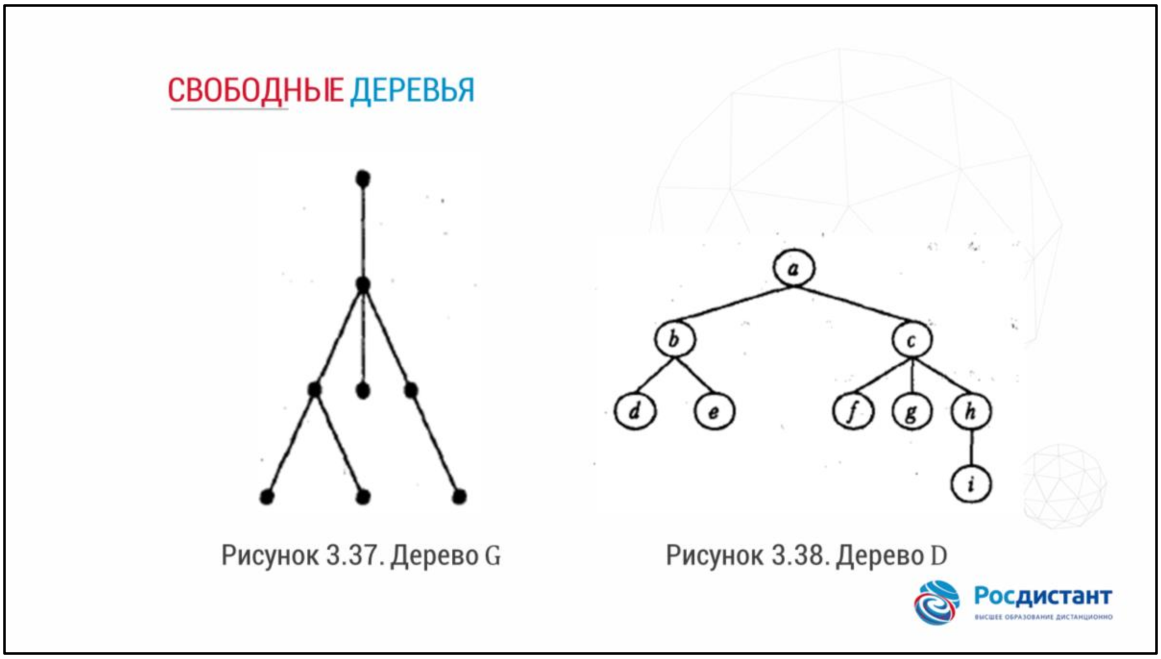
ОСНОВЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ И ЛОГИКИ

7 ЧАСТЬ



Слайд 86

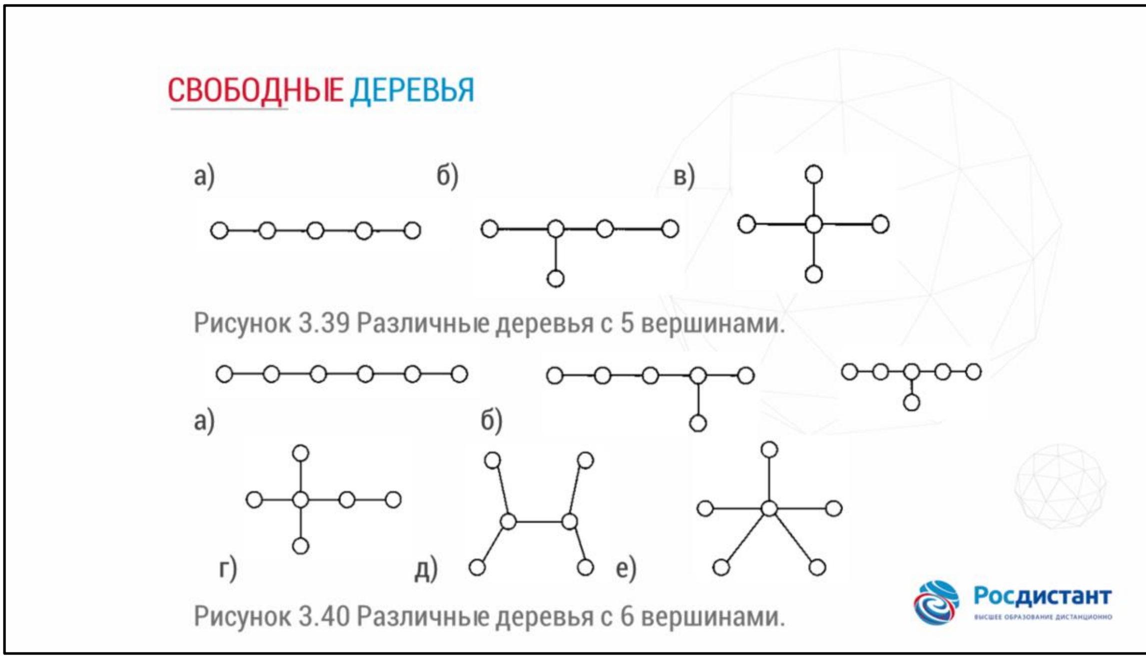
Тема 3.3. Деревья. Остов графа. Понятия планарного, эйлерова и гамильтонова графов

Деревья заслуживают отдельного и подробного рассмотрения по двум причинам.

Деревья являются в некотором смысле простейшим классом графов. Для них выполняются многие свойства, которые не всегда выполняются для графов в общем случае. Применительно к деревьям многие доказательства и рассуждения оказываются намного проще. Выдвигая какие-то гипотезы при решении задач теории графов, целесообразно сначала их проверять на деревьях.

Деревья являются самым распространенным классом графов, применяемых в программировании, причем в самых разных ситуациях.

Неориентированный связный граф без циклов называется деревом, или свободным деревом. Граф, состоящий из нескольких деревьев, называется лесом. Таким образом, компонентами связности леса являются деревья. Примеры деревьев представлены на рис. 3.37, 3.38.



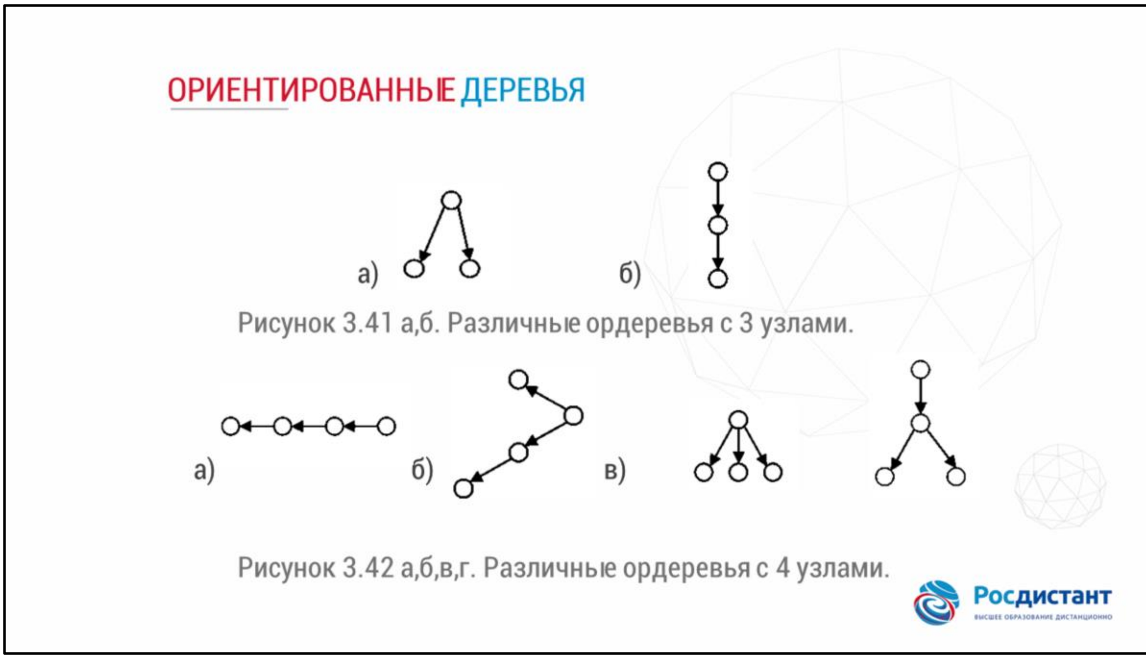
Слайд 87

На рис. 3.39 изображены диаграммы всех различных деревьев с 5 вершинами, а на рис. 3.40 – диаграммы всевозможных деревьев с 6 вершинами.

Для всякого неориентированного графа G следующие утверждения эквивалентны.

1. G – дерево, то есть связный граф без циклов.
2. Любые две вершины соединены в G единственной простой цепью.
3. G– связный граф, и удаление любого ребра делает граф несвязным.
4. G – связный граф, в котором число ребер на единицу меньше числа вершин.
5. G – связный граф без простых циклов.

На основе вышесказанного можно сделать вывод, что в любом дереве всегда есть по крайней мере две висячие вершины. Например, у дерева, изображенного на рис. 3.40, а, таких вершин в точности две. Дерево на рис. 3.40, е имеет пять висячих вершин.



Слайд 88

Вершины в графе часто называют узлами. Этот термин мы будем использовать далее при рассмотрении ориентированных деревьев.

Ориентированным деревом, или ордеревом, называется орграф, удовлетворяющий следующим условиям:

1) существует единственный узел, полустепень захода которого равна 0; он называется корнем ордерева;

2) полустепень захода всех остальных узлов равна 1;

3) каждый узел достижим из корня.

На рис. 3.41 приведены диаграммы всех различных ориентированных деревьев с 3 узлами, а на рис. 3.42 – диаграммы всевозможных ордеревьев с 4 узлами.

Всякое ордерево G обладает следующими свойствами:

1) число ребер в G на единицу меньше числа вершин;
2) если в G отменить ориентацию ребер, то получится свободное дерево;
3) G не содержит контуров;
4) для каждого узла существует единственный путь, ведущий в этот узел из корня;
5) подграф, определяемый множеством узлов, достижимых из узла v, является ордеревом с корнем v, называемым поддеревом узла v.

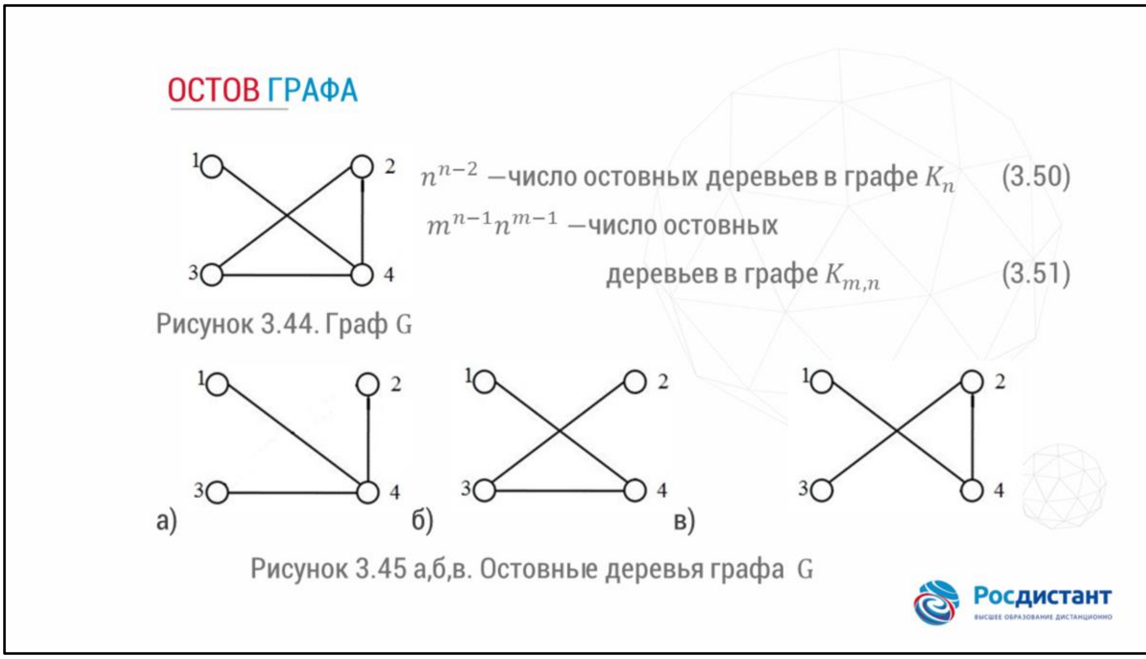
Если в свободном дереве любую вершину назначить корнем, то получится ордерево, при этом дуги будут последовательно ориентированы от корня.

Слайд 89

Листом ордерева называется вершина с нулевой полустепенью исхода. Путь из корня в лист называется ветвью. Длина наибольшей ветви ордерева называется его высотой. Уровень узла ордерева – это расстояние от корня до узла. Сам корень имеет нулевой уровень. Узлы одного уровня образуют ярус дерева.

У дерева, изображенного на рис. 3.43, высота равна двум. Корнем дерева является вершина 1, листьями – вершины 4, 5, 6, 7. Формула (3.47) представляет все узлы первого уровня, формула (3.48) – узлы второго уровня. Данное дерево имеет четыре ветви, представляемые формулой (3.49).

Наряду с растительной, применяется еще и генеалогическая терминология. Узлы, достижимые из узла u, называются потомками узла u. Потомки образуют поддерево в исходном дереве. Если в дереве существует дуга (u, v), то узел u называется отцом, или родителем, узла v, а узел v – сыном узла u. Сыновья одного узла называются братьями.



Слайд 90

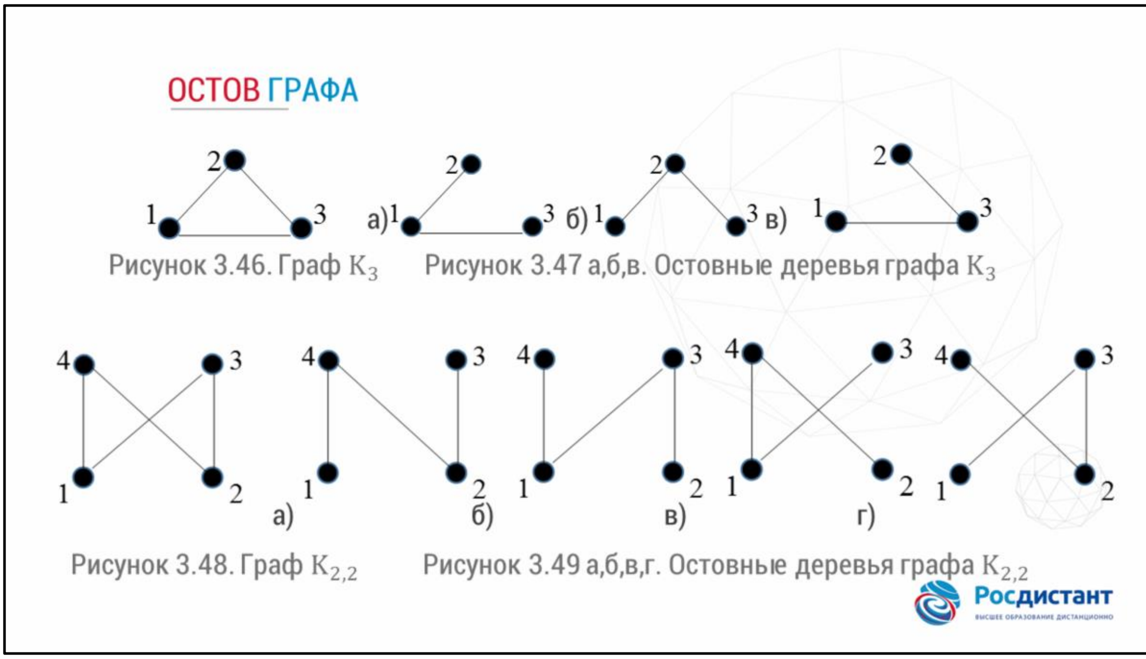
Пусть G – связный неориентированный граф. Остовным деревом, или остовом, графа G называется его ациклический связный подграф, содержащий все вершины G. Другими словами, остовное дерево графа состоит из минимального подмножества ребер графа, таких, что из одной из вершин графа можно попасть в любую другую вершину, двигаясь по этим ребрам.

В качестве примера рассмотрим граф G, изображенный на рис. 3.44. Он имеет три остова, которые представлены на рис. 3.45.

Количество ребер остовного дерева графа на единицу меньше числа вершин графа.

Число остовов полного графа с n вершинами можно вычислить по формуле (3.50).

Количество остовных деревьев в полном двудольном графе с m и n вершинами в долях выражается формулой (3.51).



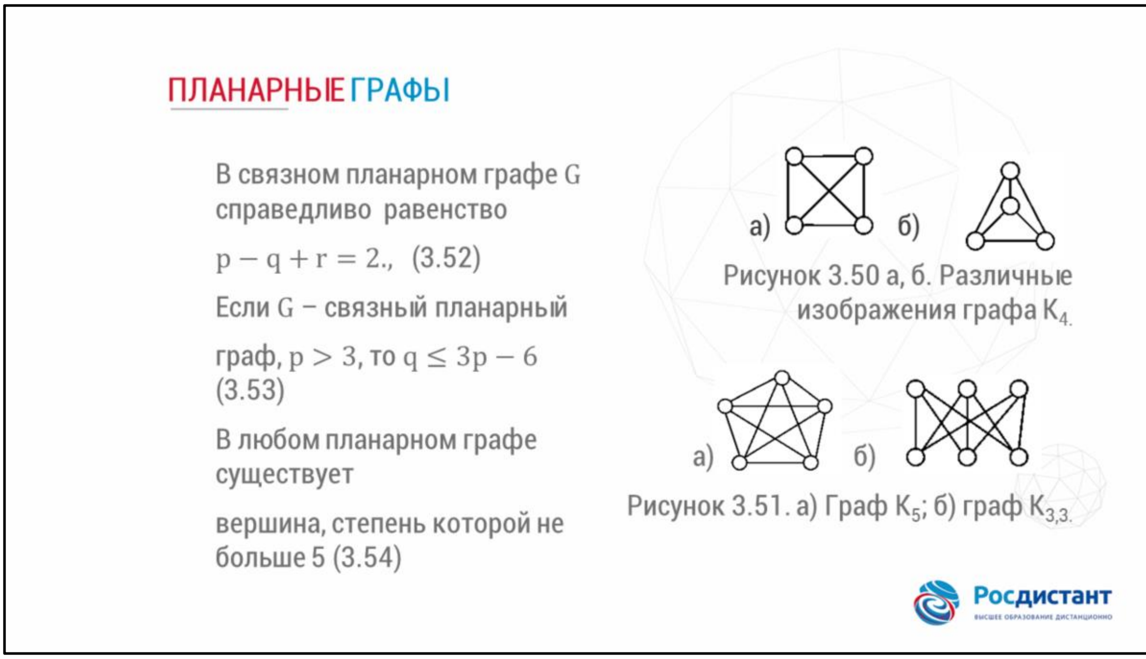
Слайд 91

Рассмотрим полный граф с тремя вершинами, изображенный на рис. 3.46. Он имеет три разных остовных дерева, представленных на рис. 3.47.

На рис. 3.48 изображен полный двудольный граф с двумя вершинами в каждой доле. Число его различных остовных деревьев равно четырем. Указанные деревья представлены на рис. 3.49.

Число остовных деревьев полного графа быстро растет с увеличением количества его вершин. Так, полный граф с четырьмя вершинами имеет 16 остовных деревьев, у графа с пятью вершинами их уже 125, при добавлении шестой вершины число остовных деревьев увеличивается до 1296.

Аналогично с увеличением количества вершин в долях быстро растет число остовных деревьев полного двудольного графа. У графа, имеющего по три вершины в каждой доле, их 81. Если в одной доле графа три вершины, а в другой четыре, то число остовных деревьев возрастает до 432. У графа, имеющего три вершины в первой доле и пять во второй, число остовных деревьев равно 2025.



Слайд 92

Неориентированный граф G без петель и кратных ребер называется планарным, если его можно изобразить на плоскости так, что никакие два ребра не пересекаются в точках, отличных от вершин. Такое изображение графа на плоскости называется плоским. Таким образом, если граф имеет плоское изображение, то он является планарным.

Граф K_4, представленный на рис. 3.50, а, планарен, поскольку может быть изображен, как показано на рис. 3.50, б.

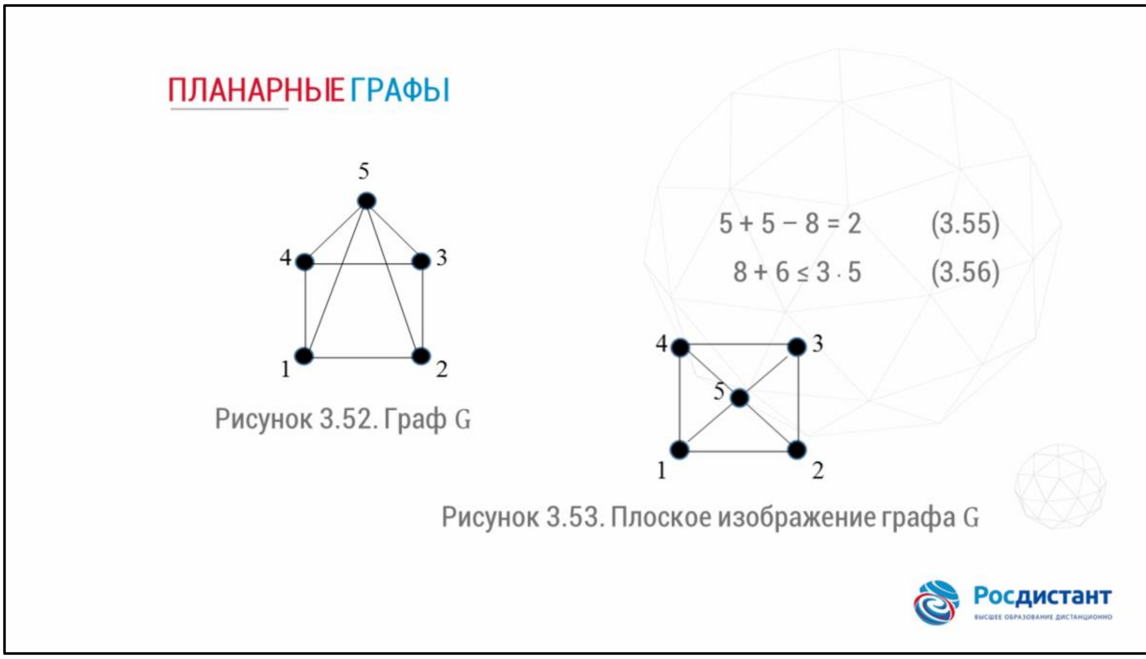
Не всякий граф является планарным. Справедливо следующее утверждение.

Если граф G планарен, то он не содержит подграфа, изоморфного полному графу или полному двудольному графу $K_{3,3}$. Указанные графы изображены на рис. 3.51.

Из последнего утверждения вытекает, что графы и$K_{3,3}$ не являются планарными.

Любой конечный граф может быть изображен в трехмерном пространстве без пересечения ребер вне их концов.

Для всякого связного планарного графа G справедлива теорема Эйлера, представленная формулой (3.52). Здесь p – число вершин графа G, q – число ребер, r – число областей, на которые разбивается плоскость плоским изображением графа G. Следствия этой теоремы приведены в формулах (3.53) и (3.54).

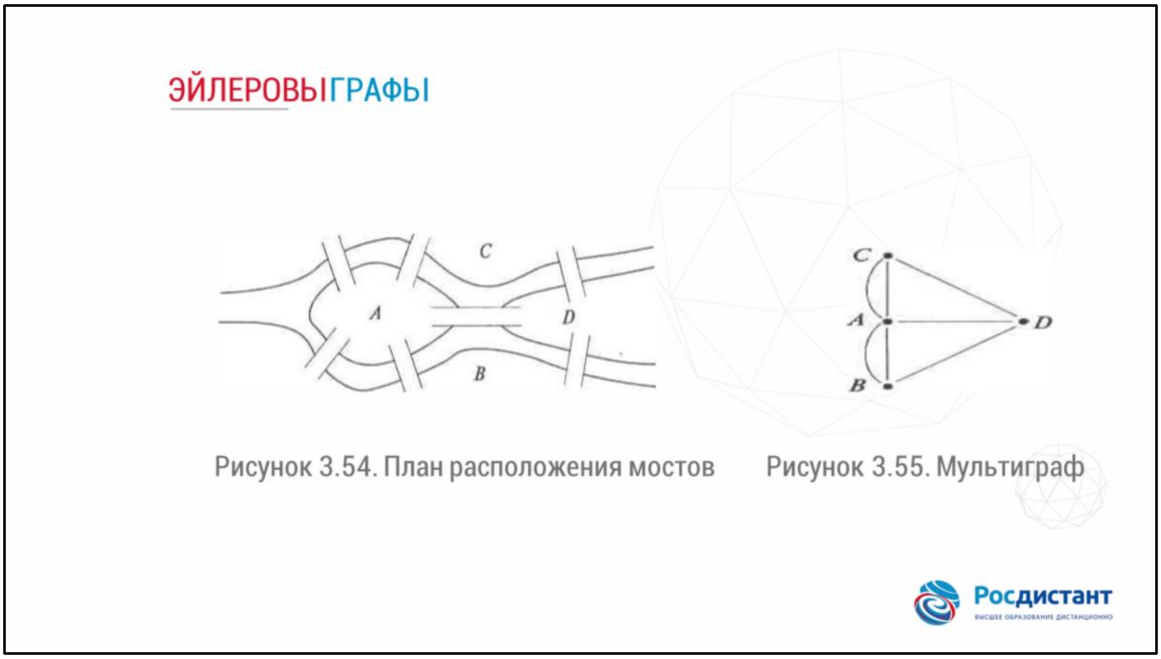


Слайд 93

Проиллюстрируем теорему Эйлера и ее следствия на графе G, изображенном на рис. 3.52. Прежде всего построим его плоское изображение. Оно приведено на рис. 3.53. В нашем случае граф имеет пять вершин и восемь ребер. Число областей, на которые разбивается плоскость плоским изображением графа, равно пяти. Как и утверждается в теореме Эйлера, вычитая из суммы числа вершин и числа указанных областей количество ребер графа G, получаем число два. Соответствующее равенство представлено формулой (3.55).

Поскольку число вершин графа больше трех, в силу первого следствия теоремы сумма числа ребер и шести не должна превосходить утроенного количества вершин. Требуемое соотношение, выражаемое формулой (3.56), очевидно, выполняется.

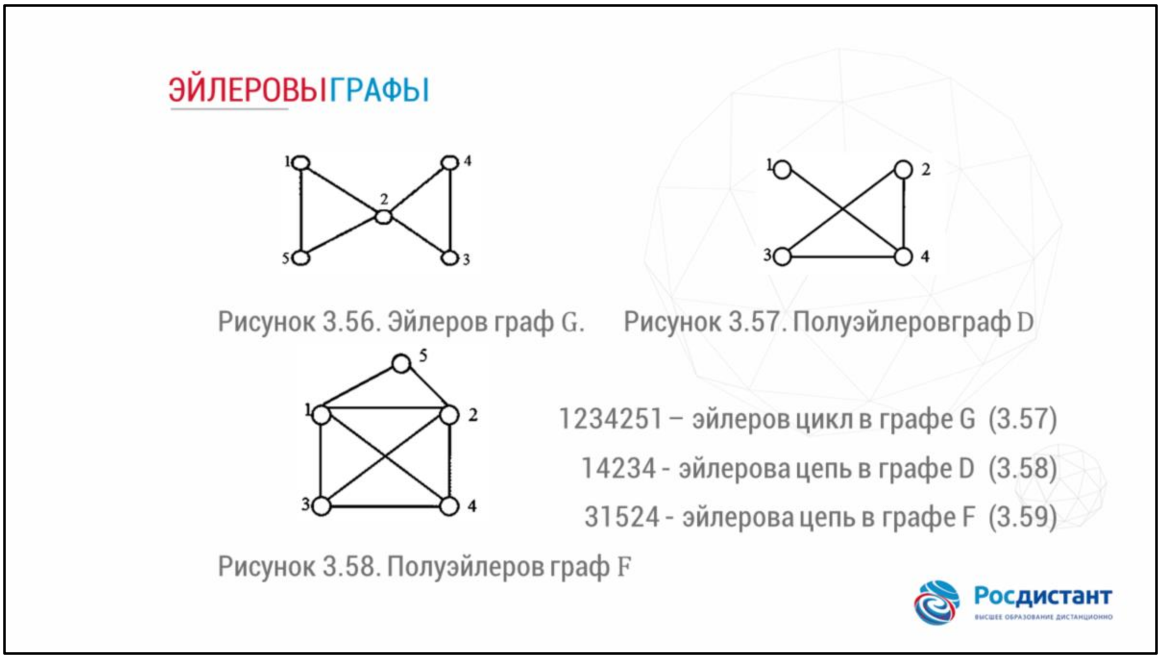
Наконец, степени всех вершин графа G не превосходят пяти, что подтверждает справедливость второго следствия теоремы Эйлера.



Слайд 94

Рассмотрим классическую задачу, известную как задача о семи кёнигсбергских мостах. С постановки этой задачи начала свое развитие теория графов. Имеются два острова, соединенных семью мостами с берегами реки и друг с другом, как показано на рис. 3.54. Нужно осуществить прогулку по городу таким образом, чтобы, пройдя по каждому мосту один раз, вернуться обратно. Данная задача была поставлена философом Иммануилом Кантом в 1736 году, во время его прогулки по городу Кёнигсбергу.

Решение этой задачи сводится к нахождению некоторого специального маршрута на графе. Поставим в соответствие плану расположения участков суши и мостов, приведенному на рис. 3.54, мультиграф, вершины которого обозначают части суши, а ребра – соединяющие их мосты. Указанный граф изображен на рис. 3.55. Теперь задача звучит следующим образом: найти цикл, содержащий все ребра графа. Эта задача была решена Леонардом Эйлером, петербургским математиком швейцарского происхождения.



Слайд 95

Пусть G – неориентированный граф.

Если G имеет цикл, содержащий все ребра графа, то такой цикл называется эйлеровым циклом, а граф G – эйлеровым графом. Если G имеет цепь, содержащую все вершины графа по одному разу, то такая цепь называется эйлеровой цепью, а граф G – полуэйлеровым графом.

Граф G, изображенный на рис. 3.56, является эйлеровым. Он имеет эйлеров цикл, представленный формулой (3.57).

Граф D на рис. 3.57 является полуэйлеровым. Входящая в него эйлерова цепь представлена формулой (3.58).

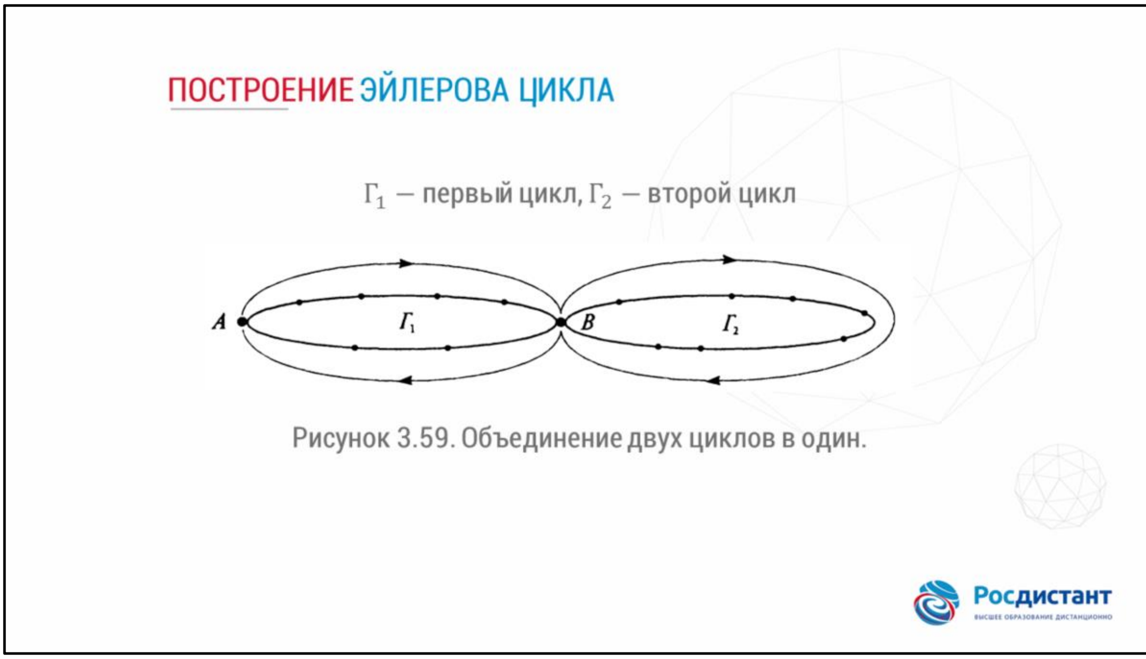
Для всякого связного нетривиального графа G следующие утверждения эквивалентны.

1. G – эйлеров граф.
2. Каждая вершина G имеет четную степень.
3. Множество ребер графа G можно разбить на простые циклы.

Заметим, что в задаче о кёнигсбергских мостах все вершины графа имеют нечетные степени. Поэтому данная задача решения не имеет.

Граф F, изображенный на рис. 3.58, не является эйлеровым, например, потому, что степень его вершины 4 равна трем. В то же время он принадлежит классу

полуэйлеровых графов, поскольку содержит эйлерову цепь, задаваемую формулой (3.59).
Если граф без петель содержит 2k вершин нечетной степени, то его можно разбить на k полуэйлеровых графов, то есть нарисовать k росчерками пера.
Задачи с эйлеровыми графами часто встречаются в книгах по занимательной математике – например, можно ли нарисовать какую-нибудь диаграмму, не отрывая карандаша от бумаги и не проходя никакую линию дважды. Принято всякую замкнутую линию, если ее можно начертить, не отрывая карандаша от бумаги, проходя при этом каждый участок в точности один раз, называть уникурсальной. Рисунок графа, обладающего эйлеровым путем или эйлеровым циклом, является уникурсальной линией.



Слайд 96

Напомним, что эйлеров цикл в связном нетривиальном графе существует тогда и только тогда, когда все его вершины имеют четные степени.

На этой теореме основан алгоритм построения эйлерова цикла.

Сначала нужно убедиться, что граф эйлеров, и построить любой цикл. После такого построения возникают две возможности:

а) в цикл входят все ребра графа;

б) на графе остались неучтенные ребра.

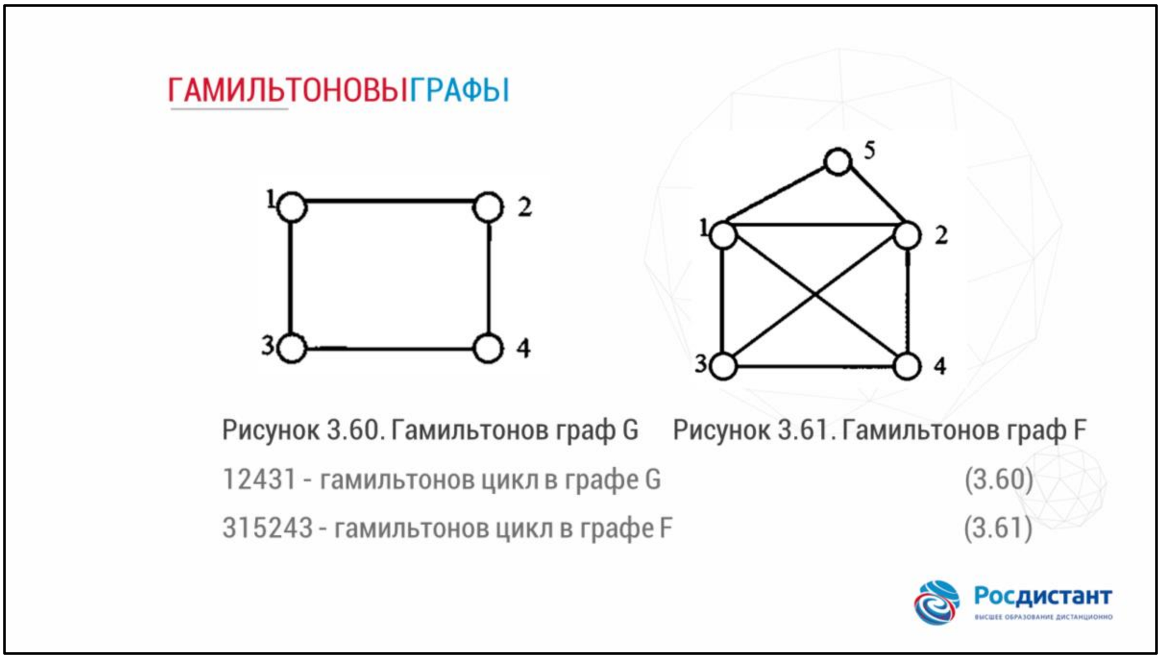
В случае «а» задача решена. В случае «б» в построенном цикле нужно найти вершину, из которой выходит еще не пройденное ребро, и сформировать цикл из не задействованных ранее ребер. Затем надо объединить два имеющихся цикла в один и вновь проверить, все ли ребра пройдены. И так далее. Процедура объединения двух циклов в один продемонстрирована на рис. 3.59.

Алгоритм заканчивает свою работу, когда будут задействованы все ребра графа.

Рассмотрим некоторые приложения теоремы Эйлера, которые в основном связаны с так называемой задачей китайского почтальона.

Пусть имеется связный граф, ребрам которого соответствуют некоторые числа, называемые весами. Требуется найти такой цикл, при котором каждое ребро проходится по крайней мере один раз и суммарный вес всех ребер, вошедших в цикл, минимален. Заметим, что если граф эйлеров, то искомым циклом является содержащийся в графе эйлеров цикл.

Эта задача имеет много приложений, одним из которых является поливка улиц одной машиной. Здесь ребра графа – дороги, вершины – перекрестки, веса – длины дорог. Подобная задача возникает при сборе мусора, доставке почты, выборе наилучшего маршрута для осмотра музея, уборке помещений и коридоров в больших учреждениях.



Слайд 97

Кратко остановимся на проблеме, связанной с возможностью обхода всех вершин в графе. Задача ставится следующим образом: выяснить, существует ли в данном графе простой цикл, проходящий через каждую вершину графа.

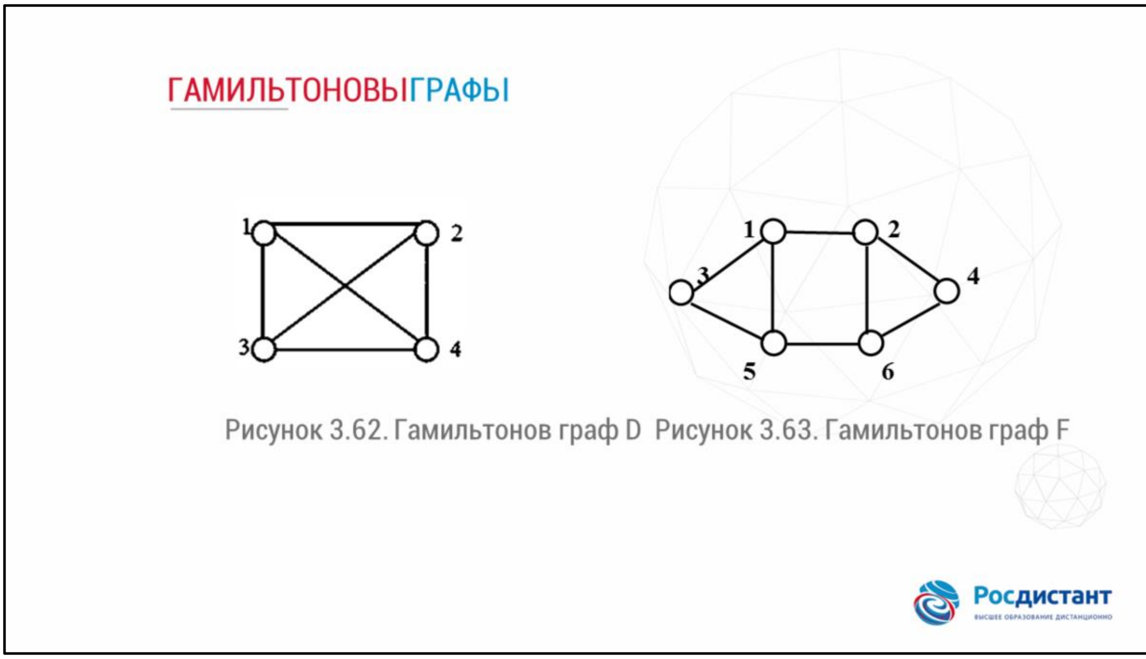
Рассмотрим неориентированный граф G.

Если G имеет простой цикл, содержащий все вершины графа, то такой цикл называется гамильтоновым циклом, а граф G – гамильтоновым графом.

Граф G на рис. 3.60 является гамильтоновым. Он имеет гамильтонов цикл, представленный формулой (3.60).

Гамильтонов цикл не всегда содержит все ребра графа. Рассмотрим граф F, изображенный на рис. 3.61. Его гамильтонов цикл, задаваемый формулой (3.61), содержит только 5 из 8 ребер графа.

Граф, являющийся гамильтоновым, обязательно связен.



Слайд 98

Несмотря на сходство постановки задач для гамильтоновых и эйлеровых графов, «хорошего» решения для гамильтоновых графов нет. Вообще, о гамильтоновых графах известно очень мало. В основном это теоремы типа «Если в графе достаточное число ребер, то он гамильтонов». Ясно, что подобные теоремы не могут служить критерием для проверки того, является ли граф гамильтоновым. Ведь в графах такого типа вершин может быть очень много, а ребер сравнительно мало.

Имеет место следующее утверждение, называемое теоремой Дирака.

Если в графе G, содержащем n вершин, степень любой вершины больше n/2, то граф G является гамильтоновым.

Применим данную теорему к графу D, изображенному на рис. 3.62. Этот граф имеет четыре вершины, причем степень каждой вершины больше двух. Следовательно, граф D является гамильтоновым.

К графу F, изображенному на рис. 3.63, указанная теорема не применима. Тем не менее он также является гамильтоновым.

Гамильтоновы путь, цикл и граф названы в честь ирландского математика Уи́льяма Га́мильтона, который впервые определил эти классы, исследовав задачу «кругосветного путешествия» по додекаэдру. В этой задаче вершины додекаэдра символизировали известные города, такие как Брюссель, Амстердам, Эдинбург, Пекин, Прагу, Дели, Франкфурт и другие, а ребра – соединяющие их дороги. Путешествующий должен пройти «вокруг света», найдя путь, который проходит через все вершины ровно один раз. Чтобы сделать задачу более интересной, порядок прохождения городов устанавливался заранее. А чтобы было легче запомнить, какие города уже соединены, в каждую вершину додекаэдра был вбит гвоздь, и проложенный путь отмечался небольшой веревкой, которая могла обматываться вокруг гвоздя. Однако такая конструкция оказалась слишком громоздкой, и Гамильтон предложил новый вариант игры, заменив додекаэдр плоским графом, изоморфным графу, построенному на ребрах додекаэдра.