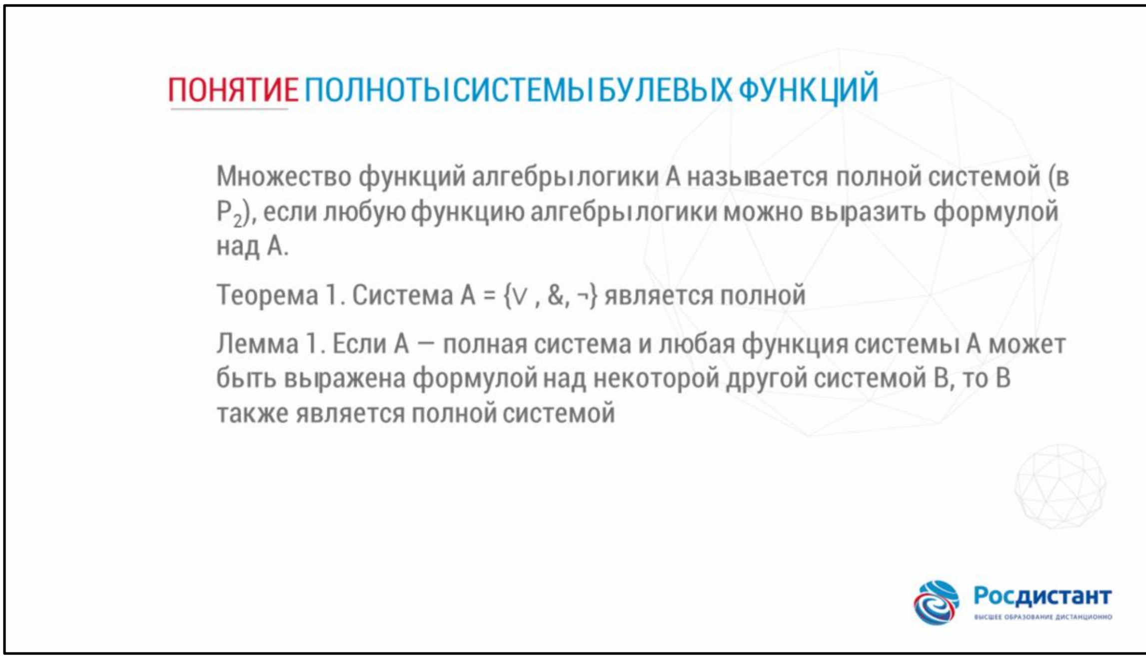
Росдистант

ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ ДИСТАНЦИОННО

ОСНОВЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ И ЛОГИКИ

11 ЧАСТЬ



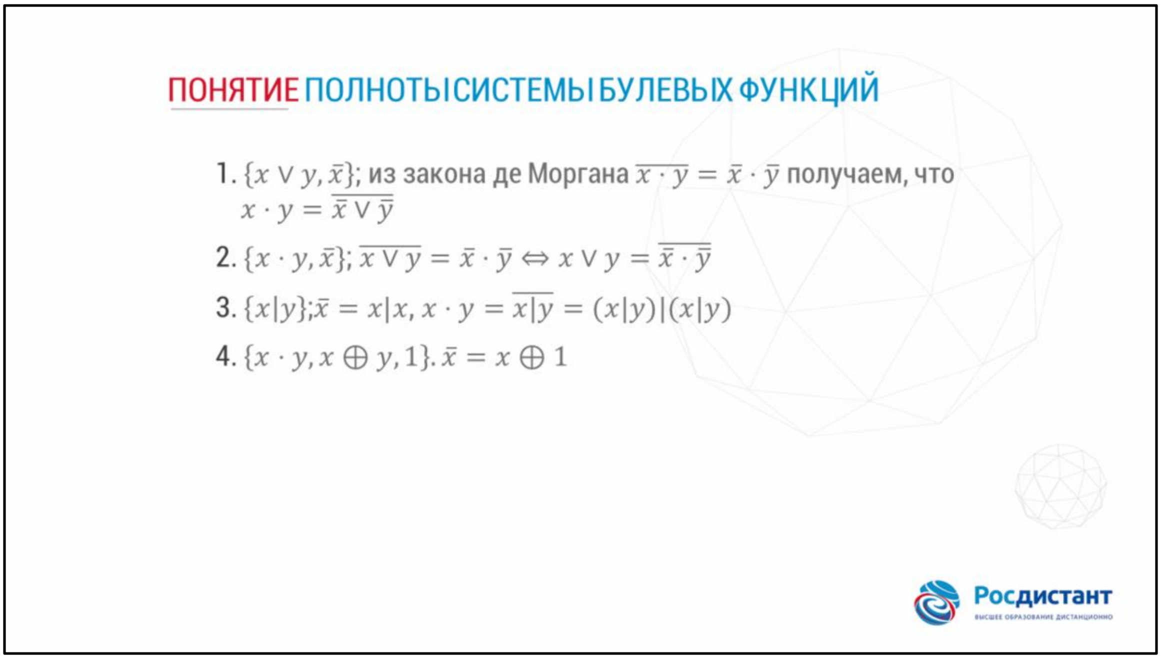
Слайд 136
Тема 4.4. Понятие полноты системы булевых функций. Теорема Жегалкина. Замкнутые классы. Теорема о полноте

Система A функций алгебры логики называется полной во множестве всех булевых функций, если любую функцию алгебры логики можно выразить формулой над A. Другими словами, система полна, если каждую булеву функцию можно задать формулой, в которой задействованы только функции данной системы.

С одной из таких систем мы уже знакомы. Поскольку любую булеву функцию можно выразить через операции дизъюнкции, конъюнкции и отрицания, то система, образованная этими функциями, является полной.

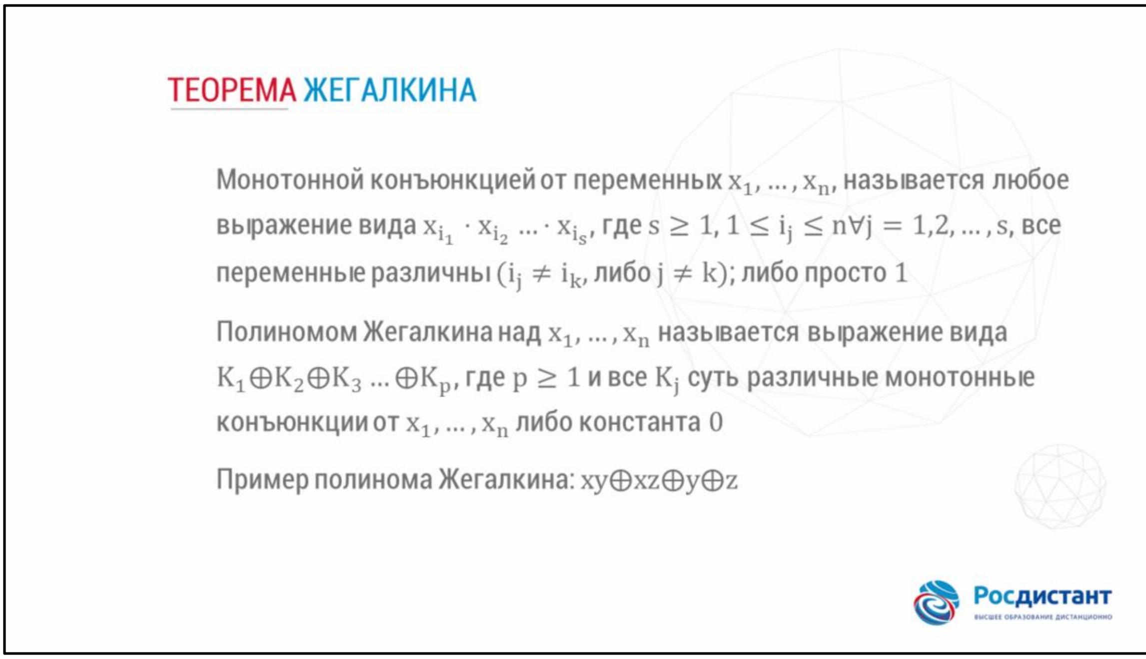
Приведенная лемма позволяет на основе полноты некоторой системы булевых функций доказывать полноту других систем. Для этого достаточно показать, что функции полной системы выражаются через функции второй системы.

Далее будут рассмотрены различные примеры полных систем.



Слайд 137

Рассмотрим примеры доказательств полноты систем функций.
Докажем полноту систем 1–4. Система 1 отличается от известной полной системы тем, что в ней отсутствует операция конъюнкции. Следовательно, для доказательства полноты системы 1 достаточно показать, что конъюнкцию можно выразить через отрицание и дизъюнкцию, а для этого, как известно, используются законы де Моргана.
Аналогично для доказательства полноты системы 2 с помощью законов де Моргана выражаем дизъюнкцию через отрицание и конъюнкцию.
Для доказательства полноты системы 3 используем полную систему 2 и выражаем операции этой системы – конъюнкцию и отрицание – через операцию штрих Шеффера. Справедливость приведенных равенств следует из таблиц истинности соответствующих функций.
Для доказательства полноты системы 4 используем полную систему 2. Поскольку в систему 4 входит конъюнкция, то остается только отрицание выразить через сумму по модулю два и единицу.



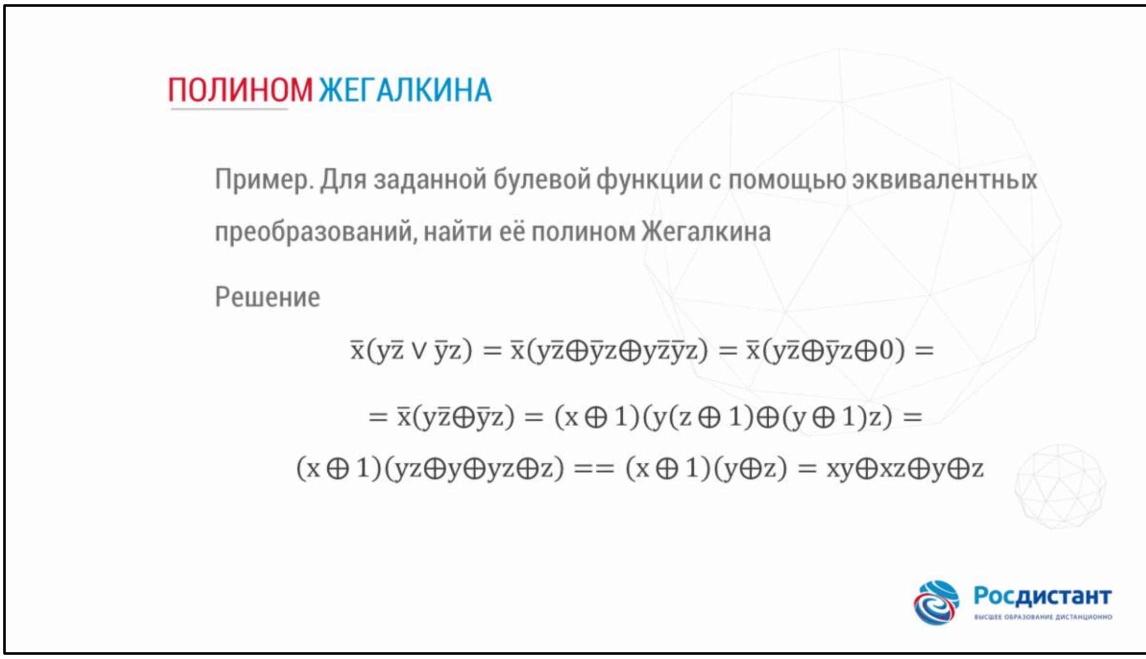
Слайд 138

Полином – это синоним слова «многочлен». Полином Жегалкина представляет собой запись булевой функции только с помощью тождественной единицы, операций конъюнкции и сложения по модулю два.

Определение полинома Жегалкина дается с помощью понятия монотонной конъюнкции. Отметим, что частным случаем монотонной конъюнкции является константа один.

Как видно из приведенного на слайде определения, полином Жегалкина представляет собой сумму по модулю два различных монотонных конъюнкций. Частным случаем многочлена Жегалкина является константа ноль.

Поскольку система функций, содержащая конъюнкцию, сумму по модулю два и тождественную единицу, является полной, то всякая булева функция представляется в виде полинома Жегалкина. Более того, можно доказать, что такое представление единственно.



Слайд 139

Рассмотрим методы получения полинома Жегалкина для функций, заданных формулой или таблично. Для нахождения полинома Жегалкина функции, заданной формулой, нужно выразить все встречающиеся в данном выражении булевы функции через сумму по модулю два и конъюнкцию. Затем, пользуясь свойствами функций, максимально упростить полученное выражение. Обратимся к примеру, представленному на слайде. Исходная функция представляет собой конъюнкцию одной отрицаемой переменной и дизъюнкции. Выполним преобразования, приводящие эту формулу к полиному Жегалкина. Сначала выразим дизъюнкцию через сумму по модулю два. Затем последнее слагаемое в скобках заменим нулем, который в дальнейшем можно отбросить. Далее выразим отрицание через сумму по модулю два и единицу. Затем применим закон дистрибутивности, раскроем скобки и приведем подобные слагаемые. Осталось еще раз применить закон дистрибутивности и получить полином Жегалкина.

ПОЛИНОМ ЖЕГАЛКИНА ДЛЯ ТАБЛИЧНО ЗАДАННОЙ ФУНКЦИИ

1 способ. Пусть $n = 3$. Справедлива формула

$$f(x,y,z) = \sum_{\substack{(a,b,c) \\ f(a,b,c)=1}} (x \oplus \bar{a})(y \oplus \bar{b})(z \oplus \bar{c})$$

Данная формула получается из СДНФ путем замен
$a \vee b = a \oplus b$ (В общем случае $a \vee b = a \oplus b \oplus ab$, но для импликант
a и b в СДНФ $ab = 0$) и $\bar{a} = a \oplus 1$

Росдистант
высшее образование дистанционно

Слайд 140

Если булева функция задана с помощью ее таблицы истинности, то существуют два способа построения соответствующего ей полинома Жегалкина. Первый из них основан на использовании совершенной дизъюнктивной нормальной формы данной функции.

Для получения многочлена Жегалкина из СДНФ нужно заменить дизъюнкцию элементарных конъюнкций на сумму по модулю два. В получившемся выражении вместо каждой отрицаемой переменной надо записать сумму по модулю два этой переменной без знака отрицания и единицы. В результате указанных преобразований мы получим формулу, представленную на слайде. Сумма в ней понимается как сумма по модулю два. Суммирование осуществляется по всем наборам, на которых функция равна единице. Приведенная здесь формула показывает, как устроен полином Жегалкина для функции трех аргументов. Она допускает обобщение на случай любого числа переменных.

ПОЛИНОМ ЖЕГАЛКИНА ДЛЯ ТАБЛИЧНО ЗАДАННОЙ ФУНКЦИИ

x y z	f(x, y, z)
000	0
001	1
010	1
011	1
100	0
101	0
110	1
111	1

$$(x\oplus\bar{0})(y\oplus\bar{0})(z\oplus\bar{1})\oplus(x\oplus\bar{0})(y\oplus\bar{1})(z\oplus\bar{1})\oplus$$
$$\oplus(x\oplus\bar{1})(y\oplus\bar{1})(z\oplus\bar{1})\oplus(x\oplus\bar{0})(y\oplus\bar{1})(z\oplus\bar{0})\oplus$$
$$\oplus(x\oplus\bar{1})(y\oplus\bar{1})(z\oplus\bar{0})=$$

$$=(x\oplus 1)(y\oplus 1)(z\oplus 0)\oplus(x\oplus 1)(y\oplus 0)(z\oplus 0)\oplus$$
$$\oplus(x\oplus 0)(y\oplus 0)(z\oplus 0)\oplus(x\oplus 1)(y\oplus 0)(z\oplus 1)\oplus$$
$$\oplus(x\oplus 0)(y\oplus 0)(z\oplus 1)=xyz\oplus$$

$$\oplus(x\oplus 1)(y\oplus 1)z\oplus(x\oplus 1)yz\oplus(x\oplus 1)y(z\oplus 1)\oplus$$

$$\oplus xy(z\oplus 1)=xyz\oplus xz\oplus yz\oplus z\oplus xyz\oplus yz\oplus xyz\oplus$$
$$\oplus xyz\oplus xyz\oplus yz\oplus xy\oplus xy\oplus y = xz\oplus xyz\oplus yz\oplus z\oplus y$$

Слайд 141

Покажем на примере, как применяется приведенная формула для получения полинома Жегалкина таблично заданной функции.

Обратимся к функции, представленной на слайде. Данная функция на пяти наборах принимает значение, равное единице. Следовательно, при записи полинома Жегалкина в сумме будет пять слагаемых. В скобках к каждой переменной прибавляется отрицание ее значения в соответствующем наборе.

Сначала вычисляем отрицания констант и отбрасываем нули в суммах по модулю два. Затем раскрываем скобки, используя закон дистрибутивности.

Далее приводим подобные слагаемые. Если одно и то же выражение встречается в сумме четное число раз, то в результате оно пропадает. Если же слагаемое участвует в сумме нечетное число раз, то оно остается в результирующей сумме.

Окончательно получаем многочлен Жегалкина, содержащий пять слагаемых.

ПОЛИНОМ ЖЕГАЛКИНА ДЛЯ ТАБЛИЧНО ЗАДАННОЙ ФУНКЦИИ

x y z	f(x, y, z)
000	0
001	1
010	0
011	1
100	0
101	0
110	0
111	1

Пусть $n = 3$. Полином для булевой функции ищем в виде

$f(x,y,z) = a_0 \oplus a_1 x \oplus a_2 y \oplus a_3 z \oplus a_4 xy \oplus a_5 xz \oplus a_6 yz \oplus a_7 xyz$

$f(0,0,0) = a_0 \oplus a_1 \cdot 0 \oplus a_2 \cdot 0 \oplus a_3 \cdot 0 \oplus a_4 \cdot 0 \oplus a_5 \cdot 0 \oplus a_6 \cdot 0 \oplus$
$\oplus a_7 \cdot 0 = a_0 = 0;$

$f(0,0,1) = a_0 \oplus a_3 = 0 \oplus a_3 = 1 \Rightarrow a_3 = 1;$

$f(0,1,0) = a_0 \oplus a_2 = 0 \oplus a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 0;$

$f(0,1,1) = a_0 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_6 = 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus a_6 = 1 \Rightarrow a_6 = 0;$

$f(1,0,0) = a_0 \oplus a_1 = 0 \oplus a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0;$

$f(1,0,1) = a_0 \oplus a_1 \oplus a_3 \oplus a_5 = 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus a_5 = 1 \Rightarrow a_5 = 1;$

$f(1,1,0) = a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_4 = 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus a_4 = 1 \Rightarrow a_4 = 0;$

$f(1,1,1) = a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_4 \oplus a_5 \oplus a_6 \oplus a_7 = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus a_7 = 1$
$\Rightarrow a_7 = 1;$

$f(x,y,z) = z \oplus xz \oplus xyz$

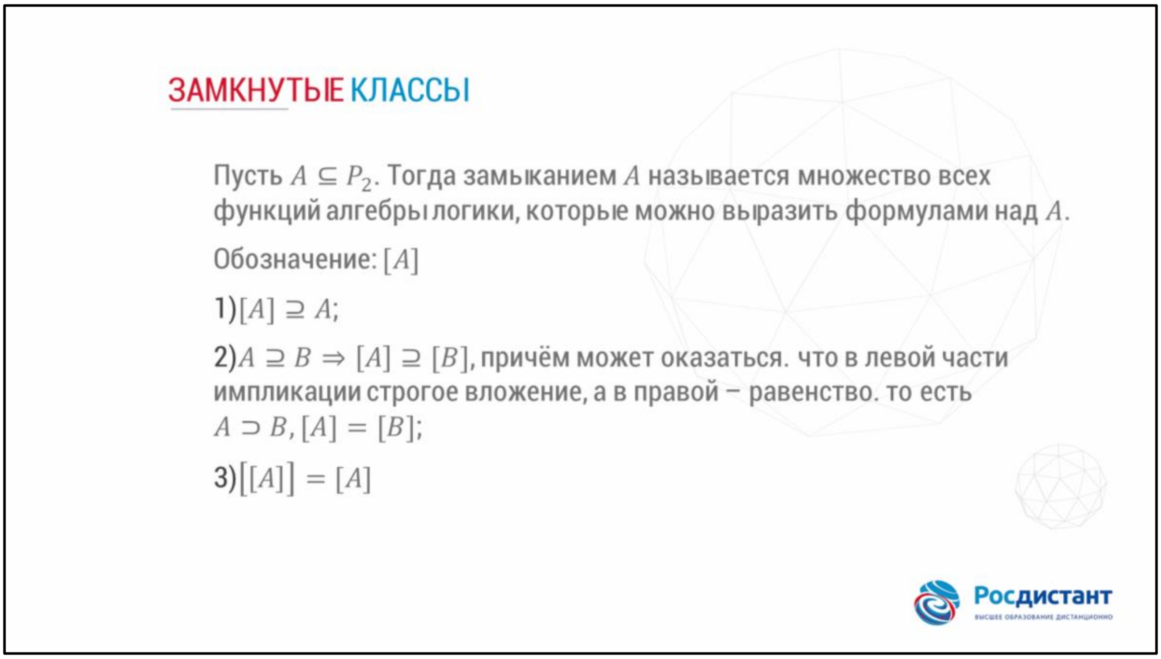
Росдистант
высшее образование дистанционно

Слайд 142

Второй способ получения полинома Жегалкина называется методом неопределенных коэффициентов. Для функции трех переменных существуют восемь различных монотонных конъюнкций. Каждая из них может входить или нет в полином Жегалкина данной функции. Коэффициенты полинома принимают значения нуль или единица, они показывают, входит ли соответствующая конъюнкция в полином Жегалкина данной функции. Для определения коэффициентов используем значения функции на каждом наборе значений переменных.

Возьмем первый набор 0-0-0, подставим в формулу функции f вместо переменных их значения, упростим и приравняем полученное выражение значению функции на этом наборе. В результате определяем значение коэффициента a_0.

Проделаем аналогичную операцию для каждого набора, подставляя в получаемые выражения уже найденные коэффициенты. Восемь наборов позволяют однозначно определить восемь неизвестных коэффициентов. Подставляя их в формулу функции f, получаем окончательный ответ.



Слайд 143

Важным понятием теории булевых функций является понятие замкнутого класса. Оно определяется с помощью операции замыкания.

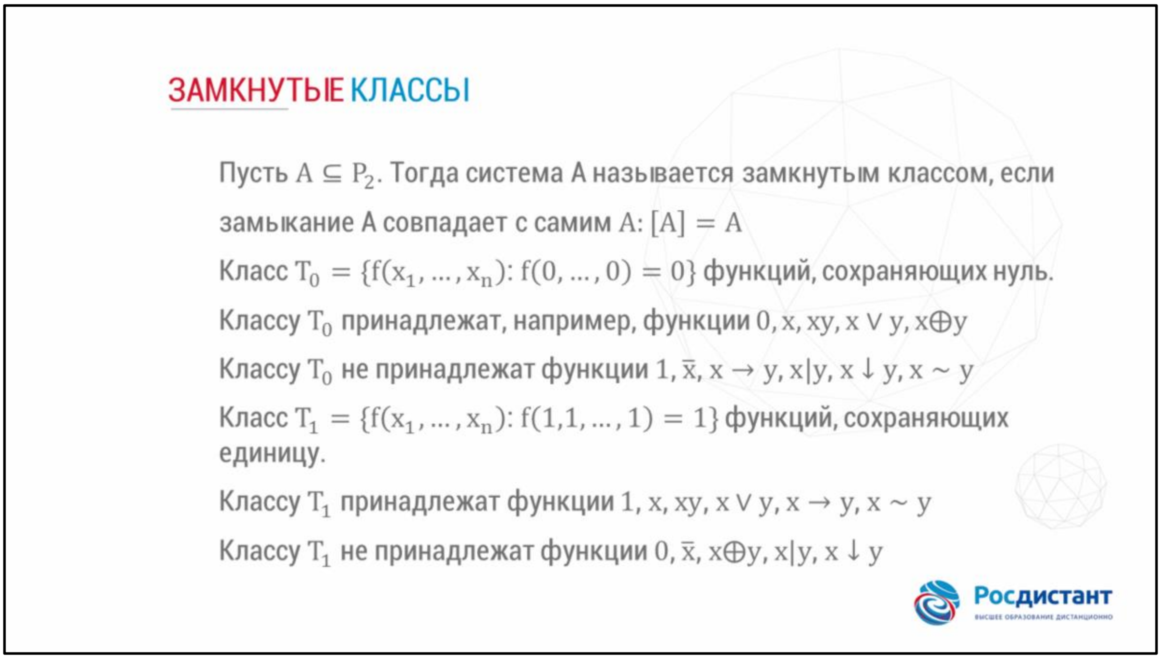
Пусть А – произвольная система функций алгебры логики. Замыканием множества А называется совокупность всех булевых функций, которые можно задать с помощью функций данного множества. Обозначение операции замыкания приведено на слайде.

Отметим основные свойства операции замыкания.

Суть первого свойства заключается в том, что всякое множество является частью своего замыкания. Данное свойство вытекает непосредственно из определения операции замыкания.

Второе свойство – это свойство монотонности. Оно говорит о том, что если множество В является частью множества А, то и замыкание В содержится в замыкании А.

Смысл третьего свойства в том, что повторное применение операции замыкания к множеству А не выводит за пределы замыкания А.



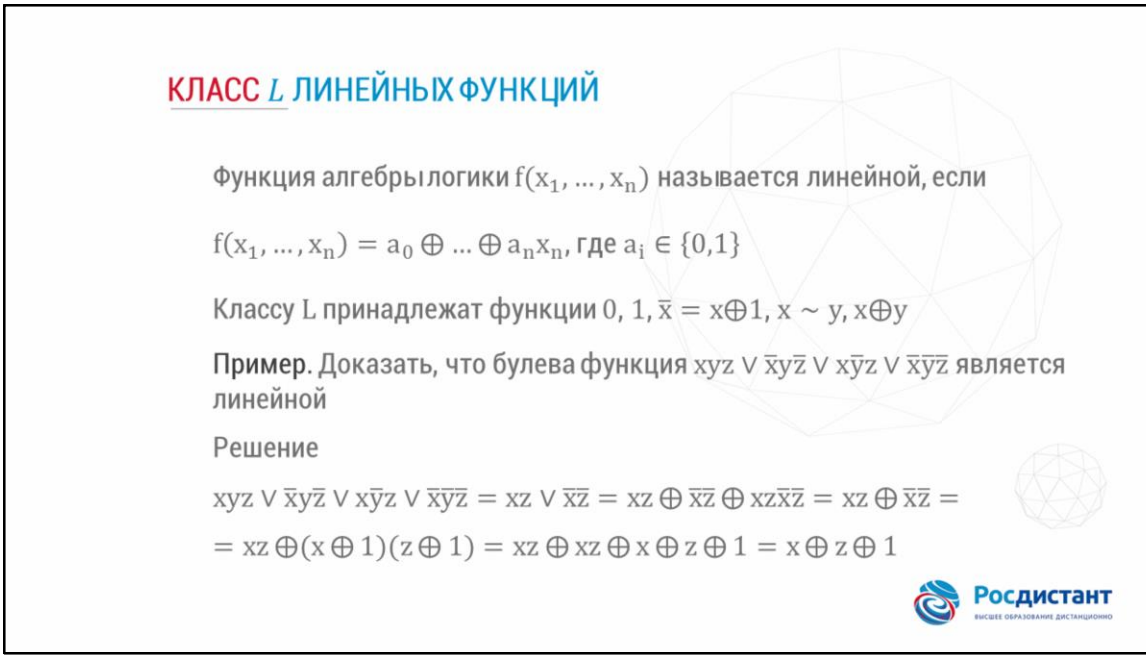
Слайд 144

Используя понятие замыкания, можно другим способом записать определение полной системы. Мы говорили, что система является полной, если любая булева функция выражается с помощью функций этой системы. Но множество функций, выражаемых с помощью функций данной системы, есть замыкание этой системы. Получаем, что если замыкание системы A совпадает с множеством всех булевых функций, то система полная.

Если же замыкание класса совпадает с самим классом, то такой класс называется замкнутым. Рассмотрим примеры замкнутых классов.

Одним из замкнутых классов является класс функций, сохраняющих нуль. Он обозначается T_0. Функции этого класса на наборе, состоящем из одних нулей, принимают значение нуль. Любая суперпозиция функций данного класса дает функцию, принимающую значение нуль на наборе, состоящем из одних нулей. Это говорит о замкнутости класса.

Аналогично определяется класс функций, сохраняющих единицу.



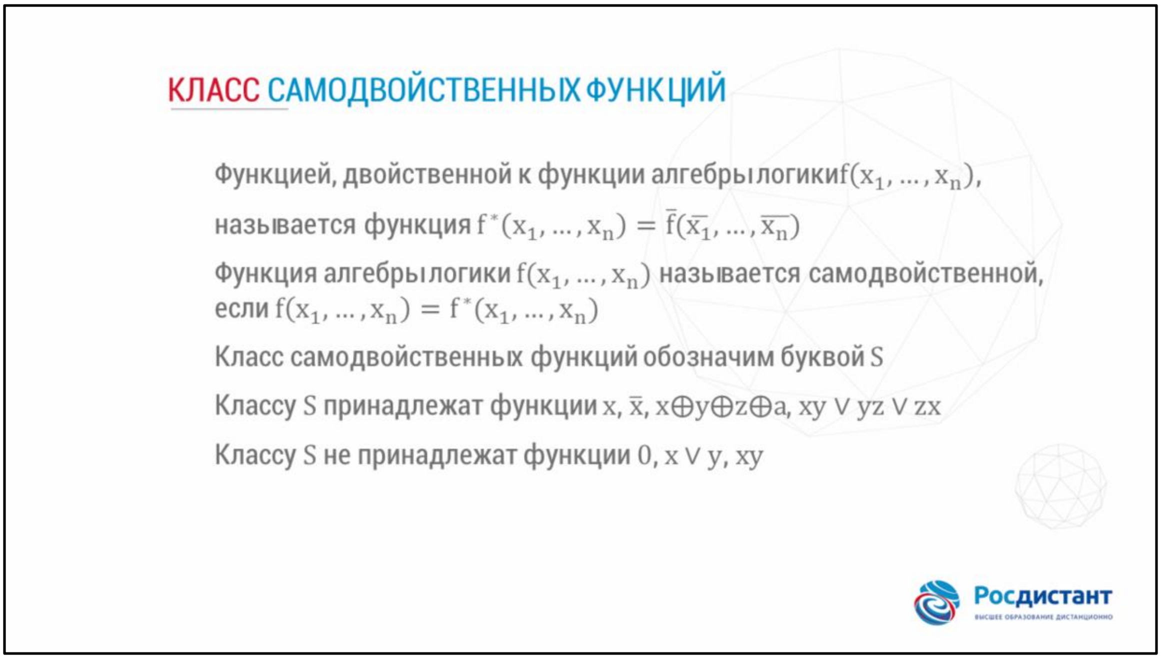
Слайд 145

Еще одним примером замкнутого класса является класс линейных функций, который обозначается через L. В класс линейных функций входят функции, полином Жегалкина которых не содержит конъюнкций. Можно провести аналогию с понятием линейной функции, известной нам из курса математического анализа. У линейной функции все переменные имеют степень не больше первой.

Для доказательства того, что функция является линейной, нужно построить ее полином Жегалкина и убедиться в том, что степень полученного полинома не больше первой.

Рассмотрим пример проверки функции на линейность.

Обратимся к функции, представленной на слайде. Сначала упростим выражение, склеивая первую конъюнкцию с третьей, а вторую – с четвертой. Затем заменим операцию дизъюнкции на сумму по модулю два. Выразим отрицание через сумму по модулю два и единицу, раскроем скобки, приведем подобные слагаемые. В результате получим полином Жегалкина, который не содержит конъюнкций, а следовательно, функция является линейной.



Слайд 146

Во многих задачах используется функция, двойственная к заданной булевой функции. Если исходная функция выражается формулой, содержащей переменные x_1, x_2 и т. д., x_n, то для получения двойственной функции нужно поставить знак отрицания над каждой переменной и над всей формулой. Обозначение и формульное определение двойственной функции представлены на слайде.

Функция алгебры логики называется самодвойственной, если она совпадает с двойственной к ней функцией. Другими словами, самодвойственная функция на противоположных наборах значений переменных принимает противоположные значения. Множество всех самодвойственных функций обозначается буквой S. Класс, образованный самодвойственными функциями, дает нам еще один пример замкнутого класса.

На слайде представлены примеры функций, принадлежащих классу S, и функций, не являющихся самодвойственными.

КЛАСС САМОДВОЙСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

x y z	f(x, y, z)	f*
000	0	0
001	1	1
010	0	1
011	1	1
100	0	0
101	0	1
110	0	0
111	1	1

$$f^*(0,0,0) = \bar{f}(1,1,1) = 0$$
$$f^*(0,0,1) = \bar{f}(1,1,0) = 1$$
$$f^*(0,1,0) = \bar{f}(1,0,1) = 1$$
$$f^*(0,1,1) = \bar{f}(1,0,0) = 1$$
$$f^*(1,0,0) = \bar{f}(0,1,1) = 0$$
$$f^*(1,0,1) = \bar{f}(0,1,0) = 1$$
$$f^*(1,1,0) = \bar{f}(0,0,1) = 0$$
$$f^*(1,1,1) = \bar{f}(0,0,0) = 1$$

Росдистант
ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ ДИСТАНЦИОННО

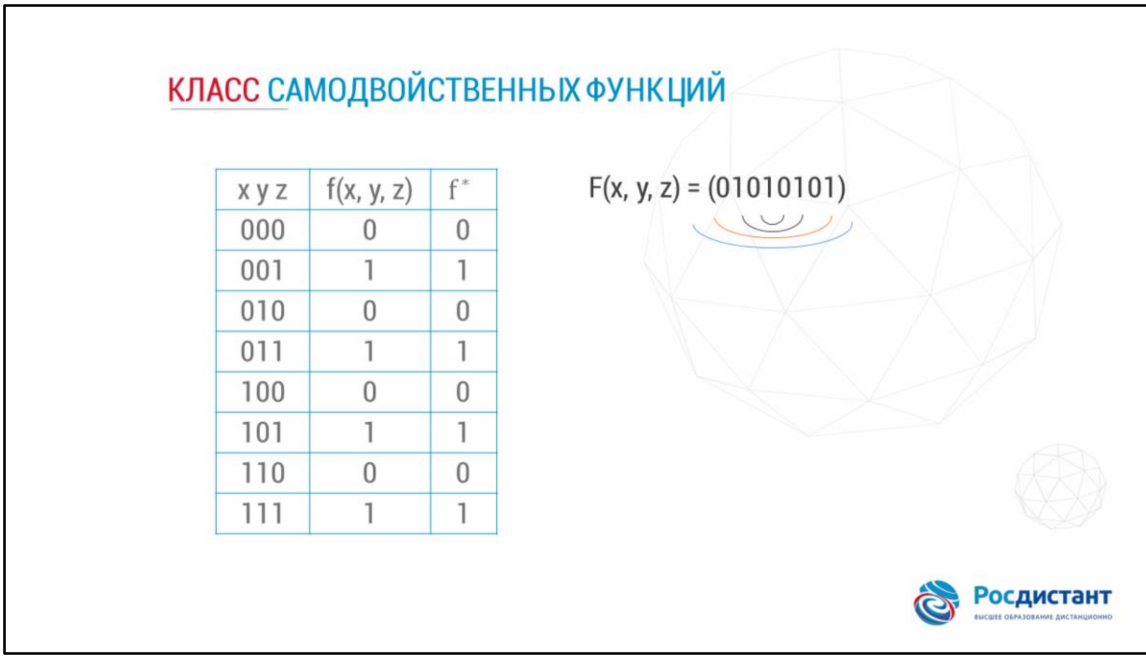
Слайд 147

Покажем на примере, как определяется двойственная функция для данной функции. Согласно определению для нахождения значения двойственной функции на некотором наборе надо взять противоположный набор и отрицание значения исходной функции на этом наборе.

Первый набор – 0-0-0, противоположный к нему – 1-1-1, значение исходной функции на нем равно единице, значит, двойственная функция на первом наборе принимает значение нуль.

Для набора 0-0-1 противоположным является набор 1-1-0. Функция f на этом наборе принимает значение ноль. Следовательно, значение двойственной функции на наборе 0-0-1 равно единице.

Аналогичными рассуждениями найдем все значения двойственной функции. Отметим, что противоположными будут первый набор с восьмым, второй – с седьмым, третий – с шестым, четвертый – с пятым.

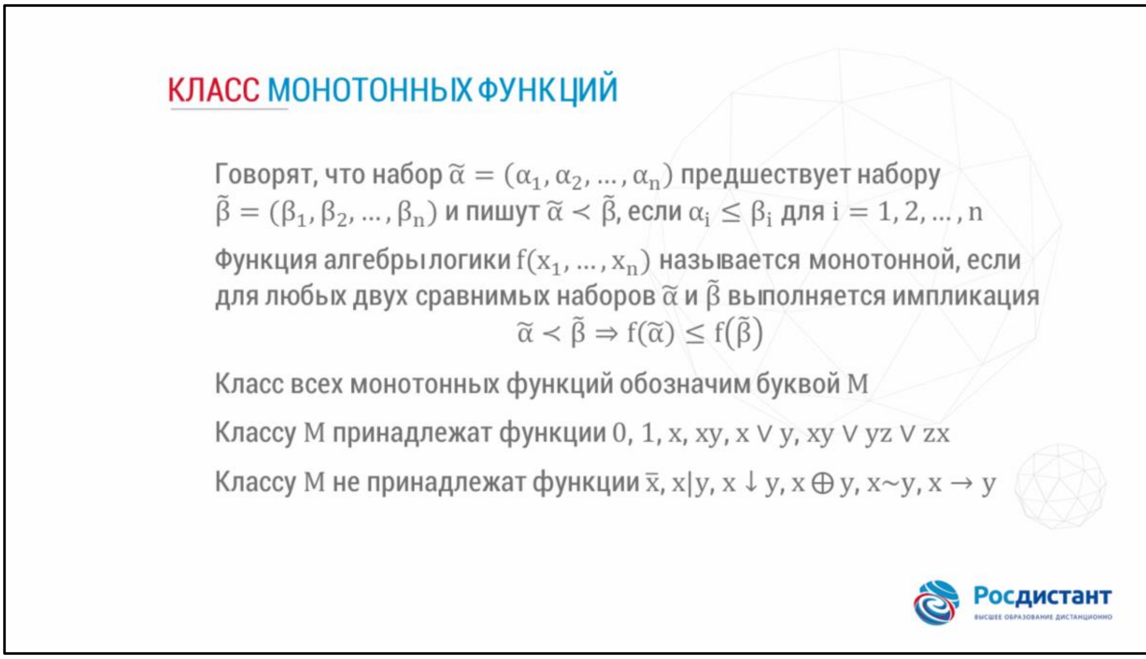


Слайд 148

Из алгоритма нахождения двойственной функции мы получаем алгоритм проверки функции на самодвойственность.

Функция является самодвойственной, если она принимает противоположные значения на противоположных наборах.

Обратимся к примеру, представленному на слайде. Запишем значения функции f в виде вектор-строки. Соединим линиями значения, принимаемые данной функцией на противоположных наборах. Если на первой позиции стоит ноль, то на восьмом месте должна быть единица. Вторую позицию занимает единица, значит, седьмым должен быть ноль. Третье по счету значение функции нулевое, следовательно, на шестом месте должна стоять единица. Четвертую позицию занимает единица, значит, следующим должен быть ноль. Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что все необходимые требования выполняются. Итак, f – самодвойственная функция.



Слайд 149

Последним замкнутым классом, который мы рассмотрим, является класс монотонных функций. Он обозначается буквой М.

Понятие монотонно возрастающей функции нам известно из математического анализа: функция монотонно возрастает, если с увеличением аргумента значение функции не убывает.

Так как булевы функции заданы на множестве наборов значений переменных, прежде чем дать определение монотонной функции, мы должны определить операцию сравнения наборов. Говорят, что набор альфа предшествует набору бета, если на каждой позиции набора альфа значение не больше значения на той же позиции в наборе бета.

Существуют наборы, к которым неприменимо отношение упорядоченности, определенное выше. Например, наборы 0-0-1 и 0-1-0 не сравнимы.

Определение монотонной функции представлено на слайде.

Слайд 150

Для проверки монотонности функции можно воспользоваться ее таблицей истинности. Стоит отметить, что набор 0-0-0 сравним со всеми наборами и является предшествующим для них, для набора 1-1-1 все другие наборы являются предшествующими. Поэтому на наборе 0-0-0 монотонная непостоянная функция принимает значение нуль, а на наборе 1-1-1 – значение единица. Т. е. монотонная функция, не являющаяся константой, принадлежит классу функций, сохраняющих нуль, и классу функций, сохраняющих единицу.

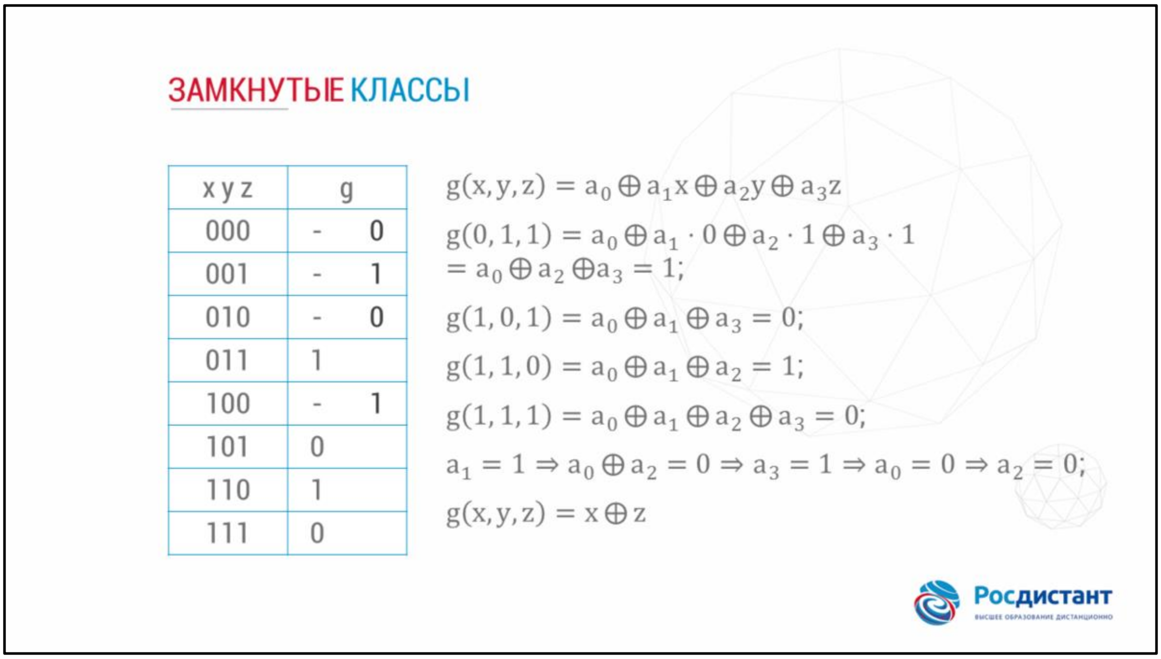
Обратимся к примеру, представленному на слайде. Проверим, является ли данная функция монотонной. Условие, которое было описано выше, выполняется. Проанализируем значения функции на других наборах. При этом нас не будут интересовать наборы, на которых функция принимает нулевое значение. Так как в этом случае на всех последующих наборах функция принимает значение, большее или равное данному. Возьмем второй набор 0-0-1, функция на нем равна единице, следовательно, на всех последующих для него наборах функция должна принимать то же значение. Последующими для второго набора будут наборы 0-1-1, 1-0-1 и 1-1-1, на каждом из них функция равна единице.

Далее рассматриваем четвертый набор 0-1-1, для него последующим является только восьмой набор 1-1-1, то же касается и шестого набора 1-0-1. Мы видим, что для всех пар сравнимых наборов значение функции на большем наборе больше или равно значения функции на меньшем наборе. Следовательно, функция является монотонной.

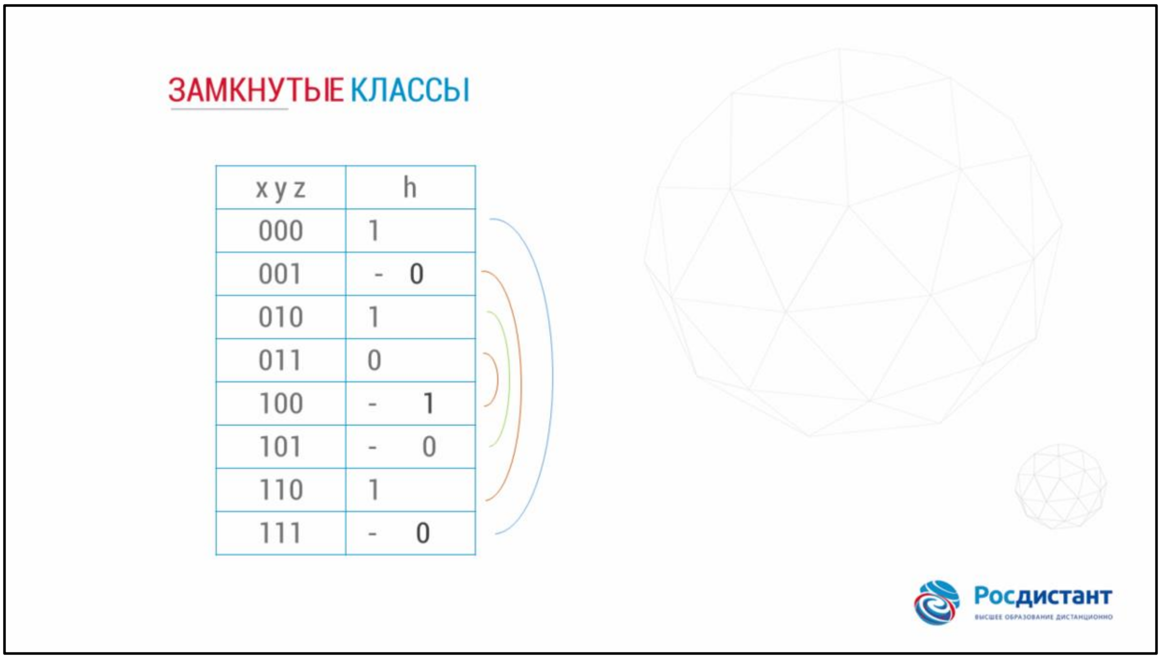
Слайд 151

Рассмотрим задачу построения булевых функций с требуемыми свойствами. Обратимся к примеру, представленному на слайде. Требуется построить монотонную функцию f, линейную функцию g и самодвойственную функцию h. Доопределим функцию f, используя определение монотонной функции. На наборе 1-1-0 функция принимает значение 0. Этому набору предшествуют наборы 0-0-0 и 1-0-0. Значит, на них функция должна принимать значение ноль. На наборе 0-0-1 функция обращается в единицу. Этот набор предшествует наборам 1-0-1 и 1-1-1. Следовательно, на указанных наборах функция должна принимать значение один.

Таким образом, функция с требуемым свойством построена.



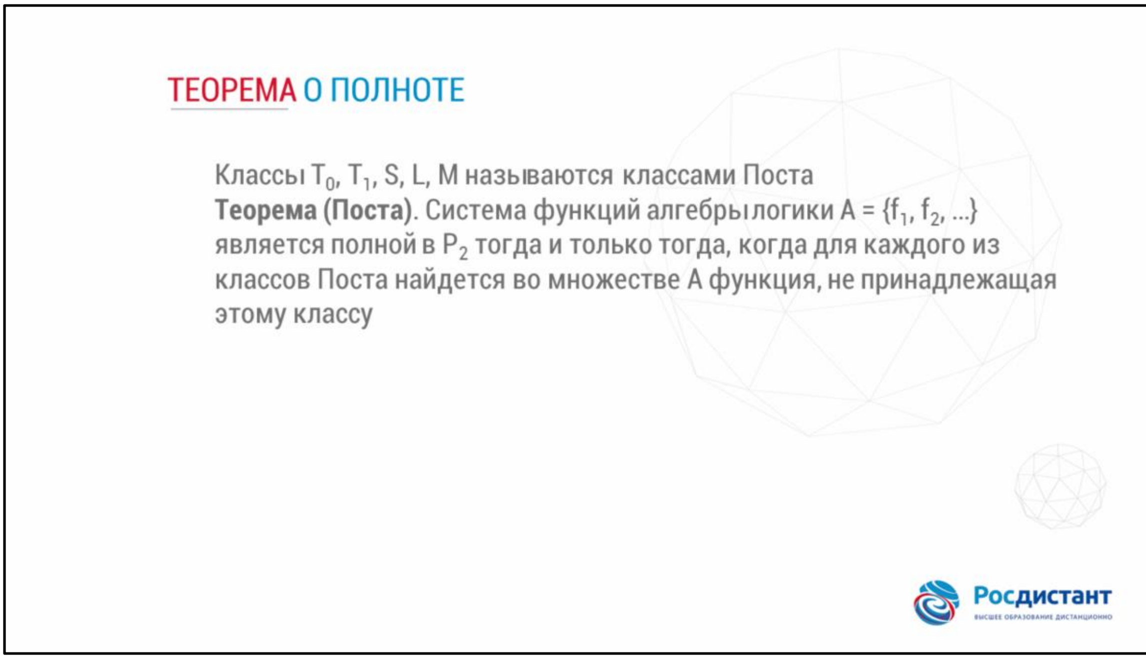
Слайд 152
Перейдем к построению функции g. По условию задачи она должна быть линейной. Согласно определению линейной функции ее полином Жегалкина может содержать только линейные слагаемые. Нам известны значения функции на четырех наборах значений переменных. Это позволяет нам записать четыре уравнения с четырьмя неизвестными. Указанные уравнения представлены на слайде.
Сравнивая первое и четвертое уравнения, получаем, что a_1 равно единице. Подставляем найденное значение в третье уравнение и, сопоставляя полученный результат с первым уравнением, делаем вывод, что a_3 равно единице. Найденные коэффициенты позволяют нам из второго и третьего уравнений определить оставшиеся два коэффициента. Мы получаем, что a_0 и a_2 равны нулю.
Теперь мы можем записать выражение для функции g и найти недостающие значения функции.



Слайд 153

Теперь нам осталось доопределить функцию h так, чтобы она была самодвойственной. Самодвойственная функция на противоположных наборах значений переменных должна принимать противоположные значения. В таблице истинности функции h соединим линиями противоположные наборы. На наборе 0-0-0 функция принимает значение один. Значит, на наборе 1-1-1 она должна обращаться в ноль. На наборе 0-1-0 значение функции также равно единице. Следовательно, на противоположном ему наборе 1-0-1 она обязана принимать нулевое значение. На наборе 0-1-1 функция обращается в ноль. Значит, на наборе 1-0-0 она принимает значение один. На наборе 1-1-0 значение функции равно единице. Следовательно, на наборе 0-0-1 она обращается в ноль.

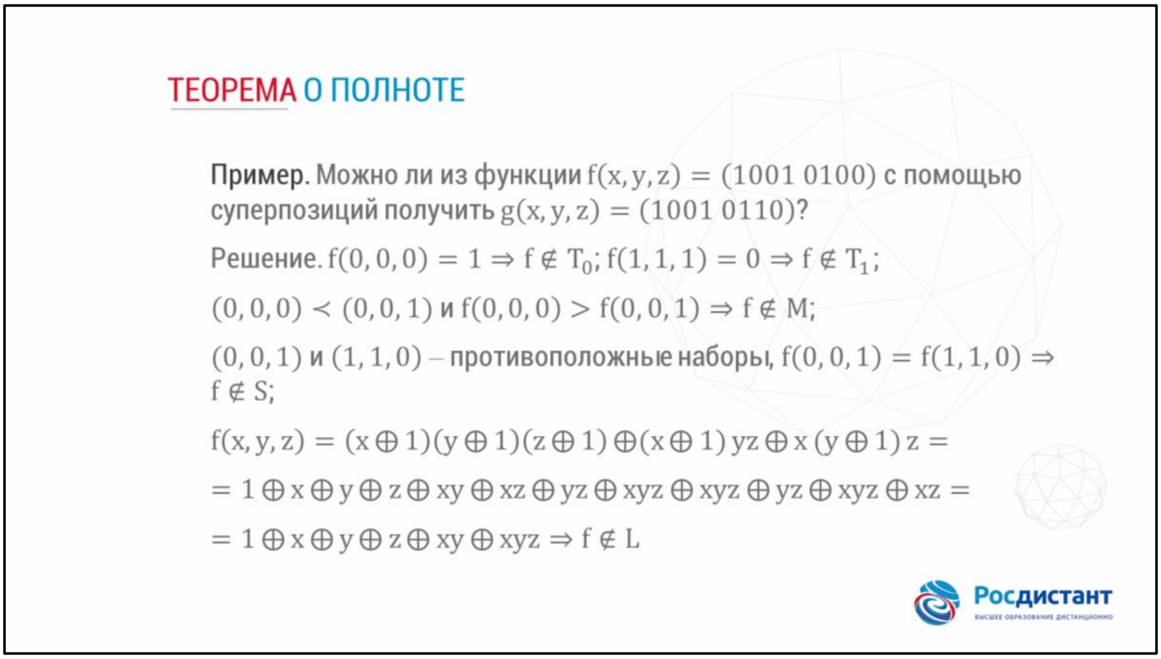
Итак, мы определили все значения функции h, а значит, задача решена.



Слайд 154

Мы рассмотрели пять замкнутых классов функций алгебры логики. Вспомним, что это классы линейных, монотонных, самодвойственных функций, функций, сохраняющих ноль, и функций, сохраняющих единицу. Указанные классы функций называются классами По́ста. С помощью функций этих классов определяется полнота некоторой системы А булевых функций. Для полноты системы А необходимо и достаточно, чтобы для каждого класса По́ста в ней нашлась хотя бы одна функция, не принадлежащая этому классу.

Система А, состоящая из конъюнкции, дизъюнкции и отрицания, является полной по теореме По́ста. В самом деле, функция отрицания не сохраняет ноль и единицу и не является монотонной функцией. Конъюнкция не является ни линейной, ни самодвойственной функцией. Дизъюнкция также не принадлежит классу самодвойственных функций. Все это позволяет сделать вывод о полноте рассматриваемой системы.



Слайд 155

Рассмотрим пример, представленный на слайде. Если система функций является полной, то с помощью этой системы можно выразить любую булеву функцию, в том числе и функцию g

В нашем случае система состоит из одной функции f. Согласно теореме Поста проверим f на принадлежность классам Поста. Мы видим, что эта функция не принадлежит классам T_0, T_1, M и S.

Для проверки на принадлежность классу L построим полином Жегалкина. Так как в полиноме Жегалкина функции f присутствуют конъюнкции, то $f \notin L$.

Таким образом, функция f не принадлежит ни одному из классов Поста. Значит, данная система является функционально полной и с помощью суперпозиций из f можно получить любую булеву функцию, в частности, функцию g.