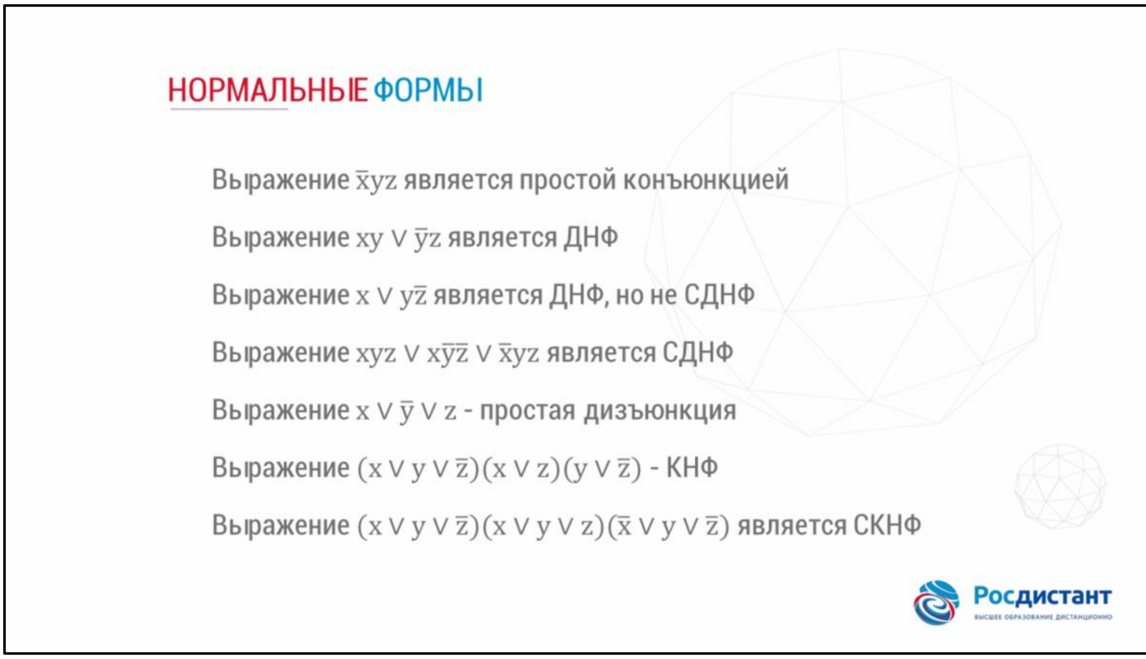
Росдистант

ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ ДИСТАНЦИОННО

ОСНОВЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ И ЛОГИКИ

10 ЧАСТЬ



Слайд 127
Тема 4.3. Нормальные формы. Понятия тупиковой, минимальной и сокращенной ДНФ. Методы получения сокращенной и минимальной ДНФ

Далее рассмотрим специальные виды булевых функций.

Простой, или элементарной, конъюнкцией называется конъюнкция одной или нескольких переменных, при этом каждая переменная встречается не более одного раза – либо она сама, либо ее отрицание.

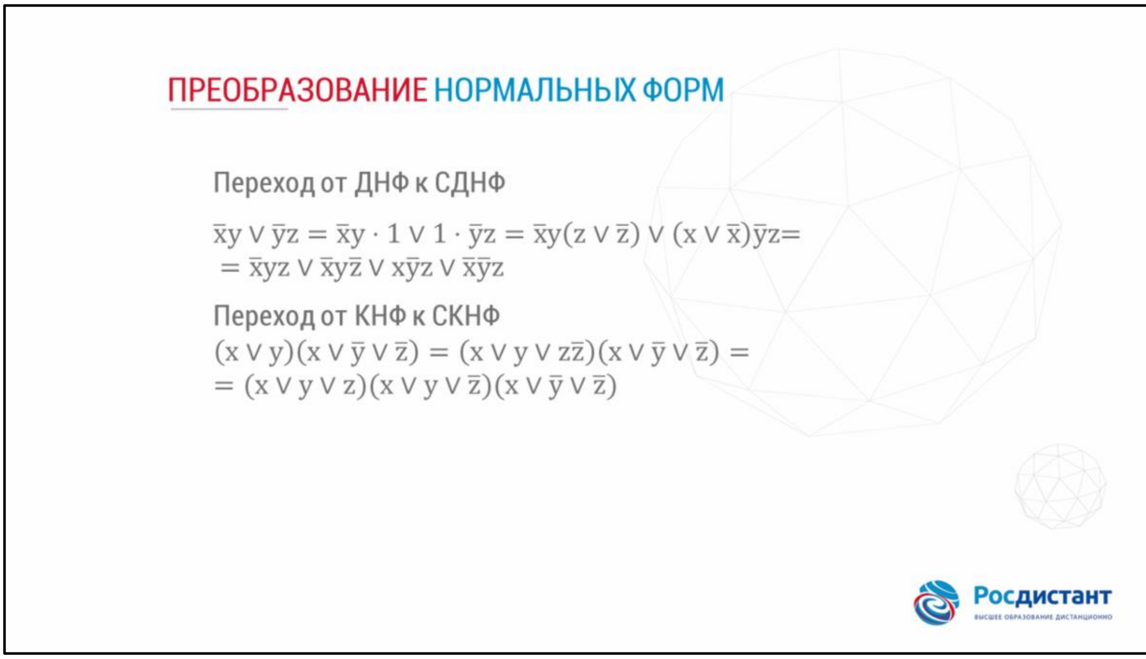
Дизъюнктивной нормальной формой, далее ДНФ, называется дизъюнкция различных простых конъюнкций.

Совершенной дизъюнктивной нормальной формой, далее СДНФ, называется такая дизъюнктивная нормальная форма, у которой в каждую конъюнкцию входят все переменные данного списка, либо сами, либо их отрицания, причем в одном и том же порядке.

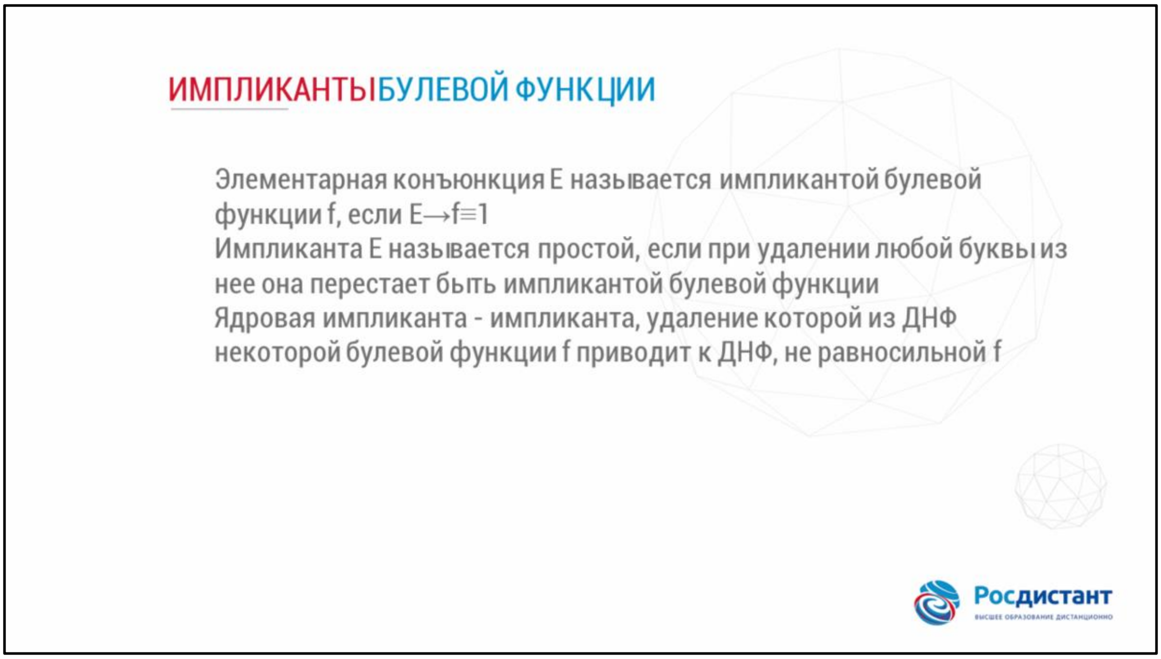
Если заменить в приведенных выше определениях конъюнкцию на дизъюнкцию, а дизъюнкцию – на конъюнкцию, то получим определения простой дизъюнкции, конъюнктивной нормальной формы и совершенной конъюнктивной нормальной формы. Для двух последних понятий в дальнейшем будут использоваться сокращения КНФ и СКНФ.

На слайде представлены примеры функций указанных видов. Третье выражение является дизъюнктивной нормальной формой, но не совершенной, так как первая простая конъюнкция не содержит переменные y и z, а вторая – переменную x.

Для перехода от КНФ к ДНФ или наоборот используются законы дистрибутивности.



Слайд 128
Остановимся на задачах перехода от одной нормальной формы к другой.
Пусть нам нужно осуществить переход от ДНФ к СДНФ. Так как нам дана нормальная форма, не являющая совершенной, то в некоторой конъюнкции не хватает переменной и необходимо ее добавить. Для этого в конъюнкцию добавляем единицу в соответствии с законами нуля и единицы. Добавленную единицу представляем в виде дизъюнкции переменной и ее отрицания. После этого применяем закон дистрибутивности. В конце преобразований при необходимости применяем закон идемпотентности.
Аналогично, для перехода от КНФ к СКНФ в неполную дизъюнкцию добавляем нуль, который представляем в виде конъюнкции переменной и ее отрицания. Применяя законы дистрибутивности и идемпотентности, получаем окончательный результат.
Всякую отличную от нуля функцию можно представить в виде СДНФ с помощью ее таблицы истинности. Для этого нужно взять наборы, для которых функция принимает значение один, и составить по ним простые конъюнкции по следующему правилу. Если итая переменная равна нулю, то включаем ее в конъюнкцию с отрицанием. Если итая переменная принимает значение один, то включаем ее в простую конъюнкцию. Составляя дизъюнкцию этих простых конъюнкций, придем к СДНФ.
Аналогично, с помощью таблицы истинности можно для любой отличной от единицы функции составить ее СКНФ. В этом случае нам понадобятся наборы значений переменных, на которых функция принимает нулевое значение, причем если переменная принимает значение один, то записываем ее с отрицанием, в противном случае – без отрицания.
Таким образом, любую логическую функцию можно выразить через три логические функции – конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание. Приведенные правила позволяют для любой таблично заданной функции написать ее формулу. На практике часто возникает необходимость получить вместо СДНФ как можно более «короткую» ДНФ.



Слайд 129

Словам «короткая дизъюнктивная нормальная форма» можно придать разный смысл. Элементарная конъюнкция E называется импликантой булевой функции f, если импликация «из E следует f» тождественно равна единице. Исходя из определения импликации, получаем, что если на некотором наборе значений переменных функция f принимает значение один, то и импликация на этом наборе принимает значение один. Определение простой импликанты булевой функции представлено на слайде. Здесь же приведено определение ядровой импликанты.

Сокращенной дизъюнктивной нормальной формой называется ДНФ, состоящая из всех простых импликант данной булевой функции.

Тупиковой дизъюнктивной нормальной формой функции называется такая ее ДНФ, состоящая из простых импликант, что удаление из нее любой конъюнкции нарушает равносильность ДНФ данной функции. Другими словами, в тупиковую ДНФ входят только ядровые импликанты.

Минимальная дизъюнктивная нормальная форма данной функции – это ДНФ, имеющая наименьшее число символов переменных из всех ДНФ, задающих функцию.

Сложностью дизъюнктивной нормальной формы называется количество символов переменных, использованных при записи формулы.

Для получения сокращенной дизъюнктивной нормальной формы из совершенной дизъюнктивной нормальной формы можно последовательно использовать формулы склеивания, пока это возможно.

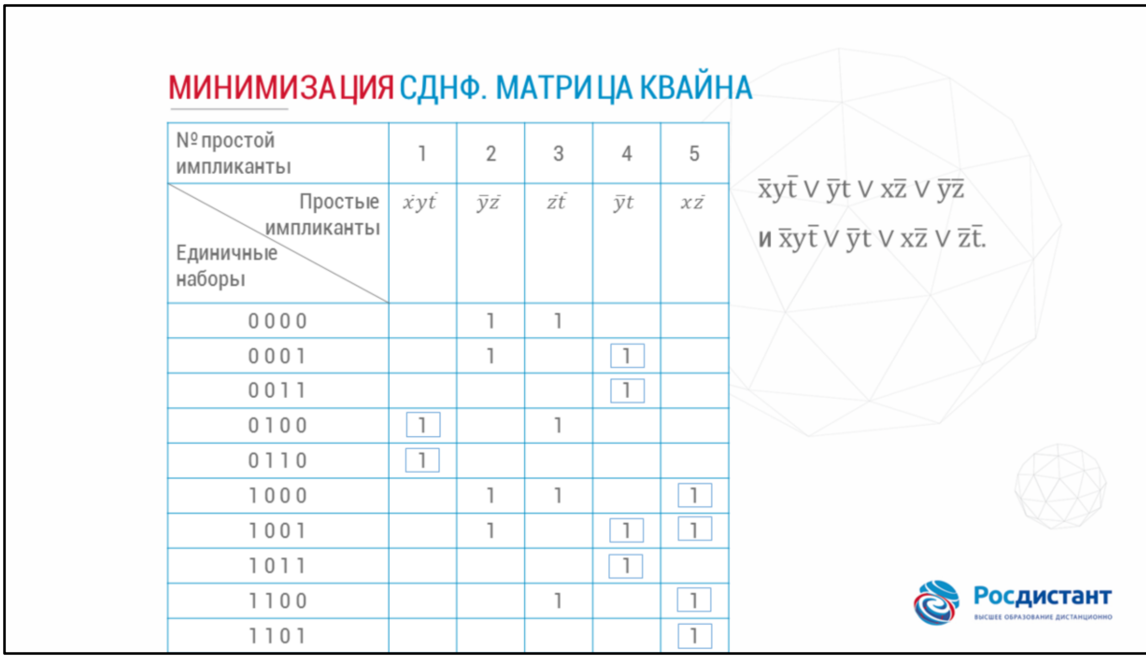
Слайд 130
Рассмотрим пример получения сокращенной, а затем минимальной ДНФ.
Обратимся к функции, представленной на слайде. Сначала запишем ее совершенную дизъюнктивную нормальную форму. Как было сказано ранее, для этого берем наборы, обращающие функцию в единицу. Такие наборы называются единичными. В данном случае их десять. Для каждого набора составляем элементарные конъюнкции по приведенному ранее правилу. Те переменные, которые принимают нулевое значение, записываются со знаком отрицания.
Первым подходящим набором является набор из четырех нулей. Ему соответствует конъюнкция . Следующий набор – 0-0-0-1, ему соответствует конъюнкция .
Аналогичным образом записываем простые конъюнкции для остальных наборов.
Дизъюнкция составленных простых конъюнкций дает совершенную дизъюнктивную нормальную форму.
Построим также совершенную конъюнктивою нормальную форму. Как мы говорили ранее, для этого берем нулевые наборы функции, т. е. наборы, на которых функция принимает значение нуль. Таких наборов у данной функции шесть. Для каждого такого набора записываем элементарную дизъюнкцию, которая, исходя из определения совершенной формы, будет содержать все четыре переменные. Если переменная принимает значение один, то записываем ее с отрицанием.
Таким образом, первый нулевой набор – это набор 0-0-1-0. Ему соответствует элементарная дизъюнкция . Аналогично составляем элементарные дизъюнкции для оставшихся пяти нулевых наборов. Конъюнкция этих элементарных дизъюнкций дает нам совершенную конъюнктивную форму.

Слайд 131

Основным методом минимизации логических функций, представленных в виде совершенных форм, является операция попарного неполного склеивания и элементарного поглощения. Операция попарного склеивания осуществляется между двумя термами – членами, содержащими одинаковые переменные, вхождения которых – прямые и инверсные, совпадают для всех переменных, кроме одной. В этом случае все переменные, кроме одной, можно вынести за скобки, а оставшиеся в скобках прямое и инверсное вхождение одной переменной подвергнуть склейке.

Теперь получим сокращенную ДНФ из построенной СДНФ с помощью законов склеивания. Для более короткой записи и наглядности вместо символов переменных будем работать только с их значениями. Поскольку закон склеивания можно применять только к простым конъюнкциям, отличающимся одной переменной, склеивать можно наборы, различающиеся только одной позицией. Поэтому, выписывая единичные наборы данной булевой функции в таблицу, будем разбивать их на группы в соответствии с количеством единиц в наборах. В первую группу берем набор без единиц, во вторую – наборы с одной единицей, в третью – с двумя единицами, в четвертую – с тремя единицами, в пятую – с четырьмя единицами. Некоторые группы могут быть пустыми. Теперь для применения формулы склеивания достаточно просмотреть все возможные пары наборов, входящих в соседние группы.

В первой полосе таблицы поместим исходные единичные наборы функции. Каждый набор из первой группы проверим на возможность склеивания с каждым набором из второй группы. Затем каждый набор из второй группы проверим на возможность склеивания с каждым набором из третьей группы и т. д. Наборы, которые участвовали в склеивании, отметим крестиком. Во второй полосе таблицы поместим результаты склеивания наборов из первой полосы. Далее аналогичным образом проводим склеивание наборов из второй полосы, записывая результаты в третью полосу, и т. д. После того как процедура склеивания будет завершена, все простые импликанты, находящиеся в таблице, не будут помечены крестиком. Выписав эти импликанты, мы получим сокращенную ДНФ.

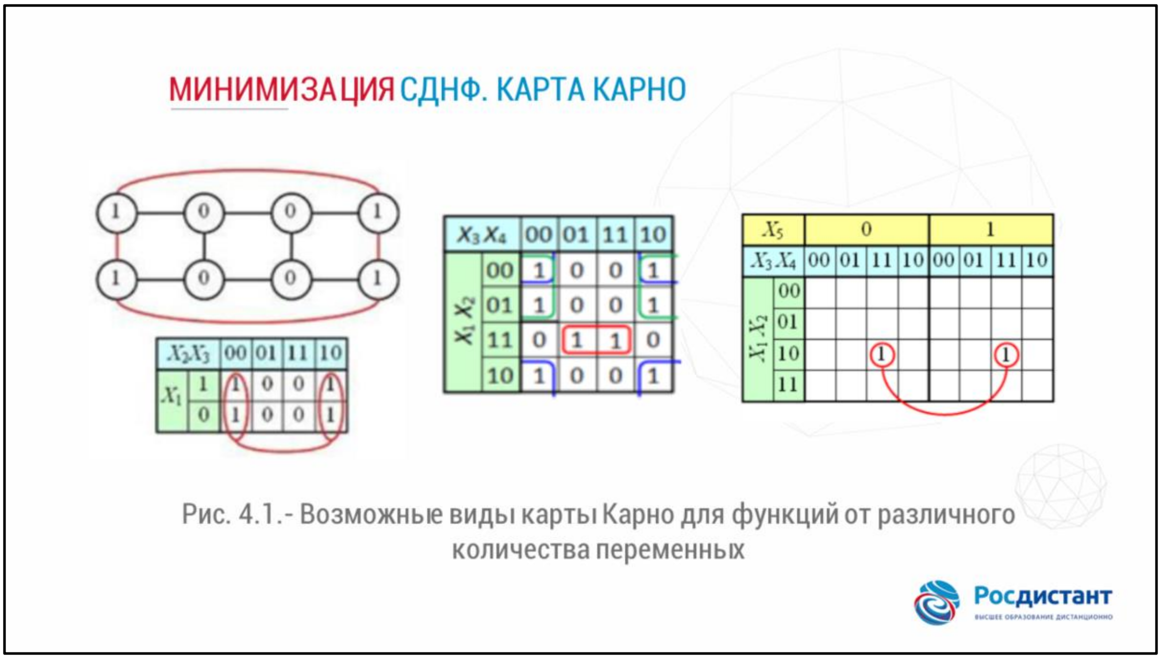


№ простой импликанты	1	2	3	4	5
Простые импликанты / Единичные наборы	$\bar{x}y\bar{t}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{z}\bar{t}$	$\bar{y}t$	$x\bar{z}$
0000		1	1		
0001		1		$\boxed{1}$	
0011				$\boxed{1}$	
0100	$\boxed{1}$		1		
0110	$\boxed{1}$				
1000		1	1		$\boxed{1}$
1001		1		$\boxed{1}$	$\boxed{1}$
1011				$\boxed{1}$	
1100			1		$\boxed{1}$
1101					$\boxed{1}$

Слайд 132

Так как склеивание проводилось максимально возможное количество раз, то некоторые импликанты могут быть излишними. Для того чтобы получить минимальную дизъюнктивную нормальную форму из сокращенной ДНФ, будем использовать следующую таблицу, называемую матрицей Квайна. Ее строки – это исходные единичные наборы функции, столбцы – простые импликанты. На пересечении строки и столбца ставится единица, если значение импликанты на данном наборе равно единице.

Нам необходимо выбрать минимальное количество столбцов так, чтобы они обеспечили единицу в каждой строке. Анализ начинаем с тех строк, в которых одна единица, например, с пятой строки. Выделяем эту единицу, и первая импликанта будет ядровой, затем выделяем все единицы первого столбца. Следующей берем восьмую строку, в которой также одна единица, и четвертая импликанта будет ядровой. Затем рассматриваем последнюю строку и отбираем пятую импликанту. В результате неотмеченной осталась только первая строка, в которой две единицы. Значит, можно взять любую из второй и третьей импликант. В итоге мы получаем две минимальные ДНФ. Они имеют сложность, равную количеству символов переменных в формуле, т. е. сложность девять.



Слайд 133
Рассмотрим еще один способ получения минимальной ДНФ. Он основан на применении карт Карно́, позволяющих достаточно просто работать с большими выражениями. Карта Карно́ – графический способ минимизации переключательных булевых функций, обеспечивающий относительную простоту работы с большими выражениями и устранение потенциальных гонок. Представляет собой операции попарного неполного склеивания и элементарного поглощения.
Карта Карно представляет собой перестроенную соответствующим образом таблицу истинности булевой функции. Она может рассматриваться как плоская развертка n-мерного булева куба. Карты Карно́ применяются для минимизации СДНФ и СКНФ.
Карты Карно были изобретены в 1952 Эдвардом Вейчем и усовершенствованы в 1953 Морисом Карно́, физиком из «Bell Labs», и были призваны помочь упростить цифровые электронные схемы.
В карту Карно наборы значений булевых переменных заносятся из таблицы истинности, при этом они упорядочиваются с помощью кода Грея. В этом коде каждый следующий набор отличается от предыдущего только одной позицией.
Карта Карно для функции n переменных представляет собой таблицу, содержащую две в степени n ячеек. Для этих таблиц следует помнить, что соседними являются клетки, находящиеся в соответственных клетках крайних столбцов и соответственных клетках верхней и нижней строки. Для таблиц 5 и более переменных нужно учитывать также, что квадраты 4х4 виртуально находятся друг над другом в третьем измерении, поэтому соответственные клетки двух соседних квадратов 4х4 являются соседними, и соответствующие им термы можно склеивать. На слайде представлены карты Карно для функций от трех, четырех и пяти переменных.
Далее будут рассмотрены примеры применения карт Карно для минимизации СДНФ для функций трех и четырех переменных.

Слайд 134
Покажем, как используются карты Карно для минимизации СДНФ для функции трех переменных.
Обратимся к примеру, представленному на слайде. Возьмем шаблон карты Карно для трех переменных и расставим в таблице значения заданной функции. Например, пересечение первой строки и первого столбца дает набор (0, 0, 0), и функция на этом наборе принимает значение один.
При отыскании минимальной ДНФ задача состоит в том, чтобы покрыть все единицы прямоугольниками, размеры которых выражаются степенями двойки. Точнее, нас интересуют прямоугольники размеров 2×2, 1×2, 1×4 и т. п. Итак, покрываем все единицы прямоугольниками как можно больших размеров, при этом само количество прямоугольников должно быть минимальным.
Теперь необходимо для каждого прямоугольника записать соответствующую импликанту. Начнем с прямоугольника 2×2, он объединяет две строки, в которых переменная x принимает разные значения, следовательно, в результате склейки получится конъюнкция, не содержащая x. Аналогично уходит переменная z, так как в третьем и четвертом столбцах она принимает разные значения. Переменная y в этих столбах принимает значение один, а значит, в искомую импликанту будет входить y.
Найдем импликанту для второго прямоугольника. Во втором и третьем столбцах разные значения принимает переменная y, поэтому в импликанте она отсутствует, переменная x принимает значение ноль, а значит, в импликанту переменная x войдет с отрицанием, переменная z принимает значение один, она войдет в импликанту без отрицания.
Дизъюнкция двух построенных импликант дает минимальную ДНФ.

КАРТА КАРНО ДЛЯ ФУНКЦИИ ОТ ЧЕТЫРЕХ ПЕРЕМЕННЫХ

x y z t	f(x, y, z, t)
0000	1
0001	1
0010	1
0011	1
0100	1
0101	1
0110	0
0111	1
1000	1
1001	0
1010	1
1011	0
1100	0
1101	0
1110	0
1111	0

2. f(x, y, z, t) = (1111 1101 1010 0000)

xy \ zt	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	1	1	0
11	0	0	0	0
10	1	0	0	1

Получаем минимальную ДНФ:

$$\bar{y}\bar{t} \vee \bar{x}\bar{z} \vee \bar{x}t$$

Сложность минимальной ДНФ равна 6

Слайд 135
Рассмотрим пример применения карт Карно для минимизации СДНФ для функции четырех переменных.
Обратимся к примеру, представленному на слайде. Возьмем шаблон карты Карно для четырех переменных и разместим в таблице значения функции.
Как отмечалось выше, карты Карно можно рассматривать как плоскую развертку n-мерного булева куба, поэтому первая и последняя строки считаются соседними, первый и последний столбцы также считаются соседними. Следовательно, единицы, стоящие в угловых ячейках таблицы, можно объединять в один прямоугольник.
Покроем все единицы прямоугольниками. Начнем с единиц, которые стоят в углах таблицы. Им соответствует прямоугольник размера 2×2. Для единицы, стоящей во второй строке и первом столбце, существует только одна возможность для изображения прямоугольника.
Незатронутыми остались единицы в третьем столбце, их следует объединить с единицами второго столбца.
В результате у нас получилось три прямоугольника. Для каждого из них необходимо записать импликанту. Первый прямоугольник объединяет первую и четвертую строки, которые отличаются значениями переменной x, а переменная y в этих строках принимает значение нуль. Следовательно, в импликанту войдет y со знаком отрицания. В то же время этот прямоугольник объединяет первый и последний столбец, которые отличаются значениями переменной z, а переменная t в этих столбцах принимает значение нуль. Значит, в импликанту войдет t со знаком отрицания.
Второй и третий прямоугольники объединяют первую и вторую строки, которые отличаются значениями переменной y, а переменная x в этих строках принимает значение нуль. Следовательно, в импликанты запишем x под знаком отрицания. Второй прямоугольник, объединяя первый и второй столбец, во вторую импликанту дает z с отрицанием. Анализируя третий прямоугольник, видим, что в соответствующую импликанту войдет переменная t.
Дизъюнкция полученных импликант образует минимальную ДНФ.