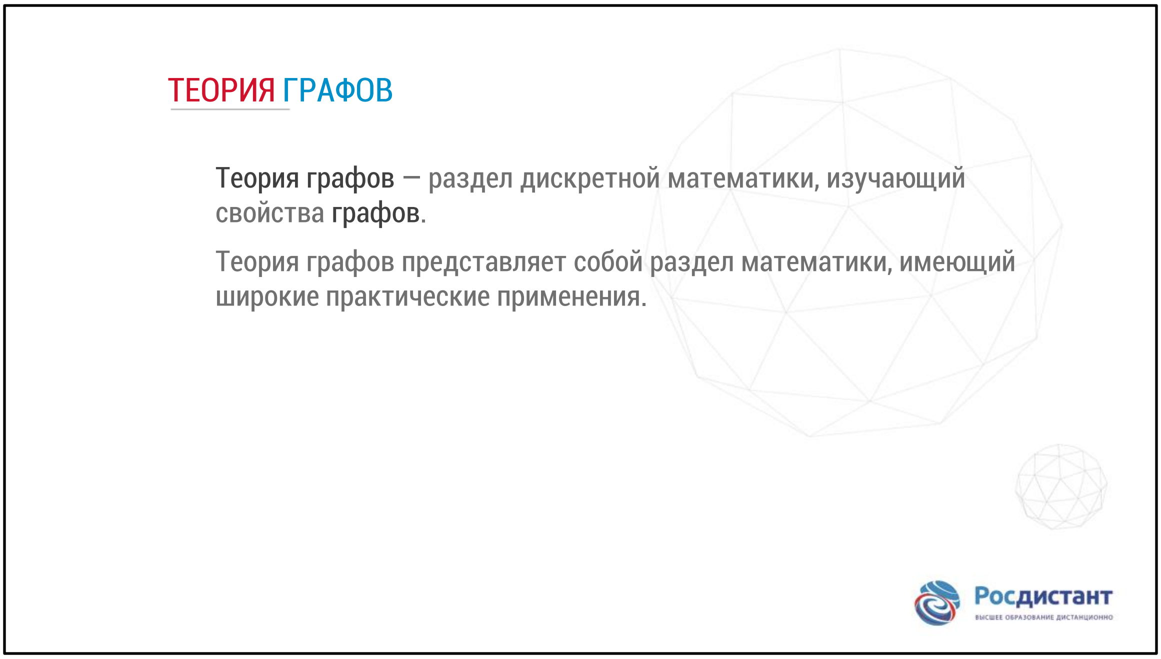
Росдистант

ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ ДИСТАНЦИОННО

ОСНОВЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ И ЛОГИКИ

5 ЧАСТЬ



Слайд 60

Тема 3.1. Понятие графа. Смежность, инцидентность, степени вершин. Способы задания графов

Перейдем к изучению следующего раздела, а именно, рассмотрению теории графов. В терминах теории графов формулируется большое число задач, связанных с дискретными объектами. Такие задачи возникают при проектировании интегральных схем и схем управления, электрических цепей, блок-схем программ, в экономике, статистике, химии, биологии и в других областях. Теория графов становится одной из существенных частей математического аппарата кибернетики, языком дискретной математики.

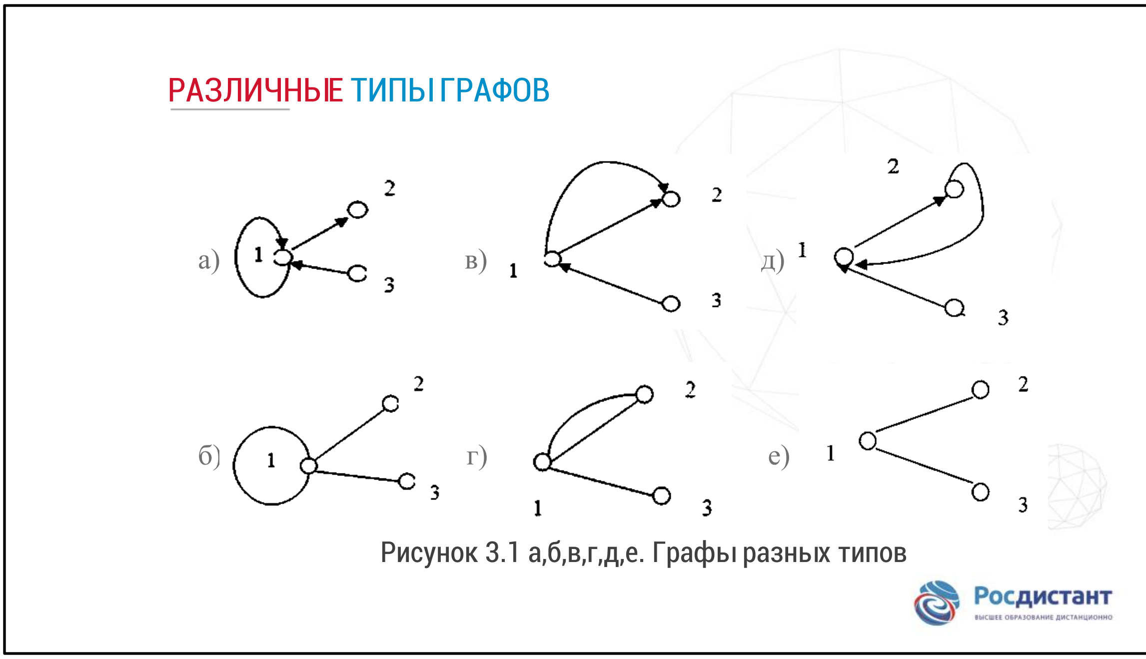
В отличие от других научных дисциплин, теория графов имеет вполне определенную дату рождения. Первая работа по теории графов, написанная швейцарским математиком Леонардом Эйлером, жившим в 1707–1783, была опубликована в 1736 году в Трудах Академии наук в Санкт-Петербурге. Исследование Эйлера было проведено в связи с популярной в то время задачей о кёнигсбергских мостах. С этой задачей мы познакомимся позднее.

Однако результат, полученный Эйлером, более ста лет оставался единственным результатом теории графов. Развитие теории графов в конце XIX и начале XX века было связано с распространением представлений о молекулярном строении вещества и становлением теории электрических цепей. К 50-м годам нашего века в теории графов сложились два различных направления: алгебраическое и оптимизационное.

Например, поиск ответа на поставленный в задаче о кёнигсбергских мостах вопрос относится к алгебраическому направлению теории графов. Изменим эту задачу. Отличие полученной задачи состоит в том, что требуется найти маршрут, по которому житель, выйдя из дома, пройдет по каждому мосту хотя бы один раз и вернется домой, причем длина маршрута должна быть минимальной.

Задача поиска такого маршрута относится к оптимизационному направлению теории графов.

Оптимизационное направление получило широкое развитие благодаря появлению ЭВМ, так как для эффективного использования ЭВМ при решении прикладных задач с использованием теории графов необходимы эффективные алгоритмы решения графовых задач.



Слайд 61

Графом G в широком смысле называется любая пара вида (V, E) , где V – непустое множество элементов произвольной природы, а E – семейство пар элементов из V . Причем допускаются пары вида (v, v) и повторяющиеся пары (u, v) , где элементы u и v различны. Если множества V и E конечны, то граф называется конечным. Мы будем рассматривать только конечные графы.

Если пары в V рассматриваются как неупорядоченные, то граф называется неориентированным, если как упорядоченные, то граф называется ориентированным, или орграфом.

Элементы множества V называются вершинами графа, а пары из E – его ребрами. Ребра орграфа называют также ориентированными ребрами, или дугами, а ребра неориентированного графа – неориентированными ребрами. Пара вида (v, v) называется петлей в вершине v. Если пара (u, v) встречается в E более одного раза, то говорят, что (u, v) – кратное ребро. Говорят, что ребро (u, v) в неориентированном графе соединяет вершины u и v, а в ориентированном графе дуга (u, v) идет из вершины u в вершину v.

Граф с петлями называют псевдографом. Граф с кратными ребрами, но без петель называют мультиграфом. Графом в узком смысле называется граф без петель и кратных ребер.

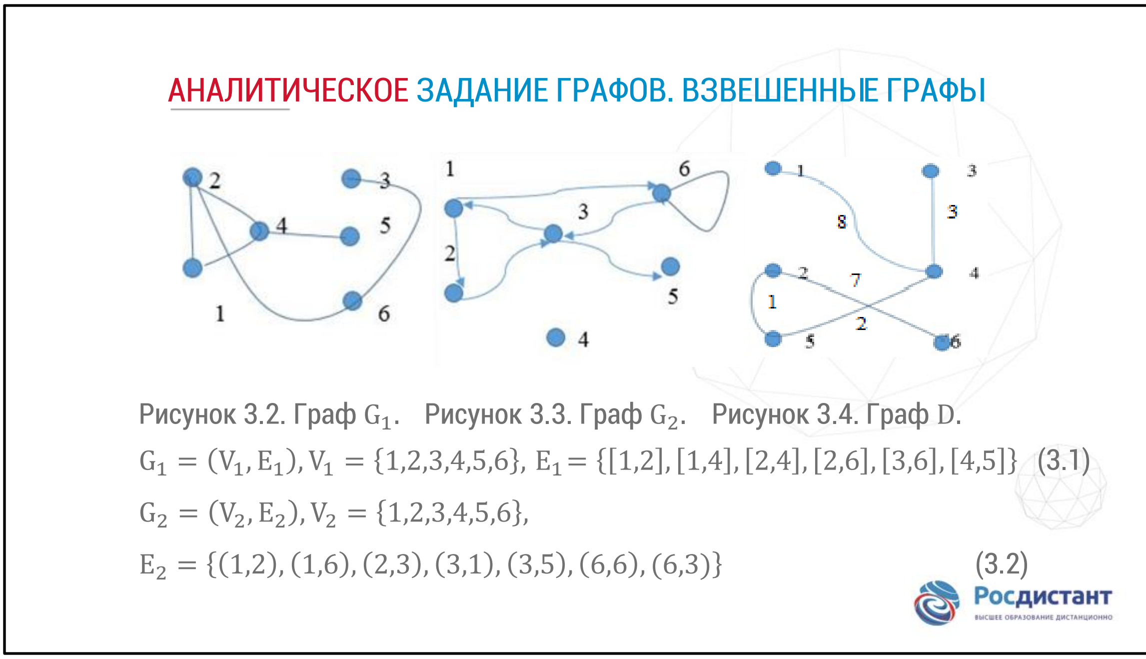
Договоримся изображать графы на плоскости следующим образом. Вершины будем изображать точками, а каждое ребро (u, v) – линией, соединяющей точки u и v. Если (u, v) – дуга, то на этой линии будем указывать стрелку от u к v.

На рис. 3.1 представлены различные типы графов:

а), б) – ориентированный и неориентированный псевдографы;

в), г) – ориентированный и неориентированный мультиграфы;

д), е) – ориентированный и неориентированный графы в узком смысле.



Слайд 62

Графы можно задавать аналитически, указывая множества их вершин и ребер. Для того чтобы различать при таком задании ориентированные и неориентированные графы, договоримся для обозначения дуг использовать круглые скобки, а для обозначения неориентированных ребер – квадратные скобки.

Формулы (3.1) и (3.2) задают неориентированный и ориентированный графы. Их геометрические изображения представлены на рис. 3.2 и 3.3 соответственно.

Граф называется взвешенным, если каждому его ребру приписан некоторый вес, выражаемый числом. Пример взвешенного графа приведен на рис. 3.4.

Взвешенные графы часто используются в прикладных задачах. Весовые числа могут обозначать, например, стоимость перевозок или расстояния между пунктами.

СМЕЖНОСТЬ, ИНЦИДЕНТНОСТЬ, СТЕПЕНИ ВЕРШИН

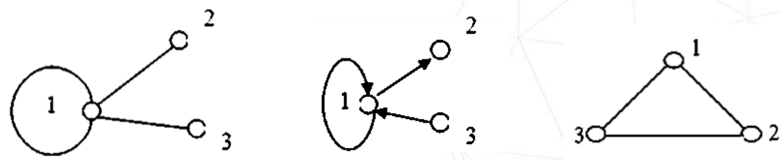


Рисунок 3.5. Граф G. Рисунок 3.6. Граф D. Рисунок 3.7. Граф F.

$\delta(\mathrm{v})$ – степень вершины v (3.3)

$\delta^-(\mathrm{v}), \delta^+(\mathrm{v})$ – полустепени исхода и захода вершины v (3.4)

$\delta(1) = 4, \delta(2) = \delta(3) = 1$ (3.5)

$\delta^-(1) = \delta^+(1) = 1, \delta^-(2) = \delta^+(3) = 0, \delta^-(3) = \delta^+(2) = 1$ (3.6)

Росдистант

Слайд 63

Две вершины в графе G называются смежными, если существует ребро, которое их соединяет. Пусть u , v – вершины, e – ребро, их соединяющее. Тогда вершина u и ребро e называются инцидентными, вершина v и ребро e также называются инцидентными. Два ребра, инцидентные одной и той же вершине, называются смежными.

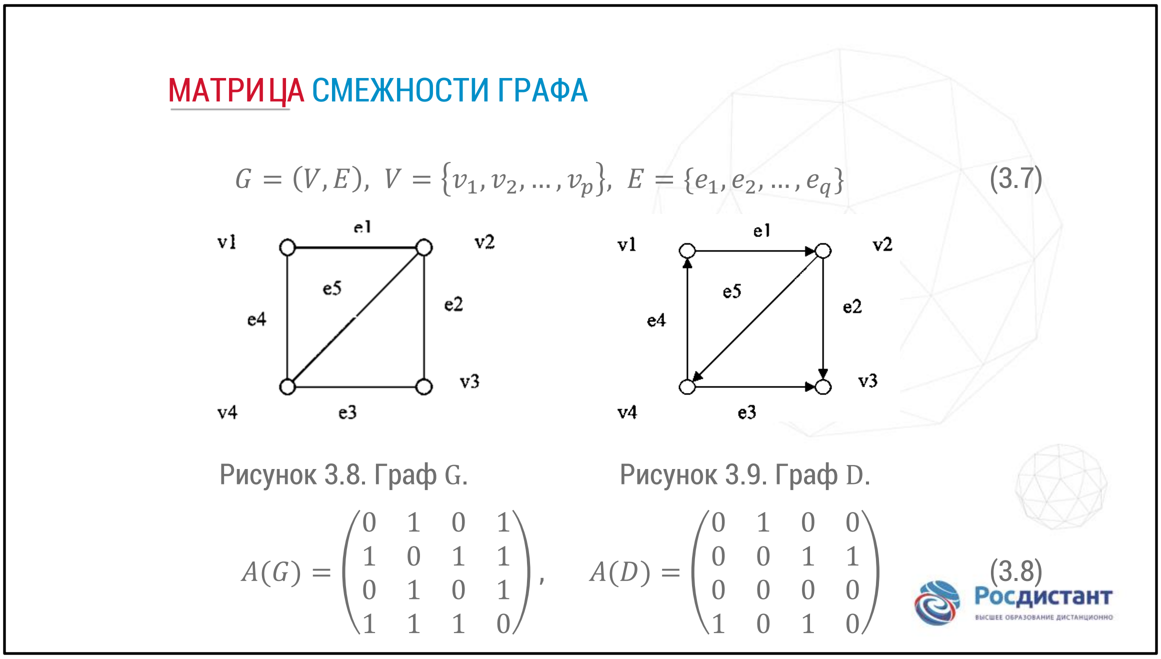
В качестве примера рассмотрим граф G, изображенный на рис. 3.5. В нем смежными являются вершины 1 и 2, 1 и 3, 1 и 1, а также ребра $(1, 2)$ и $(1, 1)$, $(1, 3)$ и $(1, 1)$, $(1, 2)$ и $(1, 3)$. Ребро $(1, 2)$ инцидентно вершинам 1 и 2, ребро $(1, 3)$ – вершинам 1 и 3, ребро $(1, 1)$ – вершине 1.

Степенью вершины v неориентированного графа G называется число ребер, инцидентных вершине v. Полустепенью исхода вершины v орграфа G называется число дуг, выходящих из вершины v. Полустепенью захода вершины v орграфа G называется число дуг, входящих в вершину v. Обозначения для введенных выше понятий приведены в формулах (3.3) и (3.4).

В случае неориентированного псевдографа вклад каждой петли при расчете степени инцидентной вершины равен 2. В случае ориентированного псевдографа каждая петля дает вклад 1 при расчете полустепени исхода и вклад 1 при расчете полустепени захода. В формуле (3.5) указаны степени вершин графа G, изображенного на рис. 3.5, а в формуле (3.6) – полустепени вершин графа D, изображенного на рис. 3.6.

Вершина графа, не инцидентная ни одному ребру, называется изолированной. Вершина, инцидентная только одному ребру, причем не петле, называется висячей.

Неориентированный граф называется регулярным, или однородным, если степени всех его вершин одинаковы. Пример регулярного графа F приведен на рис. 3.7.



Слайд 64

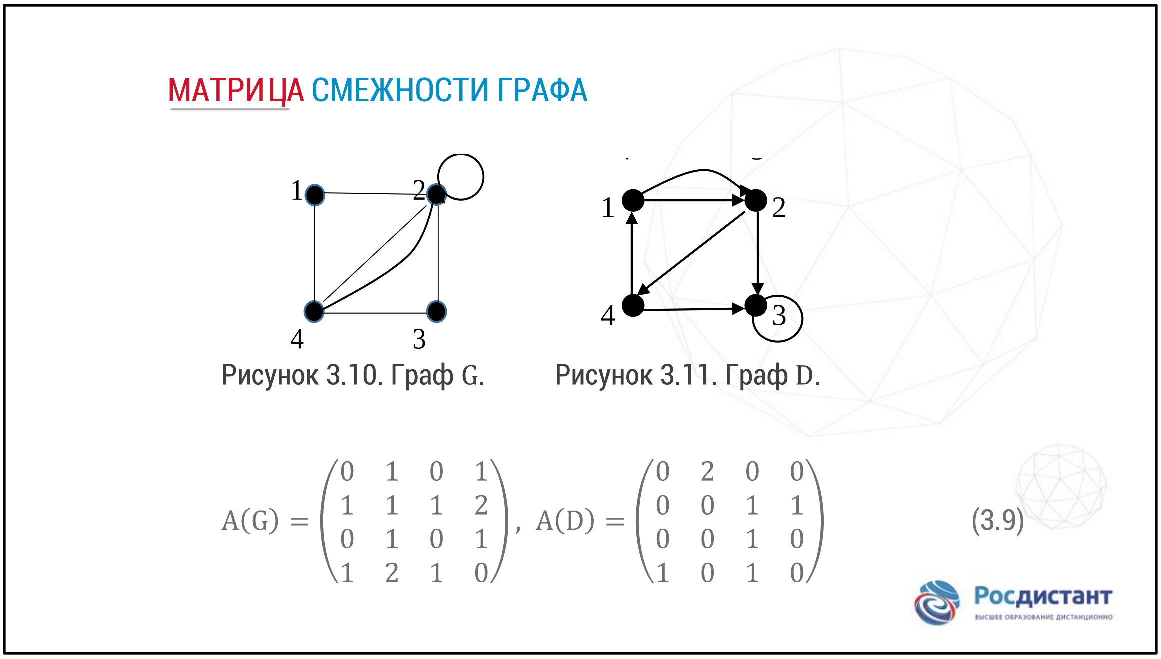
Пусть G – ориентированный или неориентированный граф, заданный формулой (3.7).

Матрицей смежности неориентированного графа G называется квадратная матрица A порядка p, каждый элемент a_{ij} которой равен количеству ребер, соединяющих вершину v_i с вершиной v_j.

Матрицей смежности ориентированного графа G называется квадратная матрица A порядка p, каждый элемент a_{ij} которой равен количеству дуг, выходящих из вершины v_i и входящих в вершину v_j.

Рассмотрим неориентированный граф G и орграф D, изображенные на рис. 3.8 и 3.9 соответственно. Матрицы смежности данных графов представлены формулой (3.8).

Заметим, что матрица смежности неориентированного графа является симметричной.



Слайд 65

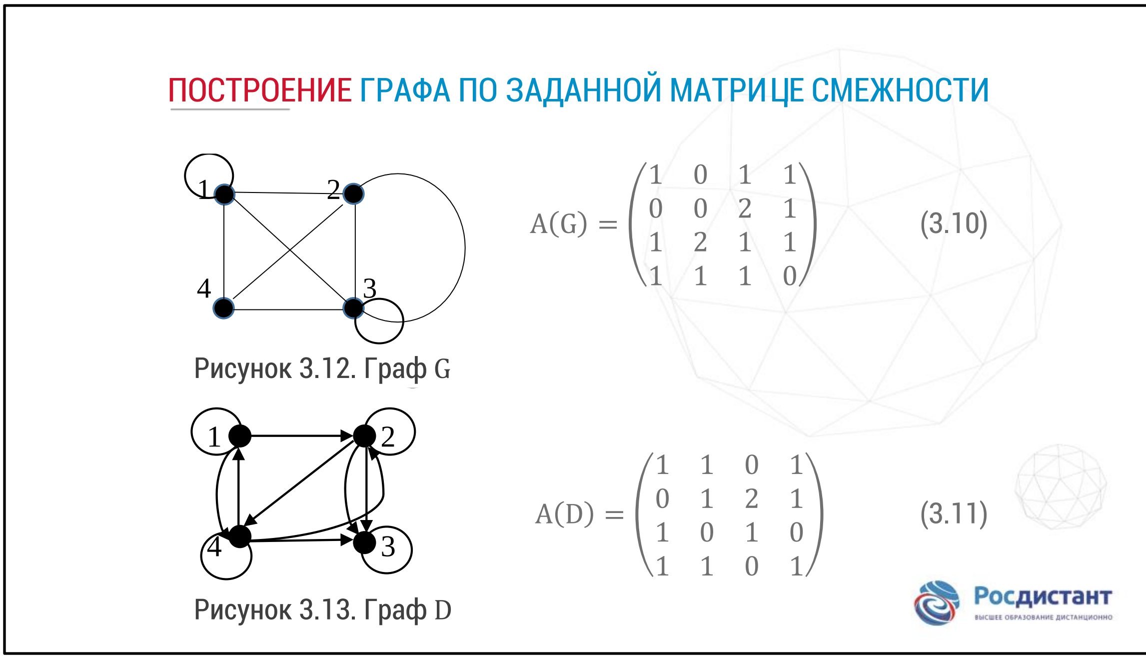
Построим матрицы смежности для графов, содержащих петли и кратные ребра. Рассмотрим неориентированный граф G и орграф D, изображенные на рис. 3.10 и 3.11 соответственно.

Наличие петли в вершине 2 графа G говорит о том, что элемент, стоящий во второй строке и во втором столбце матрицы смежности, равен 1. Два ребра, соединяющие вершины 2 и 4 графа G , показывают, что элемент матрицы смежности, расположенный во второй строке и в четвертом столбце, равен 2. Таким же будет элемент, стоящий в четвертой строке и во втором столбце.

В вершине 3 графа D имеется петля, а значит, элемент, расположенный в третьем столбце и в третьей строке матрицы смежности, равен 1. Из вершины 1 в вершину 2 идут две дуги. Это говорит о том, что элемент, стоящий в первой строке и во втором столбце, равен 2.

Матрицы смежности графов G и D представлены формулой (3.9).

По заданному геометрическому изображению графа всегда можно составить его матрицу смежности. И наоборот, если задана матрица смежности, то определяемый ею граф можно изобразить геометрически.



Слайд 66

Рассмотрим примеры построения геометрических изображений графов по заданным матрицам смежности.

Сначала рассмотрим матрицу смежности неориентированного графа G , заданную формулой (3.10). Проанализируем данную матрицу. Вершины графа будем обозначать цифрами 1, 2, 3, 4.

Две двойки в матрице смежности графа G говорят о том, что вершины 2 и 3 соединяются двумя ребрами. Имеющиеся в матрице нули показывают, что в графе нет ребер, соединяющих вершины 1 и 2, и нет петель в вершинах 2 и 4. Единицы, присутствующие в матрице смежности, свидетельствуют о том, что в вершинах 1 и 3 имеются петли и каждая из пар вершин (1, 4), (1, 3), (3, 4), (2, 4) соединяется одним ребром.

Изображение графа G представлено на рис. 3.12.

Теперь обратимся к матрице смежности графа ориентированного графа D , заданной формулой (3.11). Имеющаяся в матрице двойка говорит о том, что из вершины 2 в вершину 3 идут две дуги. Единицы на главной диагонали матрицы показывают, что в каждой вершине есть петля. Остальные единицы свидетельствуют о том, что по одной дуге идет из вершины 1 в вершины 2 и 4, из вершины 2 в вершину 4, из вершины 3 в вершину 1, из вершины 4 в вершину 1 и из вершины 4 в вершину 2.

Изображение графа D представлено на рис. 3.13.

МАТРИЦА ИНЦИДЕНТНОСТИ ГРАФА

$$G=(V,E),\ V=\{v_1,v_2,\dots,v_p\},\ E=\{e_1,e_2,\dots,e_q\} \qquad (3.12)$$

$$b_{ij}=\begin{cases}1, \text{если } v_i - \text{конец дуги } e_j\\ -1, \text{если } v_i - \text{начало дуги } e_j\\ 0, \text{если } v_i \text{ не инцидентна дуге } e_j\end{cases} \qquad (3.13)$$

$$b_{ij}=\begin{cases}1, \text{если } v_i \text{ инцидентна ребру } e_j\\ 0, \text{если } v_i \text{ не инцидентна ребру } e_j\end{cases} \qquad (3.14)$$

Росдистант
высшее образование дистанционно

Слайд 67

Пусть G – ориентированный или неориентированный граф, заданный формулой (3.12).

Матрицей инцидентности орграфа G без петель называется матрица B размера p x q, элементы которой определяются формулой (3.13).

Матрицей инцидентности неориентированного графа G без петель называется матрица B размера p

x q , элементы которой определяются формулой (3.14).

Если G псевдограф и e_j – петля в вершине v_i, то элемент b_{ij} матрицы B равен 1, а остальные элементы j-го столбца равны нулю.

Таким образом, каждый столбец матрицы инцидентности содержит либо только два ненулевых элемента, либо только один ненулевой элемент.

По заданному геометрическому изображению графа всегда можно составить его матрицу инцидентности. И наоборот, если задана матрица инцидентности, то определяемый ею граф можно изобразить геометрически.

МАТРИЦА ИНЦИДЕНТНОСТИ ГРАФА

$$B(G)=\begin{pmatrix}1&0&0&1&0\\1&1&0&0&1\\0&1&1&0&0\\0&0&1&1&1\end{pmatrix},\ B(D)=\begin{pmatrix}-1&0&0&1&0\\1&-1&0&0&-1\\0&1&1&0&0\\0&0&-1&-1&1\end{pmatrix}\qquad(3.15)$$

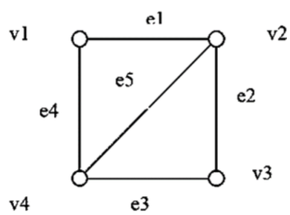


Рисунок 3.14. Граф G

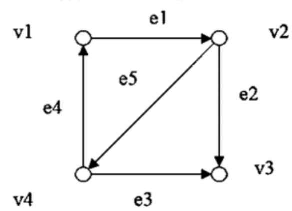


Рисунок 3.15. Граф D

Слайд 68

Рассмотрим неориентированный граф G и орграф D , изображенные на рис. 3.14 и 3.15 соответственно. Матрицы инцидентности данных графов представлены формулой (3.15).

Наряду с матрицами смежности и инцидентности для задания графов используются списки смежности.

Для построения списка смежности в случае неориентированного графа рядом с каждой его вершиной приводится перечень смежных с ней вершин. В случае орграфа рядом с каждой вершиной перечисляют концы всех дуг, выходящих из данной вершины. При этом при наличии кратных ребер рядом с соответствующими смежными вершинами в скобках указывают кратности.

Так, для графа G на рис. 3.14 рядом с вершиной v_1 мы должны указать вершины v_2 и v_4, рядом с вершиной v_2 вершины v_1, v_3, v_4, рядом с v_3 – вершины v_2 и v_4, рядом с v_4 – вершины v_1, v_2, v_3.

Для графа D на рис. 3.15 рядом с вершиной v_1 мы должны записать вершину v_2, рядом с вершиной v_2 – вершины v_3 и v_4, для вершины v_3 перечень будет пустым, рядом с вершиной v_4 следует записать вершины v_1 и v_3.

МАТРИЦА ИНЦИДЕНТНОСТИ И СПИСОК СМЕЖНОСТИ

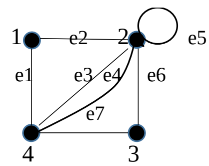


Рисунок 3.16. Граф G.

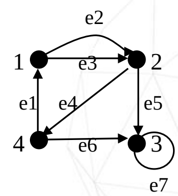


Рисунок 3.17. Граф D.

$$B(G)=\begin{pmatrix}1&1&0&0&0&0&0\\0&1&1&1&1&1&0\\0&0&0&0&0&1&1\\1&0&1&1&0&0&1\end{pmatrix},\ B(D)=\begin{pmatrix}1&-1&-1&0&0&0&0\\0&1&1&-1&-1&0&0\\0&0&0&0&1&1&1\\-1&0&0&1&0&-1&0\end{pmatrix} \quad (3.16)$$

G:

1	2	3	4
2,4	1,2,3,4(2)	2,4	1,2(2),3

D:

1	2	3	4
2(2)	3,4	3	1,3

(3.17)

Росдистант

Слайд 69

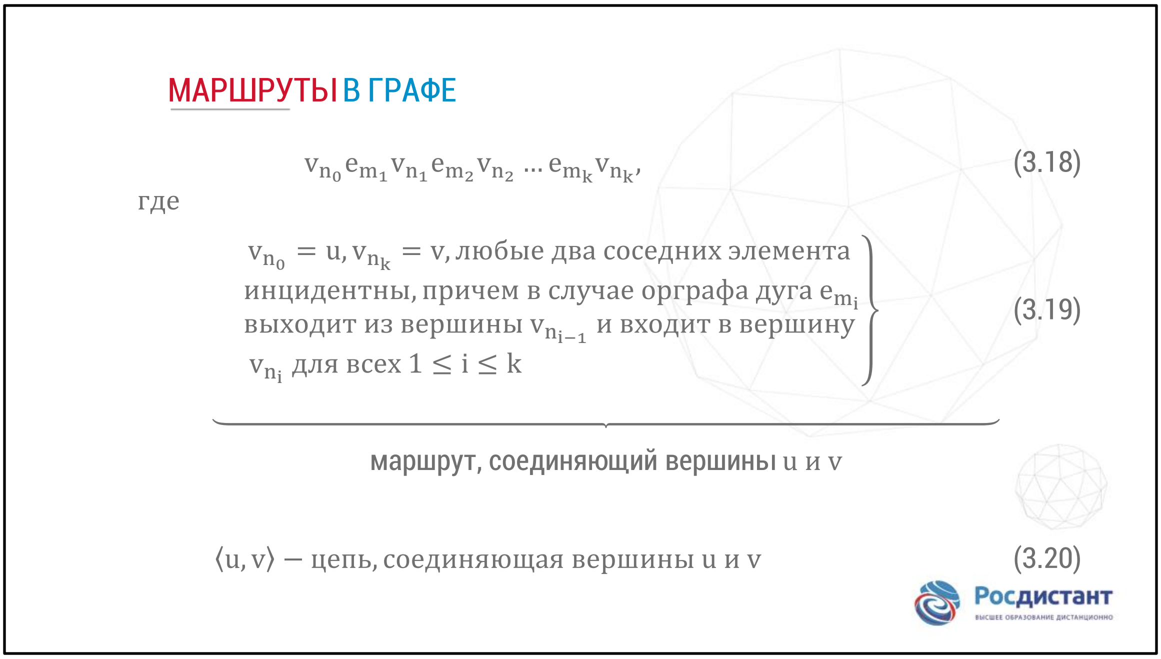
Построим матрицы инцидентности и списки смежности для графов G и D, изображенных на рис. 3.16 и 3.17 соответственно.

Каждый из рассматриваемых графов имеет 7 ребер и 4 вершины, а значит, их матрицы инцидентности содержат 7 столбцов и 4 строки. Пятое ребро графа G является петлей в вершине 2.

Поэтому в пятом столбце матрицы инцидентности этого графа во второй строке стоит единица, а в остальных строках – нули. Аналогично седьмое ребро графа D является петлей в вершине 3. Соответственно, седьмой столбец матрицы инцидентности данного графа имеет единицу в третьей строке и нули в остальных строках.

Матрицы инцидентности графов G и D представлены формулой (3.16).

Табл. 3.17 задает списки смежности рассматриваемых графов. Каждый из графов G и D имеет по одному ребру кратности 2. Эта кратность указана в скобках при перечислении смежных вершин. В графе G кратным является ребро, соединяющее вершины 2 и 4, а в графе D – ориентированное ребро, идущее из вершины 1 в вершину 2.



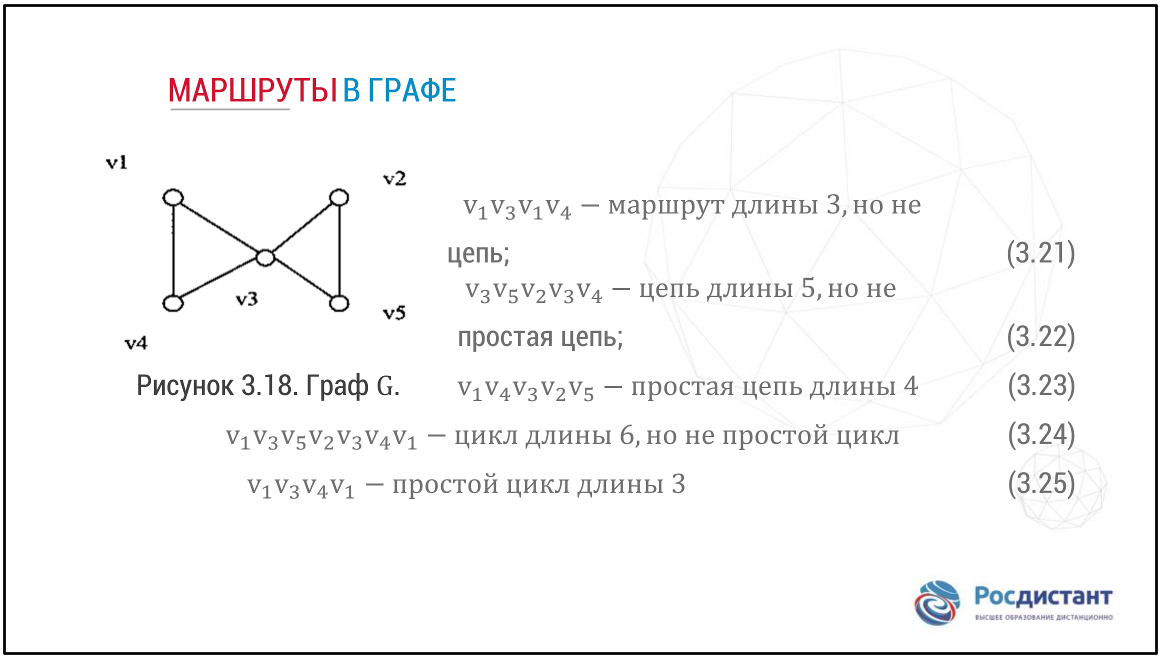
Слайд 70

Маршрутом, соединяющим вершины u и v в графе G, называется чередующаяся последовательность вершин и ребер, определяемая формулой (3.18) с условиями (3.19). Вершины u и v называются начальной и конечной вершинами маршрута, остальные вершины называются внутренними. Число ребер в маршруте называется длиной маршрута. Заметим, что для задания маршрута достаточно указать начальную вершину и последовательность ребер. В случае графа без кратных ребер для задания маршрута достаточно указать последовательность вершин.

Если начальная и конечная вершины маршрута совпадают, то маршрут называется замкнутым, или циклическим, в противном случае – открытым.

Если все ребра в маршруте различны, то маршрут называется цепью. Если все вершины, кроме, быть может, начальной и конечной, в маршруте различны, то маршрут называется простой цепью. В цепи начальная и конечная вершины называются концами цепи. Говорят, что цепь с концами u и v соединяет вершины u и v. Обозначение цепи, соединяющей вершины u и v, приведено в формуле (3.20).

Если существует цепь, соединяющая вершины u и v, то существует и простая цепь, соединяющая эти вершины. Замкнутая цепь называется циклом; замкнутая простая цепь – простым циклом. Граф без циклов называется ациклическим. Для орграфов цепь называют также путем, а цикл – контуром.



Слайд 71

Рассмотрим примеры различных маршрутов на графе.

Обратимся к графу G , изображенному на рис. 3.18. В формуле (3.21) представлен маршрут длины три, который не является цепью, так как в этой последовательности ребро (v_1, v_3) повторяется.

В формуле (3.22) представлена цепь длины 5, которая не является простой цепью, так как в этой последовательности повторяется вершина v_3.

В формуле (3.23) представлена простая цепь длины четыре, так как в этой последовательности все ребра и вершины различны.

В формуле (3.24) представлен цикл длины шесть, который не является простым, так как в этой последовательности повторяется вершина v_3.

В формуле (3.25) представлен простой цикл длины три.