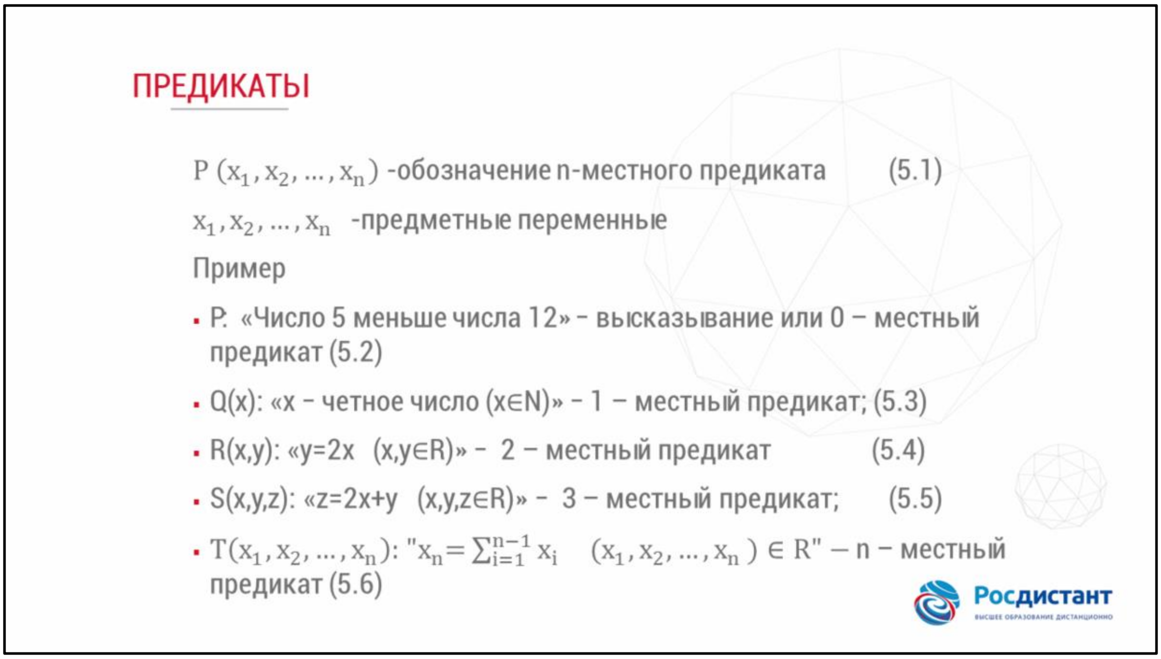
Росдистант

ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ ДИСТАНЦИОННО

ОСНОВЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ И ЛОГИКИ

12 ЧАСТЬ



Слайд 156

Тема 5.1. Понятие предиката. Логические и кванторные операции над предикатами. Формулы логики предикатов

Для анализа многих математических рассуждений важна структура высказываний, а также их содержание. Поэтому для получения заключений в научных исследованиях очень часто средств алгебры высказываний недостаточно.

Рассмотрим, например, следующие предложения.

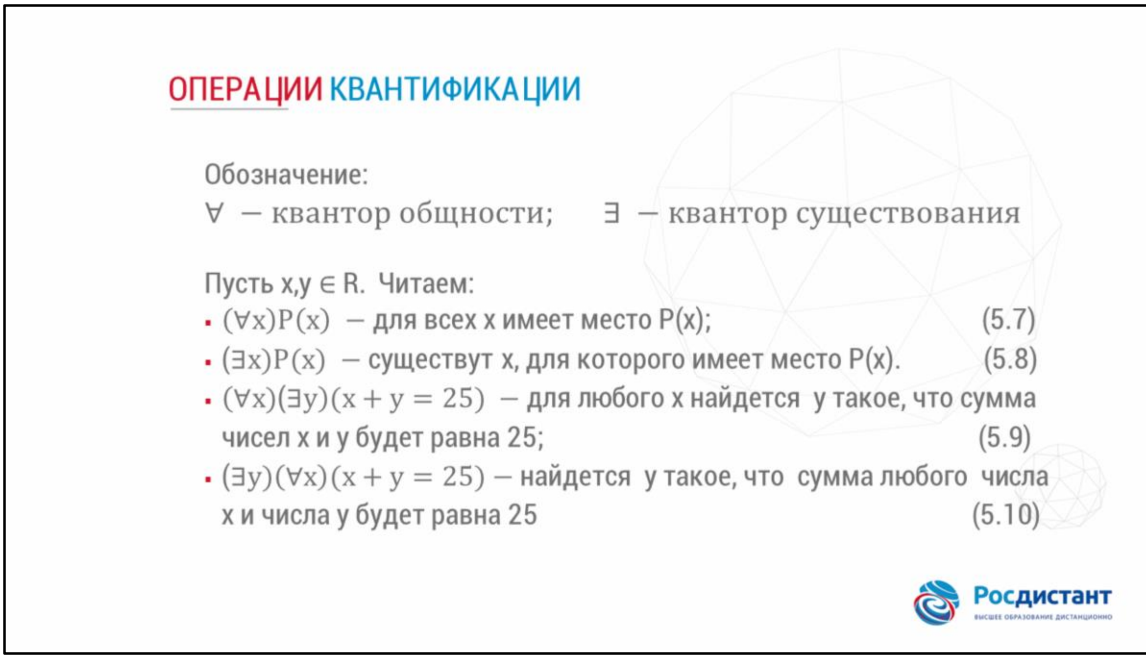
1. Из дифференцируемости функции следует непрерывность.
2. Показательная функция является дифференцируемой функцией.
3. Показательная функция является непрерывной функцией.

Ясно, что из первых двух предложений следует третье, но даже такое простое утверждение на языке алгебры высказываний невозможно доказать. Символика алгебры высказываний недостаточна для выражения существенных связей между предложениями.

Алгебра предикатов обладает более широкими возможностями, она позволяет строить формализованную теорию и включает в себя алгебру высказываний как частный случай.

Рассмотрим непустое множество M. Выражение, содержащее n переменных и обращающееся в высказывание при замене переменных элементами множества M, называется n-местным предикатом на множестве M. Формула (5.1) задает обозначение n-местного предиката. Высказывание будем считать 0-местным предикатом.

Переменные в алгебре предикатов называются предметными переменными. Рассмотрим примеры. Формула (5.2) – высказывание или 0-местный предикат. Формула (5.3) – 1-местный предикат на множестве натуральных чисел. Формула (5.4) – 2-местный предикат на множестве действительных чисел. Формула (5.5) – 3-местный предикат на множестве действительных чисел. Формула (5.6) – n-местный предикат на множестве действительных чисел.



Слайд 157

На предикаты переносятся все логические операции, которые выполняются над высказываниями: отрицание, дизъюнкция, конъюнкция, импликация, эквиваленция. Но, в отличие от высказываний, для предикатов определены еще две операции, называемые операциями квантификации, или навешивания кванторов. Различают два вида кванторов – квантор общности и квантор существования.

Квантор общности, стоящий перед предикатом, вместе с самим предикатом читается: «Для всех x имеет место P(x)». Соответствующая запись представлена формулой (5.7).

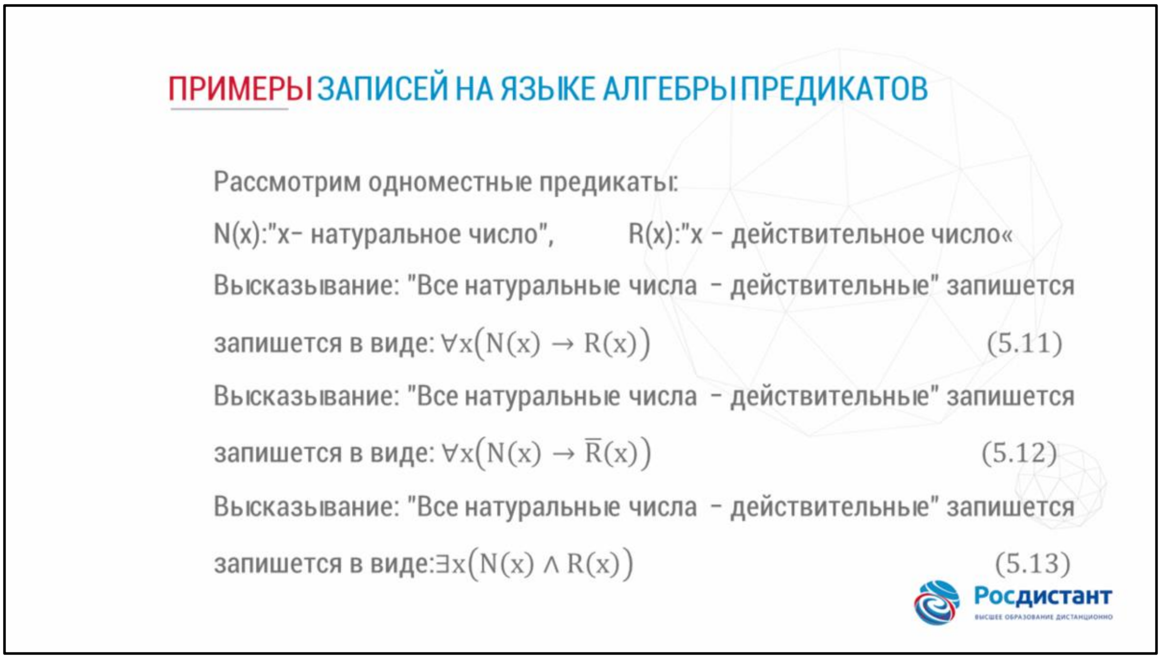
Квантор существования, стоящий перед предикатом, вместе с самим предикатом читается: «Существует x, для которого имеет место P(x)». Соответствующая запись представлена формулой (5.8).

Пусть все переменные пробегают множество действительных чисел.

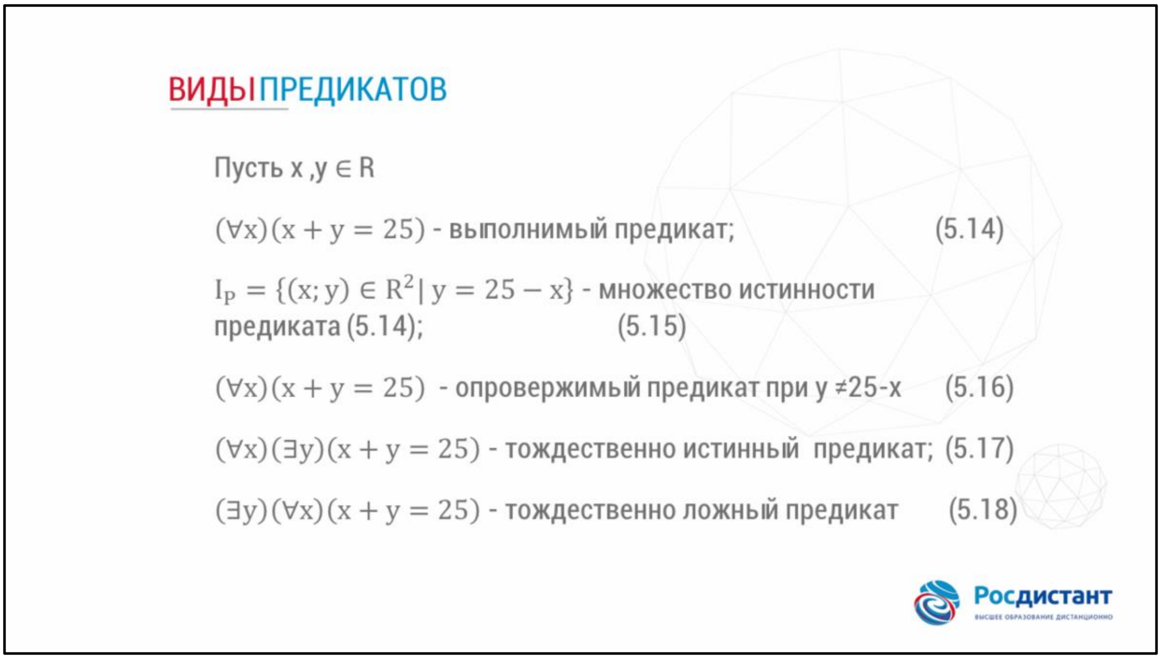
Формула (5.9) читается следующим образом: «Для любого действительного числа x найдется действительное число y, такое, что сумма чисел x и y будет равна 25».

Утверждение, задаваемое формулой (5.10), можно выразить словами: «Найдется действительное число y такое, что сумма любого действительного

числа x и числа y будет равна 25».
В формулах (5.9) и (5.10) навешивание кванторов привело к тому, что двуместные предикаты превратились в высказывания, то есть 0-местные предикаты. Если применить квантор к n-местному предикату, то получится (n − 1)-местный предикат. Переменную, к которой относится квантор, называют связанной. Остальные переменные называются свободными.



Слайд 158
Приведем примеры записей на языке алгебры предикатов. Рассмотрим одноместные предикаты, представленные на слайде.
Предикат N(x) выражает свойство числа x быть натуральным. Предикат R(x) выражает свойство числа x быть действительным.
Из предикатов N(x) и R(x) путем навешивания кванторов составим высказывания, полученные высказывания запишем на языке алгебры предикатов.
Высказывание «Все натуральные числа – действительные» представлено формулой (5.11).
Высказывание «Ни одно натуральное число не является действительным» представлено формулой (5.12).
Высказывание «Некоторые натуральные числа действительные» представлено формулой (5.13).



Слайд 159

Предикат называется выполнимым, если при некоторой подстановке вместо переменных конкретных элементов из соответствующих множеств он обращается в истинное высказывание.

Предикат называется опровержимым, если при некоторой подстановке вместо переменных конкретных элементов из соответствующих множеств он обращается в ложное высказывание.

Множество, на котором предикат обращается в истинное высказывание, называется множеством истинности предиката.

Рассмотрим примеры.

Предикат «Для любого х сумма х и у равна 25» является выполнимым предикатом при у = 25 − х. Данный предикат представлен формулой (5.14).

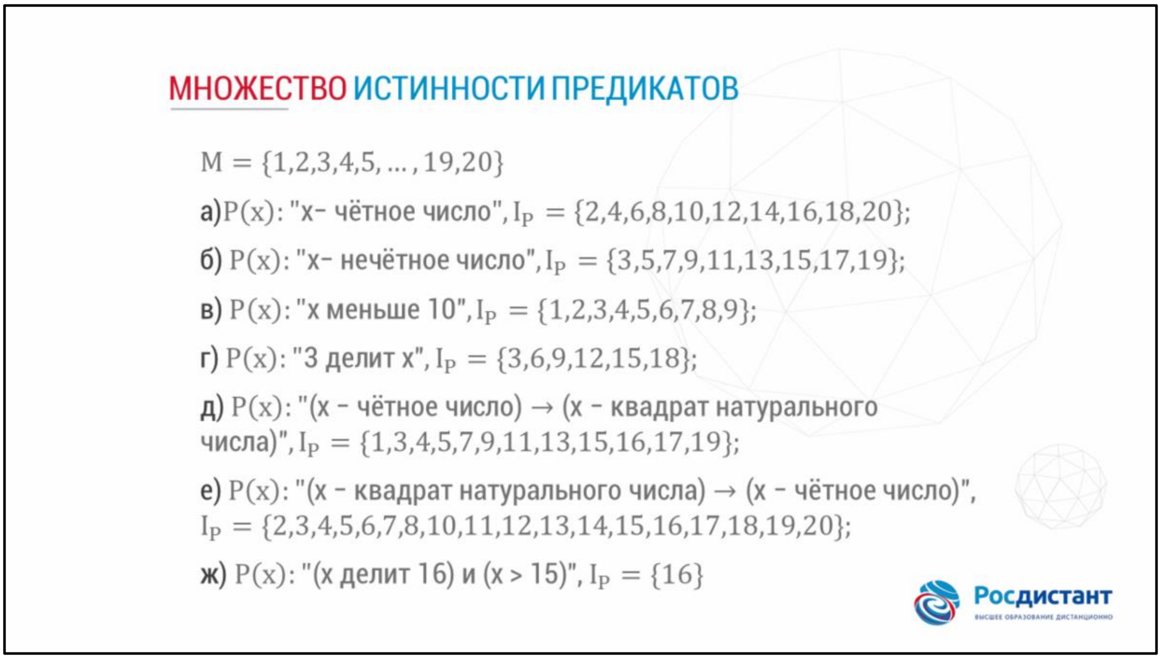
Множество истинности предиката (5.14) описывается формулой (5.15).

Одновременно этот же предикат является опровержимым при у, не равном 25 − х. Данная ситуация описывается формулой (5.16).

Предикат называется тождественно истинным, если при любой подстановке вместо переменных конкретных элементов из соответствующих множеств он превращается в истинное высказывание.

Предикат (5.17), заданный на множестве действительных чисел, является

тождественно истинным, так как высказывание «Для любого числа x найдется число y такое, что сумма x и y будет равна 25» истинно.
Предикат называется тождественно ложным, если при любой подстановке вместо переменных конкретных элементов из соответствующих множеств он превращается в ложное высказывание.
Предикат (5.18), заданный на множестве действительных чисел, является тождественно ложным, так как высказывание «Существует число y такое, что какое бы число x мы ни взяли, сумма x и y будет равна 25» ложно.



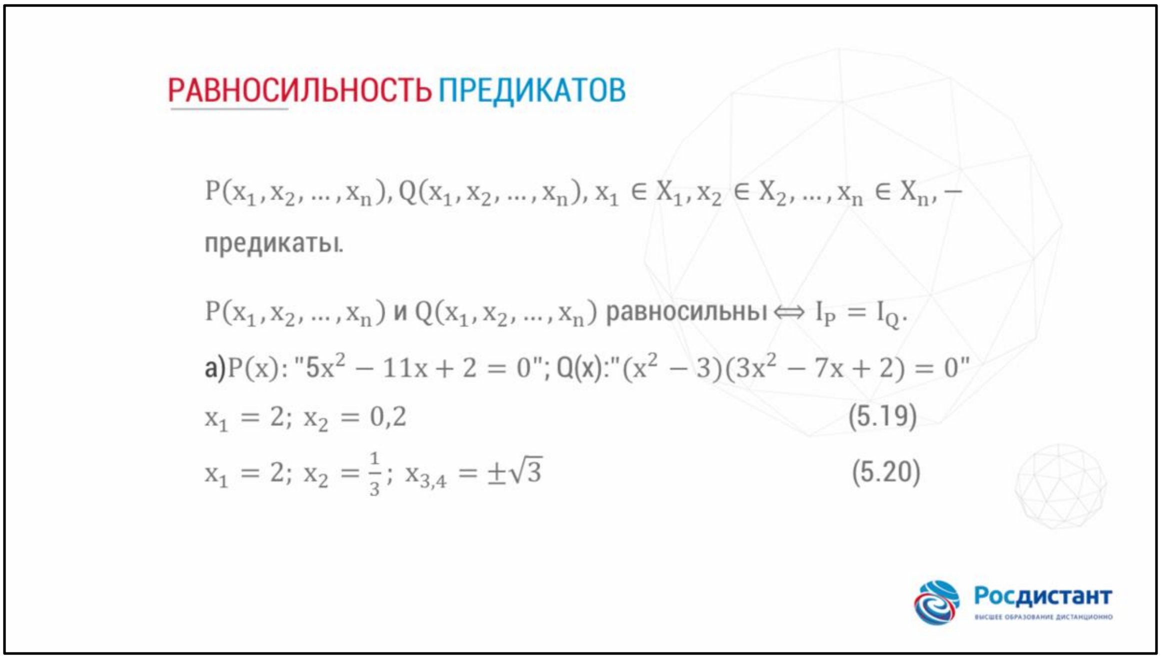
Слайд 160

На слайде приведены примеры предикатов, заданных на конечном множестве М, и перечислены их множества истинности. Для пунктов «а – г» запись множества истинности очевидна.

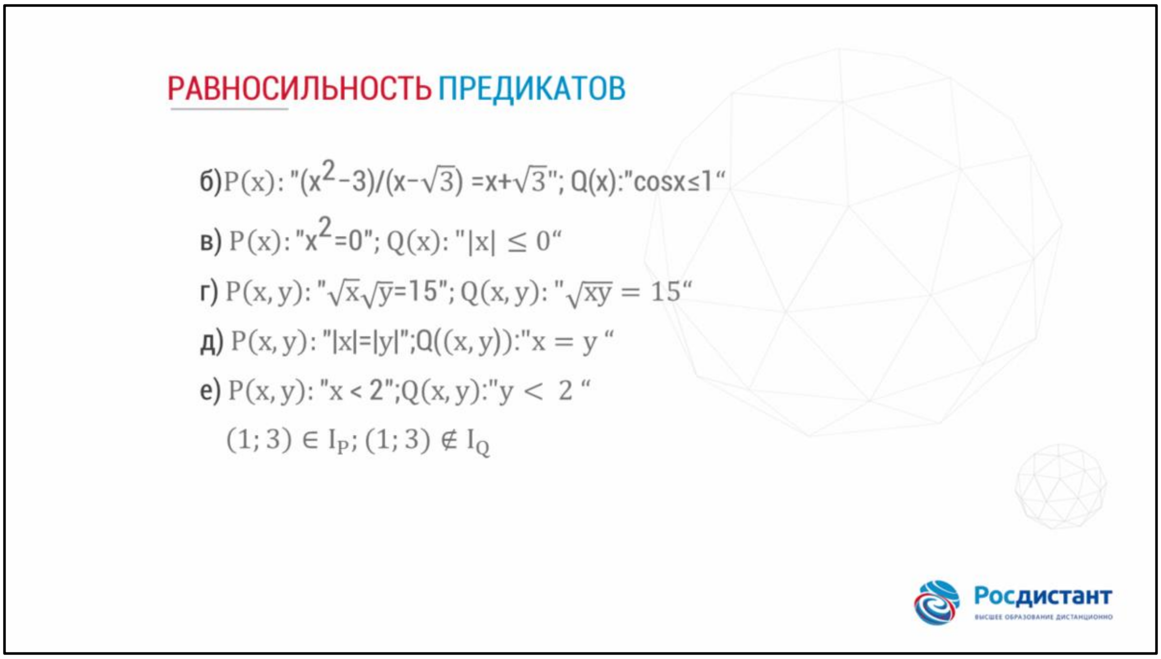
Разберем пункт «д». Дана импликация двух предикатов, импликация принимает ложное значение на наборе (1,0) , поэтому из множества М исключаем четные числа, не являющиеся квадратами натуральных чисел, это 2, 6, 8, 10, 12, 14, 18, 20. Остальные числа из М образуют множество истинности предиката.

В пункте «е», рассуждая аналогично, исключаем нечетные числа, являющиеся квадратами натуральных чисел. Это 1 и 9. Остальные числа входят во множество истинности предиката.

В пункте «ж» дана конъюнкция двух предикатов. Число, которое одновременно больше пятнадцати и является делителем числа шестнадцать, есть число шестнадцать.

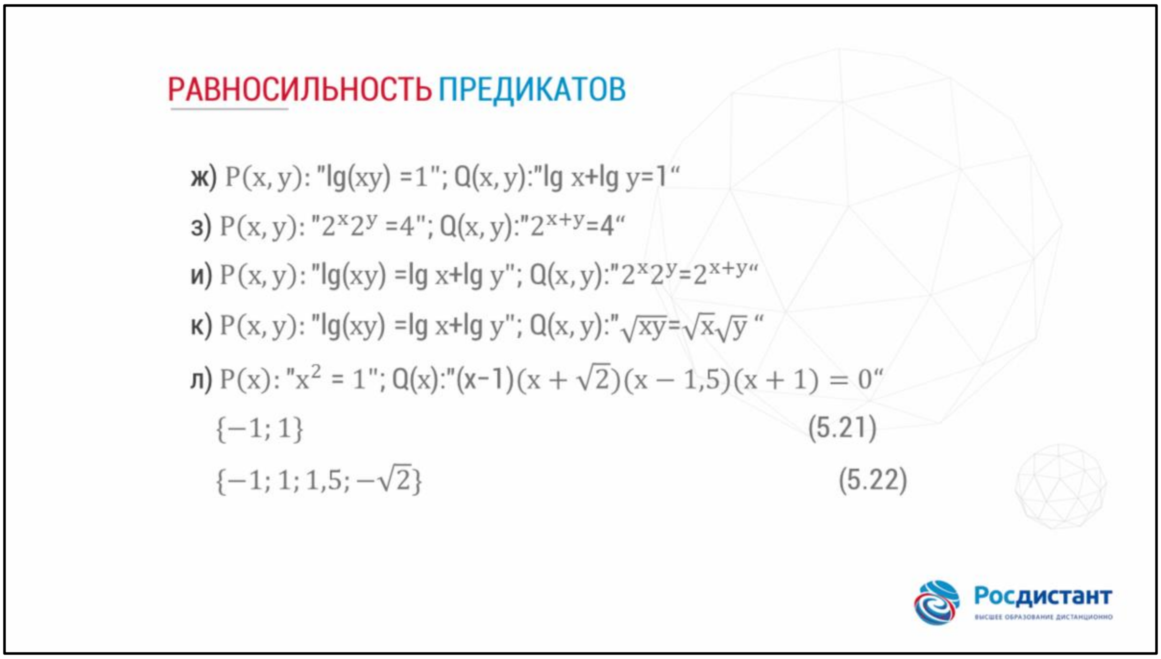


Слайд 161
Два предиката над одними и теми же множествами называются эквивалентными, если один из них обращается в истинное высказывание на тех и только тех наборах значений переменных, на которых в истинное высказывание обращается другой предикат. Такие предикаты называются также равносильными. На слайде данное определение записано с помощью математических символов.
Рассмотрим примеры. Для заданных пар предикатов выясним, будут ли они равносильны над множествами натуральных, целых, рациональных и действительных чисел.
Пункт «а». Предикаты P и Q определяются алгебраическими уравнениями. Корнями первого уравнения являются числа, заданные формулой (5.19); корни второго уравнения представлены формулой (5.20). Сравнивая множества корней уравнений, мы видим, что данные предикаты равносильны над множествами натуральных и целых чисел и не являются равносильными над множествами рациональных и действительных чисел.



Слайд 162
Продолжим рассмотрение примеров.
Пункт «б». Равенство, определяющее предикат P, справедливо на множествах натуральных, целых и рациональных чисел. На множестве действительных чисел оно не является верным, так как знаменатель дроби не определен при значении x, равном арифметическому квадратному корню из трех. Неравенство, определяющее предикат Q, справедливо для всех действительных чисел. Отсюда делаем вывод, что заданные предикаты равносильны над множествами натуральных, целых и рациональных чисел и не являются равносильными над множеством действительных чисел.
Пункт «в». Равенство, определяющее предикат P, как и неравенство, определяющее предикат Q, справедливо только при x = 0. Поэтому данные предикаты равносильны над всеми четырьмя множествами.
Пункт «г». Поскольку арифметический квадратный корень определен только для неотрицательных чисел, данные предикаты равносильны лишь над множеством натуральных чисел.
Пункт «д». Заданные предикаты равносильны над множеством натуральных чисел, так как в этом случае модуль числа совпадает с самим числом. Над другими тремя множествами равносильности нет, поскольку совпадение

абсолютных величин двух чисел допускает их противоположность.
Пункт «е». Данные предикаты не являются равносильными ни над одним из четырех множеств, так как, например, пара (1; 3) удовлетворяет первому неравенству и не удовлетворяет второму.



Слайд 163

Продолжим рассматривать ту же задачу для новых пар предикатов.

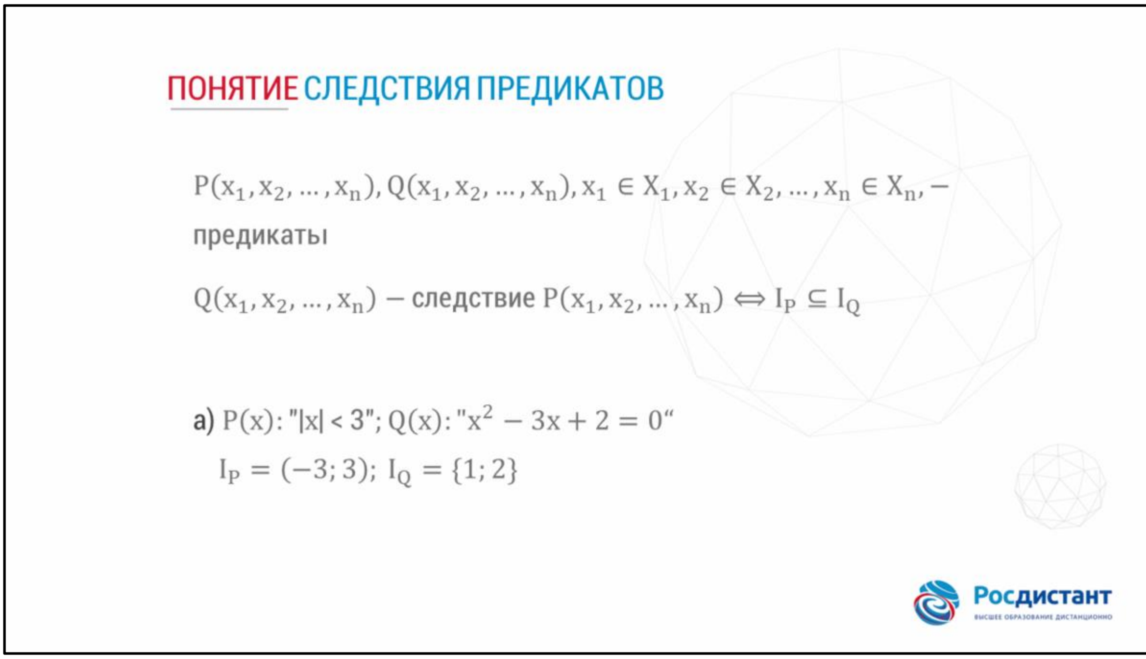
Пункт «ж». Ввиду того что логарифм определен только для положительных чисел, данные предикаты равносильны лишь над множеством натуральных чисел.

Пункт «з». В силу свойства показательной функции уравнения определяющие предикаты являются равносильными на множестве действительных чисел. Поэтому рассматриваемые предикаты равносильны над всеми четырьмя множествами.

Пункт «и». Равенство, определяющее первый предикат, справедливо только для положительных чисел, а равенство, задающее второй предикат, верно для всех действительных чисел. Следовательно, данные предикаты равносильны только над множеством натуральных чисел.

Пункт «к». Равенство, определяющее предикат P, справедливо на множестве положительных действительных чисел, а равенство, задающее предикат Q, верно для всех неотрицательных действительных чисел. Поэтому рассматриваемые предикаты равносильны лишь над множеством натуральных чисел.

Пункт «л». Формулы (5.21) и (5.22) представляют множества корней уравнений, определяющих соответственно первый и второй предикаты. Сравнивая данные множества, мы делаем вывод о том, что данные предикаты равносильны над множествами натуральных и целых чисел и не являются равносильными над множествами рациональных и действительных чисел.

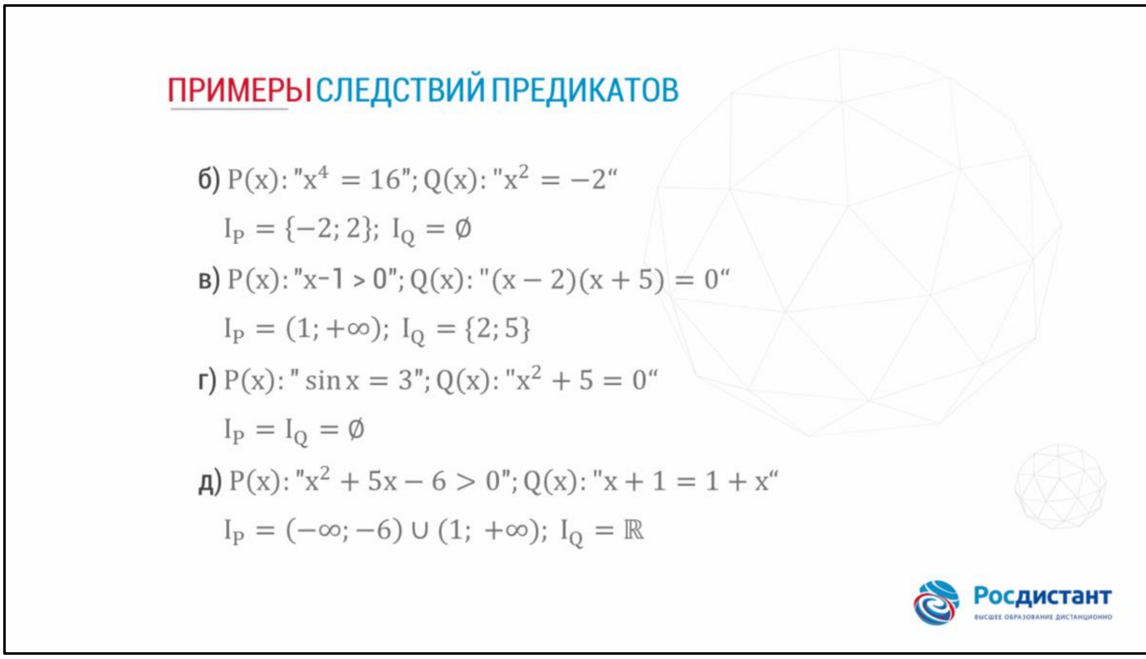


Слайд 164

Пусть P и Q – n-местные предикаты, заданные над одними и теми же множествами. Предикат Q называется следствием предиката P, если он обращается в истинное высказывание на всех тех наборах значений переменных из соответствующих множеств, на которых в истинное высказывание обращается предикат P. На слайде данное определение записано с помощью математических символов.

Рассмотрим следующий пример. Для заданных пар предикатов, рассматриваемых на множестве действительных чисел, выясним, будет ли какой-либо из предикатов являться следствием другого.

Пункт «а». Неравенству, определяющему предикат P, удовлетворяют все числа из интервала $(-3; 3)$. Корнями уравнения, задающего предикат Q, являются числа 1 и 2. Таким образом, множество истинности предиката Q является строгим подмножеством множества истинности предиката P. Отсюда вытекает, что P является следствием Q, а Q не является следствием P.



Слайд 165

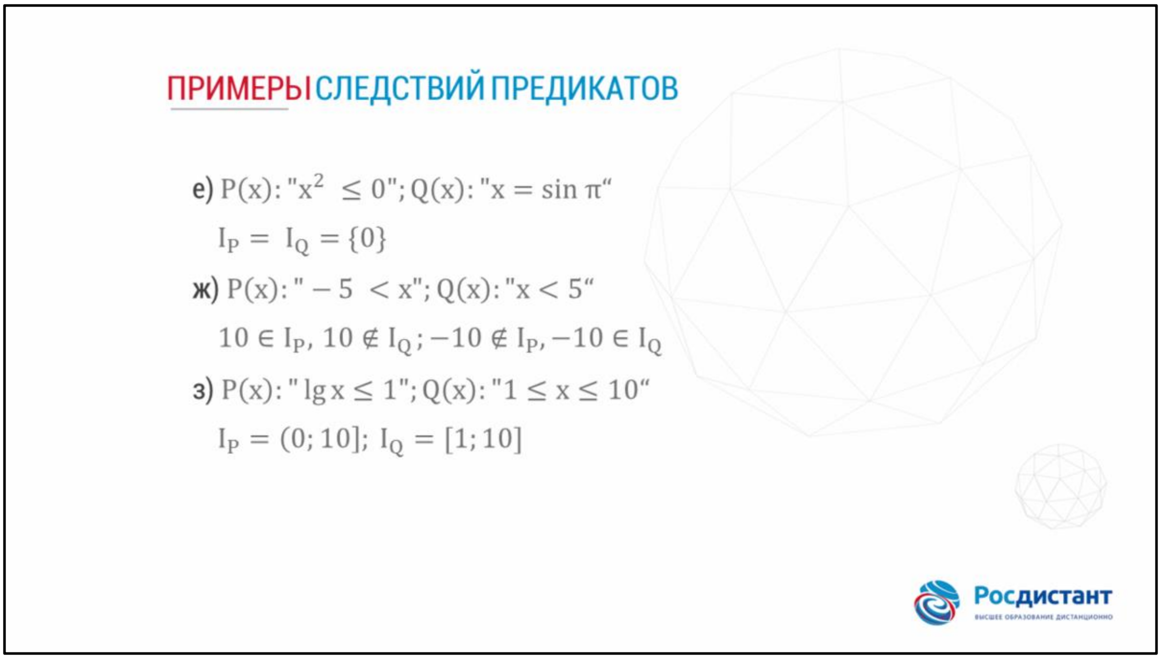
Продолжим рассмотрение нашей задачи.

Пункт «б». Уравнение, определяющее первый предикат, имеет корни ±2. Уравнение, задающее второй предикат, не имеет действительных корней. Поэтому первый предикат является следствием второго, а второй предикат не является следствием первого. Стоит отметить, что из тождественно ложного предиката следует любой предикат.

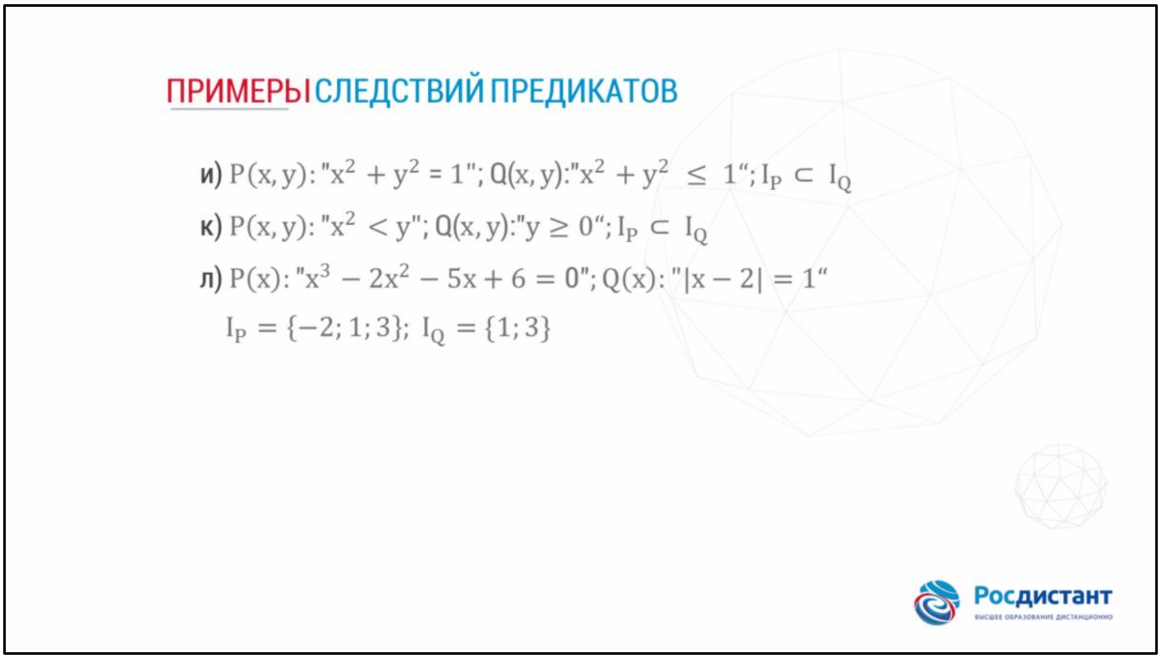
Пункт «в». Неравенству, определяющему предикат P, удовлетворяют все числа, большие единицы. Корнями уравнения, задающего предикат Q, являются числа 2 и 5. Отсюда вытекает, что P является следствием Q, а Q не является следствием P.

Пункт «г». Уравнение, определяющее первый предикат, так же, как и уравнение, задающее второй предикат, не имеет действительных корней. Поэтому в данном случае каждый из предикатов является следствием другого.

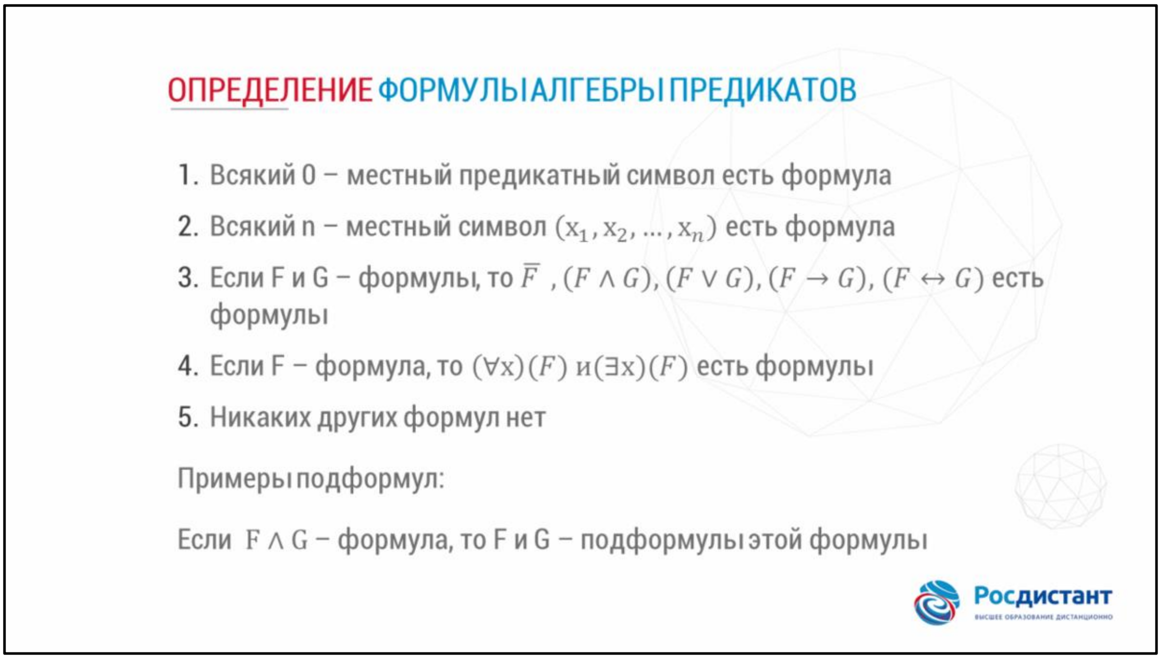
Пункт «д». Неравенству, определяющему предикат P, удовлетворяют все числа, которые меньше минус шести или больше единицы. Уравнению, задающему предикат Q, удовлетворяют все действительные числа. Отсюда вытекает, что Q является следствием P, а P не является следствием Q. Отметим, что тождественно истинный предикат является следствием любого предиката.



Слайд 166
Продолжим рассматривать ту же задачу для новых пар предикатов.
Пункт «е». Неравенству, определяющему предикат P, удовлетворяет только число ноль. Оно же является единственным корнем уравнения, задающего предикат Q. Отсюда вытекает, что каждый из предикатов является следствием другого.
Пункт «ж». Число десять обращает первый предикат в истинное высказывание, а второй – в ложное. Число минус десять, наоборот, обращает первый предикат в ложное высказывание, а второй – в истинное. Таким образом, ни один из предикатов не является следствием другого.
Пункт «з». Неравенству, определяющему предикат P, удовлетворяют все положительные числа, не превосходящие десяти. Неравенству, задающему предикат Q, удовлетворяют все числа отрезка от одного до десяти. Отсюда вытекает, что P является следствием Q, а Q не является следствием P.

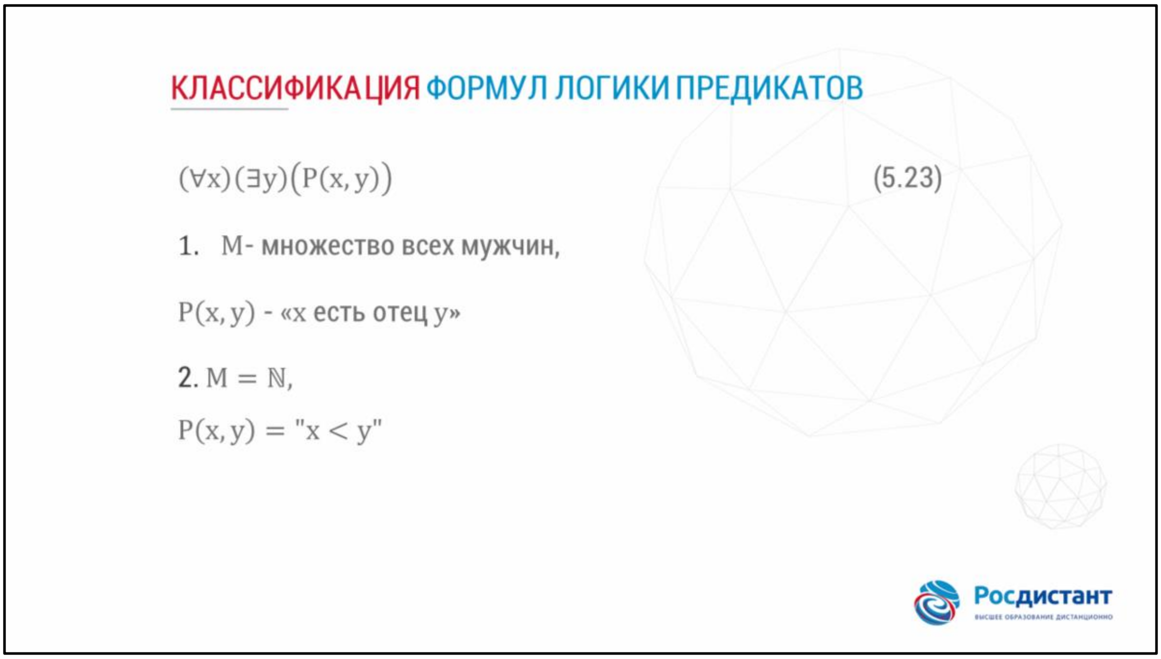


Слайд 167
Продолжим рассматривать ту же задачу для новых пар предикатов.
Пункт «е». Неравенству, определяющему предикат P, удовлетворяет только число ноль. Оно же является единственным корнем уравнения, задающего предикат Q. Отсюда вытекает, что каждый из предикатов является следствием другого.
Пункт «ж». Число десять обращает первый предикат в истинное высказывание, а второй – в ложное. Число минус десять, наоборот, обращает первый предикат в ложное высказывание, а второй – в истинное. Таким образом, ни один из предикатов не является следствием другого.
Пункт «з». Неравенству, определяющему предикат P, удовлетворяют все положительные числа, не превосходящие десяти. Неравенству, задающему предикат Q, удовлетворяют все числа отрезка от одного до десяти. Отсюда вытекает, что P является следствием Q, а Q не является следствием P.



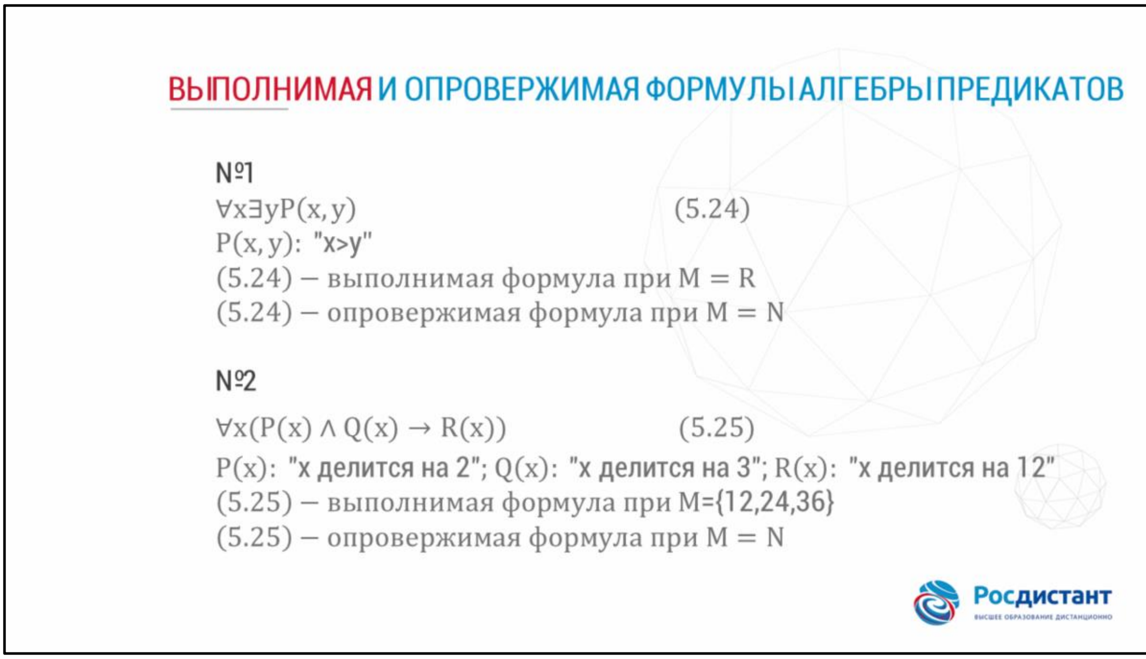
Слайд 168
Понятие формулы алгебры предикатов вводится аналогично понятию формулы алгебры высказываний. Сначала задается алфавит символов, из которых будут составляться формулы. Мы будем использовать символы предметных переменных – малые буквы латинского алфавита, символы предикатных переменных – заглавные буквы латинского алфавита, символы логических операций, кванторы и вспомогательные символы – скобки и запятую.
Определение формулы алгебры предикатов дается индуктивным образом. Оно представлено на слайде.
Формулы, определенные в пунктах 1 и 2, называются атомарными, или элементарными.
Как и в алгебре высказываний, договоримся внешние скобки у формулы не писать.
Подформулой формулы алгебры предикатов называется всякая ее часть, которая сама является формулой. Если формула образована из предикатных переменных F и G с помощью операций дизъюнкции, конъюнкции, импликации, эквиваленции, то F и G являются подформулами этой формулы.
Формулы, в которых нет свободных предметных переменных, называются замкнутыми, а формулы, содержащие свободные предметные переменные, –

открытыми.



Слайд 169
Если в формулу логики предикатов вместо каждой предикатной переменной подставить конкретный предикат, определенный на некотором выбранном множестве M, то формула превратится в конкретный предикат, заданный над множеством M. При этом если исходная формула была замкнутой, то полученный конкретный предикат оказывается нульместным, т. е. будет высказыванием. Если же исходная формула была открытой, т. е. содержала свободные вхождения предметных переменных, то в результате подстановки получим предикат, зависящий от некоторых предметных переменных. Если теперь подставить вместо этих предметных переменных конкретные предметы из множества M, то полученный предикат, а следовательно, и исходная формула превратятся в конкретное высказывание.
Превращение формулы логики предикатов в высказывание описанным способом, а также само полученное высказывание называется интерпретацией этой формулы на множестве M. Итак, если формула логики предикатов замкнутая, т. е. не содержит свободных переменных, то ее интерпретация состоит из одного этапа и сводится к подстановке вместо всех предикатных переменных конкретных предикатов.
Если же формула логики предикатов открытая, т. е. содержит ряд свободных

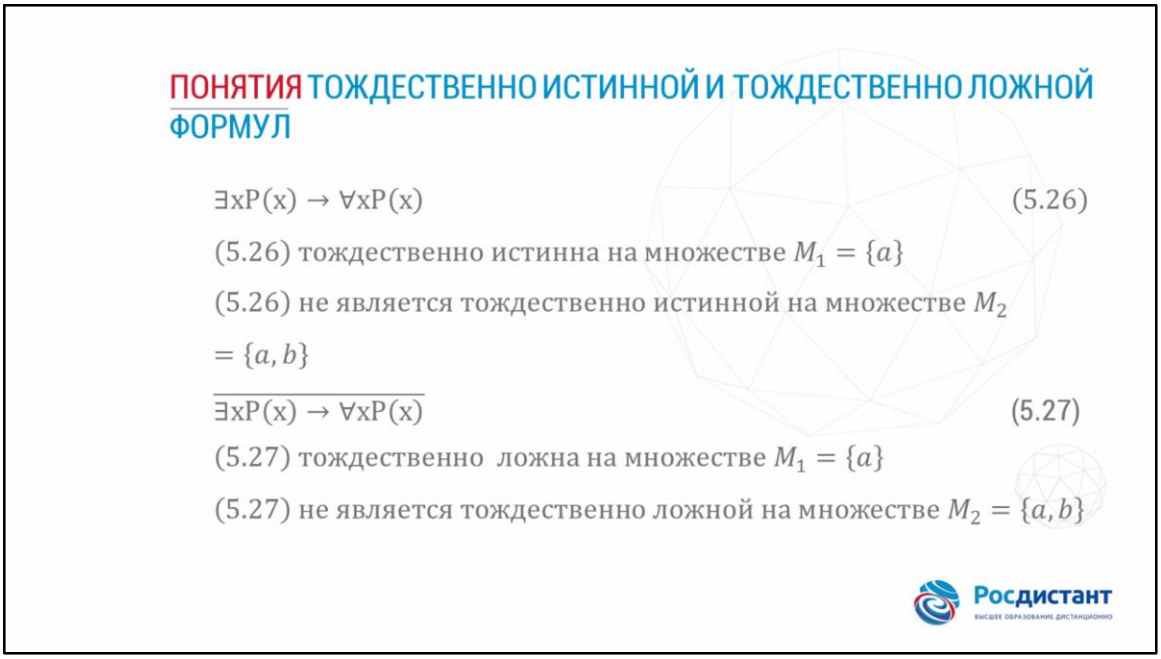
переменных, то ее интерпретация состоит из двух этапов. Во-первых, вместо всех предикатных переменных необходимо подставить конкретные предикаты. В результате чего формула превратится в конкретный предикат, зависящий от такого количества предметных переменных, сколько было свободных предметных переменных в исходной формуле. Во-вторых, нужно придать значение каждой предметной переменной, от которой зависит получившийся предикат, в результате чего этот предикат и, значит, исходная формула превратится в конкретное высказывание, истинное или ложное.
Рассмотрим пример, формула (5.23). В первом случае формула превратится в следующее, очевидно ложное высказывание «У каждого мужчины есть сын». Этой же формуле можно дать и другую интерпретацию. Во второй случае исходная формула превратится в очевидно истинное высказывание «Для каждого натурального числа существует большее по сравнению с ним натуральное число».



Слайд 170
Формула алгебры предикатов называется выполнимой на множестве М, если при некоторой подстановке вместо предикатных переменных конкретных предикатов, заданных на М, она обращается в выполнимый предикат.
Формула алгебры предикатов называется опровержимой на множестве М, если при некоторой подстановке вместо предикатных переменных конкретных предикатов, заданных на М, она обращается в опровержимый предикат.
Другими словами, формула выполнима или опровержима на М, если существует истинная или ложная ее интерпретация на М.
Приведем примеры выполнимых и опровержимых формул.
Рассмотрим формулу (5.24). Она является выполнимой на множестве действительных чисел. Действительно, пусть P(x, y) – это предикат «x > y». При такой интерпретации формула превращается в истинное высказывание «Для любого действительного числа x найдется такое действительное число y, что x > y».
В то же время формула (5.24) является опровержимой на множестве натуральных чисел. В самом деле, если P(x, y) – это предикат «x > y», то формула превращается в ложное высказывание «Для любого натурального числа x найдется такое натуральное число y, что x > y».

Обратимся к формуле (5.25). Она является выполнимой на множестве М, состоящем из чисел 12, 24, 36. Действительно, пусть предикат $P(x)$ выражает свойство числа x делиться на два, предикат $Q(x)$ – свойство делимости на три, а предикат $R(x)$ – свойство делимости на двенадцать. При такой интерпретации формула превращается в истинное высказывание «Всякое число из множества М, делящееся на два и на три, делится и на двенадцать».

В то же время формула (5.25) является опровержимой на множестве натуральных чисел. При подстановке в нее рассмотренных выше предикатов данная формула превращается в ложное высказывание «Всякое натуральное число, делящееся на два и на три, делится и на двенадцать». В самом деле, число восемнадцать, например, делится на два и на три, но при этом оно не делится на двенадцать.



Слайд 171

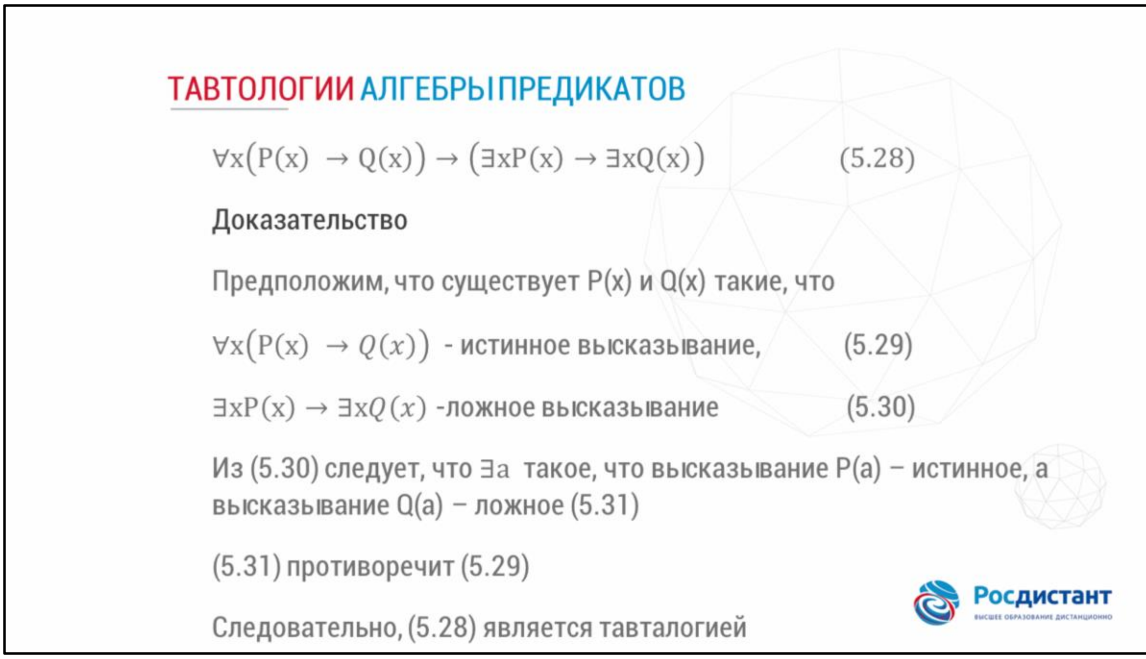
Формула алгебры предикатов называется тождественно истинной на множестве М, если при всякой подстановке вместо предикатных переменных любых предикатов, заданных на М, она превращается в тождественно истинный предикат.

Формула алгебры предикатов называется тождественно ложной на множестве М, если при всякой подстановке вместо предикатных переменных любых предикатов, заданных на М, она превращается в тождественно ложный предикат.

Приведем примеры.

Представленная на слайде формула (5.26) является тождественно истинной на любом одноэлементном множестве M_1. Однако она не будет тождественно истинной на двухэлементном множестве M_2.

Формула (5.27) является тождественно ложной на одноэлементном множестве M_1. Но она не будет тождественно ложной на двухэлементном множестве M_2.



Слайд 172

Формулу алгебры предикатов называют общезначимой, или тавтологией, если при всякой подстановке вместо предикатных переменных любых предикатов, заданных на произвольных множествах, она превращается в тождественно истинный предикат.

Формула общезначима в том и только в том случае, когда ее отрицание невыполнимо ни на одном множестве.

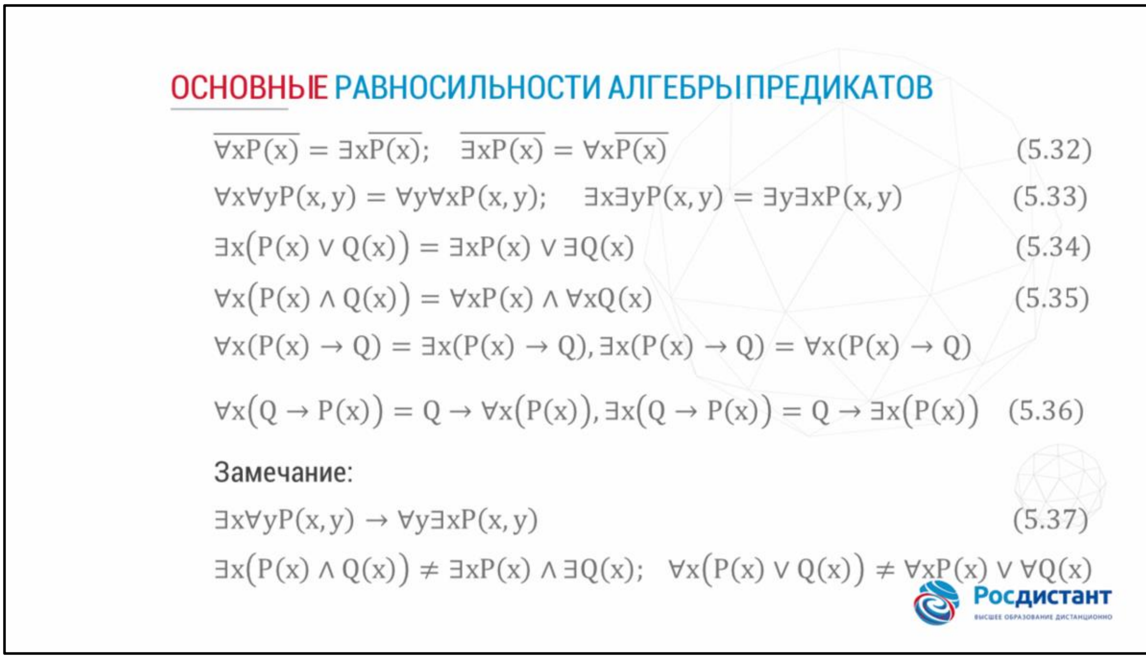
Формулу алгебры предикатов называют тождественно ложной, или противоречием, если при всякой подстановке вместо предикатных переменных любых предикатов, заданных на произвольных множествах, она превращается в тождественно ложный предикат.

Рассмотрим пример общезначимой формулы.

Докажем, что формула алгебры предикатов (5.28) является тавтологией.

Предположим, что формула превращается в ложное высказывание при подстановке в нее некоторых конкретных предикатов P(x) и Q(x), заданных на некотором множестве. Тогда левая часть формулы (5.28) будет истинной, а правая часть – ложной. На слайде это отмечено в утверждениях (5.29) и (5.30).

Из (5.30) следует, что найдется некоторый элемент a из области определения предикатов, для которого P(a) – истинное высказывание, а Q(a) – ложное высказывание. Обозначим этот факт как (5.31). Мы видим, что (5.31) противоречит (5.29). Следовательно, формула (5.28) является тавтологией.



Слайд 173

Рассмотрим основные равносильности алгебры предикатов.

При записи эквивалентные выражения будем соединять друг с другом знаком равенства. По определению операции навешивания кванторов являются самыми сильными из всех операций. Это позволяет уменьшить число скобок при записи выражений на языке алгебры предикатов. При отсутствии скобок первыми выполняются операции с кванторами.

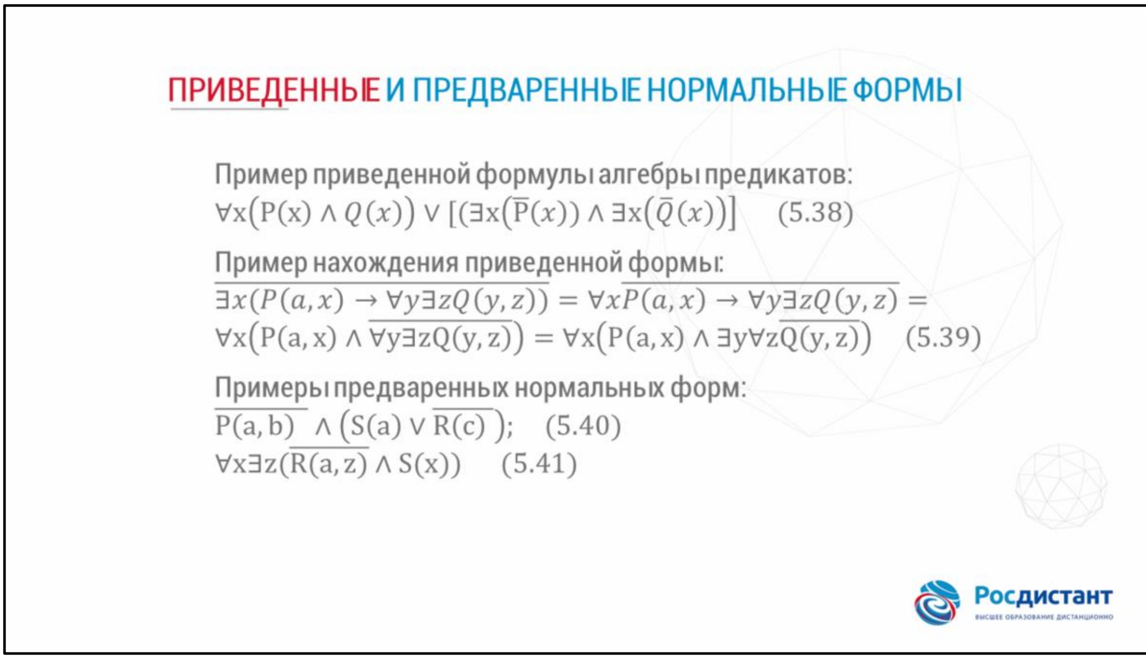
Прежде всего отметим, что две эквивалентные формулы алгебры высказываний при замене входящих в нее пропозиционных переменных произвольными предикатными переменными превращаются в эквивалентные формулы логики предикатов.

На слайде представлены наиболее важные эквивалентности логики предикатов, не сводящиеся к равносильности алгебры высказываний. Все такие эквивалентности содержат кванторы.

Знак отрицания можно внести под знак квантора, сменив квантор на двойственный – формулы (5.32). Эти формулы носят названия законов де Моргана для кванторов.

Одинаковые кванторы можно переставлять – формулы (5.33). При перестановке разных кванторов формулы не равносильны. В этом случае формула (5.37)

является тавтологией.
Квантор существования разбивается на два по дизъюнкции – формула (5.34).
Квантор общности разбивается на два по конъюнкции – формула (5.35).
Заметим, что нельзя разбивать квантор общности на два по дизъюнкции. Нельзя разбивать квантор существования на два по конъюнкции.
Под номером (5.36) записаны формулы, отражающие законы пронесения кванторов через импликацию. Участвующая в них предикатная переменная Q не зависит от предметной переменной x.



Слайд 174

Если формула алгебры предикатов не содержит символов импликации и эквиваленции, а присутствующие в ней знаки отрицания относятся только к предикатным переменным и высказываниям, то она называется приведенной формулой.

Приведенная формула, равносильная исходной формуле, называется приведенной формой.

Каждая формула алгебры предикатов имеет приведенную форму. Для получения приведенной формы заданной формулы необходимо:

избавиться от импликации и эквиваленции с помощью основных равносильностей алгебры высказываний;

перенести знак отрицания на элементарные формулы с помощью внесения отрицания под знак квантора и законов де Моргана;

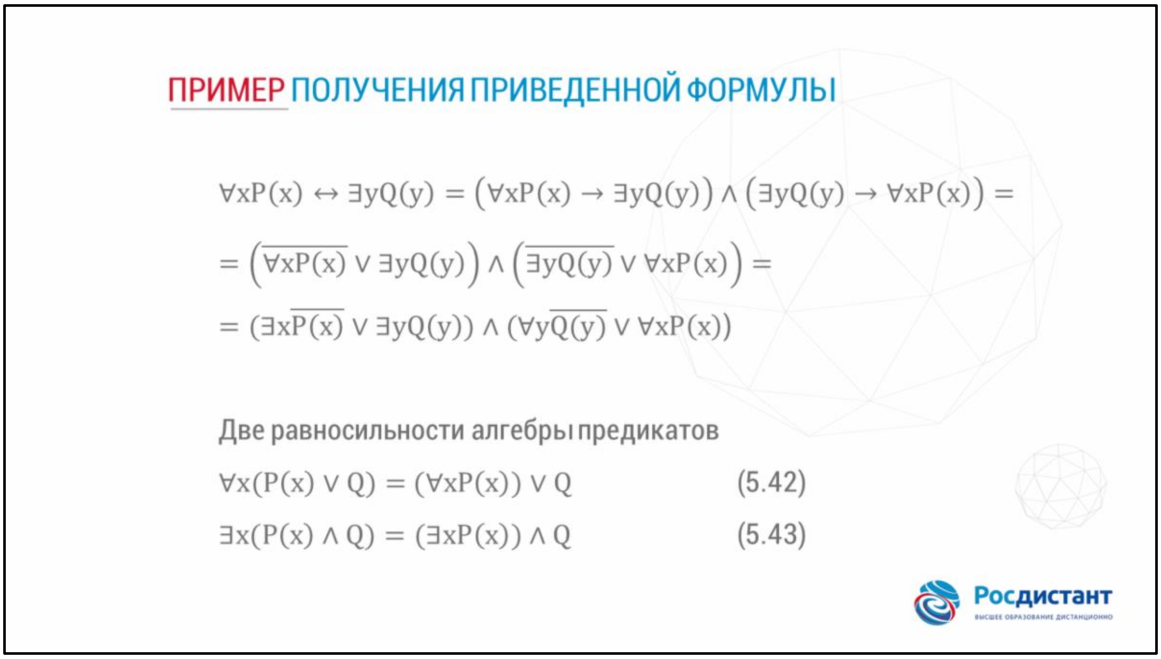
избавиться от двойных отрицаний с помощью закона двойного отрицания.

Пример приведенной формулы алгебры предикатов – формула (5.38).

Пример нахождения приведенной формы формулы алгебры предикатов представлен преобразованиями (5.39).

Предварённой нормальной формой формулы алгебры предикатов называется такая ее приведенная форма, в которой кванторные операции либо вовсе

отсутствуют, либо используются после всех операций алгебры высказываний.
Каждая формула алгебры предикатов имеет предварённую нормальную форму.
Примеры предваренных нормальных форм – формулы (5.40) и (5.41).

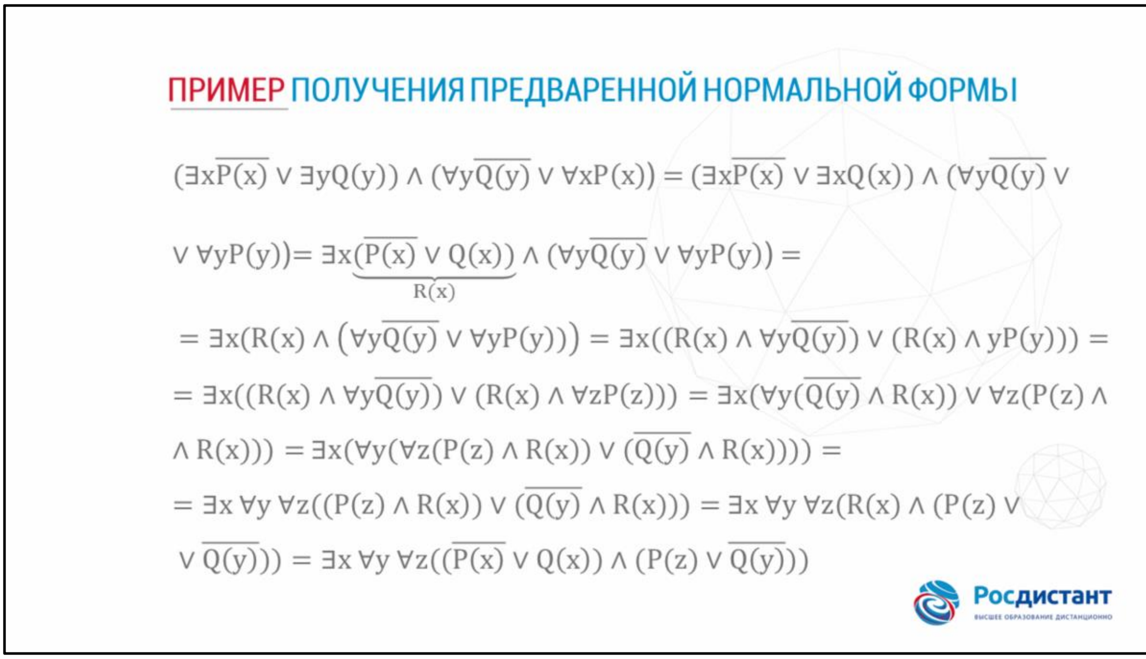


Слайд 175

Рассмотрим еще один пример нахождения приведенной формы для заданной формулы алгебры предикатов. Исходная формула представляет собой эквиваленцию двух выражений, содержащих знаки кванторов.

На слайде показано, как с помощью равносильных преобразований эквиваленция сводится к конъюнкции, представляющей собой приведенную формулу. Сначала мы заменяем эквиваленцию на конъюнкцию двух импликаций на основании соответствующей равносильности алгебры высказываний. Затем переходим от импликаций к дизъюнкциям. На заключительном этапе мы используем правила внесения отрицания под знак квантора.

При приведении формул алгебры предикатов к предваренной нормальной форме часто оказываются полезными равносильности (5.42) и (5.43). Участвующая в них предикатная переменная Q не зависит от предметной переменной x.



Слайд 176

В заключение рассмотрим пример получения предваренной нормальной формы для заданной формулы алгебры предикатов.

Обратимся к формуле, приведенной на слайде. Она представляет собой конъюнкцию двух дизъюнкций, причем элементами каждой дизъюнкции являются выражения, содержащие кванторы. Прокомментируем выполняемые преобразования.

Сначала мы переобозначим связанные предметные переменные, затем используем свойство пронесения квантора существования через дизъюнкцию, далее применяем свойство дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции. Затем вновь переобозначим переменную, выносим за скобки кванторы общности по переменным y и z, еще раз повторяем процедуру вынесения за скобки кванторов общности по указанным переменным. Последнее преобразование – повторное применение свойства дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции.