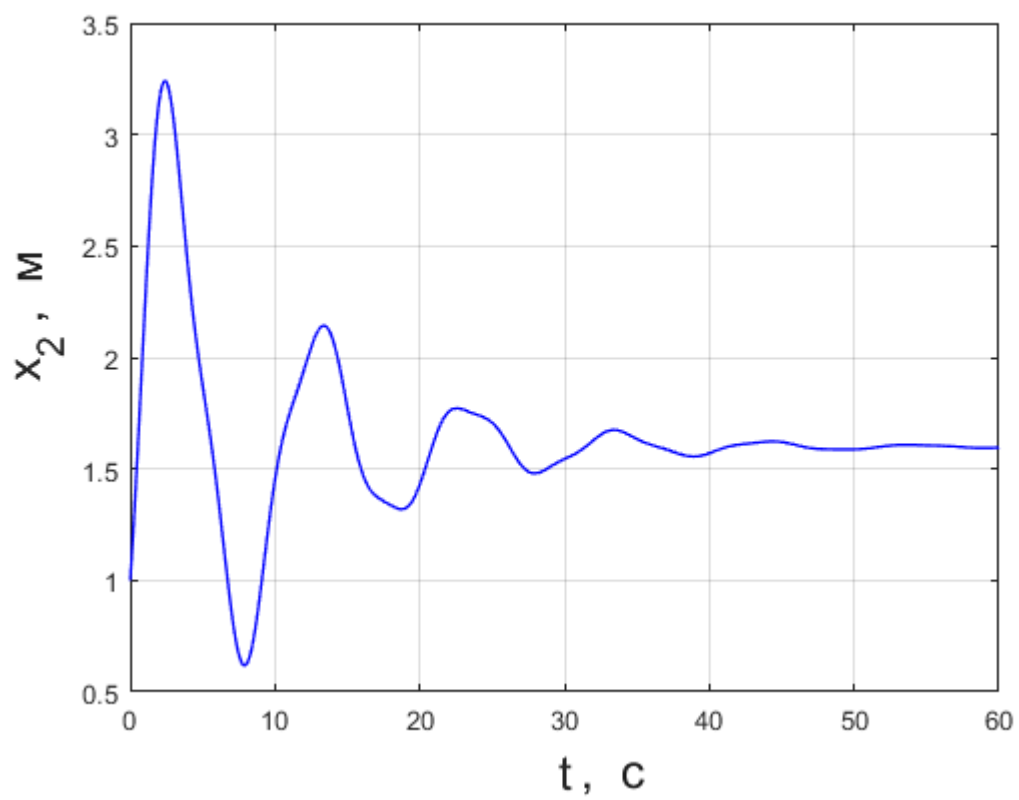


Рис. 5. График функции  $x_2(t)$ .

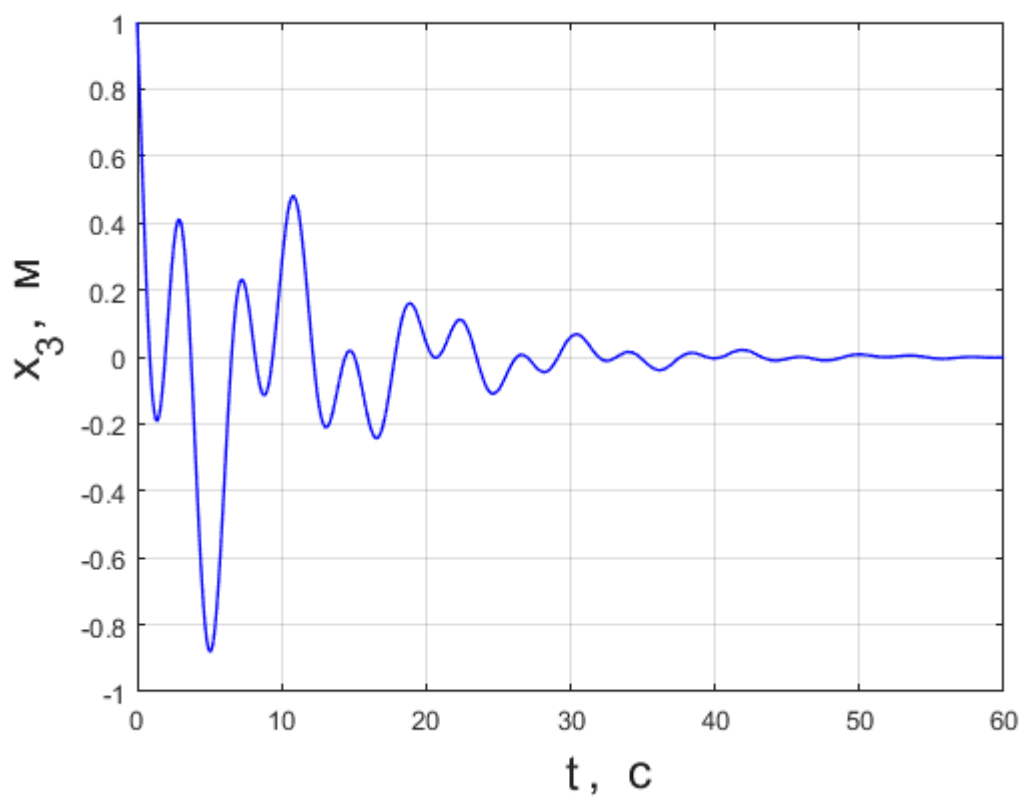


Рис. 6. График функции  $x_3(t)$ .

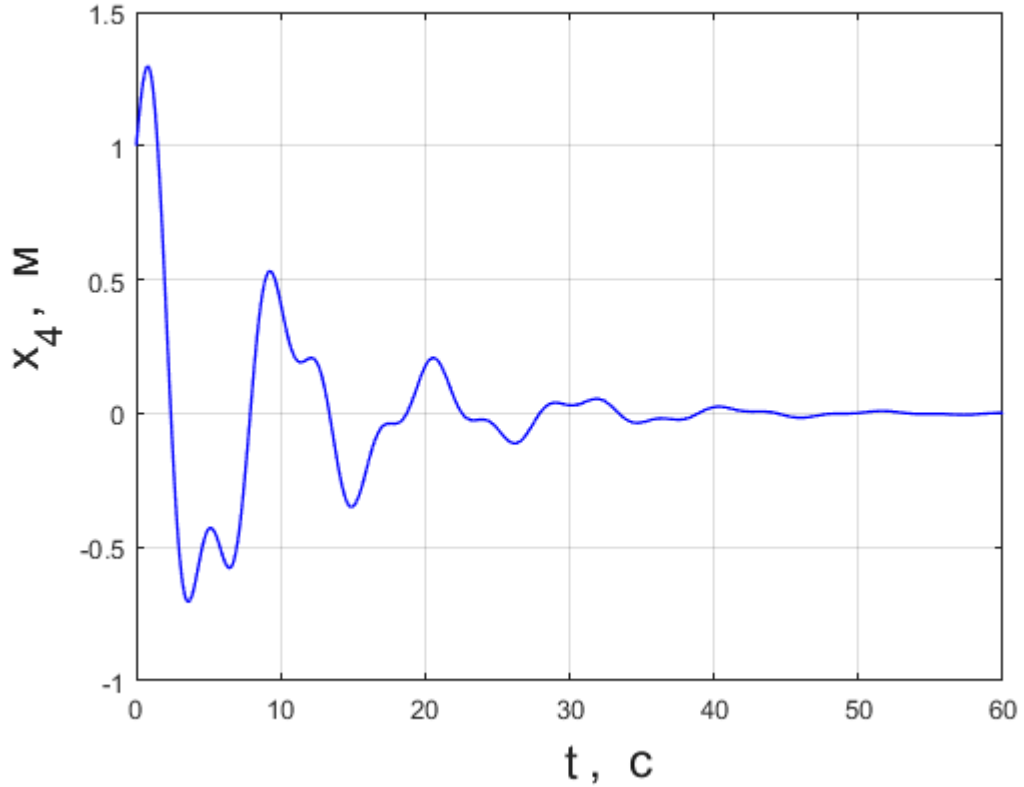


Рис. 7. График функции  $x_4(t)$ .

### 3.1.3 Построение инвариантного эллипсоида

Для нахождения инвариантного эллипсоида системы (39) воспользуемся Теоремой 2.5.1 и описанием (18). Придем к задаче полуопределенного программирования.

$$\begin{cases} PA^T + AP + \alpha P + \frac{1}{\alpha} DD^T \preceq 0, \\ P \succ 0, \end{cases} \quad (40)$$

при некотором  $\alpha > 0$ .

Для решения поставленной задачи был использован прикладной пакет MATLAB YALMIP : A toolbox for modeling and optimization (см. [12]), предназначенный для решения задач полуопределенного программирования, оптимизации и решения систем матричных неравенств.

Разрешив систему неравенств (40) относительно переменной  $P$ , была получена матрица:

$$P = \begin{pmatrix} 185.7382 & 111.5418 & -16.9478 & -10.8307 \\ 111.5418 & 297.8298 & -6.1441 & -25.8689 \\ -16.9478 & -6.1441 & 259.9123 & -75.2773 \\ -10.8307 & -25.8689 & -75.2773 & 185.2729 \end{pmatrix}$$

инвариантного эллипсоида, соответствующего ограничивающему по выходу эллипсу с матрицей

$$CPC^T = \begin{pmatrix} 259.9123 & -75.2773 \\ -75.2773 & 185.2729 \end{pmatrix}.$$

На рис. 8 изображен получившийся эллипс, ограничивающий выход системы (39). Причем, траектория, исходящая из любой точки, принадлежащей  $\epsilon_x$ , системы (39) гарантированно останется внутри  $\epsilon_x$ , для всех допустимых возмущений (рис. 9).

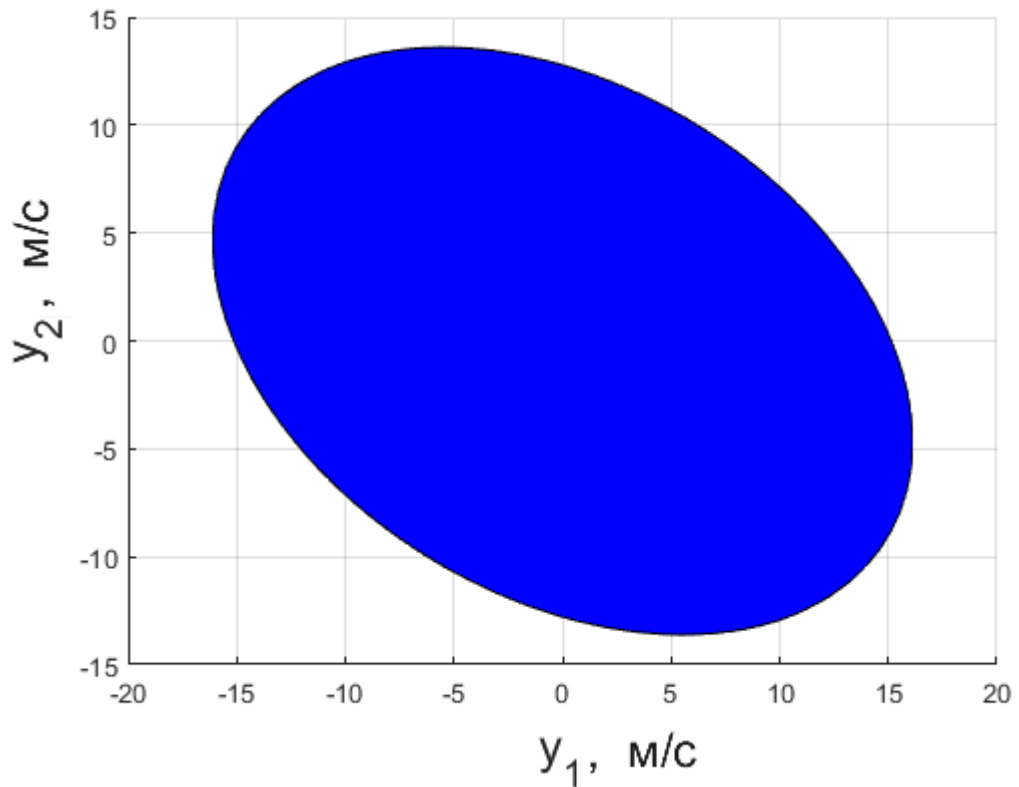


Рис. 8. Ограничивающий эллипс системы (39).

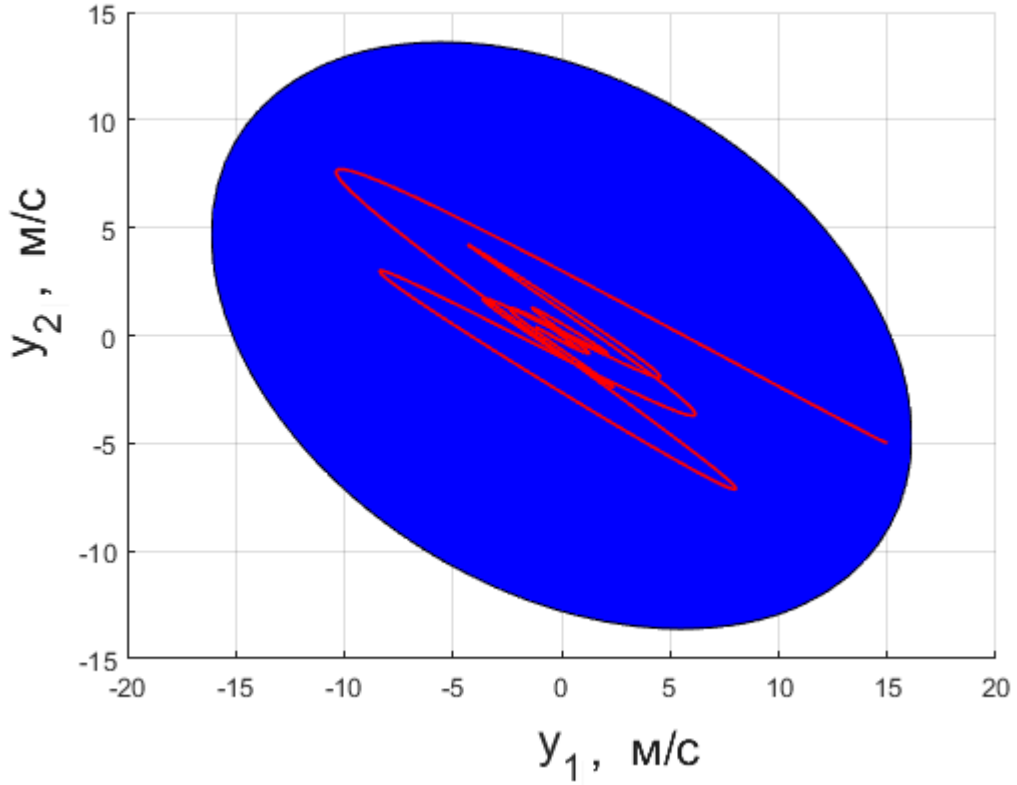


Рис. 9. Ограничивающий эллипс и траектория системы (39).

Как видно, траектория  $x(t)$  системы, исходящая из точки, лежащей в эллипсоиде  $\epsilon_x$ , в любой момент времени принадлежит этому эллипсоиду при любых ограниченных внешних возмущениях.

### 3.1.4 Алгоритм построения ограничивающего эллипса

Основной задачей здесь является нахождение допустимого множества для неравенства вида:

$$x^T P^{-1} x \leq 1,$$

где  $P$  - матрица инвариантного эллипсоида, и построение образа эллипсоида:

$$\epsilon_x = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T P^{-1} x \leq 1\}, \quad P \succ 0,$$

при линейном отображении  $y = Cx$ , где  $C$  - матрица полного строчного ранга. Полученный эллипсоид имеет вид:

$$\epsilon_y = \{y \in \mathbb{R}^l : y^T (CPC^T)^{-1} y \leq 1\}.$$

Это условие по лемме Шура представимо в виде линейного матричного неравенства

$$\begin{pmatrix} 1 & y^T \\ y & CPCT^T \end{pmatrix} \succeq 0,$$

допустимую область которого необходимо построить. Для этого использовался некоторый аналог метода Монте-Карло из теории случайных процессов (см [5]). Экспериментально были выбраны сетки для выходов системы  $y_1$  и  $y_2$ , составляющие соответствующие двумерные массивы. Поскольку для положительной определенности матрицы достаточно, чтобы все ее угловые миноры были положительны, то данные массивы подставлялись в функцию Subs\_1 (аналог функции subs Matlab, которая в данном случае работает медленно из-за символьных вычислений) и Subs\_2. В которых учитывались условия положительности миноров. Возвращаемые значения составляли логические массивы со значениями 1 — если условие выполнилось и 0 — в противном случае. Пересечением множеств этих значений будет выполнение сразу обоих условий из функций Subs\_1 и Subs\_2, то есть — скалярное произведение двух булевских массивов. Полученный набор данных позволяет построить допустимую область матричного неравенства с помощью функции mesh MATLAB, рис. 8.

*Примечание:* функция Subs\_1 является абстрактной и всегда возвращает единицу, т.к. первый угловой минор всегда больше нуля.

### 3.1.5 Построение минимального инвариантного эллипсоида

Инвариантные эллипсоиды можно рассматривать как характеристику влияния внешних возмущений на траектории динамической системы. В настоящей работе задача заключается в оценке степени влияния внешних возмущений  $w(t)$  на вектор выхода системы  $y(t)$ . В этой связи необходимо найти минимальный ограничивающий эллипсоид (20), матрица которого удовлетворяет неравенству из Следствия 2.6.1.

Существуют различные критерии минимальности; в качестве целевой функции в данной работе рассматривается критерий следа

$$\text{tr}[CPC^T] \longrightarrow \min.$$

Для нахождения минимального инвариантного эллипсоида системы (39) воспользуемся Следствием 2.6.1 и описанием (18). Придем к задаче выпуклой оптимизации вида:

$$\begin{cases} \text{tr}[CPC^T] \longrightarrow \min, \\ AP + PA^T + \alpha P + \frac{1}{\alpha} DD^T = 0, \\ P \succ 0. \end{cases} \quad (41)$$

Разрешив систему неравенств (41) относительно переменной  $P$ , была получена матрица:

$$P = \begin{pmatrix} 30.3772 & 40.7626 & -1.5189 & -4.0145 \\ 40.7626 & 71.5351 & -0.0617 & -3.5768 \\ -1.5189 & -0.0617 & 19.8400 & 9.9839 \\ -4.0145 & -3.5768 & 9.9839 & 30.4148 \end{pmatrix}$$

инвариантного эллипсоида, соответствующего минимальному (по критерию следа) ограничивающему эллипсу с матрицей

$$CPC^T = \begin{pmatrix} 19.8400 & 9.9839 \\ 9.9839 & 30.4148 \end{pmatrix}.$$

На рис. 10 представлена допустимая область минимального ограничивающего эллипса для системы (39).

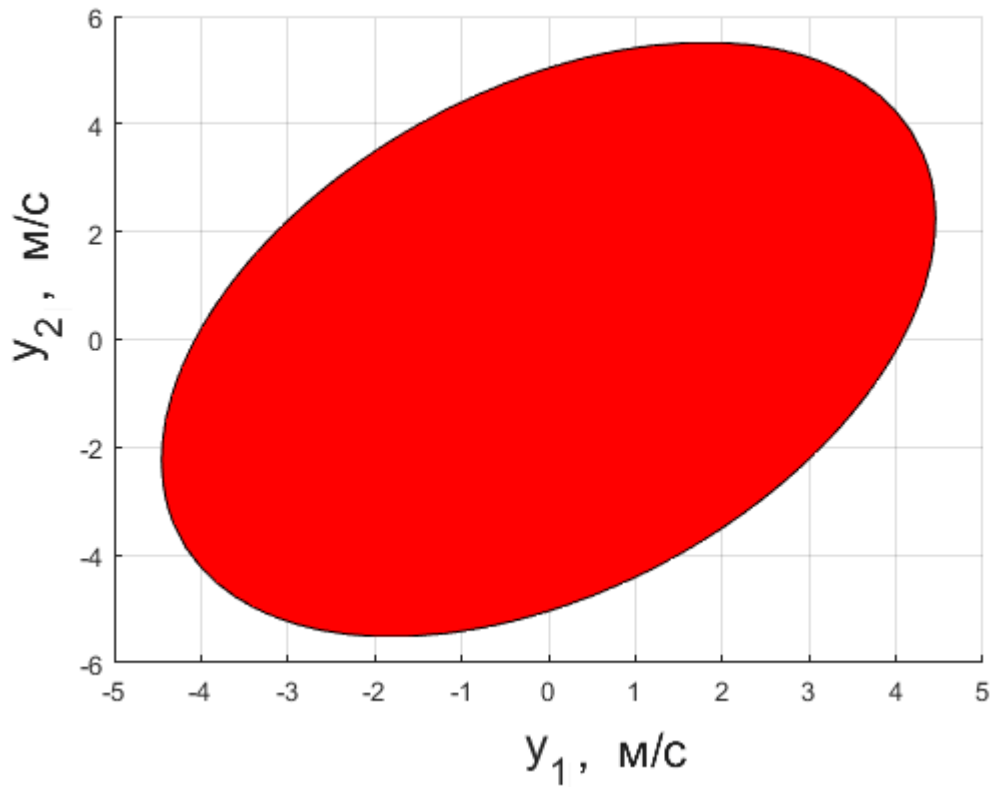


Рис. 10. Минимальный ограничивающий эллипс системы (39).

Убедимся в том, что никакая траектория, начинающаяся из любой точки, принадлежащей эллипсу, не выходит за его границы. Для этого необходимо проинтегрировать исходную систему с начальными условиями  $x_0 = (1, 1, 4, 4)$ ,  $w_0 = 0.8 < 1$ . По выходу системы можно заключить, что начальная точка принадлежит множеству эллипса и, приблизительно, лежит у его границы. Соответственно, решив задачу Коши для системы (39), можно построить полученную траекторию и эллипс в одних осях (рис. 11).

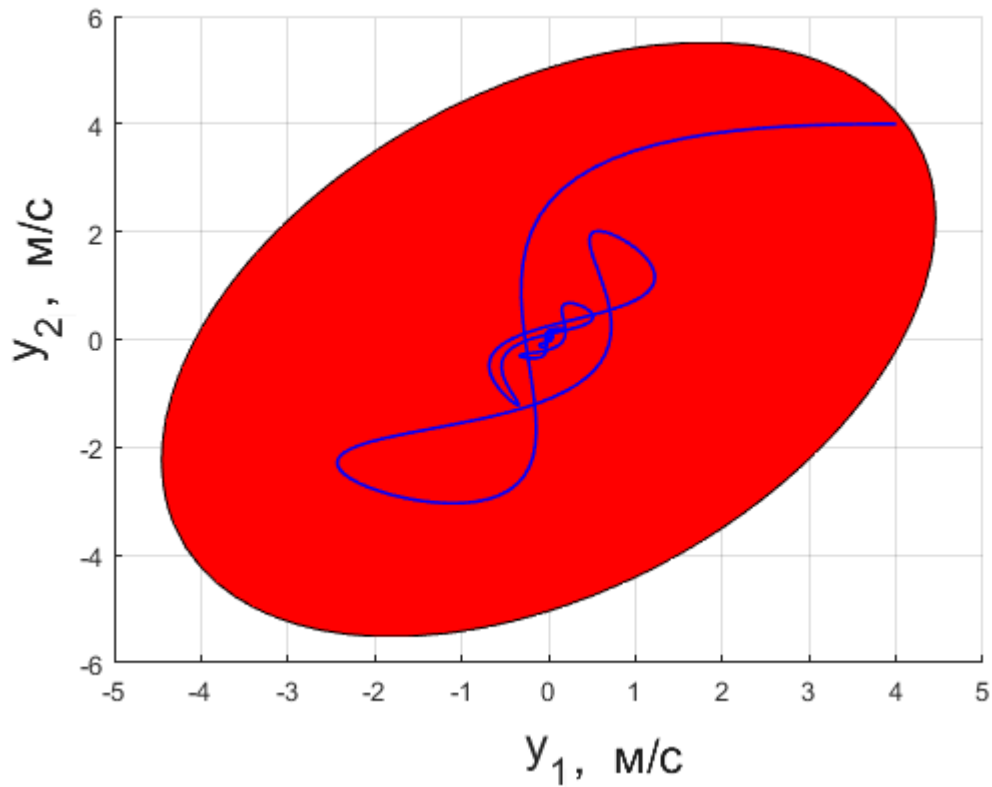


Рис. 11. Минимальный ограничивающий эллипс и траектория системы (39).

### 3.1.6 Графическая оценка минимальности эллипсоида

Важно понимать, что под минимальностью эллипсоида понимается его минимальность в силу некоторого критерия (в данной работе — критерия следа).

Для наглядности и оценки полученных результатов в главах 3.1.3 - 3.1.5, была построена комбинированная геометрическая интерпретация эллипсоидов. На одном графике (рис. 12) в одинаковых осях были построены: инвариантный ограничивающий эллипс, минимальный ограничивающий эллипс, траектория системы (39), принадлежащая минимальному ограничивающему эллипсу.



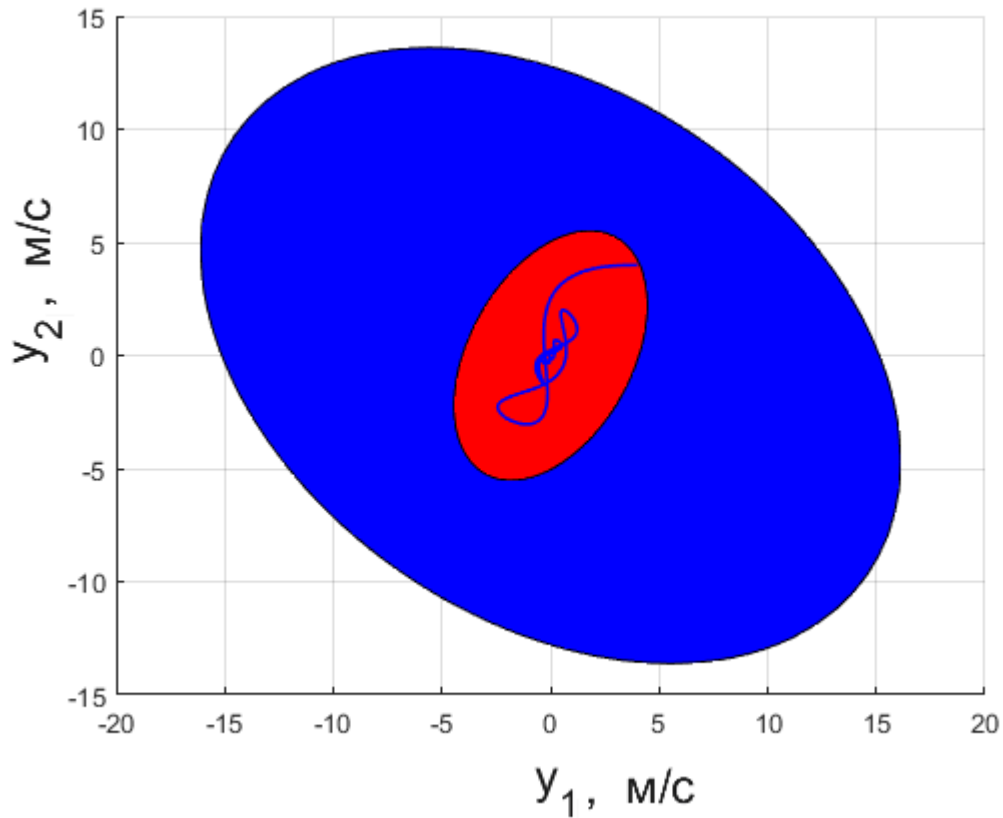


Рис. 12. Инвариантный ограничивающий эллипс, минимальный ограничивающий эллипс по критерию следа и траектория системы (39).

Видно, что использование критерия следа в качестве целевой функции минимизации системы (40) является обоснованным. Поскольку инвариантность эллипсоида не дает оптимального результата в аппроксимации множества достижимости системы. В свою очередь, минимальный ограничивающий эллипсоид позволяет аппроксимировать допустимую область достаточно успешно. Построение же самой области достижимости и ее аппроксимации для исходной системы в настоящей работе не рассматривается. Задачи такого рода решаются в статье Финкельштейн Е.А. [14] об аппроксимации множества достижимости эллипсоидами оптимального объема. По рис. 12 можно сделать вывод, что относительная минимальность эллипсоида, при использовании критерия следа, достигнута.

### 3.1.7 Наихудшее возмущение для системы

По Лемме 2.5.2 наилучшее возмущение задается формулой:

$$\tilde{w}(t) = \frac{D^T \hat{P}^{-1} x(t)}{\|D^T \hat{P}^{-1} x(t)\|}.$$

Очевидно, что для вычисления наилучшего возмущения для системы, необходимо обладать информацией о переменных состояния в каждый момент времени. В пункте 3.1.2 система (39) была проинтегрирована при начальных данных  $w_0 = 0.8 < 1$ ,  $x_0 = (1, 1, 1, 1)$ , следовательно, используя информацию о состоянии системы, был построен график  $\tilde{w}(t)$  наилучшего возмущения для системы (39) (рис. 13).

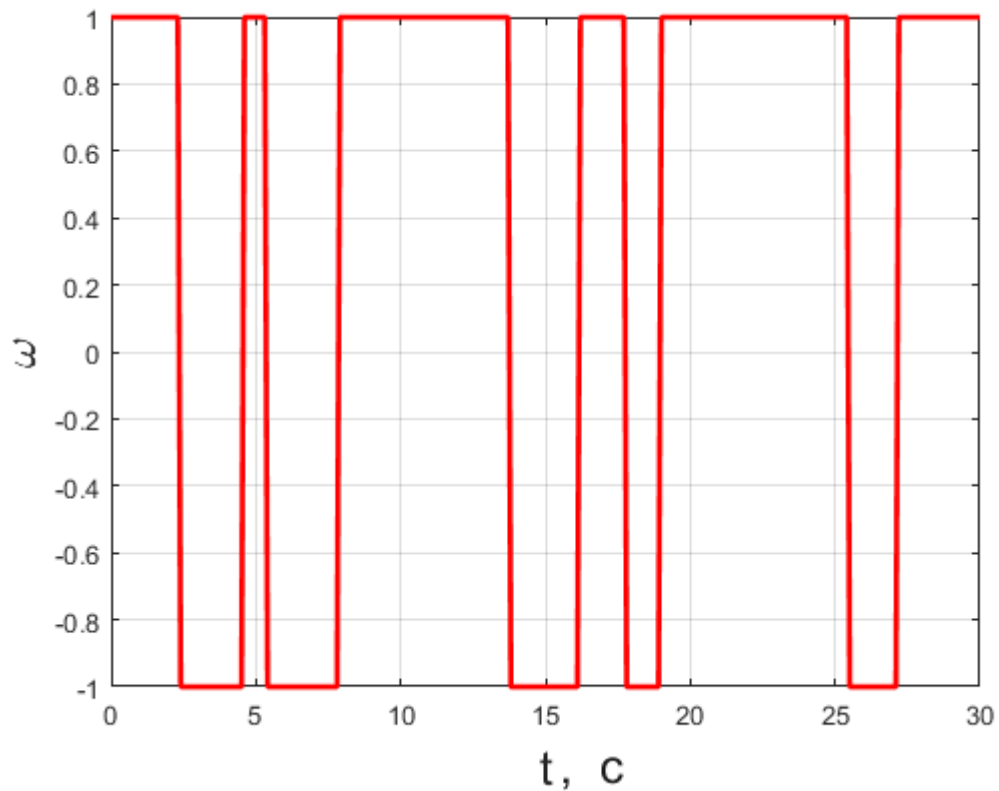


Рис. 13. Наихудшее возмущение для системы (39).

### 3.2 Двухмассовая система

Используя результаты решенной задачи анализа (п. 3.1), решить задачу подавления ограниченных возмущений для системы, представленной на рисунке 14.

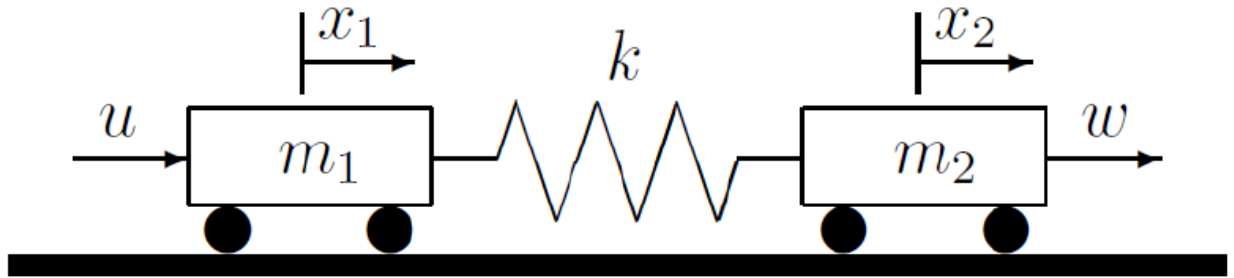


Рис. 14. Двухмассовая система.

Для данной системы:

1. составить модель движения системы;
2. найти статическую обратную связь по состоянию вида  $u = Kx$ , обеспечивающую выполнение критерия минимальности следа инвариантного эллипсоида;
3. решить задачу из предыдущего пункта при дополнительном возмущении, приложенному к левой тележке;
4. сравнить результаты при построении закона управления на основе минимизации квадратичного критерия (LQR);
5. построить траекторию системы в обоих случаях, изобразить инвариантный эллипсоид.

### 3.2.1 Построение модели движения системы

Для подавления внешнего возмущения, приложенного к правому телу, необходимо найти управление, воздействующее на левое тело. Предполагается, что возмущение (как в п. 3.1) ограничено в каждый момент времени:

$$|w(t)| \leq 1 \quad \forall t \geq 0.$$

Пусть  $x_1, v_1$  - координата и скорость левого тела, а  $x_2, v_2$  - правого. Тогда вектор

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

является вектором фазового состояния исходной динамической системы, описывающий ее поведение.

Непрерывная модель колебаний системы будет описываться уравнениями

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = v_1, \\ \dot{x}_2 = v_2, \\ \dot{v}_1 = -\frac{k}{m_1}x_1 + \frac{k}{m_1}x_2 + \frac{1}{m_1}u, \\ \dot{v}_2 = \frac{k}{m_2}x_1 - \frac{k}{m_2}x_2 + \frac{1}{m_2}w \end{cases}$$

В качестве управляемого выхода системы был взят вектор

$$y = \begin{pmatrix} x_2 \\ u \end{pmatrix},$$

Получим систему вида (1) с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{m_1} & \frac{k}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{k}{m_2} & -\frac{k}{m_2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_2} \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

При единичных параметрах системы

$$k_1 = m_1 = m_2 = 1.$$

### 3.2.2 Нахождение инвариантного эллипсоида и синтез регулятора состояния

Уравнение динамики в пространстве состояний имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1u + Dw, & x(0) = 0, \\ y = Cx + B_2u, \end{cases} \quad (42)$$

где матрицы  $A, B_1, B_2, D, C$  найдены ранее. Воспользовавшись Теоремой 2.8.1 была сформулирована задача по нахождению матрицы инвариантного эллипсоида системы (42) и матричного коэффициента  $K$ , обеспечивающего подавление возмущений.

$$\begin{cases} AP + PA^T + B_1Y + Y^TB_1 + \alpha P + \frac{1}{\alpha}DD^T \preceq 0, \\ P \succ 0, \end{cases} \quad (43)$$

где  $Y = KP$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{p \times n}$ . Разрешив систему (43) относительно неизвестных была получена матрица коэффициентов регулятора состояния:

$$\hat{K} = \hat{Y}\hat{P}^{-1},$$

подавляющего внешние возмущения системы (42). Численное решение задачи (43) обеспечивает прикладной пакет MATLAB для моделирования и оптимизация: Yalmip, SeDumi toolbox [12]. Соответственно, положив  $\alpha = 0.1$ , было получено следующее решение системы матричных неравенств (43):

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} 31.3741 & 10.2749 & -10.2483 & -22.7207 \\ 10.2749 & 53.0543 & 19.0349 & -9.5441 \\ -10.2483 & 19.0349 & 58.8399 & -14.1494 \\ -22.7207 & -9.5441 & -14.1494 & 45.6170 \end{pmatrix},$$

$$\hat{K} = \begin{pmatrix} -3.1337 & 0.4065 & -1.8861 & -1.6767 \end{pmatrix},$$

где  $\hat{P}$  – матрица инвариантного эллипсоида, соответствующего ограничивающему эллипсу (рис. 15) для выхода  $y$  замкнутой системы с матрицей

$$(C + B_2\hat{K})\hat{P}(C + B_2\hat{K})^T = \begin{pmatrix} 53.0543 & -30.5335 \\ -30.5335 & 162.6724 \end{pmatrix}.$$

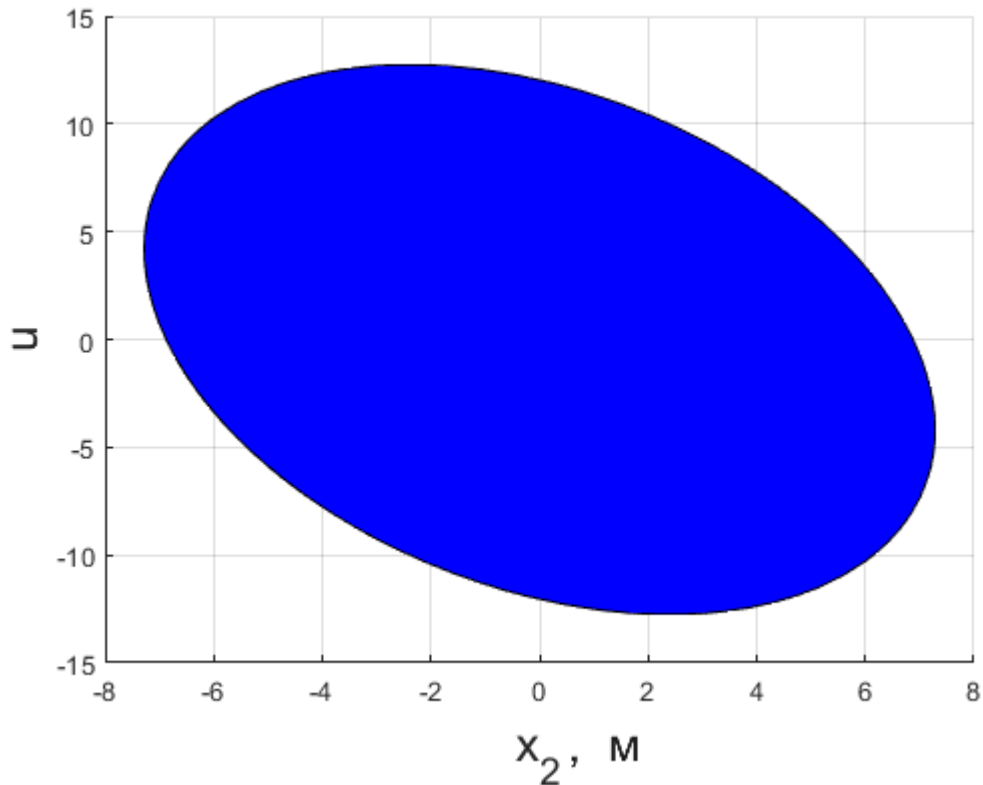


Рис. 15. Ограничивающий эллипс системы (42).

### 3.2.3 Численное интегрирование системы с неоптимальным регулятором состояния

Аналогично пункту 3.1.2, зададим начальные условия задачи Коши на фазовые переменные и возмущение, прикладываемое к системе (42). Пусть стартовая точка приблизительно лежит на границе эллипсоида (рис. 16).

Экспериментально были подобраны такие начальные данные, что траектория функции  $u(x_2)$  начинается вблизи границы эллипсоида:

$$x_0 = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad w_0 = 0.8.$$

После интегрирования исходной системы с помощью функции `ode_45` (метод Рунге-Кутты 4-го порядка) из MATLAB toolbox по времени  $t \in [0, 30]$  было получено следующее решение, описывающее поведение системы (42):

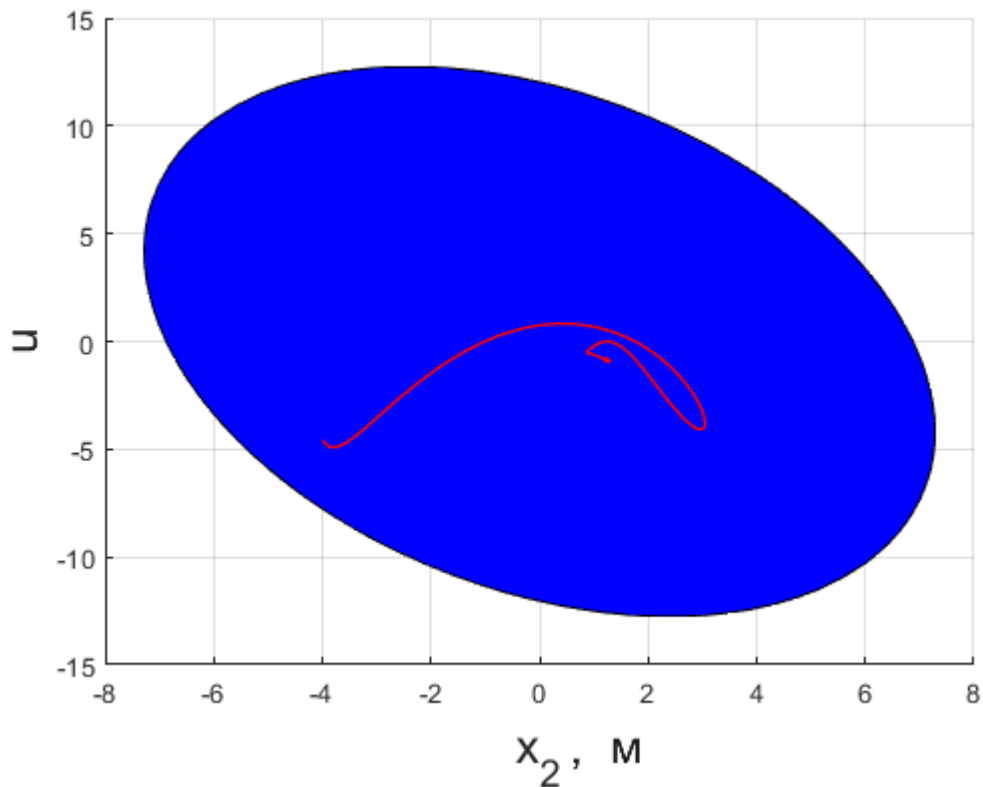


Рис. 16. Ограничивающий эллипс и траектория функции  $u(x_2)$  системы (42).

Согласно рис. 16 можно заключить, что траектории выхода системы, начинающиеся в области эллипсоида, при любом допустимом начальном возмущении, не выходят за его границы. Также, ниже приведены соответствующие переходные процессы для фазовых переменных  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  и управления  $u$  (рис. 20–21).

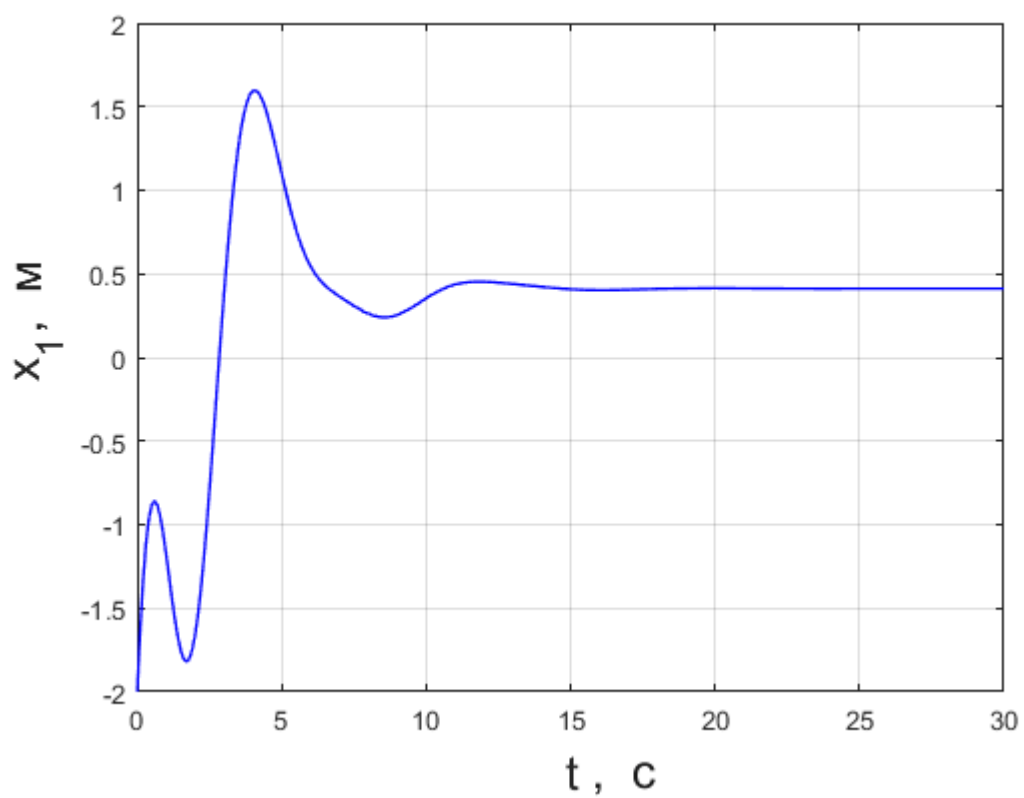


Рис. 17. График функции  $x_1(t)$ .

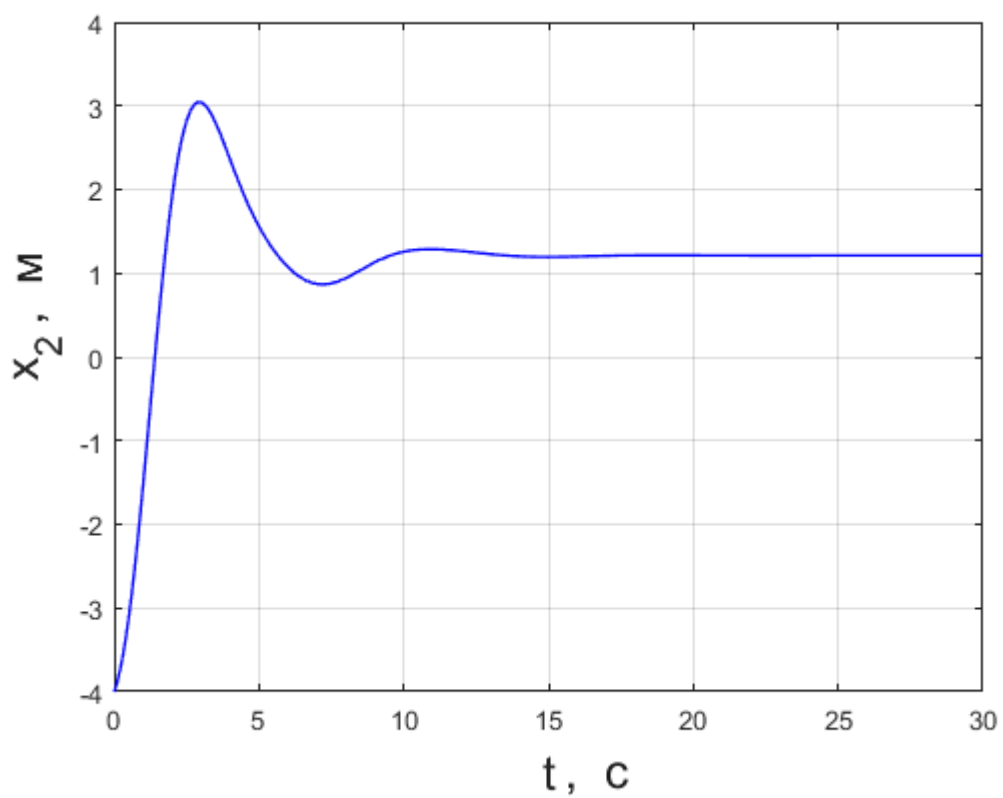


Рис. 18. График функции  $x_2(t)$ .



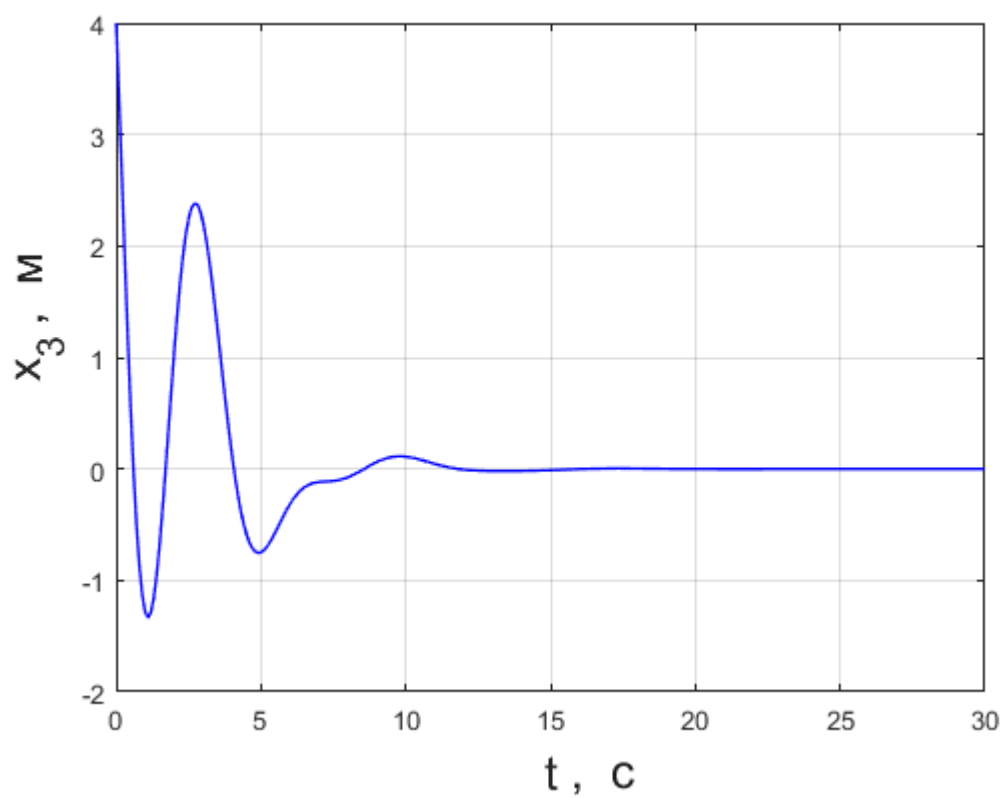


Рис. 19. График функции  $x_3(t)$ .

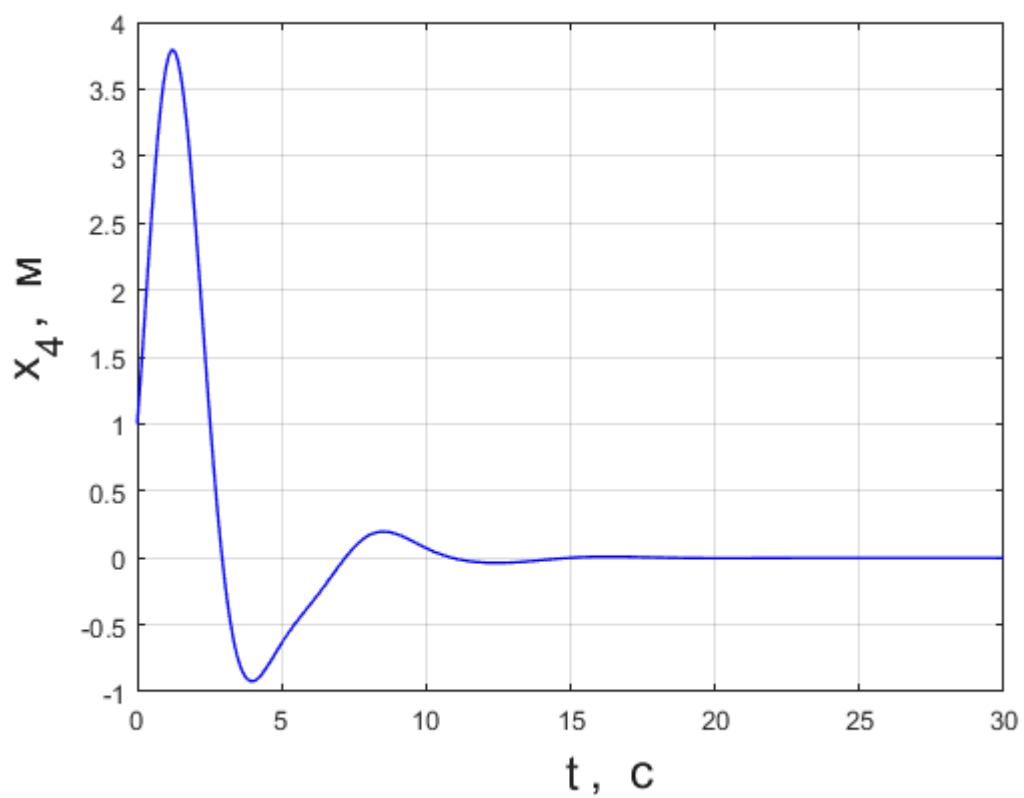


Рис. 20. График функции  $x_4(t)$ .

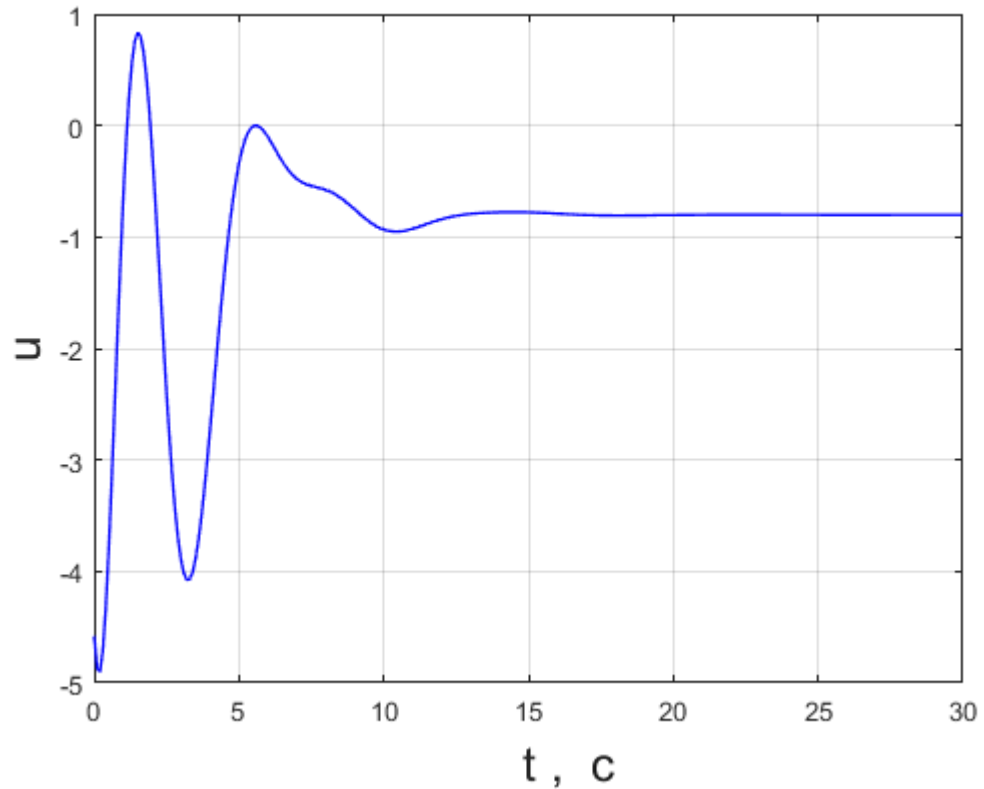


Рис. 21. График функции  $u(t)$ .

Необходимо отметить, что описание переходных характеристик и их сравнительный анализ будет произведен в следующих главах, поскольку сравнение предполагает под собой наличие двух объектов. Также, в настоящей работе, важно показать, что применение идеологии инвариантных эллипсоидов способно конкурировать с такими методами, как, например, оптимизация на основе квадратичного критерия.

### 3.2.4 Переходные характеристики полученного решения

Для выхода  $x_2(t)$  системы (42), при начальных условиях задачи Коши следующего вида:

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}, \quad w_0 = 0.9,$$

были получены соответствующие переходные характеристики решения поставленной ранее задачи:

$$T_{overshoot} = 17.2 \text{ сек.} - \text{ время регулирования,}$$

$\sigma = 23.3211\%$  — перерегулирование.

Для выхода  $u(t)$  системы (42), при аналогичных исходных параметрах, получены следующие характеристики:

$T_{overshoot} = 16.8$  сек. — время регулирования,

$\sigma = 72.2279\%$  — перерегулирование,

$E = 1.0622\text{e-}05$  — установившаяся ошибка.

### 3.2.5 Синтез регулятора состояния, обеспечивающего выполнение критерия минимальности следа эллипсоида

С помощью Теоремы 2.8.1 поставим SDP задачу минимизации. В данном случае, оптимальный регулятор может быть найден исходя из решения  $\hat{P}, \hat{Y}, \hat{Z}$  задачи минимизации с выпуклыми ограничениями вида:

$$\begin{cases} \text{tr}[CPC^T + CY^TB_2^T + B_2YC^T + B_2ZB_2^T] \rightarrow \min, \\ AP + PA^T + B_1Y + Y^TB_1^T + \alpha P + \frac{1}{\alpha}DD^T \preceq 0, \\ \begin{pmatrix} Z & Y \\ Y^T & P \end{pmatrix} \succeq 0, \end{cases} \quad (44)$$

где минимизация происходит по матричным переменным  $P = P^T \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{1 \times 4}$ ,  $Z = Z^T \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$  и произвольному параметру  $\alpha > 0$ .

Разрешив систему 44 относительно неизвестных, была получена матрица коэффициентов оптимального регулятора состояния:

$$\hat{K} = \hat{Y}\hat{P}^{-1},$$

подавляющий внешние возмущения системы (42). Численное решение задачи (44) также было получено с помощью Yalmip toolbox.

Соответственно, положив  $\alpha = 0.4 > 0$ , имеем следующее решение системы матричных неравенств (44):

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} 4.8292 & 1.8667 & -0.9658 & -3.6550 \\ 1.8667 & 6.6787 & 2.9083 & -1.3357 \\ -0.9658 & 2.9083 & 4.9003 & -1.5006 \\ -3.6550 & -1.3357 & -1.5006 & 5.3463 \end{pmatrix},$$

$$\hat{K} = \begin{pmatrix} -2.3374 & 0.6777 & -2.3714 & -1.6911 \end{pmatrix},$$

где  $\hat{P}$  — матрица инвариантного эллипсоида, соответствующего минимальному (по критерию следа) ограничивающему эллипсу для выхода  $y$  замкнутой системы с матрицей

$$(C + B_2 \hat{K}) \hat{P} (C + B_2 \hat{K})^T = \begin{pmatrix} 6.6787 & -4.4748 \\ -4.4748 & 8.4603 \end{pmatrix}.$$

На рис. 22 изображен полученный минимальный ограничивающий эллипсоид по выходу  $y$  системы (42) с оптимальным регулятором  $\hat{K}$ .

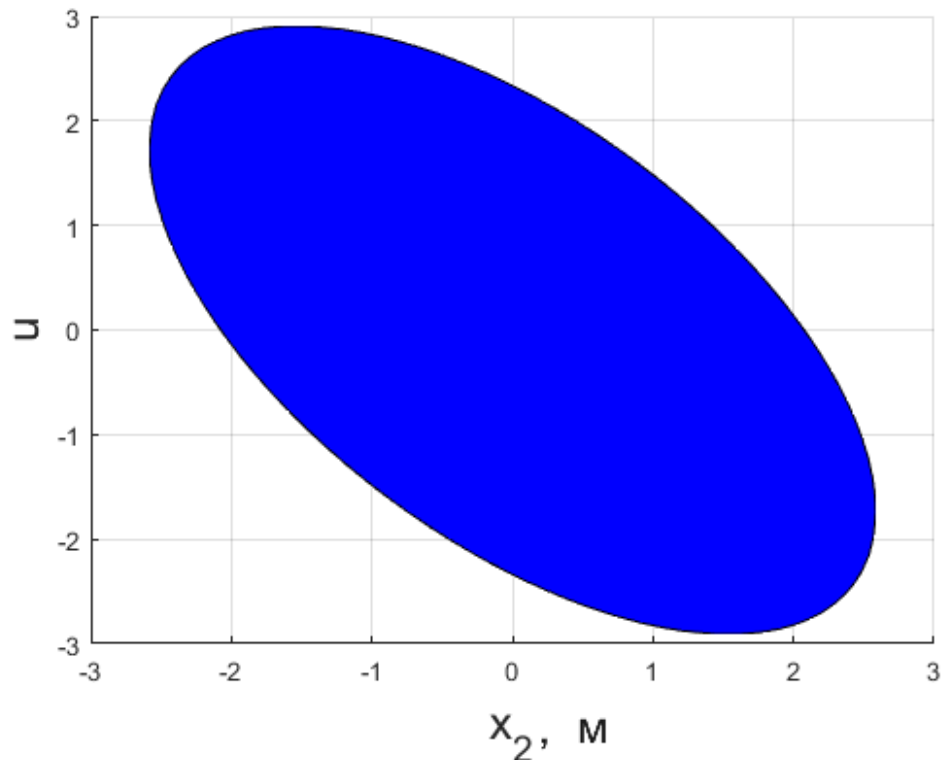


Рис. 22. Минимальный ограничивающий эллипс системы (42).

Далее, необходимо убедиться в том, что никакие траектории системы, принадлежащие эллипсоиду на рис. 22 не выходят за его границы. Чтобы это сделать, нужно проинтегрировать систему из начальной точки, принадлежащей множеству эллипсоида.

### 3.2.6 Численное интегрирование системы с оптимальным регулятором состояния

Задав начальные условия задачи Коши на фазовые переменные и возмущение, прикладываемое к системе (42), убедимся в том, что траектория функции  $u(x_2)$ , приблизительно начинающаяся на границе эллипса, (рис. 42) не выходит за множество его точек. Экспериментально были подобраны такие начальные данные, что траектория начинается у границы эллипсоида:

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 & 1.5 \end{pmatrix}, \quad w_0 = 0.8.$$

После интегрирования исходной системы с помощью функции `ode_45` (метод Рунге-Кутты 4-го порядка) из MATLAB toolbox по времени  $t \in [0, 30]$  было получено следующее решение, описывающее поведение системы (42):

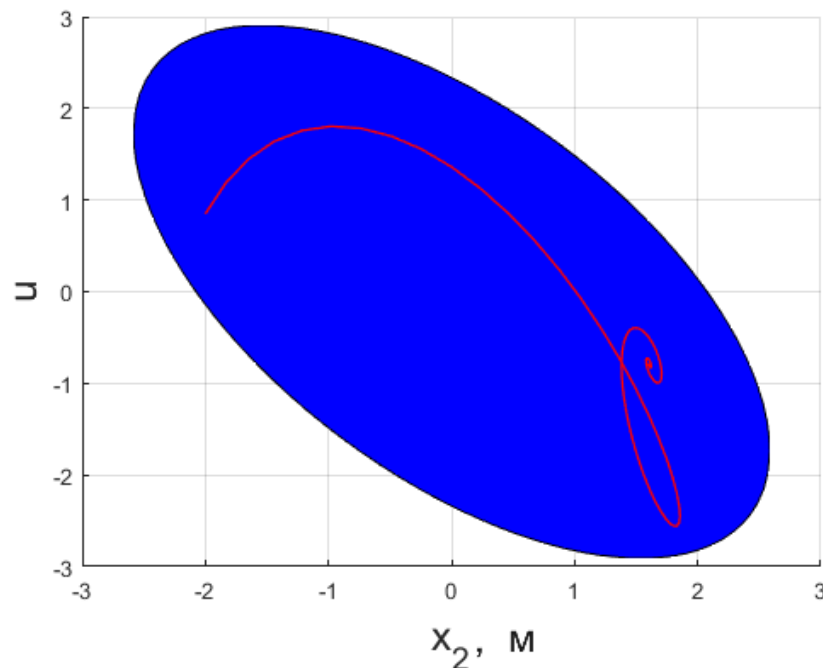


Рис. 23. Минимальный эллипсоид и траектория системы (42).

Согласно рис. 23 можно сделать вывод, что траектории выхода системы, начинающиеся в области минимального эллипсоида, при любом допустимом начальном возмущении, не выходят за его границы. Ниже приведены соответствующие переходные процессы для фазовых переменных  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  и управления  $u$  (рис. 24–28).

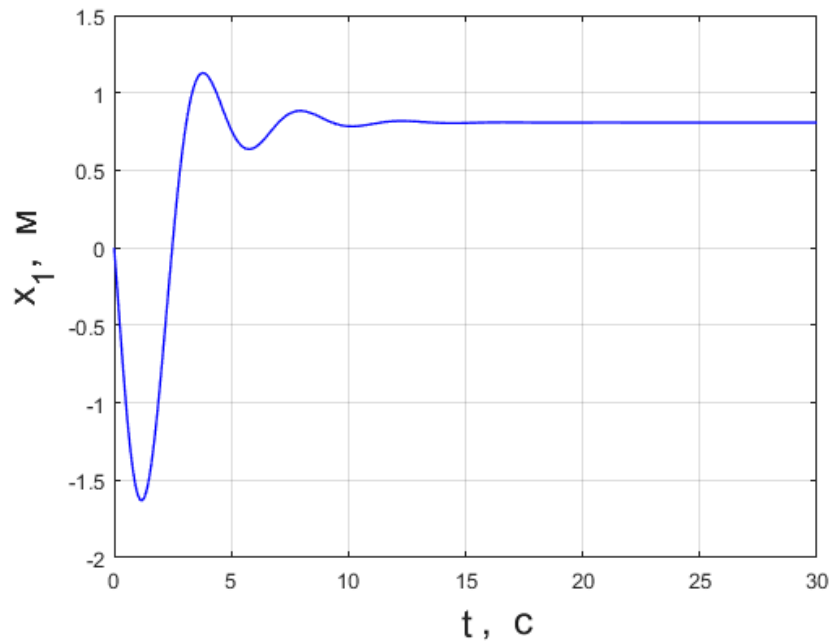


Рис. 24. График функции  $x_1(t)$ .

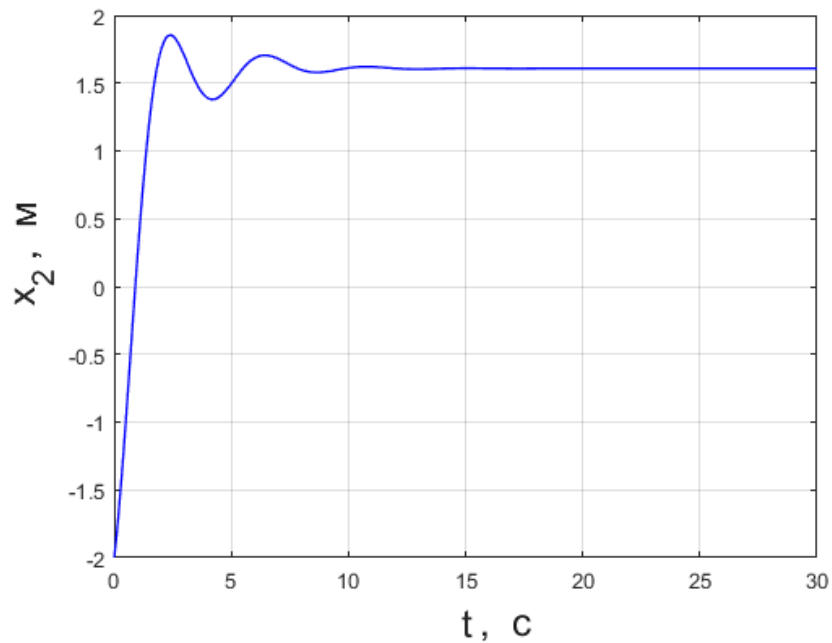


Рис. 25. График функции  $x_2(t)$ .

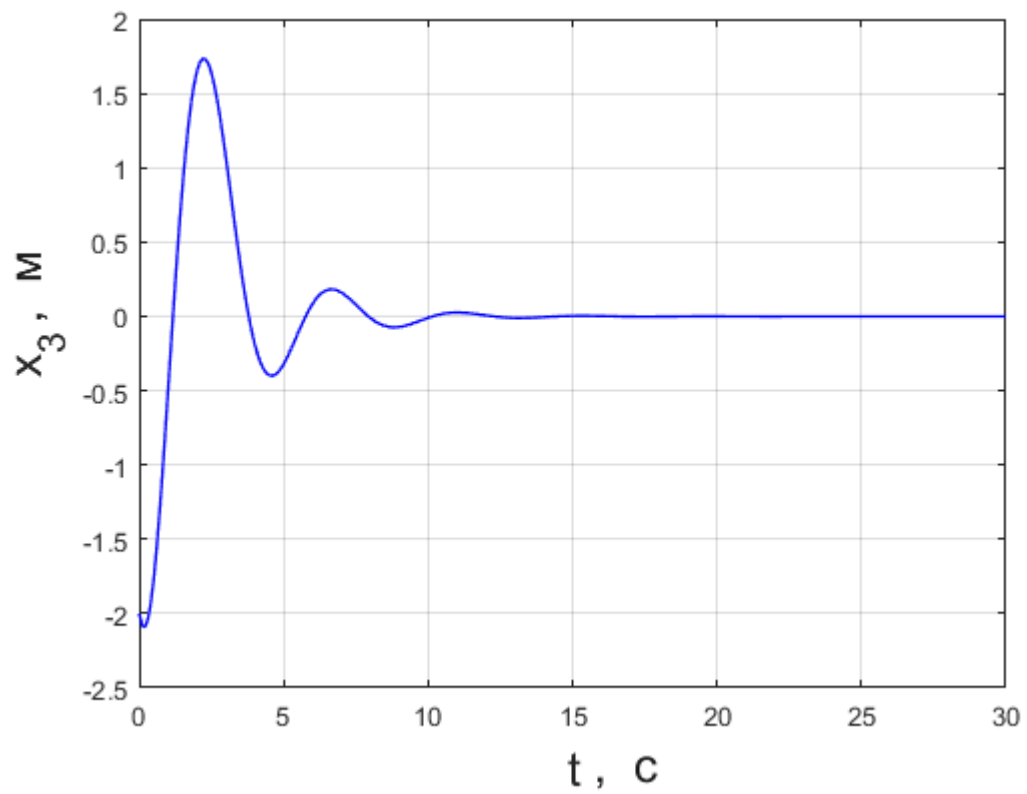


Рис. 26. График функции  $x_3(t)$ .

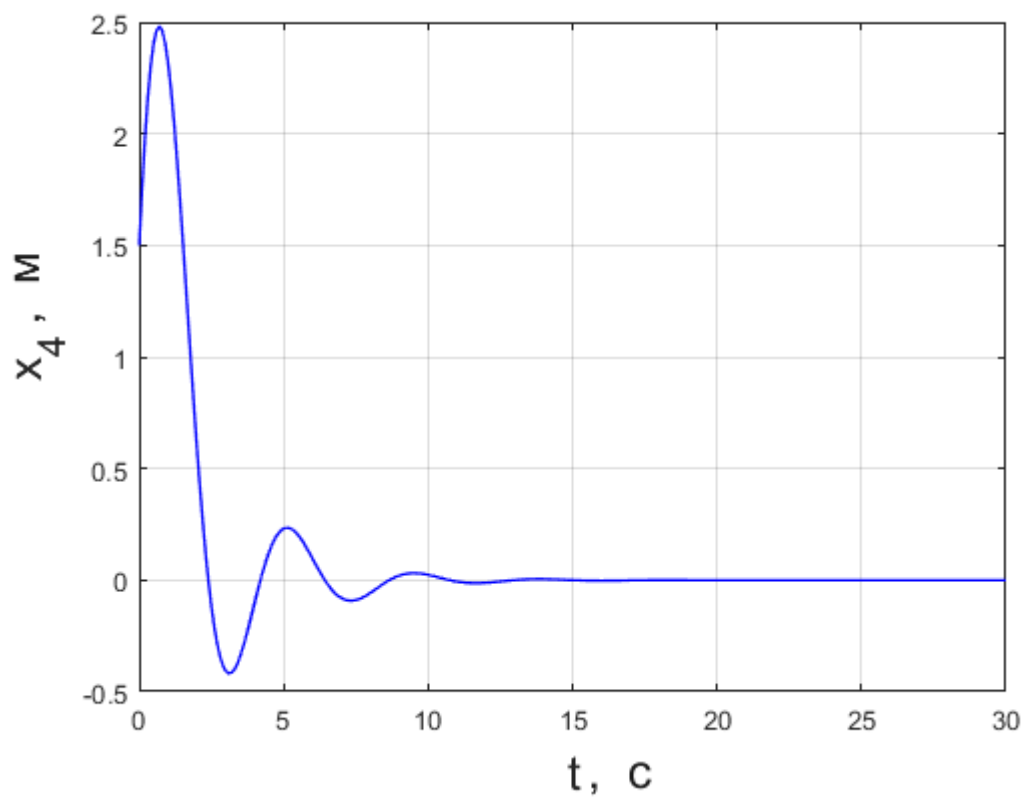


Рис. 27. График функции  $x_4(t)$ .

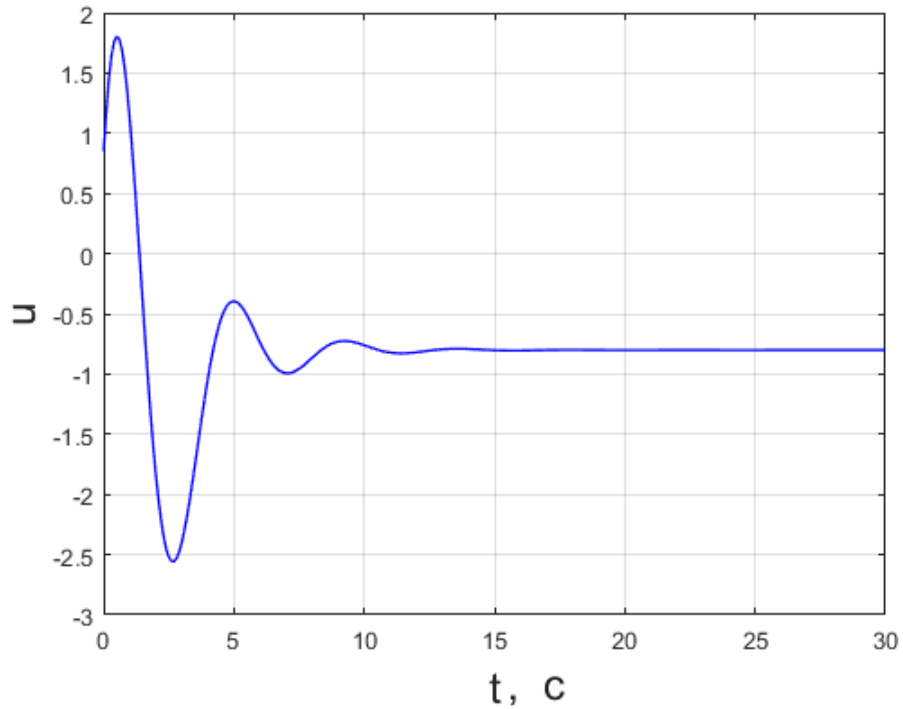


Рис. 28. График функции  $u(t)$ .

### 3.2.7 Сравнение переходных характеристик

Для выхода  $x_2(t)$  системы (42), с оптимальным регулятором по состоянию, при начальных условиях задачи Коши следующего вида:

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}, \quad w_0 = 0.9,$$

были получены соответствующие переходные характеристики решения поставленной ранее задачи:

$$T_{overshoot} = 12.5 \text{ сек.} - \text{ время регулирования,}$$

$$\sigma = 1.3503 \% - \text{ перерегулирование.}$$

Для выхода  $u(t)$  системы (42), при аналогичных исходных параметрах, получены следующие характеристики:

$$T_{overshoot} = 15.2 \text{ сек.} - \text{ время регулирования,}$$

$$\sigma = 57.9745 \% - \text{ перерегулирование,}$$

$$E = 2.1234\text{e-}06 - \text{ установившаяся ошибка.}$$



Ранее, в главе 3.2.4, были найдены переходные характеристики для системы (42) с неоптимальным регулятором состояния. Можно сделать вывод, что основные характеристики переходных процессов: время регулирования; перерегулирование; установившаяся ошибка, для соответствующих выходов, в случае системы с оптимальным регулятором, не превышает (в частности - меньше) значений, полученных в пункте 3.2.4. Откуда заключаем, что использование техники *минимальных* инвариантных эллипсоидов для синтеза оптимального регулятора состояния обосновано.

### 3.2.8 Дополнительное возмущение, приложенное к системе

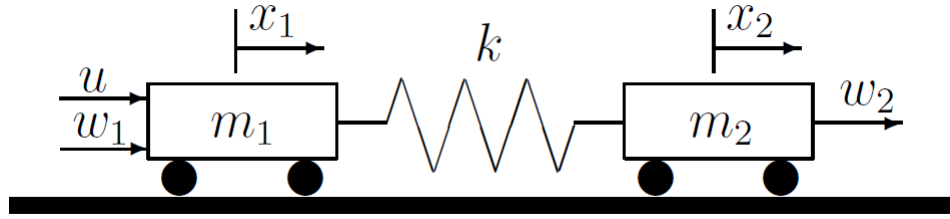


Рис. 29. Двухмассовая система с дополнительным возмущением.

Снова рассматривается двухмассовая система, но ограничивающее внешнее возмущение теперь имеет вид:

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, \quad |w(t)| \leq 1, \quad (45)$$

где каждая компонента вектора воздействует на тела  $m_1$  и  $m_2$  соответственно.

Регулируемым выходом будет выступать вектор

$$y = \begin{pmatrix} x_2 \\ u \end{pmatrix}.$$

Получим систему вида (42) с матрицами:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{m_1} & \frac{k}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{k}{m_2} & -\frac{k}{m_2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Воспользовавшись Теоремой 31 был найден оптимальный регулятор

$$\hat{K} = \begin{pmatrix} -2.5976 & 0.8199 & -2.5154 & -1.8357 \end{pmatrix},$$

а также матрица

$$(C + B_2 \hat{K}) \hat{P} (C + B_2 \hat{K})^T = \begin{pmatrix} 7.1656 & -4.6488 \\ -4.6488 & 13.7622 \end{pmatrix}$$

минимального (по критерию следа) ограничивающего эллипса для выхода  $y$  (рис. 30).

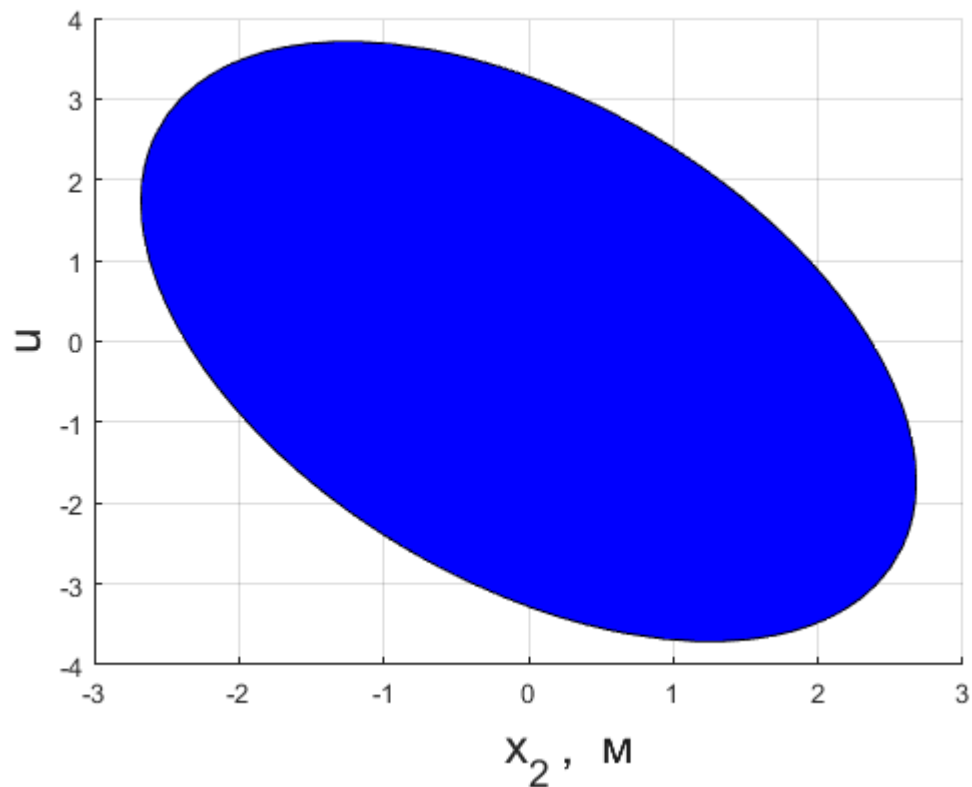


Рис. 30. Ограничивающий эллипс системы (42) с дополнительным возмущением.

### 3.2.9 Численное интегрирование системы с дополнительным возмущением и оптимальным регулятором состояния

Система с дополнительным возмущением вида (42), аналогично пункту 3.2.6, была проинтегрирована при начальных данных:

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 & 1.5 \end{pmatrix}, \quad w_0 = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.8 \end{pmatrix},$$

по времени  $t \in [0, 30]$ . Следующие графики (рис. 31-35) представляют из себя решение поставленной задачи Коши:

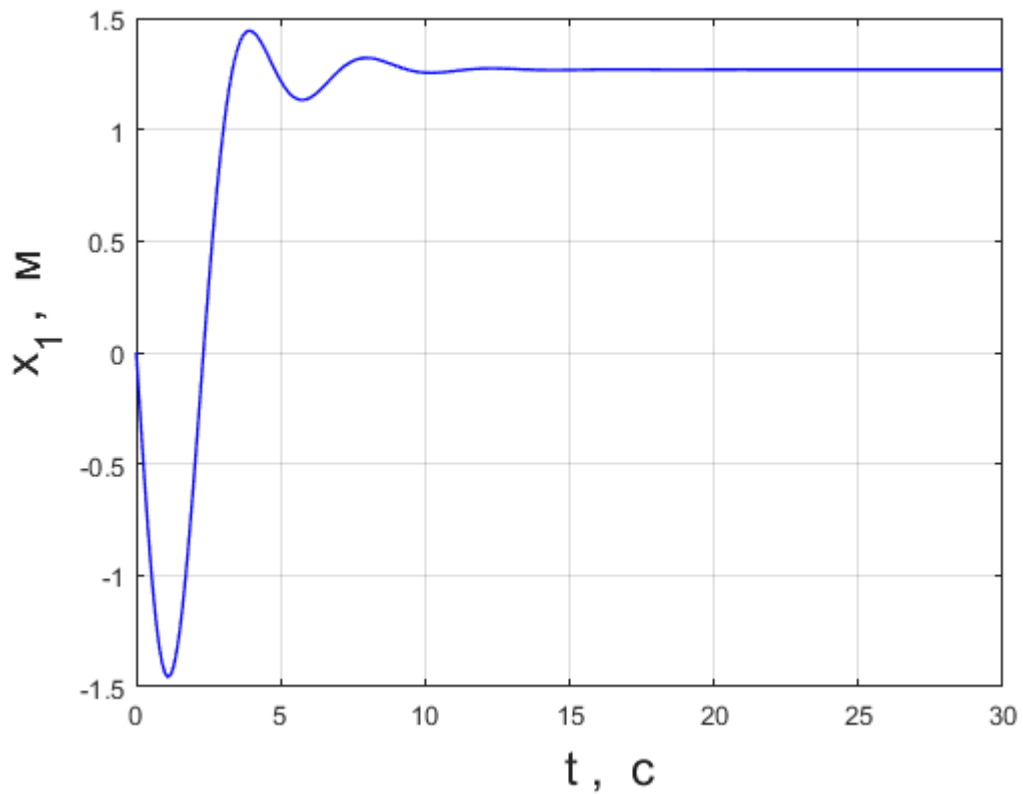


Рис. 31. График функции  $x_1(t)$  системы (42) с дополнительным возмущением.

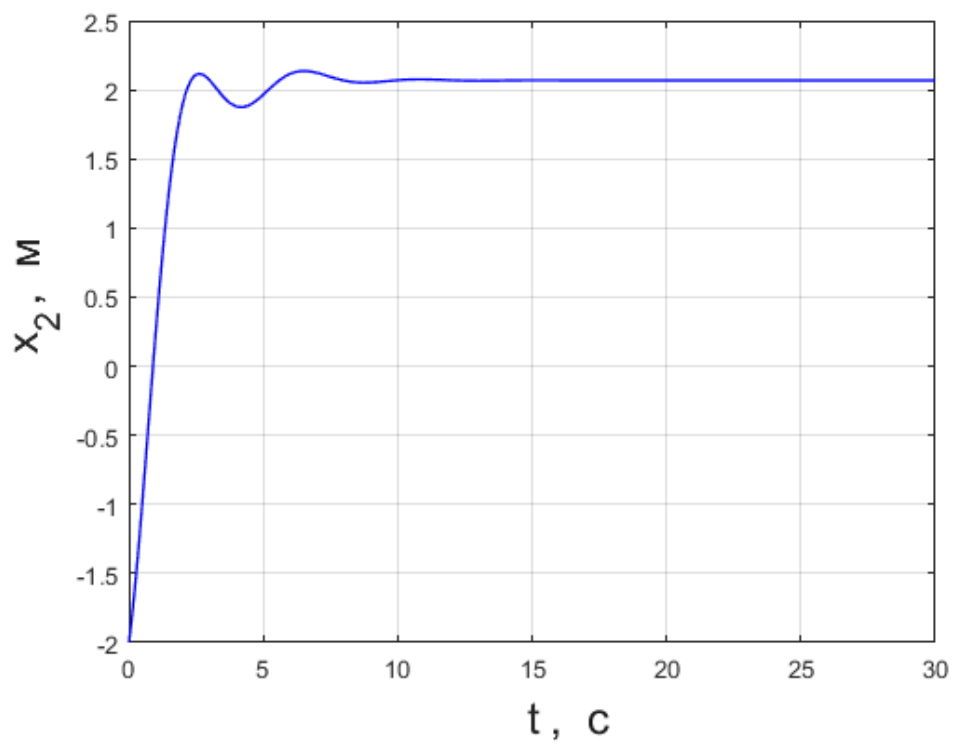


Рис. 32. График функции  $x_2(t)$  системы (42) с дополнительным возмущением.

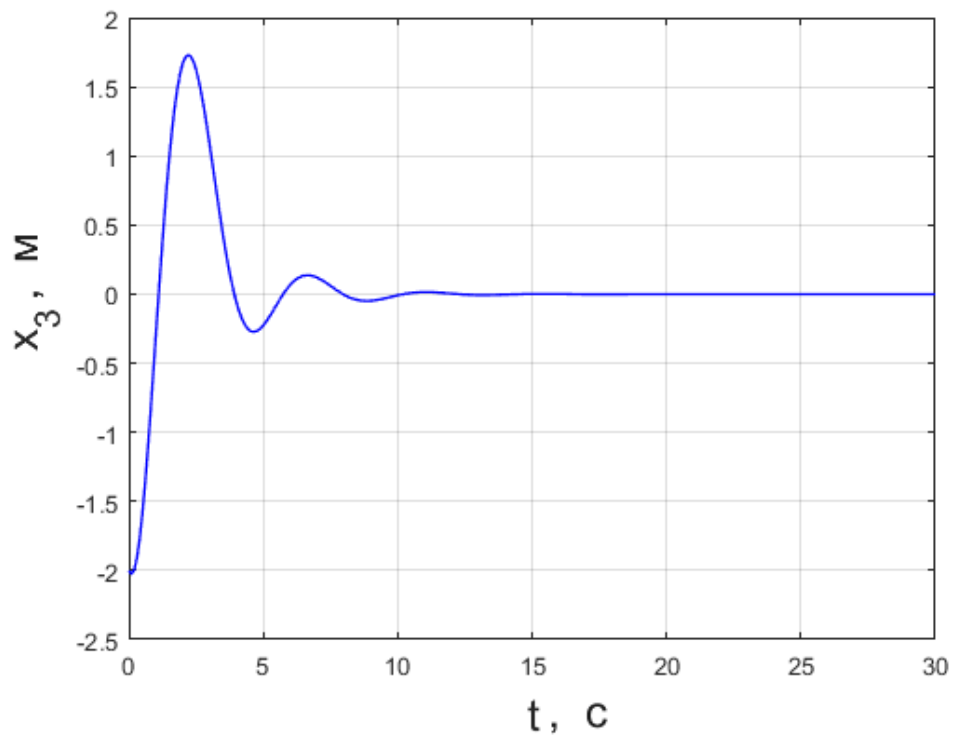


Рис. 33. График функции  $x_3(t)$  системы (42) с дополнительным возмущением.

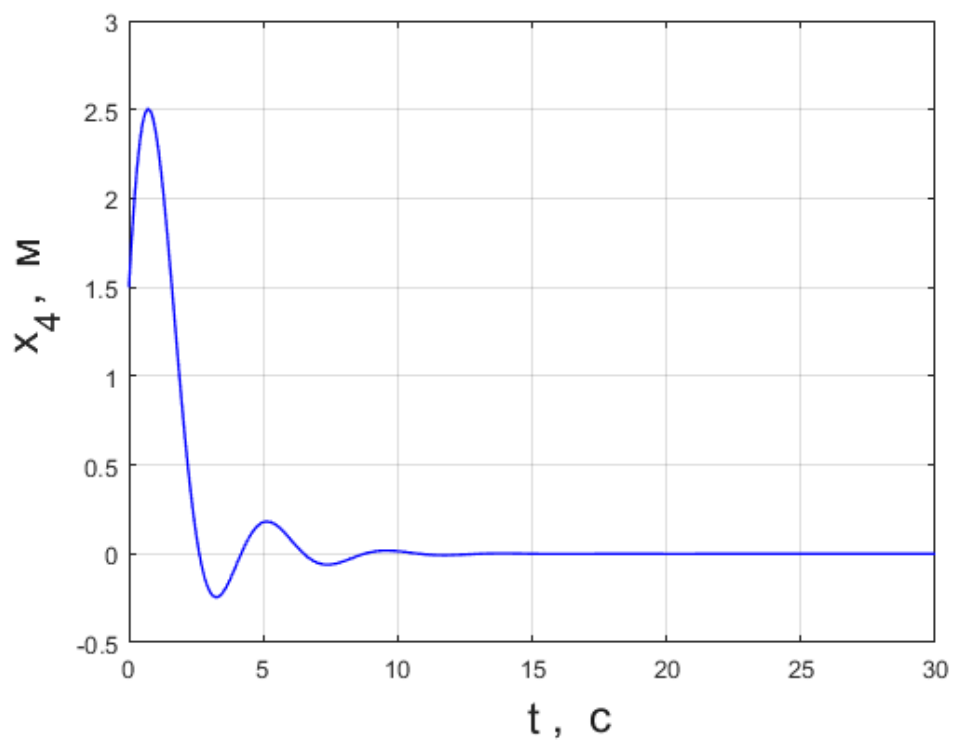


Рис. 34. График функции  $x_4(t)$  системы (42) с дополнительным возмущением.

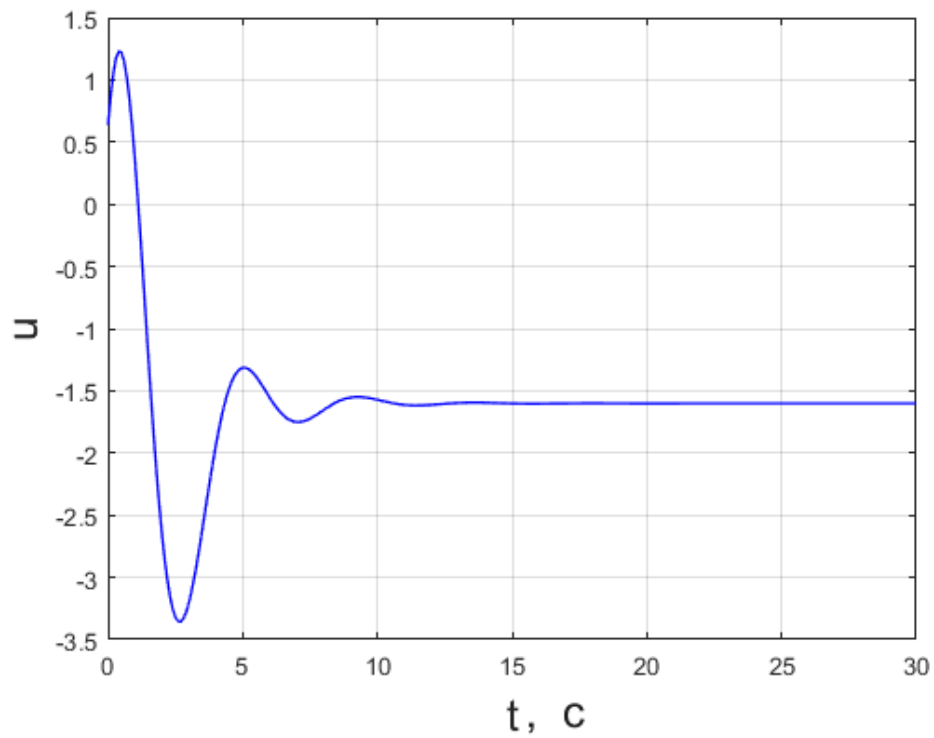


Рис. 35. График функции  $u(t)$  системы (42) с дополнительным возмущением.

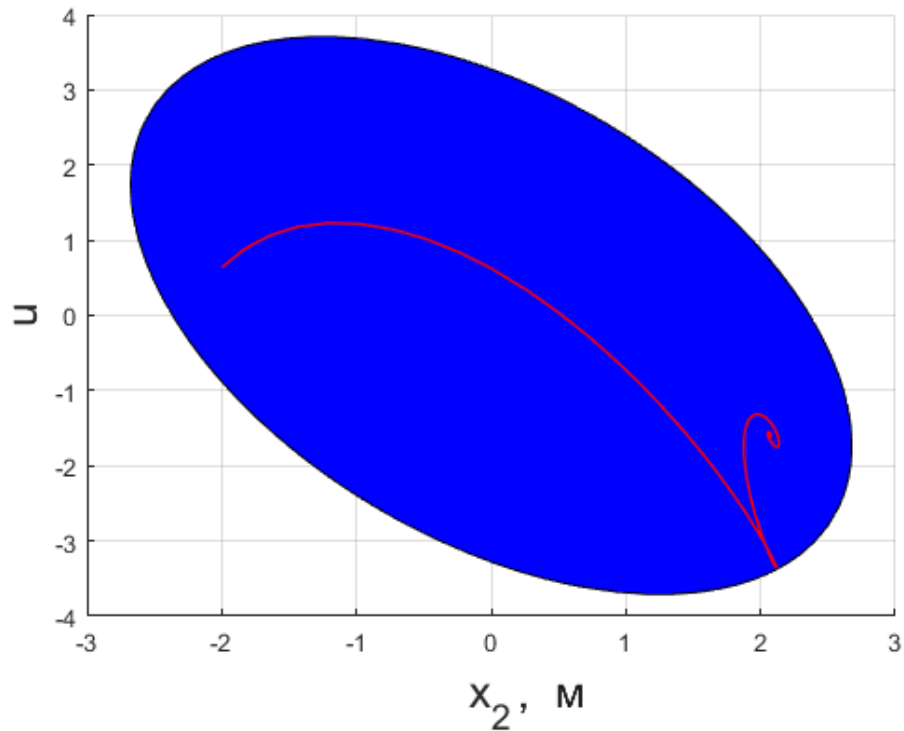


Рис. 36. Минимальный ограничивающий эллипсоид и траектория  $u(x_2)$  системы (42) с дополнительным возмущением.

По рисунку 36 также можно сделать вывод, что траектория  $u(x_2)$  выхода системы (42), выходящая из элемента множества точек внутри эллипса, не выходит за его границы, при любых ограниченных внешних возмущениях.

### 3.3 Сравнение регулятора, полученного техникой минимальных эллипсоидов, с LQR и LQG регуляторами

Для задачи из предыдущего пункта был построен линейно-квадратичный регулятор (с единичными весовыми матрицами). В частности, он был получен с помощью Control System Toolbox в системе Matlab (процедура `lqr`). Имеем:

$$K_{lqr} = \begin{pmatrix} -0.6285 & -0.0786 & -1.1212 & -0.8069 \end{pmatrix}. \quad (46)$$

На рис. (37) изображен найденный минимальный ограничивающий эллипс для выхода системы, замкнутой регулятором  $\hat{K}$ . На том же рисунке при одном и том же начальном состоянии системы, построены две траектории выходной переменной -  $y(t)$ , соответствующая регулятору  $\hat{K}$  (красной линией) и  $y_{lqr}(t)$ , соответствующая регулятору  $K_{lqr}$  (черной линией). Видно, что в этом

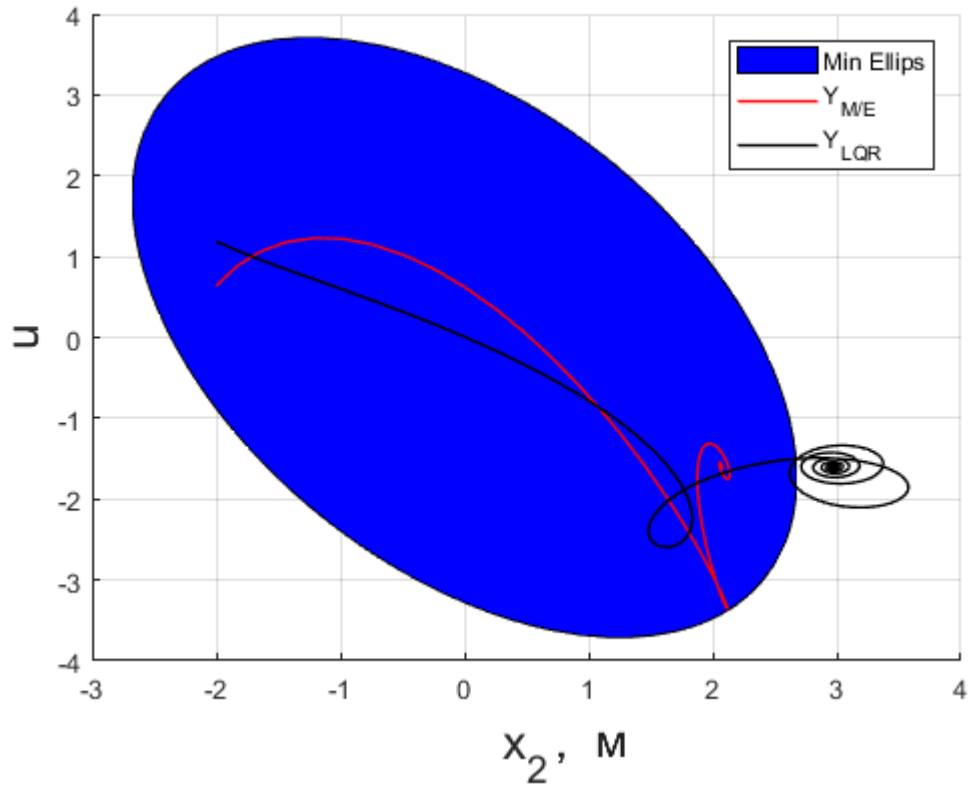


Рис. 37. Минимальный ограничивающий эллипсоид и траектории системы (42) с дополнительным возмущением.

случае траектория замкнутой системы с регулятором  $K_{lqr}$  выходит за пределы ограничивающего эллипса, тогда как траектория замкнутой системы с регулятором  $\hat{K}$  в нем остается. Таким образом, предлагаемый метод синтеза, специально нацеленный на подавление внешних возмущений, в этом отношении имеет явные преимущества перед оптимальным, но не учитывающим воздействие возмущений.

Также, был построен линейно-квадратичный Гауссовский регулятор (с единичными матрицами ковариаций). В частности, он был получен с помощью команды MATLAB из Control System Toolbox (процедура lqg). Имеем:

$$K_{lqg} = \begin{pmatrix} -3.1500 & -0.6135 & -2.8810 & -3.2020 \end{pmatrix}, \quad (47)$$

Для сравнения трех полученных регуляторов был выбран квадратичный интегральный критерий качества:

$$J = \int_0^\infty y^2(t) dt, \quad (48)$$

где  $y(t)$  — отклонение регулируемого параметра от заданного значения. Интеграл вида (48) представляет собой сумму абсолютных величин площадей, ограниченных кривой переходного процесса и линией нового заданного состояния равновесия. Чем меньше будет сумма абсолютных величин площадей между линией, определяющей идеальный переходный процесс, и кривой, соответствующей реальному переходному процессу и чем меньше будет значение этого интеграла, тем, очевидно, будет выше качественные показатели системы. Однако, следует заметить, что так как рассматриваемая квадратичная интегральная форма оценивает процесс по сумме площадей, то монотонный и колебательный процессы могут при определенных условиях иметь такое соотношение рассматриваемых площадей, при котором сильно колебательный переходный процесс представится лучшим, чем монотонный, что в ряде случаев не является правильным. Только если наличие колебаний несущественно, такая интегральная форма дает качественную оценку удовлетворительно.

Используя критерий (48) оценим переходные характеристики для выхода системы (42) с разными регуляторами состояния. Для моделирования системы во всех трех случаях были заданы начальные условия вида:

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.8 \end{pmatrix}.$$

Система (42) была проинтегрирована по времени  $t \in [0, 40]$ . Для выхода  $(x_2, u)^T$  системы с оптимальным регулятором, полученным техникой минимальных эллипсоидов, был найден интеграл вида (48):

$$J_{x_2} = 5.8745,$$

$$J_u = 7.4053.$$

Очевидно, что реальный переходный процесс, имеющий вид, показанный на рис. 32, 35, тем меньше будет отличаться от идеального переходного процесса, чем меньше будет заштрихованная площадь, рис. 38, 39.



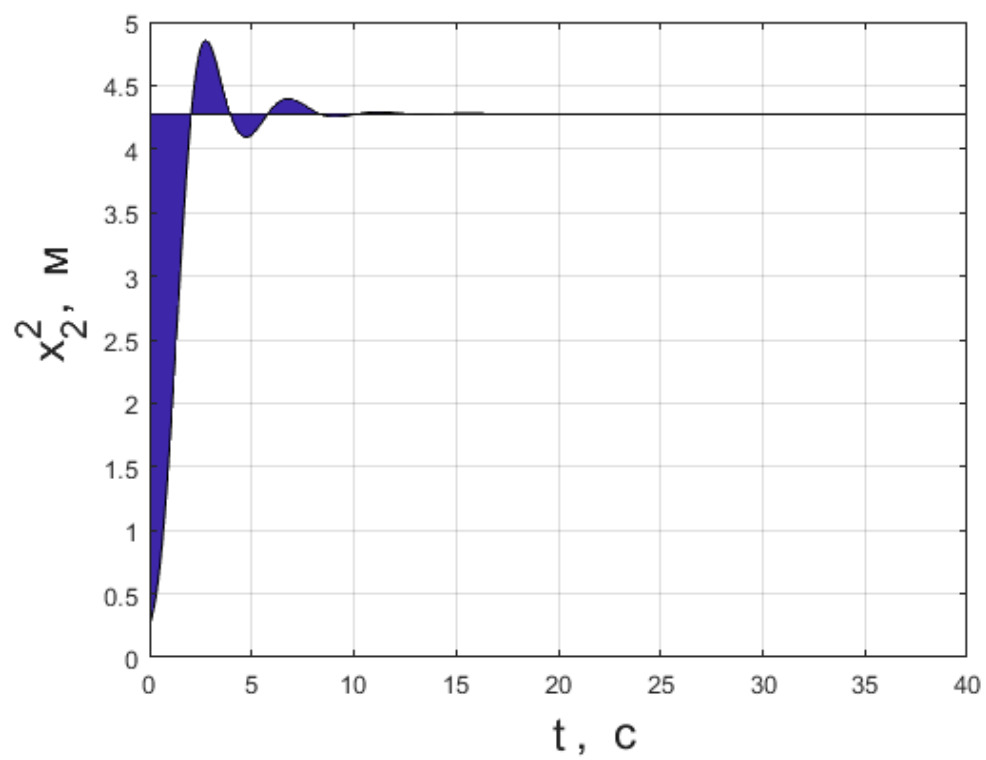


Рис. 38. Площадь квадрата функции  $x_2(t)$ .

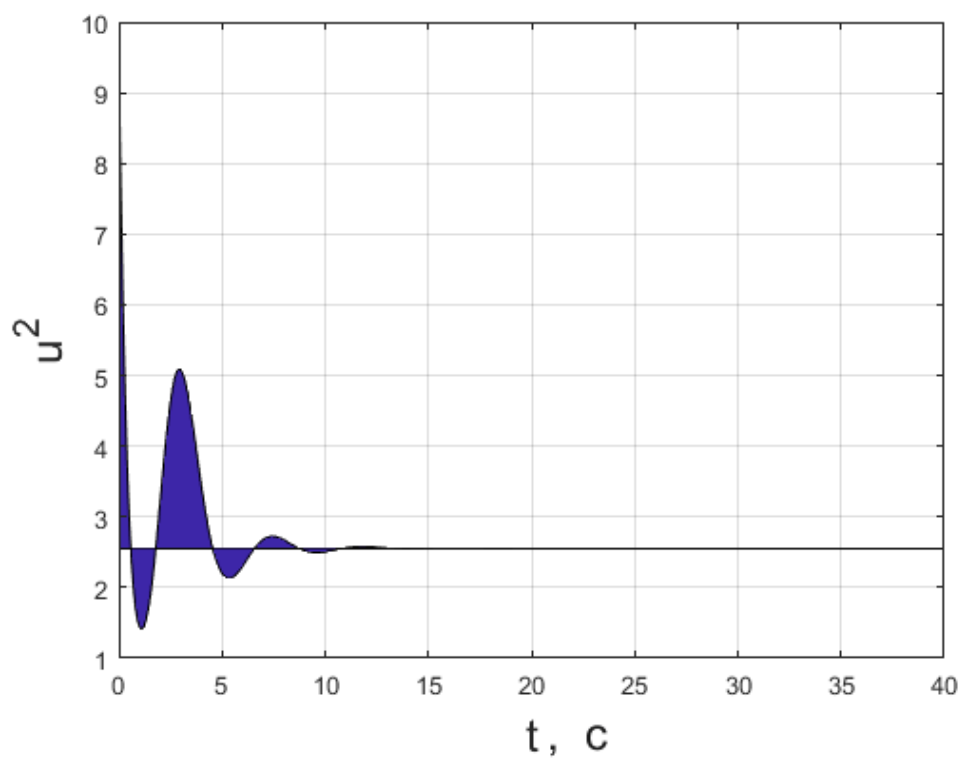


Рис. 39. Площадь квадрата функции  $u(t)$ .

Аналогично, для выхода  $(x_2, u)^T$  системы с оптимальным линейно-квадратичным регулятором был найден интеграл вида (48), графическая иллюстрация которого изображена на рисунках 40–41

$$J_{x_2} = 24.5334,$$

$$J_u = 6.6380.$$

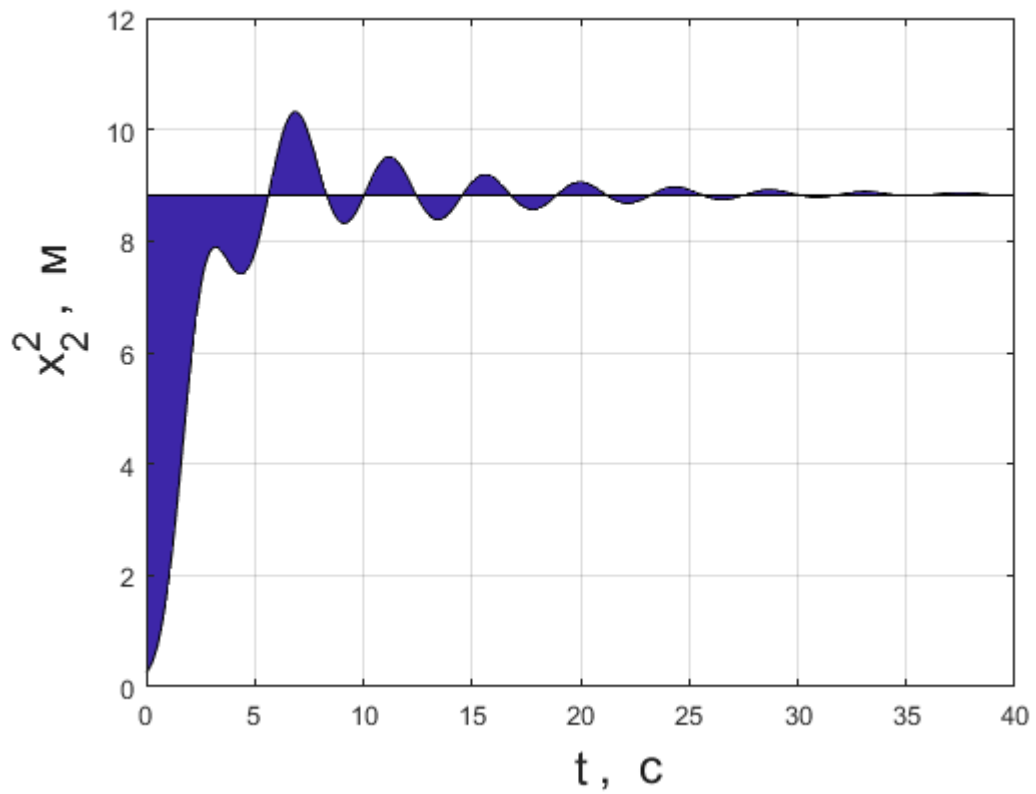


Рис. 40. Площадь квадрата функции  $x_2(t)$ .

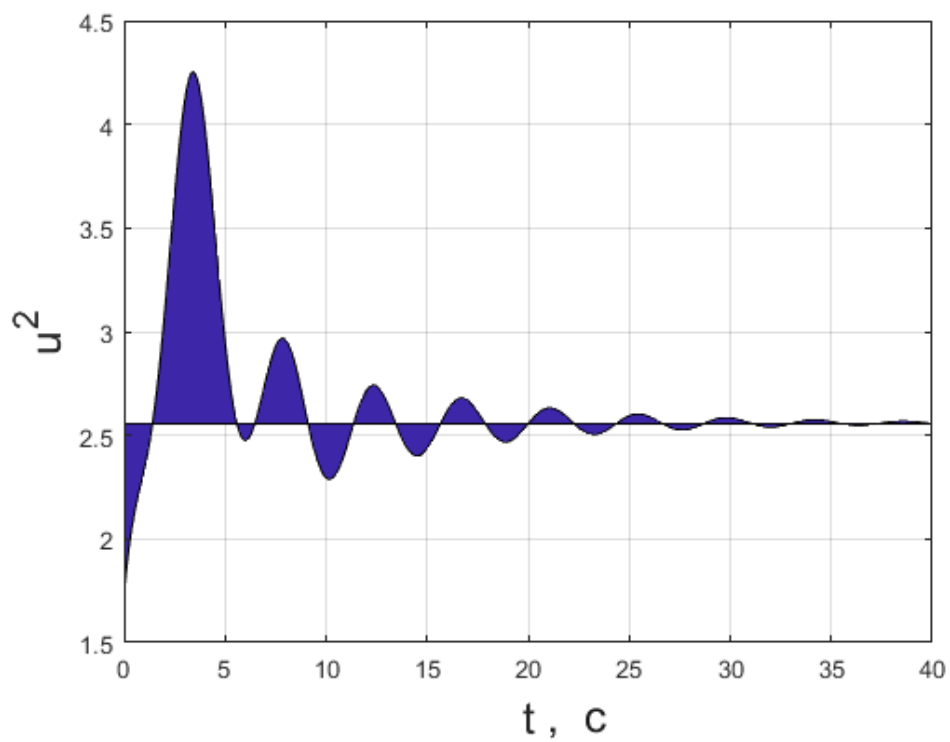


Рис. 41. Площадь квадрата функции  $u(t)$ .

Для LQG регулятора была получена следующая качественная оценка переходных процессов (рис. 42–43).

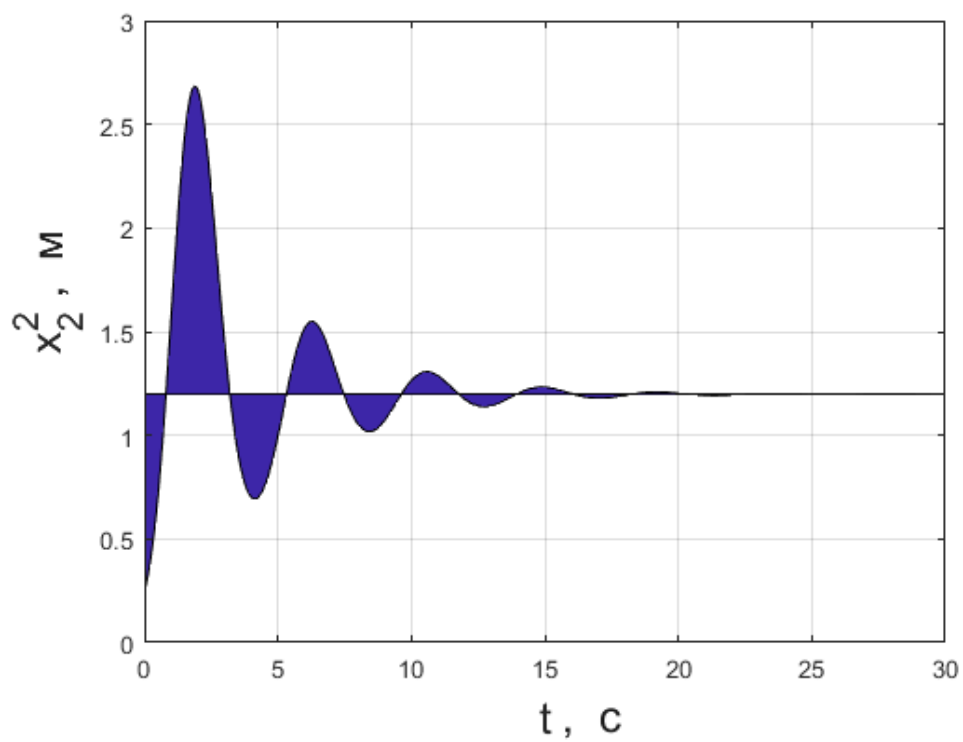


Рис. 42. Площадь квадрата функции  $x_2(t)$ .

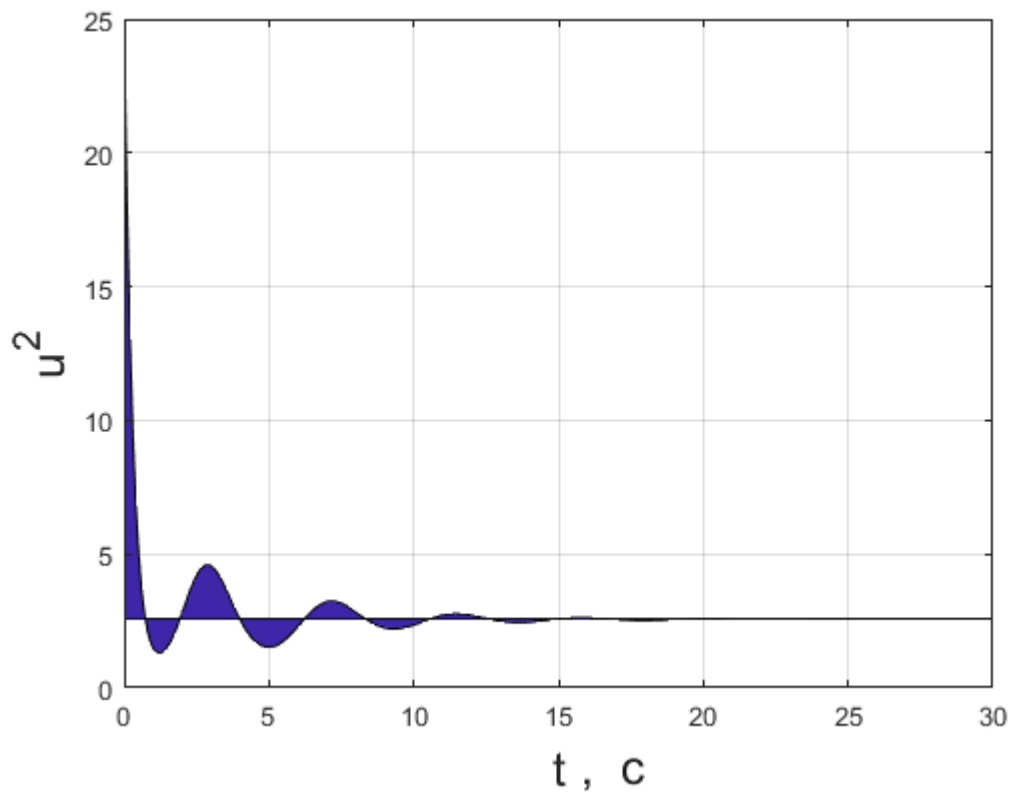


Рис. 43. Площадь квадрата функции  $u(t)$ .

$$J_{x_2} = 4.3341,$$

$$J_u = 12.2972.$$

По приведенным выше результатам можно сделать вывод, что использование регулятора, основанного на технике минимальных эллипсоидов, позволяет достичь оптимальных результатов по интегральному квадратичному критерию качества. Однако лучшим, в данном случае, регулятором состояния выступает LQG регулятор, интегральный критерий качества которого, получился относительно минимальным.

## Заключение

В настоящей работе предложен подход к построению обратной связи в одной из постановок задач линейной теории управления. Подход основан на методе инвариантных эллипсоидов, применение которого позволило переформулировать исходную проблему в терминах линейных матричных неравенств и свести поиск ограничивающего эллипсоида для выхода системы к задаче полуопределенного программирования, легко решаемой численно. Эффективность метода продемонстрирована на примере двойного пружинного маятника и двухмассовой системы.

Важно отметить возможные обобщения предложенного метода и направления его дальнейшего развития. В данной работе использовался регулятор в форме статической линейной обратной связи по состоянию. Представляется возможным подойти к решению той же проблемы путем построения динамической обратной связи по выходу с использованием наблюдателя.

## Список использованных источников

1. Булгаков Б.В. О накоплении возмущений в линейных колебательных системах с постоянными параметрами // ДАН СССР. 1946. Т. 5. Вып. 5. 339 с.
2. Уланов Г.М. Динамическая точность и компенсация возмущений в системах автоматического управления. М.: Машиностроение, 1971.
3. Якубович Е. Д. Решение задачи оптимального управления для линейных дискретных систем // АиТ. 1975. № 9. 73 с.
4. Барабанов А.Е. Оптимальное управление неминимально-фазовым дискретным объектом с произвольным ограниченным шумом // Вестн. ЛГУ. Серия: математика. 1980. 119 с.
5. И.И.Гихман, А.В.Скороход. Введение в теорию случайных процессов, 1976, 309 с.
6. Барабанов А.Е., Граничин О.Н. Оптимальный регулятор для линейных объектов с ограниченным шумом // АиТ. 1984. № 5. 39 с.
7. Dahleh M.A., Pearson J.B.  $l_1$ - Optimal feedback controllers for MIMO discrete-time systems // IEEE Trans. Automat. Control. 1987. № 32. 314 p.
8. Glover D., Schweppe F. Control of linear dynamic systems with set constrained disturbances // IEEE Trans. Automat. Control. 1971. V. 16. 411 p.
9. Bertsekas D.P., Rhodes I.B. On the minimax reachability of target sets and target tubes//Automatica. 1971. V. 7. 233 p.
10. Elia N., Dahleh M.A. Minimization of the worst case peak-to-peak gain via dynamic programming: state feedback case // IEEE Trans. Automat. Control. 2000. V. 45. 687 p.
11. Поляк Б.Т. Управление линейными системами при внешних возмущениях (техника линейных матричных неравенств) М.: Наука, 2002.
12. Johan Lofberg., YALMIP : A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. Automatic Control Laboratory. 8 p.
13. Schweppe F.C. Uncertain Dynamic Systems. N.J.:Prenrice Hall, 1973.

14. Финкельштейн Е.А., Горнов А.Ю. Алгоритм аппроксимации множества достижимости нелинейной управляемой системы эллипсоидами наименьшего объема, 2016. 9 с.
15. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.:Наука, 1977
16. Черноусько Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. М.:Наука, 1988.

## Приложение А

```
function [ ] = min_and_invar_ellips_for_sys_1( )
clc;
clear ALL;
addpath(genpath('C:\course\matlab\Yalmip\YALMIP-master'))
D=[0;
    0;
    0;
    1]
C=[0 0 1 0;
    0 0 0 1]
A= [0, 0, 1, 0;
    0, 0, 0, 1;
    -2, 1, -0.2, 0;
    1, -1, 0, -0.2]
    omega_0 = 0.8;

omega = [];
    t = 0:0.1:60;
        options = odeset('RelTol',1e-9,'AbsTol',1e-9);
        [T,mas]=ode45(@Kosh, t, [1, 1, 4, 4], options);
figure;
plot(T,mas(:,1),'linewidth',1,'color','blue');
grid on;
xlabel('t','FontSize',18)
ylabel('x_1','FontSize',18)
figure;
plot(T,mas(:,2),'linewidth',1,'color','blue');
xlabel('t','FontSize',18)
ylabel('x_2','FontSize',18)
grid on;
```



```

figure;
    plot(T,mas(:,3),'linewidth',1,'color','blue');
xlabel('t','FontSize',18)
ylabel('x_3','FontSize',18)
grid on;
figure;
    plot(T,mas(:,4),'linewidth',1,'color','blue');
xlabel('t','FontSize',18)
ylabel('x_4','FontSize',18)
grid on;
function [dx] =Kosh(t, x)
dx = zeros(4,1);
dx = A*[x(1); x(2); x(3); x(4)] + D*omega_0;
end
%Находим инвариантный эллипсоид
n = 4;
[~,D_1] = eig(A);
alpha = 0.1;
P_det = sdpvar(n,n);
F = [P_det>=0]
F = [F, A*P_det + P_det*A' + alpha*P_det+ (1/alpha)*D*D'<= 0];
optimize(F);
% C*value(P_det)*C'
y_1 = sdpvar(1,1)
y_2 = sdpvar(1,1)
X = [y_1;y_2]
figure;
% P = C*value(P_det)*C'
plot(X'*inv(value(C*P_det*C'))*X <= 1,[],'b'); hold on;
xlabel('y_1','FontSize',18)
ylabel('y_2','FontSize',18)
grid on;

```

```

%plot(mas(:,3),mas(:,4),'linewidth',1.2,'color','red' )
%Находим инвариантный эллипсоид по критерию следа
P_trace = sdpvar(4,4);
[~,D_1] = eig(A);
alpha = -2*max(real(diag(D_1))) / 2
opt = sdpsettings('solver', 'sedumi');
F = [ A*P_trace + P_trace*A' + alpha*P_trace +
(1/alpha)*D*D' == 0, P_trace>=0];
optimize(F, trace(C*P_trace*C'));
figure;
y_1 = sdpvar(1,1)
y_2 = sdpvar(1,1)
X = [y_1;y_2]
plot(X'*inv(value(C*P_trace*C'))*X <= 1,[],'r'); hold on;
grid on;
xlabel('y_1','FontSize',18)
ylabel('y_2','FontSize',18)
P_trace = value(P_trace)
% считаем наихудшее возмущение
for i=1:size(mas,1)
omega = [omega (D'*inv(P_trace) *[mas(i,1); mas(i,2);
mas(i,3);mas(i,4)])/ norm(D'*inv(P_trace) *[mas(i,1);
mas(i,2);mas(i,3);mas(i,4)])];
end
figure;
plot(T, omega, 'linewidth',2,'color','red')
xlabel('t','FontSize',18)
ylabel('\omega','FontSize',18)
grid on;
end

```

```

function [] = invar_ellips_for_sys_2()
clc;
clear ALL;
clear classes;
addpath(genpath('C:\course\matlab\Yalmip\YALMIP-master'))
A = [0, 0, 1, 0;
      0, 0, 0, 1;
      -1, 1, 0, 0;
      1, -1, 0, 0];
B_1 = [0;
        0;
        1;
        0];
D = [0;
      0;
      0;
      1];
B_2 = [0;
        1];
C = [0, 1, 0, 0;
      0, 0, 0, 0];
omega_0 = 0.9;
alpha = 0.1
Y = sdpvar(1,4)
Z = sdpvar(1,1)
P = sdpvar(4,4)
F = [A*P + P*A' + B_1*Y + Y'*B_1' + alpha*P +
      (1/alpha)*D*D' <=0, P>=0];
optimize(F)
X = sdpvar(2,1)
value(P)
K = value(Y)*inv(value(P))

```

```

G = (C+B_2*K)*value(P)*(C + B_2*K)';
u_plot = [];
omega = [];
u_step_response = [];
    t_for_u = [];
    t = 0:0.1:30;
        options = odeset('RelTol',1e-9,'AbsTol',1e-9);
        [T,mas]=ode45(@Kosh, t, [0.1, 0.1, 0.1, 0.1], options);
        for i=1:size(mas,1)
            u_plot = [u_plot K*[mas(i,1); mas(i,2);
                mas(i,3); mas(i,4)]];
        end
figure;
plot(T,mas(:,2),'linewidth',1,'color','blue');
xlabel('t','FontSize',18)
ylabel('x_2','FontSize',18)
grid on;
figure;
plot(t_for_u, u_step_response, 'linewidth',1,'color','blue');
xlabel('t','FontSize',18)
ylabel('u','FontSize',18)
grid on;
function [dx] =Kosh(t, x)
dx = zeros(4,1);
u = K*[x(1); x(2); x(3); x(4)];
dx = (A+B_1*K)*[x(1); x(2); x(3); x(4)] + D*omega_0;
u_step_response =[u_step_response u*heaviside(t)];
t_for_u =[0 t_for_u + 0.01];
end
disp('переходные характеристики для выхода u_2')
test = abs(u_plot);
Max = max(test);

```

```

Overshoot = (Max - test(1,end))/ test(1,end);
disp(['Перерегулирование: ', num2str(Overshoot*100), ' %']);
eps = 1e-3;
k = 0;
for i=0:size(test,2)
    k = k + 1;
    if abs(test(1,k)-test(1,end)) < eps &&
        abs(test(1,k+5) - test(1,end)) < eps
        disp(['Время регулирования: ', num2str(T(k)), ' сек.'])
        break;
    end
end
err = abs(omega_0 - test(1,end));
disp(['Установившаяся ошибка: ', num2str(err)]);
disp('-----')
disp('переходные характеристики для выхода x_2')
test = abs(mas(:,2));
Max = max(test);
Overshoot = (Max - test(end))/ test(end);
disp(['Перерегулирование: ', num2str(Overshoot*100), ' %']);
eps = 1e-3;
k = 0;
for i=0:size(test,1)
    k = k + 1;
    if abs(test(k)-test(end)) < eps &&
        abs(test(k+5) - test(end)) < eps
        disp(['Время регулирования: ', num2str(T(k)), ' сек.'])
        break;
    end
end
end
end

```

```

function [] = min_ellips_for_sys_2()
clc;
clear ALL;
clear classes;
addpath(genpath('C:\course\matlab\Yalmip\YALMIP-master'));
A = [0, 0, 1, 0;
      0, 0, 0, 1;
      -1, 1, 0, 0;
      1, -1, 0, 0];
B_1 = [0; 0; 1; 0];
D = [0; 0; 0; 1];
B_2 = [0; 1];
C = [0, 1, 0, 0;
      0, 0, 0, 0];
alpha = 0.4;
omega_0 = 0.9;
P = sdpvar(4,4);
Y = sdpvar(1,4);
Z = sdpvar(1,1);
L = [Z Y;
      Y' P];
opt = sdpsettings('solver', 'sedumi');
F = [A*P + P*A' + B_1*Y + Y'*B_1' + alpha*P
      + (1/alpha)*D*D' <=0, L >=0, P>=0];
optimize(F, trace(C*P*C' + C*Y'*B_2' + B_2*Y*C'
      + B_2*Z*B_2'), opt);
K = value(Y)*inv(value(P));
x_2 = sdpvar(1,1);
u_ = sdpvar(1,1);
X = [x_2;u_];
G = C*value(P)*C' + C*value(Y)'*B_2' + B_2*value(Y)*C'
+B_2*value(Z)*B_2';

```

```

u_plot = [];
omega = [];
u_step_response = [];
    t_for_u = [];
    t = 0:0.1:30;
        options = odeset('RelTol',1e-9,'AbsTol',1e-9);
        [T,mas]=ode45(@Kosh, t, [0.1,0.1, 0.1, 0.1], options);
        for i=1:size(mas,1)
            u_plot = [u_plot K*[mas(i,1); mas(i,2);
                mas(i,3); mas(i,4)]];
        end
figure;
plot(T,mas(:,2),'linewidth',1,'color','blue');
xlabel('t','FontSize',18);
ylabel('x_2','FontSize',18);
grid on;
figure;
plot(t_for_u, u_step_response, 'linewidth',1,'color','blue');
xlabel('t','FontSize',18);
ylabel('u','FontSize',18);
grid on;
function [dx] =Kosh(t, x)
dx = zeros(4,1);
u = K*[x(1); x(2); x(3); x(4)];
dx = (A+B_1*K)*[x(1); x(2); x(3); x(4)] + D*omega_0;
u_step_response =[u_step_response u*heaviside(t)];
t_for_u =[0 t_for_u + 0.01];
end
disp('переходные характеристики для выхода u_2')
test = abs(u_plot);
Max = max(test);
Overshoot = (Max - test(1,end))/ test(1,end);

```

```

disp(['Перерегулирование: ', num2str(Overshoot*100), ' %']);
eps = 1e-3;
k = 0;
for i=0:size(test,2)
    k = k + 1;
    if abs(test(1,k)-test(1,end)) < eps &&
        abs(test(1,k+5) - test(1,end)) < eps
        disp(['Время регулирования: ', num2str(T(k)), ' сек.'])
        break;
    end
end
err = abs(omega_0 - test(1,end));
disp(['Установившаяся ошибка: ', num2str(err)]);
disp('-----')
disp('переходные характеристики для выхода x_2')
test = abs(mas(:,2));
Max = max(test);
Overshoot = (Max - test(end))/ test(end);
disp(['Перерегулирование: ', num2str(Overshoot*100), ' %']);
eps = 1e-3;
k = 0;
for i=0:size(test,1)
    k = k + 1;
    if abs(test(k)-test(end)) < eps &&
        abs(test(k+5) - test(end)) < eps
        disp(['Время регулирования: ', num2str(T(k)), ' сек.'])
        break;
    end
end
end
end

```



```

function [] = min_ellips_for_sys_3()
clc;
clear ALL;
clear classes;
addpath(genpath('C:\course\matlab\Yalmip\YALMIP-master'))
A = [0, 0, 1, 0;
      0, 0, 0, 1;
      -1, 1, 0, 0;
      1, -1, 0, 0];
B_1 = [0;
        0;
        1;
        0];
D = [0, 0;
      0, 0;
      1, 0;
      0, 1];
B_2 = [0;
        1];
C = [0, 1, 0, 0;
      0, 0, 0, 0];
alpha = 0.45
omega_0_1 = 0.8;
omega_0_2 = 0.8;
P = sdpvar(4,4)
Y = sdpvar(1,4)
Z = sdpvar(1,1)
L = [Z Y;
      Y' P];
opt = sdpsettings('solver', 'sedumi');
F = [A*P + P*A' + B_1*Y + Y'*B_1' + alpha*P +
      (1/alpha)*D*D' <=0, L >=0, P>=0];

```

```

optimize(F, trace(C*P*C' + C*Y'*B_2' + B_2*Y*C'
+ B_2*Z*B_2')), opt)
K = value(Y)*inv(value(P))
%K_lqr = [-0.6285 , -0.0786 , -1.1212 , -0.8069 ];
%K = K_lqr;
x_2 = sdpvar(1,1);
u_ = sdpvar(1,1);
X = [x_2;u_];
G = C*value(P)*C' + C*value(Y)'*B_2' + B_2*value(Y)*C'
+ B_2*value(Z)*B_2'
figure;
plot(X'*inv(G)*X<= 1,[],'b'); hold on;
xlabel('x_2','FontSize',18)
ylabel('u','FontSize',18)
grid on;
u_plot = [];
omega = [];
u_step_response = [];
t_for_u = [];
t = 0:0.1:40;
options = odeset('RelTol',1e-9,'AbsTol',1e-9);
[T,mas]=ode45(@Kosh, t, [0.5, 0.5, 0.5, 0.5], options);
for i=1:size(mas,1)
    u_plot = [u_plot K*[mas(i,1); mas(i,2);
    mas(i,3); mas(i,4)]];
end
plot(mas(:,2),u_plot,'linewidth',1,'color','r');
figure;
plot(T,mas(:,1),'linewidth',1,'color','blue');
grid on;
xlabel('t','FontSize',18)
ylabel('x_1','FontSize',18)

```

```

figure;
plot(T,mas(:,2),'linewidth',1,'color','blue');
xlabel('t','FontSize',18)
ylabel('x_2','FontSize',18)
grid on;
figure;
    plot(T,mas(:,3),'linewidth',1,'color','blue');
xlabel('t','FontSize',18)
ylabel('x_3','FontSize',18)
grid on;
figure;
    plot(T,mas(:,4),'linewidth',1,'color','blue');
xlabel('t','FontSize',18)
ylabel('x_4','FontSize',18)
grid on;
figure;
plot(t_for_u, u_step_response, 'linewidth',1,'color','blue');
xlabel('t','FontSize',18)
ylabel('u','FontSize',18)
grid on;
figure;
plot(T, u_plot, 'linewidth',1,'color','blue');
xlabel('t','FontSize',18)
ylabel('u','FontSize',18)
grid on;
function [dx] =Kosh(t, x)
dx = zeros(4,1);
u = K*[x(1); x(2); x(3); x(4)];
dx = (A+B_1*K)*[x(1); x(2); x(3); x(4)] +
D*[omega_0_1; omega_0_2];
u_step_response =[u_step_response u*heaviside(t)];
t_for_u =[0 t_for_u + 0.01];

```

```

end
disp('переходные характеристики для выхода u_2')
test = abs(u_plot);
Max = max(test);
Overshoot = (Max - test(1,end))/ test(1,end);
disp(['Перерегулирование: ', num2str(Overshoot*100), ' %']);
eps = 1e-3;
k = 0;
for i=0:size(test,2)
    k = k + 1;
    if abs(test(1,k)-test(1,end)) < eps &&
        abs(test(1,k+2) - test(1,end)) < eps
        disp(['Время регулирования: ', num2str(T(k)), ' сек.'])
        break;
end
end
err = abs(omega_0_1+omega_0_2 - test(1,end));
disp(['Установившаяся ошибка: ', num2str(err)]);
disp('-----')
disp('переходные характеристики для выхода x_2')
test = abs(mas(:,2));
Max = max(test);
Overshoot = (Max - test(end))/ test(end);
disp(['Перерегулирование: ', num2str(Overshoot*100), ' %']);
eps = 1e-3;
k = 0;
for i=0:size(test,1)
    k = k + 1;
    if abs(test(k)-test(end)) < eps &&
        abs(test(k+2) - test(end)) < eps
        disp(['Время регулирования: ', num2str(T(k)), ' сек.'])
        break;
end

```

```

end
end
y = mas(:,2);
y = y.^2;
I = trapz(T,abs(y(:) - y(end)))
figure;
%plot(T,y);
area(T,y, y(end))
    xlabel('t','FontSize',18)
ylabel('x_2^2','FontSize',18)
grid on;
y = u_plot(:);
y = y.^2;
I = trapz(T,abs(y(:) - y(end)))
figure;
    %plot(T,y);
area(T,y, y(end))
    xlabel('t','FontSize',18)
ylabel('u^2','FontSize',18)
grid on;
end

```

```

function [] = LQR()
clc;
clear ALL;
clear classes;
addpath(genpath('C:\course\matlab\Yalmip\YALMIP-master'))
A = [0, 0, 1, 0;
      0, 0, 0, 1;
      -1, 1, 0, 0;
      1, -1, 0, 0];

B_1 = [0;
        0;
        1;
        0];
D = [0, 0;
      0, 0;
      1, 0 ;
      0, 1;];
B_2 = [0;
        1;];
C = [0, 1, 0, 0;
      0, 0, 0, 0];
alpha = 0.45
omega_0_1 = 0.8;
omega_0_2 = 0.8;
Q = [1, 0;
      0, 1]
R = 1;
sys = ss(A,B_1,C,B_2)
[K,S,e] = lqry(sys,Q,R)
K = -K
u_plot = [];

```

```

t = 0:0.1:40;
    options = odeset('RelTol',1e-9,'AbsTol',1e-9);
    [T,mas]=ode45(@Kosh, t, [0.5, 0.5, 0.5, 0.5], options);
    for i=1:size(mas,1)
        u_plot = [u_plot K*[mas(i,1); mas(i,2);
            mas(i,3); mas(i,4)]];
    end
figure;
plot(T,mas(:,1),'linewidth',1,'color','blue');
grid on;
xlabel('t','FontSize',18)
ylabel('x_1','FontSize',18)
figure;
plot(T,mas(:,2),'linewidth',1,'color','blue');
xlabel('t','FontSize',18)
ylabel('x_2','FontSize',18)
grid on;
figure;
    plot(T,mas(:,3),'linewidth',1,'color','blue');
xlabel('t','FontSize',18)
ylabel('x_3','FontSize',18)
grid on;
figure;
    plot(T,mas(:,4),'linewidth',1,'color','blue');
xlabel('t','FontSize',18)
ylabel('x_4','FontSize',18)
grid on;
figure;
plot(T, u_plot, 'linewidth',1,'color','blue');
xlabel('t','FontSize',18)
ylabel('u','FontSize',18)
grid on;

```

```

y = mas(:,2);
y = y.^2;
I = trapz(T,abs(y(:) - y(end)))
figure;
area(T,y, y(end))
    xlabel('t','FontSize',18)
ylabel('x_2^2','FontSize',18)
grid on;
y = u_plot(:);
y = y.^2;
I = trapz(T,abs(y(:) - y(end)))
figure;
    %plot(T,y);
area(T,y, y(end))
    xlabel('t','FontSize',18)
ylabel('u^2','FontSize',18)
grid on;
function [dx] =Kosh(t, x)
dx = zeros(4,1);
u = K*[x(1); x(2); x(3); x(4)];
dx = (A+B_1*K)*[x(1); x(2); x(3); x(4)] +
D*[omega_0_1; omega_0_2];
end
end

```



```

function [] = LQG()
clc;
clear ALL;
clear classes;
addpath(genpath('C:\course\matlab\Yalmip\YALMIP-master'))
A = [0, 0, 1, 0;
      0, 0, 0, 1;
      -1, 1, 0, 0;
      1, -1, 0, 0];
B_1 = [0;
        0;
        1;
        0];
D = [0, 0;
      0, 0;
      1, 0 ;
      0, 1;];
B_2 = [0;
        1;];
C = [0, 1, 0, 0;
      0, 0, 0, 0];
alpha = 0.45
omega_0_1 = 0.8;
omega_0_2 = 0.8;
nx = 4;      %Number of states
ny = 2;      %Number of outputs
sys = ss(A,B_1,C,B_2);
QXU = [1 0 0 0 0;
        0 1 0 0 0;
        0 0 1 0 0;
        0 0 0 1 0;
        0 0 0 0 1];

```

```

QWV = [1 0 0 0 0 0;
        0 1 0 0 0 0;
        0 0 1 0 0 0;
        0 0 0 1 0 0;
        0 0 0 0 1 0;
        0 0 0 0 0 1];
QI = eye(ny);
KLQG1 = lqg (sys, QXU, QWV, QI, '1dof')
K = [-3.15      -0.6135      -2.881      -3.202]
u_plot = [];
t = 0:0.1:30;
options = odeset('RelTol',1e-9,'AbsTol',1e-9);
[T,mas]=ode45(@Kosh, t, [0.5, 0.5, 0.5, 0.5], options);
for i=1:size(mas,1)
    u_plot = [u_plot K*[mas(i,1); mas(i,2);
        mas(i,3); mas(i,4)]];
end
figure;
plot(T,mas(:,1),'linewidth',1,'color','blue');
grid on;
xlabel('t','FontSize',18)
ylabel('x_1','FontSize',18)
figure;
plot(T,mas(:,2),'linewidth',1,'color','blue');
xlabel('t','FontSize',18)
ylabel('x_2','FontSize',18)
grid on;
figure;
plot(T,mas(:,3),'linewidth',1,'color','blue');
xlabel('t','FontSize',18)
ylabel('x_3','FontSize',18)
grid on;

```

```

figure;
    plot(T,mas(:,4),'linewidth',1,'color','blue');
xlabel('t','FontSize',18)
ylabel('x_4','FontSize',18)
grid on;
    figure;
    plot(T, u_plot, 'linewidth',1,'color','blue');
xlabel('t','FontSize',18)
ylabel('u','FontSize',18)
grid on;
y = mas(:,2);
y = y.^2;
I = trapz(T,abs(y(:) - y(end)))
figure;
area(T,y, y(end))
    xlabel('t','FontSize',18)
ylabel('x_2^2','FontSize',18)
grid on;
y = u_plot(:);
y = y.^2;
I = trapz(T,abs(y(:) - y(end)))
figure;
area(T,y, y(end))
    xlabel('t','FontSize',18)
ylabel('u^2','FontSize',18)
function [dx] =Kosh(t, x)
dx = zeros(4,1);
u = K*[x(1); x(2); x(3); x(4)];
dx = (A+B_1*K)*[x(1); x(2); x(3); x(4)] +
    D*[omega_0_1; omega_0_2];
end
end

```