Текст для учебника по курсу
«Основы дискретной математики и логики»

Слайд 2

Тема 1.1. Множества и операции над ними

Теория множеств – раздел математики, в котором изучаются общие свойства множеств – совокупностей элементов произвольной природы, обладающих каким-либо общим свойством. Создана теория множеств во второй половине XIX века Георгом Ка́нтором при значительном участии Ри́харда Дедеки́нда, она привнесла в математику новое понимание природы бесконечности. Была обнаружена глубокая связь теории с формальной логикой, однако уже в конце XIX – начале XX века теория столкнулась со значительными сложностями в виде возникающих парадоксов. Поэтому изначальная форма теории известна как наивная теория множеств. В XX веке теория получила существенное методологическое развитие. Были созданы несколько вариантов аксиоматической теории множеств, обеспечивающие универсальный математический инструментарий. В связи с вопросами измеримости множеств тщательно разработана дескриптивная теория множеств.

Теория множеств стала основой многих разделов математики – общей топологии, общей алгебры, функционального анализа и оказала существенное влияние на современное понимание предмета математики. В первой половине XX века теоретико-множественный подход был привнесен и во многие традиционные разделы математики, в связи с чем стал широко использоваться в преподавании математики, в том числе в школах. Однако использование теории множеств для логически безупречного построения математических теорий осложняется тем, что она сама нуждается в обосновании своих методов рассуждения. Более того, все логические трудности, связанные с обоснованием математического учения о бесконечности, при переходе на точку зрения общей теории множеств приобретают лишь бо́льшую остроту.

Начиная со второй половины XX века представление о значении теории и ее влияние на развитие математики заметно снизились. Это произошло за счет осознания возможности получения достаточно общих результатов во многих областях математики и без явного использования ее аппарата, в частности, с использованием теоретико-категорного. Тем не менее нотация теории множеств стала общепринятой во всех разделах математики вне зависимости от использования теоретико-множественного подхода. На идейной основе теории множеств в конце XX века создано несколько обобщений, в том числе теория нечетких множеств, теория мультимножеств, используемые в основном в приложениях, теория полумножеств.

Слайд 3

Основными понятиями теории являются элементы и множество. Эти понятия считаются общеизвестными и не определяются, так как, если попытаться определить их, например, так: множество элементов есть их совокупность, – то нужно дать понятие совокупности. Например, совокупность элементов есть некоторый их набор, что потребует дать определение набора элементов. Такие вложенные определения будут повторяться до бесконечности. Поэтому, говоря о некотором множестве, лучше всего пояснить это на примерах. Таким же неопределяемым понятием является элемент. Например, множество студентов конкретной группы можно обозначить через M. Каждый студент этой группы является элементом множества M.

Множества обычно обозначаются большими буквами латинского алфавита, возможно с индексами, а элементы множества – малыми буквами. Примеры обозначений множеств и их элементов приведены в формулах (1.1) и (1.2). Для указания принадлежности или непринадлежности элемента множеству используют обозначения, приведенные в формуле (1.3).

Множества A[а] и B[бэ] равны, если они состоят из одних и тех же элементов. Если все элементы, из которых состоит множество A[а], входят и во множество B[бэ], то A[а] называют подмножеством множества B[бэ]. На основании этого также можно сказать, что два множества A[а] и B[бэ] равны, если A[а] является подмножеством B[бэ], а B[бэ] является подмножеством A[а]. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым множеством. Подмножества некоторого множества, отличные от него самого и от пустого множества, называются собственными. Например, множество целых чисел является собственным подмножеством множества действительных чисел; множество остроугольных треугольников является собственным подмножеством множества всех треугольников. Если A[а] является подмножеством B[бэ], но не совпадает с ним, то говорят, что A[а] является строгим подмножеством множества B[бэ]. Всякое собственное подмножество рассматриваемого множества будет его строгим подмножеством. Обратное утверждение неверно. Пустое множество является строгим подмножеством любого непустого множества, но не является его собственным подмножеством. В формуле (1.4) приведено обозначение, используемое для подмножества, в формуле (1.5) – обозначение пустого множества, в формуле (1.6) – обозначение строгого подмножества.

Слайд 4

Существуют различные способы задания множеств. Один из возможных способов – перечисление всех элементов множества, которые записываются в фигурных скобках. Таким образом, фигурные скобки обозначают множество.

Данный способ обычно применяется в том случае, когда множество содержит конечное небольшое количество элементов.

Если же множество содержит большое количество элементов или бесконечное число элементов, то для задания множества лучше использовать другой способ – характеристическое свойство. При этом способе задания описывается признак, по которому мы однозначно можем определить, принадлежит рассматриваемый элемент данному множеству или не принадлежит.

Множество A[а] на слайде задано перечислением его элементов. Множества B[бэ] и C[сэ] – с помощью характеристического свойства. Двоеточие в записи множеств B[бэ] и C[сэ] читается «такие, что».

Множество B[бэ] состоит из целых чисел x[икс] таких, что x[икс] кратно трем. Множество C[сэ] состоит из таких действительных чисел x [икс], что x[икс] меньше десяти.

Универсальное множество U[у] есть множество, обладающее таким свойством, что все рассматриваемые множества являются его подмножествами.

В теории чисел универсальное множество обычно совпадает со множеством всех целых чисел или натуральных чисел. В математическом анализе универсальное множество может быть множеством всех действительных чисел или множеством всех точек эн-мерного пространства. Следует отметить, что хотя универсальное множество и названо универсальным, однозначно не определено, если точно не указана область рассмотрения. Конечно, любое множество, содержащее U[у] может быть использовано как универсальное.

В некоторых случаях оказывается удобным графический способ задания множества. Он применяется, например, тогда, когда рассматриваемое множество представляет собой часть плоскости. Это может быть круг, треугольник, квадрат, полуплоскость, координатная четверть и тому подобное. В таких ситуациях интересующее нас множество изображается на плоскости и заштриховывается или закрашивается.

Слайд 5

Объединением множеств A[а] и B[бэ] называется множество C[цэ], состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств

A[а] и B[бэ]. Аналогично определяется объединение любого, возможно бесконечного, числа множеств. Например, объединением множества положительных целых чисел и множества отрицательных целых чисел является множество целых чисел, отличных от нуля. Если одно из рассматриваемых множеств является частью другого, то их объединением будет более широкое множество. Так, объединением множества равнобедренных треугольников и множества равносторонних треугольников является множество равнобедренных треугольников.

Пересечением множеств A[а] и B[бэ] называется множество C[цэ], состоящее из всех элементов, принадлежащих как A[а], так и B[бэ]. Аналогично определяется пересечение любого числа множеств. Например, пересечением множества натуральных чисел, делящихся на 5, и множества натуральных чисел, делящихся на 3, является множество натуральных чисел, делящихся на 15. Если одно из рассматриваемых множеств является частью другого, то их пересечением будет более узкое множество. Так, пересечением множества квадратов и множества прямоугольников является множество квадратов.

Формулы (1.7) и (1.8) определяют введенные выше операции с помощью математических символов.

Слайд 6

Говорят, что множества A[а] и B[бэ] находятся в общем положении, если они пересекаются, но ни одно из них не является подмножеством другого. Например, рассмотрим множество натуральных чисел, делящихся на 6, и множество натуральных чисел, делящихся на 9. Они имеют непустое пересечение – множество натуральных чисел, делящихся на 18. При этом ни одно из двух данных множеств не является частью другого. Следовательно, рассматриваемые множества находятся в общем положении.

Разностью множеств A[а] и B[бэ] называется множество C[цэ], состоящее из всех элементов A[а], не принадлежащих B[бэ]. Например, разностью множества натуральных чисел и множества нечетных чисел является множество четных чисел.

Симметрической разностью множеств *A*[а] и *B*[бэ] называется множество *C*[цэ], получающееся при объединении разности *A*[а] и *B*[бэ] с разностью *B*[бэ] и *A*[а]. Отметим, что если множество *B*[бэ] является частью множества *A*[а], то симметрическая разность *A*[а] и *B*[бэ] совпадает с обычной разностью.

Предположим, что мы рассматриваем совокупность множеств, являющихся подмножествами некоторого основного, или универсального, множества *U*[у]. Тогда для всякого множества *A*[а] разность *U*[у] и *A*[а] называют дополнением множества *A*[а]. Например, дополнением множества всех остроугольных треугольников до множества всевозможных треугольников является множество всех тупоугольных и прямоугольных треугольников.

Определения операций разности, симметрической разности и дополнения с помощью математических символов представлены соответственно в формулах (1.9), (1.10) и (1.11).

Слайд 7

Операции объединения и пересечения множеств обладают свойством коммутативности. Указанное свойство представлено формулами (1.12), (1.13) соответственно. Свойство коммутативности выполняется и для операции сложения чисел и в этом случае означает, что от перестановки мест слагаемых сумма не меняется.

Операции объединения и пересечения множеств обладают свойством ассоциативности. Указанное свойство представлено формулами (1.14), (1.15) соответственно. Это свойство означает, что одна и та же операция для трех и более множеств может производиться в любом удобном порядке.

Кроме того, для данных операций справедливы свойства дистрибутивности, которые выражаются формулами (1.16) и (1.17). С помощью этих свойств можно выносить общее множество за скобки.

В теории множеств часто используются правила де Мóргана, или теоремы двойственности. Первая из них утверждает, что дополнение до объединения множеств равно пересечению их дополнений. Вторая говорит о том, что дополнение до пересечения множеств совпадает с объединением их дополнений. Формулировки данных утверждений с помощью математических символов представлены в формуле (1.18).

Слайд 8

Для геометрической иллюстрации операций над множествами довольно часто используют диаграммы Эйлера – Венна. На этих диаграммах исходные множества изображаются в виде кругов. В случаях, когда рассматриваются операции пересечения, объединения, разности и симметрической разности, круги, изображающие множества A[а] и B[бэ], накладываются друг на друга. Для изображения операции дополнения универсальное множество U[у] изображается в виде круга или прямоугольника, внутри которого содержится круг, изображающий дополняемое множество A[а]. На рис. 1.1 множества, получающиеся в результате применения указанных операций к множествам A[а] и B[бэ], закрашены синим цветом.

Подобные диаграммы могут быть использованы для геометрической иллюстрации объединения и пересечения трех и более множеств. В этом случае на рисунке изображается столько налегающих друг на друга кругов, сколько множеств участвует в объединении или пересечении.

Слайд 9

Рассмотрим примеры выполнения операций над множествами. В первом случае даны два конечных множества A[а] и B[бэ] и универсальное множество U[у].

Для нахождения объединения множеств A[а] и B[бэ] записываем все числа, входящие в эти множества. Их общие элементы записываются один раз.

В пересечение множеств входят их общие элементы.

Разность множеств A[а] и B[бэ] состоит из элементов, которые принадлежат первому множеству и не принадлежат второму. Аналогично в разность множеств B[бэ] и A[а] входят те элементы из B[бэ], которых нет в A[а].

Симметрическая разность представляет собой объединение двух разностей, поэтому в симметрическую разность собраны вместе элементы двух предыдущих множеств.

Дополнение множества A[а] состоит из всех элементов универсального множества, которые не принадлежат множеству A[а]. Соответственно, дополнение множества B[бэ] образовано теми элементами множества U[у], которые не вошли в B[бэ].

Слайд 10

В качестве второго примера рассмотрим бесконечные множества A[а] и B[бэ] на плоскости, которая в данном случае будет играть роль универсального множества. Пусть A[а] − множество всех точек плоскости с неотрицательными абсциссами, а B[бэ] − множество всех точек плоскости с неотрицательными ординатами. Формулы (1.19), (1.20) задают множества A[а] и B[бэ] с помощью математических символов.

Объединение множеств A[а] и B[бэ] представляет собой совокупность всех точек плоскости, лежащих в первой, второй и четвертой координатных четвертях, вместе с ограничивающими данное множество полупрямыми. Пересечение множеств A[а] и B[бэ] состоит из всех точек первого квадранта вместе с ограничивающими его полупрямыми. Описания указанных множеств с помощью математических символов представлены формулами (1.21) и (1.22).

Разность множеств A[а] и B[бэ] представляет собой совокупность всех точек плоскости с неотрицательными абсциссами и отрицательными ординатами, то есть полуоткрытый четвертый квадрант. Симметрическая разность множеств A[а] и B[бэ] состоит из всех точек плоскости, у которых абсцисса и ордината имеют разные знаки, а также точек отрицательных полуосей оси абсцисс и оси ординат. Другими словами, данное множество представляет собой совокупность полуоткрытых второй и четвертой четвертей. Наконец, дополнение множества A[а] состоит из всех точек плоскости, имеющих отрицательную абсциссу. Описания разности и симметрической разности множеств A[а] и B[бэ], а также дополнения множества A[а] с помощью математических символов представлены формулами (1.23), (1.24) и (1.25) соответственно.

Слайд 11

Декартовым произведением множеств A[а] и B[бэ] называется множество всех упорядоченных пар, в которых первый элемент принадлежит множеству A[а], а второй – множеству B[бэ]. Определение декартова произведения с помощью математических символов представлено в формуле (1.26). Формула (1.27) задает примеры конкретных множеств A[а] и B[бэ], а формула (1.28) представляет их декартово произведение.

Рассмотрим теперь множества A[а] и B[бэ], задаваемые формулой (1.29). Их декартово произведение представлено формулой (1.30).

Декартово произведение множества A[а] на себя называют декартовым квадратом множества A[а]. Используемое в этом случае обозначение указано в формуле (1.31).

Наряду с декартовым произведением двух множеств можно рассматривать декартово произведение любого конечного числа множеств. Соответствующее определение представлено формулой (1.32). Если все сомножители одинаковы и равны A[а], то получаем куб, четвертую, пятую и более высокие степени множества *A*[а]. Соответствующие обозначения приведены в формуле (1.33).

Слайд 12

Мощностью конечного множества *A*[а] называется число его элементов. Обозначение мощности множества приведено в формуле (1.34). Для множества *A*[а], указанного в формуле (1.35), мощность равна 5.

Булеаном множества *A*[а] называют множество всех подмножеств множества *A*[а]. Обозначение булеана множества приведено в формуле (1.36).

Каким бы ни было рассматриваемое множество, его булеан всегда содержит пустое множество, так как оно является подмножеством любого множества. Кроме того, в булеан множества входит само исходное множество. Остальные элементы булеана множества представляют собой собственные подмножества рассматриваемого множества. При записи булеана конечного множества *A*[а] обычно сначала указывают пустое множество, затем множества, состоящие из одного элемента, далее – множества, содержащие два элемента, потом – множества, содержащие три элемента, и так далее. В конце перечня записывают само множество *A*[а].

Формула (1.37) представляет булеан конкретного множества *A*[а].

В формуле (1.38) указана связь между мощностью конечного множества *A*[а], содержащего *n*[эн] элементов, и мощностью его булеана.

Слайд 13

Тема 1.2. Соответствия между множествами

Изучая окружающий нас мир, математика рассматривает не только его объекты, но связи между ними. Эти связи называют зависимостями, соответствиями, отношениями, функциями. Например, при вычислении длин предметов устанавливаются соответствия между предметами и числами, которые являются значениями их длин. При решении задач на движение устанавливается зависимость между пройденным расстоянием и временем при условии, что скорость движения постоянна. Начальная школа помогает учащимся установить соответствие между заданными выражениями и их числовыми значениями, между числом, характеризующим площадь данной фигуры, и самой этой фигурой и т. п.

Соответствием между множествами A[а] и B[бэ] называется правило, в силу которого каждому элементу из некоторого подмножества множества A[а] сопоставляется один или более элементов из множества B [бэ]. Задание соответствия между множествами A[а] и B[бэ] равносильно заданию некоторого подмножества в их декартовом произведении.

Таким образом, для задания и обозначения соответствия, используются правила, аналогичные соответствующим правилам для множеств.

Формула (1.39) представляет конкретные множества A[а]и B[бэ], а в формуле (1.40) приведен пример соответствия между ними.

Пусть G[жэ] − подмножество в декартовом произведении множеств A[а] и B[бэ], задающее соответствие между ними. Первой проекцией множества G[жэ] будем называть множество всех тех элементов из A[а], каждому из которых соответствует хотя бы один элемент из B[бэ]. Аналогично второй проекцией множества G[жэ] назовем множество всех тех элементов из B[бэ], каждый из которых соответствует хотя бы одному элементу из A[а]. Обозначения для первой и второй проекций представлены в формуле (1.41).

Если соответствие задано как подмножество декартова произведения, то первую проекцию составляют первые координаты упорядоченных пар, а вторые координаты образуют вторую проекцию.

В формуле (1.42) приведены проекции множества G[жэ] из соответствия, заданного формулой (1.40).

Слайд 14

Пусть соответствие между множествами A[а] и B[бэ] определяется подмножеством G[жэ] их декартова произведения.

Если график соответствия R[эр] между множествами A[а] и B[бэ] совпадает со всем декартовым произведением, то соответствие называют полным. Если же график пуст, то R[эр] называют пустым соответствием.

Соответствие называется всюду определенным, если в нем задействованы все элементы множества A[а]. С учетом введенного определения первой проекции соответствие является всюду определенным, если первая проекция совпадает с множеством A[а].

Соответствие называется функциональным, если каждому элементу из первой проекции множества G[жэ] соответствует единственный элемент из B[бэ].

Соответствие называется инъективным, если различным элементам из первой проекции множества G[жэ] соответствуют различные элементы множества B[бэ].

Соответствие называется сюръективным, если в нем задействованы все элементы множества B[бэ], то есть вторая проекция совпадает с множеством B[бэ].

Соответствие называется взаимно однозначным, или биективным, если оно всюду определено, функционально, инъективно и сюръективно.

Формулы (1.43) и (1.44) определяют всюду определенное и сюръективное соответствия с помощью математических символов.

Если элементы множеств изобразить как точки, а соответствие в виде линий со стрелками, то для всюду определенного соответствия стрелки будут выходить из каждой точки множества A[а]. Для функционального соответствия из каждой точки множества A[а] будет выходить не более одной линии.

Для сюръективного соответствия линии будут входить во все точки множества B[бэ]. Соответствие является инъективным, если в каждую точку множества B[бэ] входит не более одной стрелки.

Представленное на рис. 1.2 соответствие всюду определенно, не функционально, не сюръективно, не инъективно.

Слайд 15

На слайде представлен пример соответствия между конечными множествами X[икс] и Y[игрек], задаваемого с помощью множества G[же].

Рассматриваемое соответствие всюду определено, поскольку первая проекция G[жэ] совпадает с множеством X[икс]. Так как первые координаты всех пяти пар из G[жэ] различны, то данное соответствие функционально. Соответствие сюръективно, поскольку вторая проекция G[жэ] совпадает с множеством Y[игрек]. Наконец, данное соответствие не является инъективным, так как множество G[жэ] содержит две пары элементов с одинаковыми вторыми координатами – единицами.

Рассуждения, приведенные для данной задачи, применимы и в общем случае. Если рассматриваемое соответствие задано множеством пар, все первые компоненты которых различны, то можно сделать вывод о функциональности соответствия. В случае, когда все вторые компоненты пар различны, можно утверждать, что соответствие, определяемое данным множеством, является инъективным.

Слайд 16

Рассмотрим еще один пример соответствия, которое теперь задано на бесконечных множествах. Каждому многочлену второй степени с действительными коэффициентами сопоставляется вещественное число, являющееся его корнем.

Так как существуют многочлены, не имеющие действительных корней, т. е. в X[икс] есть элементы, которые не участвуют в соответствии, то это соответствие не является всюду определенным.

У многочлена второй степени могут быть два различных действительных корня, т. е. возможна ситуация, когда одному и тому же многочлену – элементу из X[икс] – соответствуют разные элементы из множества Y[игрек], поэтому соответствие не функционально.

Любое действительное число является корнем хотя бы одного многочлена, т. е. все элементы множества Y[игрек] участвуют в соответствии, следовательно, оно сюръективно. А так как разные многочлены могут иметь одинаковые корни, т. е. разным элементам из X[икс] могут соответствовать одинаковые элементы из Y[игрек], то рассматриваемое соответствие не инъективно.

Слайд 17

Соответствие между множествами A[а] и B[бэ] называется отображением, если оно всюду определено и функционально. В формуле (1.45) приведено обозначение отображения множества A[а] на множество B[бэ]. Множество A[а] называют областью определения отображения. Подмножество множества B[бэ] элементов, участвующих в отображении, называется множеством значений отображения.

Формулы (1.46) и (1.47) представляют примеры отображений для конкретных множеств A[а] и B[бэ].

Первое из них, определенное на множестве всех действительных чисел R[эр], является сюръективным, но не инъективным. Действительно, каждое число, не превосходящее по модулю единицы, является синусом некоторого угла. Таким образом, отображение является сюръективным. С другой стороны, у разных углов могут быть одинаковые синусы, а это означает, что отображение не является инъективным.

Второе отображение задано на множестве всех натуральных чисел N[эн], оно инъективно, но не сюръективно. В самом деле, при разных значениях аргумента значения показательной функции также будут различными. В то же время не каждое натуральное число является некоторой натуральной степенью двойки.

Отображения, заданные на числовых множествах, чаще всего называют функциями.

Слайд 18

Пусть Г[гамма] – соответствие между множествами *A*[а] и *B*[бэ], определяемое подмножеством *G*[жэ] в их декартовом произведении.

Если в каждой упорядоченной паре (a, b)[а, бэ], принадлежащей множеству *G*[жэ], поменять элементы местами, то получится множество *F* пар вида (b, a)[бэ, а], определяющее некоторое соответствие между множествами *B*[бэ] и *A*[а]. Это соответствие называется соответствием, обратным к Г[гамма].

Обозначение обратного соответствия приведено в формуле (1.48). Формула (1.49) представляет пример соответствия между конкретными множествами *A*[а] и *B*[бэ], а формула (1.50) задает обратное к нему соответствие.

Из определения обратного соответствия вытекает, что если исходное соответствие всюду определено, то обратное соответствие сюръективно. В случае, когда исходное соответствие сюръективно, обратное соответствие является всюду определенным.

Слайд 19

Пусть Г[гамма] – соответствие между множествами *A*[а] и *B*[бэ]. Рассмотрим некоторое подмножество *M*[эм] множества *A*[а]. Образом множества *M*[эм] при соответствии Г[гамма] будем называть совокупность всех тех элементов из *B*[бэ], каждый из которых соответствует хотя бы одному элементу из *M*[эм]. Если *S*[эс] – некоторое подмножество множества *B*[бэ], то прообразом множества *S*[эс] при соответствии Г[гамма] называется совокупность всех тех элементов из *A*[а], каждому из которых соответствует хотя бы один элемент из *S*[эс].

Обозначения для образа и прообраза множества приведены в формулах (1.51), (1.52).

Рассмотрим следующий пример. Возьмем соответствие, заданное формулой (1.53), и найдем образ множества M[эм], содержащего два элемента – 2 и 7. Элементу 2 соответствует элемент нуль, а элементу 7 – элемент три. Значит, образ множества M[эм] состоит из двух элементов – нуля и трех.

Теперь определим прообраз множества S[эс], которое состоит из одного элемента -1[минус один]. Во множестве G[жэ] находим пару, в которой вторая координата равна минус одному. Первая координата в этой паре равна 8. Следовательно, множество, содержащее единственный элемент восемь, является прообразом множества S[эс].

В формулах (1.54), (1.55) представлены образ и прообраз рассмотренных множеств для указанного соответствия.

Слайд 20

Отображение, которое одновременно является сюръективным и инъективным, называется биективным отображением, или биекцией. Такое отображение также называют взаимно однозначным. С помощью взаимно однозначного отображения понятие мощности, введенное для конечных множеств, можно распространить на бесконечные множества.

Простейшими бесконечными множествами являются счетные множества.

На слайде представлено определение счетного множества. В соответствии с данным определением для доказательства счетности множества A[а] необходимо установить биективное соответствие между множеством A[а] и множеством натуральных чисел, или, иначе говоря, занумеровать элементы множества A[а].

Нумерация элементов множества A[а] предполагает определение порядка перебора элементов данного множества, при котором все они получат натуральные номера.

Все счетные множества имеют по определению одну и ту же мощность.

Установим некоторые свойства счетных множеств.

1. Всякое подмножество счетного множества конечно или счетно.
2. Объединение конечного или счетного числа счетных множеств есть счетное множество.
3. Всякое бесконечное множество содержит счетное подмножество.

Множества M[эм] и N[эн] называются эквивалентными, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие. Два конечных множества эквивалентны между собой в том и только в том случае, когда число элементов у них одинаково. Ясно, что два множества, эквивалентные третьему, эквивалентны между собой; в частности, любые два счетных множества эквивалентны между собой.

Слайд 21

Обратимся к примерам счетных множеств. Сначала рассмотрим множество целых чисел. Нумерацию всех целых чисел проведем следующим образом.

Элементу нуль поставим в соответствие номер один, наименьшему положительному числу один поставим в соответствие номер два. Далее перейдем к отрицательным числам и наибольшему из них припишем номер три. Затем вновь обратимся к положительным числам и следующему за единицей числу два присвоим номер четыре. Пятым в нашей нумерации будет ближайшее к нулю отрицательное число, которое еще не было занумеровано, а именно, минус два. Продолжая этот процесс, мы занумеруем все целые числа.

Таким образом, мы установили взаимно однозначное соответствие между множествами целых и натуральных чисел. Построенное отображение можно охарактеризовать следующим образом. Положительному целому числу n[эн] соответствует четное натуральное число $2n$[два эн], а отрицательному числу $-n$[минус эн] соответствует нечетное натуральное число $2n + 1$ [два эн плюс один].

Слайд 22

Следующим примером счетного множества является множество натуральных степеней числа два. Формула, определяющая элементы этого множества, задает биекцию между множеством A[а] и множеством натуральных чисел.

Далее рассмотрим множество рациональных чисел. Для установления взаимно однозначного соответствия между множествами Q[кю] и N[эн] расположим сначала положительные рациональные числа в виде бесконечной таблицы (1.56). Занумеруем теперь эти числа «по диагоналям» в соответствии со стрелками. При этом договоримся включать в наш перечень только различные числа, то есть не будем нумеровать элементы, встречающиеся повторно. В соответствии с нашим соглашением первым элементом будет единица, вторым – двойка, третьим – одна вторая. Номер четыре получит число одна третья, номер пять – число три. Шестым элементом в нашей последовательности будет четверка, седьмым – три вторых. Продолжая нумерацию согласно стрелкам, мы занумеруем все положительные рациональные числа.

Аналогичным образом занумеруем все элементы множества отрицательных рациональных чисел. Рассмотрим последовательность, представленную формулой (1.57). В ней знаком плюс отмечены занумерованные нами положительные рациональные числа, знаком минус – соответствующие им отрицательные числа. Мы расположили все элементы множества рациональных чисел в виде последовательности, а значит, доказали его счетность.

Слайд 23

Отметим, что множество чисел, заполняющих отрезок от нуля до единицы, не является счетным. Мощность этого множества называется мощностью континуума. Два множества называются эквивалентными, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие. Про эквивалентные множества говорят, что они имеют одинаковую мощность. Все множества, эквивалентные множеству чисел отрезка от нуля до единицы, имеют мощность континуума. Примерами множеств, эквивалентных отрезку от нуля до единицы, являются произвольные отрезки, интервалы, полуинтервалы, вся числовая прямая.

Отношение равномощности обладает рядом свойств, а именно:

- рефлексивностью, каждое множество равномощно самому себе;
- симметричностью, т. е. если множество X[икс] равномощно множеству Y[игрек], то множество Y[игрек] равномощно множеству X[икс];
- транзитивностью, т. е. если множество X[икс] равномощно множеству Y[игрек], множество Y[игрек] равномощно множеству Z[зет], то множество X равномощно множеству Z[зет].

Определение равномощности уточняет интуитивную идею о множествах «одинакового размера». А как формально определить, когда одно множество «больше» другого? Говорят, что множество A[а] по мощности не больше множества B[бэ], если оно равномощно некоторому подмножеству множества B[бэ], возможно, самому B[бэ].

Отношение «иметь не большую мощность» обладает многими естественными свойствами, некоторые из них перечислены на слайде. Утверждение третьего свойства составляет содержание основной теоремы теории множеств, теоремы Кантора – Бернштейна.

Слайд 24

Тема 1.3. Отношения и их свойства

Мы уже обсудили, что множества играют фундаментальную роль в самой математике и ее многообразных приложениях. Однако описывая окружающий мир, мы не только перечисляем интересующие нас объекты, т. е. задаем множество, но и указываем отношения, которыми эти объекты могут быть связаны. Такие связи могут быть весьма разнообразными, но мы начнем с наиболее общего представления об отношениях элементов множеств.

В отношениях могут находиться элементы самых разнообразных множеств. Например, могут быть родственные отношения между людьми, скажем, один человек другому является братом; между числами – одно число меньше другого; между геометрическими объектами – некоторая точка принадлежит той или иной прямой и т. д.

Совсем не обязательно, чтобы отношение связывало равно два объекта – человека с человеком, число с числом, точку и прямую. Например, «отношение точка *A*[а] лежит между точками *B*[бэ] и *C*[цэ]» связывает, как мы видим, три объекта.

Как нередко фиксируются отношения в обыденной жизни? Например, что два человека стали мужем и женой. Идут в ЗАГС, и там им выдают бумагу, в которой так и написано, что эти два человека – муж и жена. Как фиксируется, что такой-то является сыном или дочерью таких-то двух человек? То же самое – выдается бумага, в которой фигурируют эти три человека. Как фиксируется, что данный человек принят на работу на такое-то предприятие? Заключается договор между этим человеком и уполномоченным представителем предприятия. Что общего во всех этих примерах? В каждом из них просто фиксируется, кто именно или что именно, находится в рассматриваемом отношении. Если отвлечься от того, о чем эти отношения, то становится понятно, что задать отношение – это записать те объекты, которые находятся в данном отношении. Такую запись удобно представлять кортежем, а список всех таких записей и есть описание данного отношения. Каждый кортеж, в свою очередь, – это элемент декартова произведения тех множеств, откуда берутся элементы кортежа. Тем самым мы приходим к следующему определению.

Таким образом, отношения бывают двуместные, или бинарные, трехместные, четырехместные и т. д. Отношение «меньше» на множестве чисел бинарное. Отношение «точка лежит внутри треугольника» тоже бинарное на совокупности из двух множеств – множества точек и множества треугольников. Отношение «лежать между» на множестве точек трехместное, отношение «четыре точки лежат на одной окружности» на множестве точек плоскости четырехместное.

Слайд 25

Остановимся более подробно на отношении, заданном на двух множествах, т. е. бинарном отношении. Бинарные отношения занимают особое место среди всех отношений, поскольку многие из наиболее важных отношений бинарные.

Бинарным отношением между множествами A[а] и B[бэ] называется любое подмножество φ[фи] декартова произведения этих множеств. Если упорядоченная пара (x, y)[икс, игрек] принадлежит бинарному отношению φ[фи], то говорят, что x[икс] находится в отношении φ[фи] с y[игрек]. Обозначения, используемые в этом случае, приведены в формуле (1.58). Если множества A[а] и B[бэ] совпадают, то говорят, что отношение φ[фи] задано на множестве A[а]. Формула (1.59) задает конкретные множества A[а] и B[бэ], а формула (1.60) – пример бинарного отношения между ними.

Понятие отношения как подмножества декартова произведения формализовано в теории множеств и получило широкое распространение в языке математики во всех ее ветвях. Теоретико-множественный взгляд на отношение характеризует его с точки зрения объема – какими комбинациями элементов оно наполнено. Содержательный подход рассматривается в математической логике, где отношение – пропозициональная функция, то есть выражение с неопределенными переменными, подстановка конкретных значений для которых делает его истинным или ложным. Важную роль отношения играют в универсальной алгебре, где базовый объект изучения раздела – множество с произвольным набором операций и отношений. Одно из самых ярких применений техники математических отношений в приложениях – реляционные системы управления базами данных, методологически основанные на формальной алгебре отношений.

Поскольку отношение – это по определению некоторое множество, то его можно задавать так же, как задают множества – списком или указанием характеристического свойства. Ясно, что первый способ целесообразен, когда множества, на которых рассматривается отношение, конечны. Если же среди множеств имеются бесконечные, то отношение задается с помощью характеристического свойства.

Если f[эф] отображение из X[икс] в Y[игрек], то бинарным отношением между множествами X[икс] и Y[игрек] является график этого отображения, определяемый формулой (1.61).

Слайд 26

Примером бинарного отношения на множестве действительных чисел R[эр] является отношение порядка $\leq$ [меньше или равно]. Оно состоит из всех упорядоченных пар действительных чисел (x, y) [икс, игрек], для которых x[икс] не превосходит y[игрек]. Это отношение можно рассматривать и на других числовых множествах, например, на множестве целых чисел Z[зет], на множестве натуральных чисел N[эн]. Другим примером бинарного отношения на множестве натуральных чисел N[эн] является отношение делимости, состоящее из всех упорядоченных пар натуральных чисел (x, y)[икс, игрек], для которых x[икс] без остатка делится на y[игрек].

Примером бинарного отношения на множестве A[а] букв русского алфавита является отношение, задаваемое формулой (1.62). Исходя из данной формулы, мы видим, что в данном отношении φ[фи] состоят пары гласных или согласных букв.

Теперь рассмотрим, какими свойствами обладают отношения.

Бинарное отношение φ[фи] на множестве A[а] называется рефлексивным, если каждый элемент x[икс] множества A[а] находится в отношении φ[фи] с самим собой.

Примером рефлексивного отношения является отношение порядка ≤ [меньше или равно] на множестве действительных чисел.

Бинарное отношение φ[фи] на множестве A[а] называется антирефлексивным, если каждый элемент x[икс] множества A[а] не находится в отношении φ[фи] с самим собой.

Стоит отметить, что свойство антирефлексивности не является противоположным свойству рефлексивности. Отношение может не обладать ни свойством рефлексивности, ни свойством антирефлексивности.

Примером антирефлексивного отношения может служить отношение строгого порядка <[меньше] на множестве действительных чисел. Это отношение состоит из всех упорядоченных пар действительных чисел (x, y)[икс, игрек], для которых x[икс] строго меньше y[игрек].

Определения рефлексивного и антирефлексивного отношений с помощью математических символов представлены формулами (1.63), (1.64).

Слайд 27

Бинарное отношение φ[фи] на множестве A[а] называется симметричным, если для любых элементов x, y[икс, игрек] множества A[а] из того что x[икс] находится в отношении φ[фи] с y[игрек] следует, что y[игрек] находится в отношении φ[фи] с x[икс].

Примером симметричного отношения является отношение равенства на множестве целых чисел, состоящее из всех пар целых чисел вида (x, x)[икс, икс].

Бинарное отношение φ[фи] на множестве A[а] называется антисимметричным, если для любых различных элементов x, y[икс, игрек] множества A[а] из того что x[икс] находится в отношении φ[фи] с y[игрек] следует, что y[игрек] не находится в отношении φ[фи] с x[икс].

Примером антисимметричного отношения может служить отношение < [меньше] на множестве действительных чисел.

Определения симметричного и антисимметричного отношений с помощью математических символов представлены формулами (1.65), (1.66).

Аналогично свойству рефлексивности свойства симметричности и антисимметричности не являются противоположными друг другу. Если отношение не является симметричным, то это не означает, что оно обладает свойством антисимметричности.

Слайд 28

Бинарное отношение φ[фи] называется транзитивным, если для любых x, y, z[икс, игрек и зет] из того, что x[икс] находится в отношении с y[игрек], а y[игрек] находится в отношении с z[зет] следует, что x[икс] находится в отношении с z[зет]. Определение данного свойства с помощью математических символов представлено формулой (1.67).

Примером транзитивного отношения является отношение < [меньше] на множестве действительных чисел.

Бинарное отношение φ[фи] на множестве A[а] называется связным, если для любых элементов x, y[икс, игрек] множества A[а] либо x[икс] находится в отношении φ[фи] с y[игрек], либо y[игрек] находится в отношении φ[фи] с x[икс]. Формула (1.68) определяет свойство связности с помощью математических символов.

Примером связного отношения может служить отношение ≤ [меньше или равно] на множестве действительных чисел. Помимо уже отмеченных свойств рефлексивности и связности, данное отношение обладает свойствами антисимметричности и транзитивности.

Рассмотренное ранее отношение делимости на множестве натуральных чисел обладает свойствами рефлексивности, антисимметричности и транзитивности.

Слайд 29

Говорят, что бинарное отношение φ[фи] на множестве A[а] является отношением эквивалентности, если оно одновременно рефлексивно, симметрично и транзитивно. Для отношения эквивалентности φ[фи] используют запись, приведенную в формуле (1.69).

Примером отношения эквивалентности является отношение равенства на множестве целых чисел. Это же отношение можно рассматривать на множествах действительных, натуральных, рациональных чисел. Другим примером отношения эквивалентности служит отношение подобия на множестве всех треугольников плоскости. Данное отношение определяет формула (1.70).

Если на множестве A[а] задано отношение эквивалентности, то множество A[а] разбивается на непересекающиеся подмножества эквивалентных друг другу элементов. Эти подмножества называются классами эквивалентности. Примером такого разбиения является разбиение множества всех четырехугольников плоскости на подмножества равновеликих четырехугольников.

Слайд 30

Отношение на множестве M[эм] называется отношением порядка, если оно рефлексивно, транзитивно и антисимметрично.

Вот несколько примеров отношений порядка: на множестве прямоугольников: содержаться; на множестве действительных чисел: меньше или равно; на множестве сотрудников одного учреждения: быть начальником.

Исторически сложилось так, что отношение порядка в литературе обычно называют отношением *частичного порядка*. Мы для краткости слово «частичного» будем опускать.

Множество целых чисел упорядочено отношением «меньше или равно», множество подмножеств произвольного множества упорядочено отношением «быть подмножеством». Даже знаки для этих отношений похожи. Удобно и для произвольного отношения порядка иметь какой-то похожий значок. Обозначение отношения порядка приведено на слайде.

В упорядоченном множестве нередко интересуются, так сказать, крайними элементами, т. е. такими, для которых уже нет меньших элементов или, наоборот, больших.

Рассмотрим примеры. **Пример 1.** В множестве неотрицательных действительных чисел, упорядоченном отношением «меньше или равно», минимальным элементом является число 0. В множестве положительных действительных чисел, упорядоченном этим же отношением, минимальных элементов нет.

Пример 2. Естественно считать точку окружностью нулевого радиуса – ведь это множество всех точек, удаленных от заданной точки на расстояние 0. На множестве всевозможных окружностей, включая окружности нулевого радиуса, рассмотрим отношение «одна окружность лежит внутри другой или совпадает с ней». Это отношение порядка, и любая точка является минимальным элементом этого множества. Если это же отношение рассмотреть на множестве окружностей ненулевого радиуса, то такое множество минимальных элементов иметь не будет.

Эти примеры показывают, что упорядоченное множество может не иметь минимальных элементов, может иметь один минимальный элемент, а может иметь несколько, и даже бесконечно много, минимальных элементов.

Слайд 31

Рассмотрим примеры отношения и определим, какими свойствами они обладают. Первый пример – это отношение, заданное на множестве прямых в пространстве. Две прямые находятся в отношении φ[фи], если они имеют хотя бы одну общую точку.

Любая прямая имеет с собой множество общих точек, следовательно, отношение рефлексивно.

Если прямая *x*[икс] имеет общую точку с прямой *y*[игрек], то, конечно же, прямая *y*[игрек] имеет общую точку с прямой *x*[икс], т. е. отношение симметрично.

Проверим, обладает ли данное отношение свойством транзитивности. На рисунке представлена ситуация, когда *x*[икс] находится в отношении φ[фи] с *y*[игрек], *y*[игрек] находится в отношении φ[фи] с *z*[зет], но *x*[икс] не находится в отношении φ[фи] с *z*[зет]. Следовательно, свойство транзитивности не выполняется.

Так как существуют прямые, которые не пересекаются, т. е. есть элементы, не находящиеся в данном отношении друг с другом, то отношение не является связным.

Слайд 32

Рассмотрим еще один пример отношения, заданного на множестве действительных чисел. Два числа находятся в отношении φ[фи] друг с другом, если они удовлетворяют уравнению в правой части формулы (1.71), т. е. сумма их квадратов равна единице. Поскольку указанное уравнение имеет в точности два решения, данное отношение не является ни рефлексивным, ни антирефлексивным.

Уравнение является симметричным относительно переменных x[икс] и y [игрек], а следовательно, отношение φ[фи] будет симметричным.

Рассматриваемое отношение не обладает свойством транзитивности. Это подтверждает пример таких значений x[икс], y[игрек], z [зет], что x[икс] находится в отношении φ[фи] с y[игрек], y[игрек] находится в отношении φ[фи] с z[зет], но при этом x[икс] не находится в отношении φ[фи] с z[зет]. Такими значения являются x[икс], равное нулю, y[игрек], равное единице, и z[зет],. равное нулю.

Отношение φ[фи] не является связным, так как существуют такие пары значений x[икс] и y[игрек], которые не удовлетворяют требуемому уравнению. Например, пара (1;1)[один один].

Слайд 33

Поскольку отношения – это подмножества декартова произведения, для них определены теоретико-множественные операции объединения и пересечения. Они называются соответственно операциями объединения и пересечения отношений. Можно также рассматривать операцию дополнения заданного отношения до универсального отношения. Обозначения этих операций такие же, как для операций над множествами.

Отношение, совпадающее с декартовым произведением двух множеств, на которых задано данное отношение, называется универсальным.

Рассмотрим пример, приведенный на слайде. Так как объединение двух множеств состоит из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств, то в объединение данных отношений входят все пары прямых, которые параллельны или пересекаются. Параллельные или пересекающиеся прямые в пространстве определяют плоскость, поэтому свойством, задающим объединение данных отношений, является принадлежность прямых одной плоскости.

Теперь определим свойство, описывающее отношение, равное пересечению дополнений данных отношений. В дополнение первого отношения входят пары прямых, которые не являются параллельными, т. е. пары пересекающихся или скрещивающихся прямых. В дополнение второго отношения входят пары прямых, которые не являются пересекающимися, т. е. пары параллельных или скрещивающихся прямых. Тогда в пересечение дополнений входят пары скрещивающихся прямых.

Слайд 34

Отношение, обратное данному, определяется аналогично обратному соответствию. Математическая запись определения обратного отношения приведена в формуле (1.72). В обратное отношение входят те пары переменных y[игрек], x[икс], для которых пара x[икс], y[игрек] принадлежит отношению φ[фи].

Операция обращения отношения сохраняет свойства отношения, т. е. обратное отношение обладает теми же свойствами, что и отношение φ[фи]. Например, если отношение рефлексивно, то оно содержит все пары вида (x, x)[икс икс], и обратное отношение также будет содержать все пары такого вида.

Аналогично операция пересечения нескольких отношений, имеющих общее свойство, сохраняет это свойство.

Для объединения отношений ситуация иная. При объединении отношений, обладающих общим свойством, может получиться отношение, не имеющее этого свойства. Рассмотрим, например, антисимметричные отношения. Они не содержат одновременно пары вида x[икс], y[игрек] и y[игрек], x[икс]. При объединении двух отношений может оказаться, что первое отношение содержит пару x[икс], y[игрек], а второе – пару y[игрек], x[икс], тогда объединение данных отношений не будет обладать свойством антисимметричности.

Слайд 35

Тема 2.1. Элементы комбинаторики

Комбинаторика позволяет вычислять количество возможных комбинаций объектов, удовлетворяющих определенным условиям.

Первоначально комбинаторика рассматривалась как раздел «досуговой» математики. Впервые теоретическое исследование проблем комбинаторики было проведено в XVII веке[семнадцатом] Паскалем, Ферма́, Лейбницем и в XVIII веке[восемнадцатом веке] Якобом Берну́лли, Эйлером. Тогда же сложилась и принятая в комбинаторике терминология – сочетания, размещения, перестановки и т. п. К началу XX [двадцатого] века комбинаторика считалась в основном завершенным разделом математики, лежащим вне основного русла развития математики и ее приложений. В XX веке комбинаторику стали рассматривать как раздел теории множеств, в котором изучаются различные проблемы, возникающие при исследовании конечных множеств. Такая точка зрения привела к более естественной и последовательной классификации основных понятий и задач комбинаторики.

В связи с развитием компьютерных наук и технологий возросла роль комбинаторики как инструмента решения многих задач. В настоящее время комбинаторика является одним из наиболее интенсивно развивающихся разделов математики. Она как область математического знания входит в дискретную математику. На грани дискретной математики и программирования появляются новые дисциплины, в частности, комбинаторные алгоритмы.

Слайд 36

Рассмотрим основные правила комбинаторики. Их два, и первым их них является правило суммы. Это правило позволяет определить число элементов объединения непересекающихся множеств.

Так как множества не пересекаются, то у них нет общих элементов. Элементы первого множества обозначим буквой *a*[а] с индексом. Индекс последнего элемента показывает, что множество A[а] содержит n[эн] элементов. Аналогично элементы второго множества обозначим буквой b[бэ], и индекс последнего из них означает, что это множество содержит m[эм] элементов. Выпишем множество, равное объединению множеств A[а] и B[бэ]. Сначала запишем все элементы множества A[а], затем – все элементы множества B[бэ]. Установленное взаимно однозначное соответствие показывает, что объединение данных множеств состоит из $n + m$[эн плюс эм] элементов.

Правило суммы можно интерпретировать следующим образом. Если элемент a[а] из множества A[а] можно выбрать n способами, а элемент b[бэ] из множества B[бэ] – m[эм] способами, то выбор элемента x[икс], принадлежащего их объединению, можно осуществить $n + m$[эн плюс эм] способами.

Слайд 37

На слайде представлены два примера применения правила суммы.

В первой задаче роль множеств A[а] и B[бэ] играют соответственно множество девочек и множество мальчиков одного класса. Мощность первого множества равна шестнадцати, мощность второго – пятнадцати.

Выбор старосты соответствует выбору одного элемента из объединения этих множеств, и по правилу суммы число способов для осуществления этого выбора равно сумме шестнадцати и пятнадцати, то есть тридцати одному.

Во второй задаче множество A[а] включает в себя все вопросы, относящиеся к теме «Пределы», множество B[бэ] – все вопросы по теме «Производные». Мощность первого множества равна восьми, мощность второго – двенадцати. Объединение множеств A[а] и B[бэ] состоит из вопросов, каждый из которых относится либо к первой, либо ко второй теме. Поскольку множества A[а] и B[бэ] не пересекаются, по правилу суммы мы получаем, что количество «счастливых» вопросов равно сумме восьми и двенадцати, то есть двадцати.

Слайд 38

Второе правило комбинаторики – это правило произведения. Данное правило позволяет определить, чему равно количество элементов декартова произведения двух множеств.

Для доказательства этого правила введем вспомогательные множества. Эти множества построим следующим образом. На первое место в пары, образующие множества, будем ставить фиксированный элемент множества A[а], а на второе место – всевозможные элементы множества B[бэ]. У элементов множества M_1[эм один] на первое место поставим элемент a_1[а один], на второе место будем поочередно ставить все элементы множества B[бэ]. У элементов множества M_2[эм два] на первое место поставим элемент a_2[а два], а на второе место будем поочередно ставить все элементы множества B[бэ] и т. д. При таком построении каждое множество M_i[эм итое] состоит из m[эм] элементов, а количество таких множеств совпадает с мощностью множества A[а], т. е. равно n[эн]. Объединение этих введенных множеств M_i[эм итое] дает декартово произведение множеств A[а] и B[бэ]. Применяя правило суммы к объединению множеств M_i[эм итое], получаем требуемое утверждение.

Правило произведения можно интерпретировать следующим образом. Если элемент a[а] из множества A[а] можно выбрать n[эн] способами и если после каждого такого выбора элемент b[бэ] из множества B[бэ] можно выбрать m[эм] способами, то выбор пары (a, b)[а бэ] из декартова произведения можно осуществить $n \cdot m$[эн эм] способами. В этом случае говорят, что выбор элементов множества A[а] не зависит от способа выбора элементов множества B[бэ].

Слайд 39

Теперь рассмотрим пример применения правила произведения. Введем в рассмотрение два множества. Первое множество состоит из всевозможных дорог из M[эм] в K[ка], второе множество содержит всевозможные дороги из

K[ка] в N[эн]. Для того чтобы построить маршрут из пункта M[эм] в пункт N[эн], необходимо сначала выбрать элемент из первого множества, а затем произвести выбор элемента из второго множества. Выбор элемента из первого множества можно осуществить пятью способами. При каждом варианте осуществления этого действия выбор элемента второго множества можно произвести тремя способами. Образуем все возможные пары из элементов этих двух множеств. Упорядоченные пары являются элементами декартова произведения. Значит, нам необходимо найти мощность декартова произведения введенных множеств.

Поскольку мощность первого множества равна пяти, а мощность второго множества трем, по правилу произведения получаем, что количество элементов декартова произведения равно пятнадцати.

Слайд 40

Теперь перейдем к рассмотрению основных комбинаторных схем, с помощью которых можно посчитать количество всевозможных комбинаций, которые получаются при выборе элементов из имеющихся.

Первая комбинаторная схема, с которой мы познакомимся, называется размещением с повторениями.

Задача формулируется следующим образом. Имеются элементы n различных видов, причем элементов каждого вида неограниченное количество. Из этих элементов составляют всевозможные упорядоченные наборы длины k[ка], в которых элементы одного вида могут повторяться. Такие наборы называются размещениями с повторениями из n[эн] по k[ка].

Выведем формулу для количества размещений с повторениями из n[эн] по k[ка]. На каждое из k[ка] мест элемент можно выбрать n[эн] способами. По правилу произведения получаем, что общее число размещений с повторениями из n[эн] по k[ка] равно n[эн] в степени k[ка].

На слайде приведен пример, в котором применяются приведенные выше рассуждения.

Слайд 41

Далее рассмотрим размещения без повторений. Задача формулируется следующим образом. Имеется n[эн] различных элементов. Из них составляют всевозможные упорядоченные наборы длины k[ка]. Такие наборы называются размещениями без повторений из n[эн] по k[ка].

Выведем формулу для количества размещений без повторений. При записи таких наборов на первое место можно поставить любой из имеющихся n[эн] элементов. Тогда на второе место можно выбрать только любой из $n-1$[эн минус один] оставшихся. На третье место остается уже $n-2$[эн минус два] претендента. И так далее. Наконец, на k-тое[катое] место можно поставить любой из $n-k+1$[эн минус ка плюс один] оставшихся элементов. В результате по правилу произведения получаем, что общее число размещений без повторений из n[эн] по k[ка] равно произведению упомянутых выше чисел. Используя факториал, это произведение можно записать в виде дроби.

Рассмотрим пример, представленный на слайде. Так как в каждый день можно сдать только один экзамен и порядок сдачи экзаменов имеет значение, используем формулу размещения без повторений.

Если известно, что последний экзамен студент будет сдавать на восьмой день, то существует 4 варианта выбора экзамена на последний день и A_7^3[А из семи по три] вариантов распределения оставшихся трех экзаменов в течение семи дней.

Слайд 42

Далее рассмотрим перестановки без повторений. Пусть имеется n[эн] различных элементов. Будем образовывать из них всевозможные упорядоченные наборы длины n[эн]. Такие наборы называются перестановками из n[эн] элементов, а их общее число обозначается P_n[пэ с индексом эн]. Перестановки являются частным случаем размещений без повторений из n[эн] по k[ка], когда k[ка] совпадает с n[эн]. Поэтому для вывода формулы общего числа перестановок используем формулу для размещений без повторений и получаем n[эн] факториал.

Рассмотрим пример, представленный на слайде. Так как в условии задачи есть требование, что четные числа должны стоять на четных местах, то эти числа можно переставлять только между собой и это можно сделать $n!$[эн факториал] способами; каждому такому способу расстановки четных чисел соответствует $n!$[эн факториал] способов расстановки нечетных чисел на нечетных местах. Тогда общее число перестановок получаем с помощью правила произведения.

Слайд 43

Следующая комбинаторная схема называется сочетанием без повторений. Задача формулируется следующим способом. Пусть имеется n[эн] различных элементов. Сочетаниями из n[эн] по k[ка] называются все возможные неупорядоченные наборы, состоящие из k[ка] элементов.

Выведем формулу общего числа сочетаний из n[эн] по k[ка]. Составим сначала все различные сочетания из n[эн] по k[ка]. После этого произведем всевозможные перестановки элементов для каждого из таких наборов. В результате этого действия мы получим все размещения без повторений из n[эн] по k[ка], а их общее число отображено в формуле (2.1). Так как элементов в наборе k[ка], то из одного сочетания можно получить $k!$[ка факториал] размещений. Тогда по правилу произведения можно записать формулу (2.2). Выразив из этой формулы число сочетаний, мы получим окончательный ответ, который отображается в формуле (2.3).

Для числа всех сочетаний без повторений из n[эн] по k[ка] используются также обозначения, записанные в формуле (2.4).

Слайд 44

Рассмотрим пример, представленный на слайде. Так как нам необходимо составить комиссию из трех человек, то порядок выбранных элементов не играет роли, а следовательно, мы имеем дело с сочетаниями без повторений.

В первом случае, если в комиссию входят любые трое из восьми человек, то число всех возможных комиссий равно числу сочетаний без повторений из восьми по три.

Рассмотрим теперь вторую ситуацию, когда в комиссию не входят члены одной семьи. Это означает, что в ней будут представлены три из четырех семей. Выбор семей, участвующих в комиссии, можно осуществить четырьмя способами. Предположим, что этот выбор уже сделан. В первой из отобранных семей можно двумя способами выбрать представителя – мужа или жену. Точно так же дело обстоит со второй и третьей семьями. По правилу произведения получаем, что число всех возможных комиссий равно тридцати двум.

Слайд 45

Пусть имеются предметы n[эн] различных типов. Сколькими способами можно составить из них комбинацию из k[ка] элементов, если не принимать во внимание порядок элементов в комбинации, но допускать, что предметы одного и того же типа могут повторяться? Иными словами, различные комбинации должны отличаться количеством предметов хотя бы одного типа. Такие комбинации называются сочетаниями с повторениями, а обозначение их общего числа записано в формуле (2.5). Рассмотрим следующий пример. Пусть имеется три элемента: a, b[а бэ] и c[це]. Из них можно составить шесть сочетаний с повторениями по два элемента: ab[а бэ], ac[а це], bc[бэ це], aa[а а], bb[бэ бэ], cc[це це].

Таким образом, сочетание с повторениями из n[эн] элементов по k[ка], где k[ка] и n[эн] произвольные, может содержать любой элемент сколько угодно раз от 1 до k[ка] включительно или не содержать его совсем. Следует отметить, что если, например, две комбинации по k[ка] элементов отличаются друг от друга только порядком расположения элементов, то они не считаются различными сочетаниями. В схеме сочетаний с повторениями имеют дело не с элементами, а с их видами. При этом считается, что имеется неограниченное число элементов каждого вида, т. е. достаточное для выбора любого числа элементов. Формула (2.6) показывает, как можно определить число сочетаний с повторениями из n[эн] элементов по k[ка].

Рассмотрим примеры применения данной формулы. В первом примере n[эн] равно четырем, поскольку мы имеем четыре сорта предметов – А, Т, Г, Ц. Значение k[ка] равно трем. Поэтому мы находим число сочетаний с повторениями из четырех по три.

Обратимся ко второму примеру, представленному на слайде. Каждому способу деления яблок между ребятами поставим в соответствие сочетание с повторениями следующим образом. Типами элементов будут ребята, а элементами – яблоки. Таким образом, имеем три типа элементов, из которых предстоит составить различные наборы объема шестьдесят три. Наличие в наборе элемента определенного типа означает принадлежность данного яблока соответствующему мальчику. Применяя формулу для числа сочетаний с повторениями при n[эн], равном трем, и k[ка] равном четырем, получаем общее число способов распределения яблок между ребятами.

Слайд 46

И последней комбинаторной схемой являются перестановки с повторениями. Задача формируется следующим образом. Имеется n[эн] предметов, среди них n_1[эн один] элементов первого вида, n_2[эн два] элементов второго вида и т. д., n_k[эн катое] элементов k-го[катого] вида, причем выполняется соотношение (2.7). Упорядоченные наборы длины n[эн], составленные из этих элементов, называются перестановками с повторениями. Обозначение общего числа перестановок с повторениями показано в формуле (2.8).

Поясним формулу для вычисления числа перестановок с повторениями. Количество таких перестановок получается из общего числа перестановок уменьшением во столько раз, сколько раз можно по-разному переставить сначала предметы первого вида, затем предметы второго вида и т. д., наконец, предметы *k*-го[катого] вида. В результате получаем формулу (2.9).

Рассмотрим следующий пример. В слове «Уссури» две буквы «у», две буквы «с», одна буква «р» и одна буква «и». Используя формулу для перестановок с повторениями, получаем, что общее число перестановок букв данного слова равно ста восьмидесяти.

Слайд 47

Подведем итог изучения всех комбинаторных схем.

Мы рассмотрели два основных вида схем – это размещения и сочетания. Перестановки являются частным случаем размещений, когда *k*[ка] равно *n*[эн]. Размещения характеризуются тем, что в них учитывается порядок расположения элементов. К сочетаниям относятся наборы, которые отличаются друг от друга только входящими в них элементами, а не их порядком.

Для правильного выбора комбинаторной схемы и формулы для решения задачи необходимо ответить на два ключевых вопроса. Они представлены на слайде. Если при ответе на первый вопрос мы говорим «да», то в задаче необходимо использовать размещения. В случае ответа «нет» – используем сочетания. В зависимости от ответа на второй вопрос мы применяем формулы для схем с повторением или без них.

Рассмотрим несколько примеров применения комбинаторных схем. Первый из них представлен на слайде.

Для назначения патруля нам необходимо выбрать трех солдат из имеющихся тридцати, а затем одного офицера из трех. При каждом выборе для нас не имеет значения порядок и повторения, конечно же, здесь исключаются. Поэтому как в случае выбора солдат, так и в случае выбора офицера мы должны использовать формулу для сочетаний без повторений.

Число различных способов выбора солдат равно числу сочетаний из тридцати по три.

Количество вариантов выбора офицера равно числу сочетаний из трех по одному.

В соответствии с правилом произведения мы должны перемножить два указанных выше числа. Записывая соответствующие дробные выражения и проводя вычисления, мы получаем общее количество способов назначения патруля.

Слайд 48

Перейдем к рассмотрению второго примера. Текст задачи представлен на слайде.

Нам необходимо разбить восемь человек на две команды по четыре человека. Другими словами, нужно выбрать четыре человека в первую команду. Тогда четверо оставшихся автоматически попадут во вторую команду. В данном случае порядок нам неважен и повторений быть не может. Поэтому следует использовать формулу для сочетаний без повторений.

Необходимо учесть и ограничение, состоящее в том, что в каждой команде должно быть не менее одного юноши. Если в одной команде будет один юноша, то во вторую попадут двое других.

Таким образом, нам необходимо выбрать одного юношу и трех девушек. Можно, наоборот, выбрать двух юношей и двух девушек. Результат, естественно, будет одинаковый. В решении, представленном на слайде, реализован первый случай. Число способов выбора одного юноши из трех равно числу сочетаний из трех по одному. Число вариантов выбора трех девушек из пяти равно числу сочетаний из пяти по три. Согласно правилу произведения мы перемножаем указанные числа и получаем требуемый результат.

Перейдем к рассмотрению третьей задачи. Она содержит три пункта, каждый из которых проанализируем отдельно. Прежде всего заметим, что во всех трех случаях не имеет значения порядок выбора открыток, поэтому речь здесь идет о сочетаниях.

В пункте «а» задачи возможны повторяющиеся элементы. Следовательно, искомое количество наборов равно числу сочетаний с повторениями из десяти по пять.

По условию пункта «б» все открытки должны быть различными. Поэтому интересующее нас число наборов выражается числом сочетаний без повторений из десяти по пять.

В пункте «в» задачи речь идет о выборе пятнадцати произвольных открыток. Здесь повторяющиеся элементы неизбежны, поскольку видов открыток всего десять. Требуемое количество наборов находим как число сочетаний с повторениями из десяти по пятнадцать.

Слайд 49

Обратимся к четвертому примеру. В данном случае для нас важен порядок и повторений быть не может. Значит, будем использовать размещения без повторяющихся элементов.

В задаче есть ограничение, согласно которому лица одного пола не должны сидеть рядом. Так как в один ряд сажают троих мужчин и двух женщин, то требуемая ситуация возможна только в том случае, когда первым в ряду будет мужчина.

Для выбора мужчины на первое место имеем восемь возможностей. Далее выбираем женщину, и для этого есть шесть различных вариантов. Затем опять выбираем мужчину одним из семи возможных способов. Для дальнейшего выбора женщины на четвертое место имеется пять вариантов. Наконец, мужчину на пятое место можно выбрать шестью различными способами. Окончательный ответ получаем с помощью правила произведения, перемножая пять указанных выше чисел.

Перейдем к рассмотрению пятой задачи. Принимая во внимание, что порядок при выборе группы людей неважен, мы приходим к выводу, что речь идет о сочетаниях. Из условия задачи ясно, что повторений здесь быть не может.

Согласно присутствующему в задаче ограничению должно быть выбрано не менее двух женщин, а значит, или две, или три, или четыре. Таким образом, искомое число будет складываться из трех слагаемых.

Необходимо выбрать всего шесть человек. Если мы выбираем двух женщин, то затем надо выбрать четверых мужчин. При выборе трех женщин остальные трое будут мужчины. Наконец, если мы выбираем четырех женщин, то остается выбрать двух мужчин. Для нахождения каждого из трех слагаемых воспользуемся правилом произведения.

В первом случае из трех нами обозначенных сомножителями являются число сочетаний из четырех по два и число сочетаний из семи по четыре. Во втором случае мы считаем произведение числа сочетаний из четырех по три и числа сочетаний из семи по три. В последнем случае мы должны перемножить число сочетаний из четырех по четыре и число сочетаний из семи по два. Складывая три полученных произведения, приходим к окончательному результату.

Слайд 50

Обратимся к шестому примеру. В данной задаче мы имеем дело с перестановками с повторениями. Но при этом существует ограничение: три буквы «е» не должны идти подряд. В рассматриваемой ситуации проще найти число таких перестановок букв слова «перемет», в которых все буквы «е» стоят рядом. Для ответа на вопрос задачи это число нужно будет вычесть из общего числа перестановок.

Всего в нашем слове семь букв, при этом буква «е» встречается три раза, а остальные буквы – по одному разу. По формуле для перестановок с повторениями общее количество перестановок равно произведению чисел 4, 5, 6 и 7.

Найдем число перестановок, в которых три буквы «е» идут подряд. «Склеим» эти три буквы вместе и будем считать их за единый символ. При таком подходе нам нужно найти число перестановок пяти различных элементов. Это число есть пять факториал, или сто двадцать.

Находя разность двух указанных чисел, получаем искомый ответ.

Слайд 51

С помощью первого правила комбинаторики определяется количество элементов объединения двух непересекающихся множеств. Для определения числа элементов объединения произвольных множеств применяется формула включения и исключения. Для двух множеств ее вид представлен в формуле (2.10).

Расположенная на слайде диаграмма Эйлера – Венна объединения двух множеств объясняет справедливость этой формулы. Когда мы суммируем мощности множеств A[а] и B[бэ], то число элементов, которые принадлежат каждому из этих множеств, мы учитываем два раза. Поэтому необходимо из этой суммы вычесть мощность пересечения данных множеств.

Для трех множеств принцип включения и исключения отображен в формуле (2.11). Для произвольного числа множеств принцип включения и исключения описывается формулой (2.12). Сначала суммируются мощности всех множеств, затем исключаются мощности всех возможных пересечений двух множеств, затем опять прибавляются мощности всех возможных пересечений трех множеств и т. д. Доказательство формулы (2.12) может быть проведено методом математической индукции.

Слайд 52

Рассмотрим примеры применения принципа включения и исключения. Обратимся к задаче, представленной на слайде.

Введем три множества, соответствующих дням с плохой погодой, и четвертое множество D[дэ] дней с хорошей погодой.

Нам даны мощности каждого из множеств A[а], B[бэ], C[це], содержащих дни с плохой погодой, и мощности множеств всевозможных их пересечений. Это дает нам возможность вычислить мощность объединения этих трех множеств с помощью формулы включения и исключения.

Мощность объединения множеств A[а], B[бэ], C[це] равна количеству дней месяца с плохой погодой. В результате вычислений мы получаем, что число таких дней равно пятнадцати. Тогда количество хороших дней можно определить как разность числа всех дней месяца и количества ненастных дней. Окончательно получаем, что число дней с хорошей погодой равно пятнадцати.

Слайд 53

На слайде приведен еще один пример применения принципа включения и исключения. Нам надо вычислить количество чисел, которые не удовлетворяют сразу трем свойствам, т. е. не делятся ни на 3, ни на 5, ни на 7. Для этого из общего числа чисел, меньших тысячи, нужно вычесть количество чисел, которые обладают хотя бы одним из этих свойств.

Количество чисел, обладающих хотя бы одним из указанных свойств, равно мощности объединения трех множеств, образованных из чисел, не делящихся соответственно на 3, на 5, на 7. Как мы знаем, для определения мощности объединения пересекающихся множеств используется принцип включения и исключения.

Для применения этого принципа нужно вычислить мощности множеств, участвующих в формуле. Каждое третье число делится на три, поэтому, чтобы найти количество чисел, делящихся на три, надо взять целую часть от деления общего числа чисел на три. Аналогичным образом вычисляются мощности множества чисел, делящихся на пять, и множества чисел, делящихся на семь.

Если число делится на три и на пять, то оно делится на пятнадцать. Мощность множества таких чисел равна целой части от деления общего числа чисел на пятнадцать. Таким же образом вычисляются мощности двух других множеств, представляющих собой попарные пересечения исходных множеств.

Число, делящееся на три, на пять и на семь, делится на сто пять. Количество таких чисел равно целой части от деления общего числа чисел на сто пять.

Подставляя найденные числовые значения в формулу включения и исключения, находим искомое число.

Слайд 54

Во многих задачах возникает необходимость раскрытия скобок при вычислении значения выражения вида (2.13). В таких ситуациях применяется так называемая полиномиальная формула, позволяющая возвести в степень n[эн] сумму k[ка] слагаемых.

Количество участвующих в формуле слагаемых определяется числом различных наборов неотрицательных значений показателей степеней, дающих в сумме число n[эн]. Последнее требование обозначено равенством (2.15).

Вид каждого отдельного слагаемого представлен формулой (2.14).

Сама полиномиальная формула выражается равенством (2.16).

В частном случае, когда n[эн] и k[ка] равны двум, формула содержит три слагаемых и представляет собой известную из школьного курса математики формулу квадрата суммы двух слагаемых. В случае, когда k[ка] равно двум, а n[эн] равно трем, мы получаем формулу куба суммы двух слагаемых.

Слайд 55

На слайде приведен пример применения полиномиальной формулы для определения коэффициента при переменной x[икс] в тридцать четвертой степени.

В данном случае в пятнадцатую степень возводится сумма трех слагаемых. Два первых слагаемых содержат переменную x[икс], третье слагаемое является константой. Сначала мы записываем общий член разложения по полиномиальной формуле. Он представлен формулой (2.17). Уравнение (2.18) выражает условие, которому должны удовлетворять показатели степеней m[эм], n[эн] и k[ка]. Вычисляя суммарный показатель степени переменной x[икс] в формуле (2.18) и приравнивая его к тридцати четырем, получаем уравнение (2.19).

Решаем уравнение (2.19) в целых неотрицательных числах. Требуемым условиям удовлетворяют значения n[эн], равные единице, двум, трем и четырем. По ним находим соответствующие значения показателя m[эм]. Получаем четыре возможных решения, которые представлены на слайде.

Слайд 56

Продолжим решение нашей задачи.

Для каждого найденного набора значений m[эм] и n[эн] определим соответствующее значение переменной k[ка]. Получим четыре набора значений, представленных на слайде.

По каждому набору значений показателей m[эм], n[эн] и k[ка] построим слагаемое полиномиальной формулы, содержащее x[икс] в тридцать четвертой степени. Эти слагаемые указаны на слайде.

Вычислим числовые коэффициенты найденных выражений и просуммируем их. В результате мы получим искомый коэффициент при x[икс] в тридцать четвертой степени.

Алгоритм решения, использованный для данной задачи, применим для всех задач подобного вида. При этом неважно, сколько слагаемых суммируется, в какую степень возводится сумма, какое количество слагаемых содержит переменную.

Слайд 57

Частным случаем полиномиальной формулы при k[ка], равном двум, является биномиальная формула (2.20). Выражение в левой части формулы (2.20) называется биномом Ньютона.

Числа, участвующие в формуле бинома Ньютона, называются биномиальными коэффициентами.

На слайде представлены некоторые свойства биномиальных коэффициентов.

Первое свойство проверяется непосредственными вычислениями.

Второе свойство является обобщением первого. Для его доказательства достаточно сравнить дробные выражения для биномиальных коэффициентов с номерами k[ка] и $n-k$[эн минус ка].

Для обоснования третьего свойства нужно записать выражения для коэффициентов с номерами k[ка] и $k-1$[ка минус один] и произвести сложение дробей.

Для доказательства первого равенства из четвертого свойства надо применить формулу биномиальную формулу к n-й[энной] степени суммы двух единиц. Для проверки второго равенства нужно применить ту же формулу к n-й[энной] степени разности двух единиц.

Из третьего свойства биномиальных коэффициентов вытекает эффективный способ рекуррентного вычисления значений биномиальных коэффициентов, который можно представить в графической форме, известной как треугольник Паскаля.

В этом равнобедренном треугольнике каждое число, кроме единиц на боковых сторонах, является суммой двух чисел, стоящих над ними. Биномиальный коэффициент C_n^k[це из эн по ка] находится в $(n+1)$-м[эн плюс первом] ряду на $(k+1)$-м[ка плюс первом] месте.

Слайд 58

Рассмотрим пример применения биномиальной формулы. Обратимся к задаче, представленной на слайде.

Пусть наибольшим слагаемым является S_k[эс катое]. Тогда оно больше $(k - 1)$-го[ка минус первого] слагаемого и $(k + 1)$-го[ка плюс первого]. Таким образом, должны выполняться неравенства (2.21).

Подставляя в неравенства (2.21) выражения для S_k[эс катых], получаем систему (2.22). Заменяя в системе (2.22) биномиальные коэффициенты на соответствующие дробные выражения, приходим к системе (2.23). Далее мы упрощаем полученную систему.

Каждое из неравенств системы (2.23) разделим на общие множители левой и правой частей. Ими являются факториалы и степени корня из десяти и трех целых двух десятых. После проведенных преобразований в каждой части обоих неравенств системы останется по одному вхождению k[ка]. Продолжение решения системы представлено на следующем слайде.

Слайд 59

Продолжим решение нашей задачи.

В результате упрощений мы получаем систему (2.24). Умножим обе части неравенств системы (2.24) на общие знаменатели участвующих в них дробей. В результате мы получим систему линейных относительно переменной k[ка] неравенств. Преобразуем эту систему так, чтобы переменная k[ка] содержалась лишь в одной части каждого из неравенств. Полученная система равносильна двойному неравенству для переменной k[ка]. Упростим данное неравенство, вычислив приближенные значения участвующих в нем дробей. Единственное целое значение k[ка], удовлетворяющее последнему неравенству, равно десяти.

Таким образом, мы определили номер наибольшего члена разложения бинома. Теперь мы можем записать его формулу. Для этого достаточно подставить в выражение для S_k[эс катого] значение k[ка], равное десяти.

Слайд 60

Тема 3.1. Понятие графа. Смежность, инцидентность, степени вершин. Способы задания графов

Перейдем к изучению следующего раздела, а именно, рассмотрению теории графов. В терминах теории графов формулируется большое число задач, связанных с дискретными объектами. Такие задачи возникают при проектировании интегральных схем и схем управления, электрических цепей, блок-схем программ, в экономике, статистике, химии, биологии и в других областях. Теория графов становится одной из существенных частей математического аппарата кибернетики, языком дискретной математики.

В отличие от других научных дисциплин, теория графов имеет вполне определенную дату рождения. Первая работа по теории графов, написанная швейцарским математиком Леонардом Эйлером, жившим в 1707–1783, была опубликована в 1736 году в Трудах Академии наук в Санкт-Петербурге. Исследование Эйлера было проведено в связи с популярной в то время задачей о кёнигсбергских мостах. С этой задачей мы познакомимся позднее.

Однако результат, полученный Эйлером, более ста лет оставался единственным результатом теории графов. Развитие теории графов в конце XIX и начале XX века было связано с распространением представлений о молекулярном строении вещества и становлением теории электрических цепей. К 50-м годам нашего века в теории графов сложились два различных направления: алгебраическое и оптимизационное.

Например, поиск ответа на поставленный в задаче о кёнигсбергских мостах вопрос относится к алгебраическому направлению теории графов. Изменим эту задачу. Отличие полученной задачи состоит в том, что требуется найти маршрут, по которому житель, выйдя из дома, пройдет по каждому мосту хотя бы один раз и вернется домой, причем длина маршрута должна быть минимальной.

Задача поиска такого маршрута относится к оптимизационному направлению теории графов. Оптимизационное направление получило широкое развитие благодаря появлению ЭВМ, так как для эффективного использования ЭВМ при решении прикладных задач с использованием теории графов необходимы эффективные алгоритмы решения графовых задач.

Слайд 61

Графом G[жэ] в широком смысле называется любая пара вида (V, E)[вэ е], где V[вэ] – непустое множество элементов произвольной природы, а E[е] – семейство пар элементов из V[вэ]. Причем допускаются пары вида (v, v)[вэ вэ] и повторяющиеся пары (u, v)[у вэ], где элементы u[у] и v[вэ] различны. Если множества V[вэ] и E[е] конечны, то граф называется конечным. Мы будем рассматривать только конечные графы.

Если пары в V[вэ] рассматриваются как неупорядоченные, то граф называется неориентированным, если как упорядоченные, то граф называется ориентированным, или орграфом.

Элементы множества V[вэ] называются вершинами графа, а пары из E[е] – его ребрами. Ребра орграфа называют также ориентированными ребрами, или дугами, а ребра неориентированного графа – неориентированными ребрами. Пара вида (v, v)[вэ вэ] называется петлей в вершине v[вэ]. Если пара (u, v)[у вэ] встречается в E[е] более одного раза, то говорят, что (u, v)[у вэ] – кратное ребро. Говорят, что ребро (u, v)[у вэ] в неориентированном графе соединяет вершины u[у] и v[вэ], а в ориентированном графе дуга (u, v)[у вэ] идет из вершины u[у] в вершину v[вэ].

Граф с петлями называют псевдографом. Граф с кратными ребрами, но без петель называют мультиграфом. Графом в узком смысле называется граф без петель и кратных ребер.

Договоримся изображать графы на плоскости следующим образом. Вершины будем изображать точками, а каждое ребро (u, v)[у вэ] – линией, соединяющей точки u[у] и v[вэ]. Если (u, v)[у вэ] – дуга, то на этой линии будем указывать стрелку от u[у] к v[вэ].

На рис. 3.1 представлены различные типы графов:

а), б) – ориентированный и неориентированный псевдографы;

в), г) – ориентированный и неориентированный мультиграфы;

д), е) – ориентированный и неориентированный графы в узком смысле.

Слайд 62

Графы можно задавать аналитически, указывая множества их вершин и ребер. Для того чтобы различать при таком задании ориентированные и неориентированные графы, договоримся для обозначения дуг использовать круглые скобки, а для обозначения неориентированных ребер – квадратные скобки.

Формулы (3.1) и (3.2) задают неориентированный и ориентированный графы. Их геометрические изображения представлены на рис. 3.2 и 3.3 соответственно.

Граф называется взвешенным, если каждому его ребру приписан некоторый вес, выражаемый числом. Пример взвешенного графа приведен на рис. 3.4.

Взвешенные графы часто используются в прикладных задачах. Весовые числа могут обозначать, например, стоимость перевозок или расстояния между пунктами.

Слайд 63

Две вершины в графе G[жэ] называются смежными, если существует ребро, которое их соединяет. Пусть u[у], v[вэ] – вершины, e[е] – ребро, их соединяющее. Тогда вершина u[у] и ребро e[е] называются инцидентными, вершина v[вэ] и ребро e[е] также называются инцидентными. Два ребра, инцидентные одной и той же вершине, называются смежными.

В качестве примера рассмотрим граф G[жэ], изображенный на рис. 3.5. В нем смежными являются вершины 1 и 2, 1 и 3, 1 и 1, а также ребра (1, 2)[один два] и (1, 1)[один один], (1, 3)[один три] и (1, 1)[один один], (1, 2)[один два] и (1, 3)[один три]. Ребро (1, 2)[один два] инцидентно вершинам 1 и 2, ребро (1, 3)[один три] – вершинам 1 и 3, ребро (1, 1)[один один] – вершине 1.

Степенью вершины v[вэ] неориентированного графа G[жэ] называется число ребер, инцидентных вершине v. Полустепенью исхода вершины v[вэ] орграфа G[жэ] называется число дуг, выходящих из вершины v[вэ]. Полустепенью захода вершины v[вэ] орграфа G[жэ] называется число дуг, входящих в вершину v[вэ]. Обозначения для введенных выше понятий приведены в формулах (3.3) и (3.4).

В случае неориентированного псевдографа вклад каждой петли при расчете степени инцидентной вершины равен 2. В случае ориентированного псевдографа каждая петля дает вклад 1 при расчете полустепени исхода и вклад 1 при расчете полустепени захода. В формуле (3.5) указаны степени вершин графа G[жэ], изображенного на рис. 3.5, а в формуле (3.6) – полустепени вершин графа D[дэ], изображенного на рис. 3.6.

Вершина графа, не инцидентная ни одному ребру, называется изолированной. Вершина, инцидентная только одному ребру, причем не петле, называется висячей.

Неориентированный граф называется регулярным, или однородным, если степени всех его вершин одинаковы. Пример регулярного графа F приведен на рис. 3.7.

Слайд 64

Пусть G[жэ] – ориентированный или неориентированный граф, заданный формулой (3.7).

Матрицей смежности неориентированного графа G[жэ] называется квадратная матрица A[а] порядка p[пэ], каждый элемент a_{ij}[а итое житое] которой равен количеству ребер, соединяющих вершину v_i[вэ итое] с вершиной v_j[вэ житое].

Матрицей смежности ориентированного графа G[жэ] называется квадратная матрица A[а] порядка p[пэ], каждый элемент a_{ij}[а итое житое] которой равен количеству дуг, выходящих из вершины v_i[вэ итое] и входящих в вершину v_j[вэ житое].

Рассмотрим неориентированный граф G[жэ] и орграф D[дэ], изображенные на рис. 3.8 и 3.9 соответственно. Матрицы смежности данных графов представлены формулой (3.8).

Заметим, что матрица смежности неориентированного графа является симметричной.

Слайд 65

Построим матрицы смежности для графов, содержащих петли и кратные ребра. Рассмотрим неориентированный граф G[жэ] и орграф D[дэ], изображенные на рис. 3.10 и 3.11 соответственно.

Наличие петли в вершине 2 графа G[жэ] говорит о том, что элемент, стоящий во второй строке и во втором столбце матрицы смежности, равен 1. Два ребра, соединяющие вершины 2 и 4 графа G[жэ], показывают, что элемент матрицы смежности, расположенный во второй строке и в четвертом столбце, равен 2. Таким же будет элемент, стоящий в четвертой строке и во втором столбце.

В вершине 3 графа D[дэ] имеется петля, а значит, элемент, расположенный в третьем столбце и в третьей строке матрицы смежности, равен 1. Из вершины 1 в вершину 2 идут две дуги. Это говорит о том, что элемент, стоящий в первой строке и во втором столбце, равен 2.

Матрицы смежности графов G[жэ] и D[дэ] представлены формулой (3.9).

По заданному геометрическому изображению графа всегда можно составить его матрицу смежности. И наоборот, если задана матрица смежности, то определяемый ею граф можно изобразить геометрически.

Слайд 66

Рассмотрим примеры построения геометрических изображений графов по заданным матрицам смежности.

Сначала рассмотрим матрицу смежности неориентированного графа G[жэ], заданную формулой (3.10). Проанализируем данную матрицу. Вершины графа будем обозначать цифрами 1, 2, 3, 4.

Две двойки в матрице смежности графа G[жэ] говорят о том, что вершины 2 и 3 соединяются двумя ребрами. Имеющиеся в матрице нули показывают, что в графе нет ребер, соединяющих вершины 1 и 2, и нет петель в вершинах 2 и 4. Единицы, присутствующие в матрице смежности, свидетельствуют о том, что в вершинах 1 и 3 имеются петли и каждая из пар вершин (1, 4), (1, 3), (3, 4), (2, 4) [один четыре, один три, три четыре, два четыре] соединяется одним ребром.

Изображение графа G[жэ] представлено на рис. 3.12.

Теперь обратимся к матрице смежности графа ориентированного графа D[дэ], заданной формулой (3.11). Имеющаяся в матрице двойка говорит о том, что из вершины 2 в вершину 3 идут две дуги. Единицы на главной диагонали матрицы показывают, что в каждой вершине есть петля. Остальные единицы свидетельствуют о том, что по одной дуге идет из вершины 1 в вершины 2 и 4, из вершины 2 в вершину 4, из вершины 3 в вершину 1, из вершины 4 в вершину 1 и из вершины 4 в вершину 2.

Изображение графа D[дэ] представлено на рис. 3.13.

Слайд 67

Пусть G[жэ] – ориентированный или неориентированный граф, заданный формулой (3.12).

Матрицей инцидентности орграфа G[жэ] без петель называется матрица B[бэ] размера p x q[пэ на кю], элементы которой определяются формулой (3.13).

Матрицей инцидентности неориентированного графа G[жэ] без петель называется матрица B[бэ] размера p x q[пэ на кю], элементы которой определяются формулой (3.14).

Если G[жэ] псевдограф и e_j[е житое] – петля в вершине v_i[вэ итое], то элемент b_{ij}[бэ итое житое] матрицы B[бэ] равен 1, а остальные элементы j-го[житого] столбца равны нулю.

Таким образом, каждый столбец матрицы инцидентности содержит либо только два ненулевых элемента, либо только один ненулевой элемент.

По заданному геометрическому изображению графа всегда можно составить его матрицу инцидентности. И наоборот, если задана матрица инцидентности, то определяемый ею граф можно изобразить геометрически.

Слайд 68

Рассмотрим неориентированный граф G[жэ] и орграф D[дэ], изображенные на рис. 3.14 и 3.15 соответственно. Матрицы инцидентности данных графов представлены формулой (3.15).

Наряду с матрицами смежности и инцидентности для задания графов используются списки смежности.

Для построения списка смежности в случае неориентированного графа рядом с каждой его вершиной приводится перечень смежных с ней вершин. В случае орграфа рядом с каждой вершиной перечисляют концы всех дуг, выходящих из данной вершины. При этом при наличии кратных ребер рядом с соответствующими смежными вершинами в скобках указывают кратности.

Так, для графа G[жэ] на рис. 3.14 рядом с вершиной v_1[вэ один] мы должны указать вершины v_2[вэ два] и v_4[вэ четыре], рядом с вершиной v_2[вэ два] вершины v_1, v_3, v_4[вэ один вэ три вэ четыре], рядом с v_3 – вершины v_2 и v_4, рядом с v_4 – вершины v_1, v_2, v_3[вэ один вэ два вэ три].

Для графа D[дэ] на рис. 3.15 рядом с вершиной v_1[вэ один] мы должны записать вершину v_2[вэ два], рядом с вершиной v_2[вэ два] – вершины v_3[вэ три] и v_4[вэ четыре], для вершины v_3[вэ три] перечень будет пустым, рядом с вершиной v_4[вэ четыре] следует записать вершины v_1[вэ один] и v_3[вэ три].

Слайд 69

Построим матрицы инцидентности и списки смежности для графов G[жэ] и D[дэ], изображенных на рис. 3.16 и 3.17 соответственно.

Каждый из рассматриваемых графов имеет 7 ребер и 4 вершины, а значит, их матрицы инцидентности содержат 7 столбцов и 4 строки. Пятое ребро графа G[жэ] является петлей в вершине 2. Поэтому в пятом столбце матрицы инцидентности этого графа во второй строке стоит единица, а в остальных строках – нули. Аналогично седьмое ребро графа D[дэ] является петлей в вершине 3. Соответственно, седьмой столбец матрицы инцидентности данного графа имеет единицу в третьей строке и нули в остальных строках.

Матрицы инцидентности графов G[жэ] и D[дэ] представлены формулой (3.16).

Табл. 3.17 задает списки смежности рассматриваемых графов. Каждый из графов G[жэ] и D[дэ] имеет по одному ребру кратности 2. Эта кратность указана в скобках при перечислении смежных вершин. В графе G[жэ] кратным является ребро, соединяющее вершины 2 и 4, а в графе D[дэ] – ориентированное ребро, идущее из вершины 1 в вершину 2.

Слайд 70

Маршрутом, соединяющим вершины u[у] и v[вэ] в графе G[жэ], называется чередующаяся последовательность вершин и ребер, определяемая формулой (3.18) с условиями (3.19). Вершины u[у] и v[вэ] называются начальной и конечной вершинами маршрута, остальные вершины называются внутренними. Число ребер в маршруте называется длиной маршрута. Заметим, что для задания маршрута достаточно указать начальную вершину и последовательность ребер. В случае графа без кратных ребер для задания маршрута достаточно указать последовательность вершин.

Если начальная и конечная вершины маршрута совпадают, то маршрут называется замкнутым, или циклическим, в противном случае – открытым.

Если все ребра в маршруте различны, то маршрут называется цепью. Если все вершины, кроме, быть может, начальной и конечной, в маршруте различны, то маршрут называется простой цепью. В цепи начальная и конечная вершины называются концами цепи. Говорят, что цепь с концами u[у] и v[вэ] соединяет вершины u[у] и v[вэ]. Обозначение цепи, соединяющей вершины u[у] и v[вэ], приведено в формуле (3.20).

Если существует цепь, соединяющая вершины u[у] и v[вэ], то существует и простая цепь, соединяющая эти вершины. Замкнутая цепь называется циклом; замкнутая простая цепь – простым циклом. Граф без циклов называется ациклическим. Для орграфов цепь называют также путем, а цикл – контуром.

Слайд 71

Рассмотрим примеры различных маршрутов на графе.

Обратимся к графу G[жэ], изображенному на рис. 3.18. В формуле (3.21) представлен маршрут длины три, который не является цепью, так как в этой последовательности ребро (v_1, v_3)[вэ один вэ три] повторяется.

В формуле (3.22) представлена цепь длины 5, которая не является простой цепью, так как в этой последовательности повторяется вершина v_3[вэ три].

В формуле (3.23) представлена простая цепь длины четыре, так как в этой последовательности все ребра и вершины различны.

В формуле (3.24) представлен цикл длины шесть, который не является простым, так как в этой последовательности повторяется вершина v_3[вэ три].

В формуле (3.25) представлен простой цикл длины три.

Слайд 72

Тема 3.2. Изоморфизм графов. Понятия полного и двудольного графов. Операции над графами. Измерение расстояний на графе. Связность

Важным понятием в теории графов является понятие изоморфизма.

Пусть граф G_1[жэ один] имеет множество вершин V_1[вэ один] и множество ребер E_1[е один], а граф G_2[жэ два] – множество вершин V_2[вэ два] и множество ребер E_2[е два].

Говорят, что граф G_1[жэ один] изоморфен графу G_2[жэ два], если существует биективное отображение V_1[вэ один] на V_2[вэ два], сохраняющее смежность вершин. Определение изоморфных графов с помощью математических символов представляет формула (3.26).

Изоморфизм графов является отношением эквивалентности. Действительно, каждый граф изоморфен сам себе; если первый граф изоморфен второму, то и второй изоморфен первому; если первый граф изоморфен второму, а второй – третьему, то и первый граф изоморфен третьему.

Графы, не являющиеся изоморфными, называются неизоморфными.

Слайд 73

Из определения изоморфизма графов следует, что изоморфные графы отличаются лишь обозначением вершин и их расположением на плоскости.

Графы изучаются с точностью до изоморфизма, то есть рассматриваются не отдельно взятые графы, а классы эквивалентности относительно изоморфизма.

У изоморфных графов одинаково число вершин, число ребер, число вершин одинаковой степени или полустепени.

На рис. 3.19 приведены три внешне различные диаграммы, являющиеся диаграммами одного и того же графа. Требуемые соответствия между множествами вершин задаются формулой (3.27).

Количество вершин, ребер и количество смежных вершин для каждой вершины не определяют граф. У графов, изображенных на рис. 3.20, указанные характеристики совпадают, но при этом графы не являются изоморфными.

Слайд 74

Граф, состоящий из одной вершины, называется тривиальным.

Неориентированный граф без петель и кратных ребер, в котором любые две вершины смежны, называется полным. Другими словами, в полном графе каждая вершина соединяется ребрами со всеми другими вершинами. Полный граф имеет максимально возможное число ребер. Обозначение полного графа с p[пэ] вершинами и правило нахождения числа его ребер приведены в формуле (3.28). Обоснуем указанное правило. Если рассматриваемый граф имеет p[пэ] вершин, то из каждой его вершины выходит $p-1$[пэ минус одно] ребро. Тогда из всех p[пэ] вершин выходит $p(p-1)$[пэ, умноженное на пэ минус один] ребер. При таком подсчете каждое ребро было учтено два раза. Поэтому окончательный ответ получаем делением этого произведения на два.

На рис. 3.21 изображены полные графы с тремя, четырьмя и пятью вершинами.

Слайд 75

Пусть G[жэ] – неориентированный граф без кратных ребер, имеющий множество вершин V[вэ] и множество ребер E[е]. Граф G[жэ] называется двудольным, если множество его вершин разбито на непересекающиеся подмножества V_1[вэ один] и V_2[вэ два] и всякое ребро инцидентно вершине из V_1[вэ один] и вершине из V_2[вэ два]. Множества V_1[вэ один] и V_2[вэ два] называются долями двудольного графа.

Если в двудольном графе каждая вершина из V_1[вэ один] соединяется ребрами со всеми вершинами из V_2[вэ два], то граф называется полным двудольным графом. Обозначение полного двудольного графа в случае, когда множество V_1[вэ один] имеет n[эн] элементов, а множество V_2[вэ два] – m[эм] элементов, приведено в формуле (3.29). На рис. 3.22 изображен полный двудольный граф с тремя вершинами в каждой доле. К первой доле относятся вершины верхнего ряда, ко второй – вершины нижнего ряда.

Слайд 76

Рассмотрим другие примеры полных двудольных графов. Обратимся к рис. 3.23. На нем изображены графы $K_{1,2}$[ка один два], $K_{5,1}$[ка пять один]и $K_{4,3}$[ка четыре три]. В первую долю графа $K_{1,2}$[ка один два] входит вершина 1, во вторую – вершины 2 и 3. В графе $K_{5,1}$[ка пять один] одна доля образована вершинами 1, 2, 3, 4, 5, другая состоит из одной вершины 6. К первой доле графа $K_{4,3}$[ка четыре три] относятся относятся вершины 1, 2, 3, 4, ко второй – вершины 5, 6, 7.

Граф $K_{1,2}$[ка один два] имеет два ребра, граф $K_{5,1}$[ка пять один] – пять ребер, в графе $K_{4,3}$[ка четыре три] двенадцать ребер. В общем случае количество ребер полного двудольного графа равно произведению числа вершин первой доли и числа вершин второй доли.

На рис. 3.24 изображены двудольные графы G[жэ] и D[дэ], не являющиеся полными. Граф G[жэ] имеет шесть вершин и пять ребер. К первой доле относятся вершины 1, 2, 3, ко второй – вершины 4, 5, 6. У графа D[дэ] семь вершин и пять ребер. Первую долю образуют вершины 1, 2, 3, 4, вторую – вершины 5, 6,7.

Слайд 77

Всякий неориентированный граф можно сделать ориентированным, заменив каждое ребро парой дуг, идущих в противоположных направлениях. Будем называть смешанными графы, которые могут содержать и неориентированные ребра, и дуги. Неориентированные графы и орграфы являются частными случаями смешанных графов. Говоря об операциях над графами, под словом «граф» мы будем понимать смешанный граф, а под словом «ребро» – неориентированное ребро или дугу. Для того чтобы различать неориентированные ребра и дуги, для обозначения первых мы будем использовать квадратные скобки, а для обозначения вторых – круглые скобки.

Пусть G[жэ] – граф с множеством вершин V[вэ] и множеством ребер E[е], G_1[жэ один] – граф со множеством вершин V_1[вэ один] и множеством ребер E_1[е один]. Говорят, что граф G_1[жэ один] является подграфом графа G[жэ], если V_1[вэ один] является подмножеством V[вэ], а E_1[е один] – подмножеством E[е]. Подграф G_1[жэ один] называется собственным подграфом графа G[жэ], если G_1[жэ один] не совпадает с G[жэ].

Пусть граф G_1[жэ один] имеет множество вершин V_1[вэ один] и множество ребер E_1[е один], а граф G_2[жэ два] множество вершин V_2[вэ два] и множество ребер E_2[е два].

Объединением графов G_1[жэ один] и G_2[жэ два] называется граф G[жэ], определяемый формулой (3.30). Формула (3.31) задает граф, являющийся пересечением графов G_1[жэ один] и G_2[жэ два], а формула (3.32) определяет симметрическую разность, или сумму по модулю 2, графов G_1[жэ один] и G_2[жэ два].

Пусть G[жэ] граф с n[эн] вершинами без петель и кратных ребер. На множестве его вершин V[вэ] построим полный граф, имеющий множество ребер M[эм]. Дополнением графа G[жэ] называется граф, определяемый формулой (3.33).

Слайд 78

Рассмотрим графы G_1[жэ один] и G_2[жэ два], изображенные на рис. 3.25, *а* и 3.25, *б* соответственно. Вершины a_1[а один] и a_2[а два] графа G_1[жэ один] соединяет неориентированное ребро, то есть двигаться по нему можно как от a_1[а один] к a_2[а два], так и от a_2[а два] к a_1[а один]. Поэтому мы рассматриваем его как совокупность двух дуг. Остальные ребра данных графов являются ориентированными, то есть двигаться по ним можно только в направлении стрелок. Граф, являющийся объединением данных графов, изображен на рис. 3.25, *в*. Для его построения мы объединяем множества вершин и множества ребер исходных графов. Результатом объединения ориентированного ребра с неориентированным, соединяющим те же вершины, является неориентированное ребро.

На рис. 3.25, *г* представлен граф, получающийся в результате применения к исходным графам операции пересечения. Он состоит только из одного ориентированного ребра, так как пересечением неориентированного ребра с ориентированным, соединяющим те же вершины, является ориентированное ребро. Других общих ребер у исходных графов нет.

Граф, представляющий собой симметрическую разность заданных графов, изображен на рис. 3.25, *д*. Все три его ребра являются ориентированными. Множество его вершин получается в результате объединения множеств вершин исходных графов. Множество ребер представляет собой симметрическую разность множеств ребер графов G_1[жэ один] и G_2[жэ два]. Для нахождения этой разности из множества ребер первого графа убираем те ребра, которые есть во втором графе.

Слайд 79

Остановимся на примерах графов, дополнительных к данным.

Рассмотрим граф G[жэ], изображенный на рис. 3.26. Он имеет два неориентированных ребра и одно ориентированное. Дополнительный к нему граф представлен на рис. 3.27. Ему принадлежат те и только те ребра, которых нет в графе G[жэ]. Одно из них ориентированное, три – неориентированные.

Отметим, что если исходный граф является полным, то его дополнением будет граф, имеющий те же вершины и не имеющий ребер. На рис. 3.28 изображен полный граф D[дэ], а на рис. 3.29 – его дополнение.

Если, наоборот, исходный граф состоит из одних лишь вершин, то дополнительным к нему будет полный граф с теми же вершинами.

Если граф D[дэ] является дополнением графа G[жэ], а граф F[эф] дополнением графа D[дэ], то графы G[жэ] и F[эф] совпадают.

Слайд 80

Пусть G[жэ] – неориентированный граф, в котором для любых двух вершин существует соединяющая их цепь.

Расстоянием между вершинами u[у] и v[вэ] называется длина кратчайшей цепи, соединяющей эти вершины. Обозначение для расстояния между вершинами графа приведено в формуле (3.34).

Наибольшее из расстояний между вершинами графа называется диаметром графа.

Максимальное удаление от вершины v[вэ] в графе G[жэ] определяется формулой (3.35).

Центром графа называется вершина с наименьшим максимальным удалением от нее.

Максимальное удаление от центра называется радиусом графа. Формула (3.36) определяет радиус графа с помощью математических символов.

Центр не обязательно единственный. В полном графе радиус равен 1 и любая вершина является центром.

Множество вершин, находящихся на одинаковом расстоянии от вершины v[вэ], называется ярусом вершины v[вэ].

Для графа D[дэ], изображенного на рис. 3.30, диаметр равен двум, радиус – единице, центром графа является вершина 4.

Слайд 81

Рассмотрим граф, изображенный на рис. 3.31. Расстояния между его вершинами представлены соотношениями (3.37). Диаметр графа равен наибольшему из расстояний, то есть четырем. Из равенств (3.37) находим максимальные удаления от вершин графа G[жэ]. Их значения определяются формулами (3.38). Центрами графа являются вершины 1, 2, 4 и 5 с наименьшим максимальным удалением. Радиус графа G[жэ] равен максимальному удалению от центра, то есть двум.

Вершина 1 имеет 4 яруса. Первый ярус образуют вершины 2 и 3, второй – вершины 4 и 5, третий – вершина 6, четвертый – вершина 7. Столько же ярусов имеет вершина 7.

У вершины 2 графа 3 яруса. Один из них образован вершинами 1 и 5, другой – вершинами 3, 4 и 6, третий – вершиной 3. Вершины 3 и 6 также имеют по 3 яруса.

Число ярусов вершины 4 равно двум. Первый ярус состоит из вершин 3, 5 и 6, второй – из вершин 1, 2 и 7. Столько же ярусов у вершины 5.

Слайд 82

Пусть G[жэ] – неориентированный граф.

Говорят, что вершины u[у] и v[вэ] в графе G[жэ] связаны отношением достижимости, если существует соединяющая их цепь. Граф, в котором любые две вершины связаны отношением достижимости, называется связным. Тривиальный граф, состоящий из изолированной вершины, по определению считается связным. Граф, не являющийся связным, называется несвязным.

Отношение достижимости вершин является отношением эквивалентности.

Компонентой связности графа G[жэ] называется такой его связный подграф, который не является собственным подграфом никакого другого связного подграфа графа G[жэ].

Классы эквивалентности по отношению достижимости образуют разбиение множества вершин графа G[жэ] на подмножества вершин, входящих в одну компоненту связности. Для построения компоненты связности достаточно взять один класс эквивалентности и перенести на его вершины ребра из графа *G*[жэ].

Одной из характеристик графа является число его компонент связности. Обозначение для данной величины приведено в формуле (3.39). Граф *G*[жэ] является связным тогда и только тогда, когда он имеет одну компоненту связности. Граф, состоящий из двух или более изолированных вершин, называется вполне несвязным.

Граф *G*, изображенный на рис. 3.32, имеет две компоненты связности. Формула (3.40) представляет множества V_1[вэ один] и V_2[вэ два] вершин, входящих соответственно в первую и вторую компоненты.

Слайд 83

Пусть теперь *G* – ориентированный граф.

Говорят, что вершины *u*[у] и *v*[вэ] в орграфе *G*[жэ] связаны отношением двусторонней достижимости, если существует как путь из *u*[у] в *v*[вэ], так и путь из *v*[вэ] в *u*[у]. Орграф, в котором любые две вершины связаны отношением двусторонней достижимости, называется сильно связным. Тривиальный граф, состоящий из изолированной вершины, по определению считается сильно связным.

Отношение двусторонней достижимости вершин является отношением эквивалентности.

Компонентой сильной связности орграфа *G*[жэ] называется такой его сильно связный подграф, который не является собственным подграфом никакого другого сильно связного подграфа орграфа *G*.

Классы эквивалентности по отношению двусторонней достижимости образуют разбиение множества вершин орграфа *G*[жэ] на подмножества вершин, входящих в одну компоненту сильной связности. Для построения компоненты сильной связности достаточно взять один класс эквивалентности и перенести на его вершины дуги из орграфа *G*[жэ].

Одной из характеристик орграфа является число его компонент сильной связности. Обозначение для данной величины приведено в формуле (3.41). Орграф *G*[жэ] является сильно связным тогда и только тогда, когда он имеет одну компоненту сильной связности.

Граф *G*[жэ], изображенный на рис. 3.33, не является сильно связным, так как имеет три компоненты сильной связности. Им соответствуют множества вершин, представляемые формулой (3.42). Сами компоненты сильной связности графа *G* изображены на рис. 3.34.

Слайд 84

Орграф *G*[жэ] называется односторонне связным, если для любых его вершин и *u*[у] и *v*[вэ] существует либо путь из *u*[у] в *v*[вэ], либо путь из *v*[вэ] в *u*[у].

Очевидно, что если орграф является сильно связным, то он будет и односторонне связным.

Граф, изображенный на рис. 3.35, не является односторонне связным, так как, скажем, из вершины 1 нет пути в вершину 5 и, наоборот, из вершины 5 нет пути в вершину 1.

На рис. 3.36, *а* представлен односторонне связный граф, не являющийся сильно связным.

Пусть *G*[жэ] – ориентированный граф, имеющий множество вершин *V*[вэ] и множество ребер *E*[е].

Графом, ассоциированным с орграфом *G*[жэ], называется неориентированный граф G_1[жэ один], имеющий то же множество вершин *V*[вэ] и множество ребер E_1[е один] получающееся из множества *E*[е] заменой всех дуг на неориентированные ребра.

Орграф *G*[жэ] называется слабо связным, если ассоциированный с ним неориентированный граф является связным.

На рис. 3.36, *б* представлен слабо связный граф, не являющийся односторонне связным.

Слайд 85

Рассмотрим способ нахождения компонент связности с помощью ЭВМ. Чтобы в n[эн]-вершинном графе или орграфе G[же] существовал маршрут из вершины v_i[вэ итое] в вершину v_j[вэ житое], необходимо и достаточно, чтобы итый-житый элемент матрицы 3.43 был отличен от нуля.

Составим из матрицы B[бэ], определенной в формуле (3.44), матрицу C[цэ], используя правило (3.45).

Матрица C называется матрицей связности, если G[же] – неориентированный граф, и матрицей достижимости, если G[же] – орграф. Граф G[же] будет содержать маршрут из вершины v_i[вэ итое] в вершину v_j[вэ житое] тогда и только тогда, когда элемент C_{ij}[цэ итое житое] равен 1.

Значит, матрица C[цэ] содержит информацию о существовании связей между различными элементами графа с помощью маршрутов. Если все элементы матрицы связности равны единице, то граф является связным.

В случае неориентированного графа матрица C[цэ] совпадает с транспонированной и является матрицей связности. В случае ориентированного графа транспонированная матрица C[цэ] называется матрицей контрдостижимости, так как если итый-житый элемент матрицы C[цэ] показывает наличие пути из вершины v_i[вэ итое] в вершину v_j[вэ житое], то житый-итый элемент транспонированной матрицы показывает наличие обратного пути из вершины вэ житое в вершину вэ итое.

Матрицы достижимости и контрдостижимости можно использовать для нахождения сильных компонент орграфа.

Рассмотрим матрицу, определенную в формуле (3.46), где операция звездочка означает поэлементное произведение матриц. Элемент матрицы S[эс] равен 1 тогда и только тогда, когда вершины v_i[вэ итое] и v_j[вэ житое] взаимно достижимы. Следовательно, компонента сильной связности, содержащая вершину v_i[вэ итое], состоит из элементов v_j[вэ житое], для которых элемент v_{ij}[вэ итое-житое] равен единице.

Слайд 86

Тема 3.3. Деревья. Остов графа. Понятия планарного, эйлерова и гамильтонова графов

Деревья заслуживают отдельного и подробного рассмотрения по двум причинам.

Деревья являются в некотором смысле простейшим классом графов. Для них выполняются многие свойства, которые не всегда выполняются для графов в общем случае. Применительно к деревьям многие доказательства и рассуждения оказываются намного проще. Выдвигая какие-то гипотезы при решении задач теории графов, целесообразно сначала их проверять на деревьях.

Деревья являются самым распространенным классом графов, применяемых в программировании, причем в самых разных ситуациях.

Неориентированный связный граф без циклов называется деревом, или свободным деревом. Граф, состоящий из нескольких деревьев, называется лесом. Таким образом, компонентами связности леса являются деревья.

Примеры деревьев представлены на рис. 3.37, 3.38.

Слайд 87

На рис. 3.39 изображены диаграммы всех различных деревьев с 5 вершинами, а на рис. 3.40 – диаграммы всевозможных деревьев с 6 вершинами.

Для всякого неориентированного графа G[жэ] следующие утверждения эквивалентны.

1. G[жэ] – дерево, то есть связный граф без циклов.

2. Любые две вершины соединены в G[жэ] единственной простой цепью.

3. G[жэ]– связный граф, и удаление любого ребра делает граф несвязным.

4. G[жэ] – связный граф, в котором число ребер на единицу меньше числа вершин.

5. G[жэ] – связный граф без простых циклов.

На основе вышесказанного можно сделать вывод, что в любом дереве всегда есть по крайней мере две висячие вершины. Например, у дерева, изображенного на рис. 3.40, *а*, таких вершин в точности две. Дерево на рис. 3.40, *е* имеет пять висячих вершин.

Слайд 88

Вершины в графе часто называют узлами. Этот термин мы будем использовать далее при рассмотрении ориентированных деревьев.

Ориентированным деревом, или ордеревом, называется орграф, удовлетворяющий следующим условиям:

1) существует единственный узел, полустепень захода которого равна 0; он называется корнем ордерева;

2) полустепень захода всех остальных узлов равна 1;

3) каждый узел достижим из корня.

На рис. 3.41 приведены диаграммы всех различных ориентированных деревьев с 3 узлами, а на рис. 3.42 – диаграммы всевозможных ордеревьев с 4 узлами.

Всякое ордерево G[жэ] обладает следующими свойствами:

1) число ребер в G[жэ] на единицу меньше числа вершин;

2) если в G[жэ] отменить ориентацию ребер, то получится свободное дерево;

3) G[жэ] не содержит контуров;

4) для каждого узла существует единственный путь, ведущий в этот узел из корня;

5) подграф, определяемый множеством узлов, достижимых из узла v[вэ], является ордеревом с корнем v[вэ], называемым поддеревом узла v[вэ].

Если в свободном дереве любую вершину назначить корнем, то получится ордерево, при этом дуги будут последовательно ориентированы от корня.

Слайд 89

Листом ордерева называется вершина с нулевой полустепенью исхода. Путь из корня в лист называется ветвью. Длина наибольшей ветви ордерева называется его высотой. Уровень узла ордерева – это расстояние от корня до узла. Сам корень имеет нулевой уровень. Узлы одного уровня образуют ярус дерева.

У дерева, изображенного на рис. 3.43, высота равна двум. Корнем дерева является вершина 1, листьями – вершины 4, 5, 6, 7. Формула (3.47) представляет все узлы первого уровня, формула (3.48) – узлы второго уровня. Данное дерево имеет четыре ветви, представляемые формулой (3.49).

Наряду с растительной, применяется еще и генеалогическая терминология. Узлы, достижимые из узла u[у], называются потомками узла u[у]. Потомки образуют поддерево в исходном дереве. Если в дереве существует дуга (u, v)[у вэ], то узел u[у] называется отцом, или родителем, узла v[вэ], а узел v[вэ] – сыном узла u[у]. Сыновья одного узла называются братьями.

Слайд 90

Пусть G[жэ] – связный неориентированный граф. Остовным деревом, или остовом, графа G[жэ] называется его ациклический связный подграф, содержащий все вершины G[жэ]. Другими словами, остовное дерево графа состоит из минимального подмножества ребер графа, таких, что из одной из вершин графа можно попасть в любую другую вершину, двигаясь по этим ребрам.

В качестве примера рассмотрим граф G[жэ], изображенный на рис. 3.44. Он имеет три остова, которые представлены на рис. 3.45.

Количество ребер остовного дерева графа на единицу меньше числа вершин графа.

Число остовов полного графа с n[эн] вершинами можно вычислить по формуле (3.50).

Количество остовных деревьев в полном двудольном графе с m[эм] и n[эн] вершинами в долях выражается формулой (3.51).

Слайд 91

Рассмотрим полный граф с тремя вершинами, изображенный на рис. 3.46. Он имеет три разных остовных дерева, представленных на рис. 3.47.

На рис. 3.48 изображен полный двудольный граф с двумя вершинами в каждой доле. Число его различных остовных деревьев равно четырем. Указанные деревья представлены на рис. 3.49.

Число остовных деревьев полного графа быстро растет с увеличением количества его вершин. Так, полный граф с четырьмя вершинами имеет 16 остовных деревьев, у графа с пятью вершинами их уже 125, при добавлении шестой вершины число остовных деревьев увеличивается до 1296[одной тысячи двухсот девяноста шести].

Аналогично с увеличением количества вершин в долях быстро растет число остовных деревьев полного двудольного графа. У графа, имеющего по три вершины в каждой доле, их 81. Если в одной доле графа три вершины, а в другой четыре, то число остовных деревьев возрастает до 432[четырехсот тридцати двух]. У графа, имеющего три вершины в первой доле и пять во второй, число остовных деревьев равно 2025[двум тысячам двадцати пяти].

Слайд 92

Неориентированный граф G[жэ] без петель и кратных ребер называется планарным, если его можно изобразить на плоскости так, что никакие два ребра не пересекаются в точках, отличных от вершин. Такое изображение графа на плоскости называется плоским. Таким образом, если граф имеет плоское изображение, то он является планарным.

Граф K_4[ка четыре], представленный на рис. 3.50, *а*, планарен, поскольку может быть изображен, как показано на рис. 3.50, *б*.

Не всякий граф является планарным. Справедливо следующее утверждение.

Если граф G[жэ] планарен, то он не содержит подграфа, изоморфного полному графу K_5[ка пять] или полному двудольному графу $K_{3,3}$[ка три три]. Указанные графы изображены на рис. 3.51.

Из последнего утверждения вытекает, что графы K_5[ка пять] и$K_{3,3}$[ка три три] не являются планарными.

Любой конечный граф может быть изображен в трехмерном пространстве без пересечения ребер вне их концов.

Для всякого связного планарного графа G[жэ] справедлива теорема Эйлера, представленная формулой (3.52). Здесь p[пэ] − число вершин графа G[жэ], q[кю] − число ребер, r[эр] − число областей, на которые разбивается плоскость плоским изображением графа G[жэ]. Следствия этой теоремы приведены в формулах (3.53) и (3.54).

Слайд 93

Проиллюстрируем теорему Эйлера и ее следствия на графе G[жэ], изображенном на рис. 3.52. Прежде всего построим его плоское изображение. Оно приведено на рис. 3.53. В нашем случае граф имеет пять вершин и восемь ребер. Число областей, на которые разбивается плоскость плоским изображением графа, равно пяти. Как и утверждается в теореме Эйлера, вычитая из суммы числа вершин и числа указанных областей количество ребер графа G[жэ], получаем число два. Соответствующее равенство представлено формулой (3.55).

Поскольку число вершин графа больше трех, в силу первого следствия теоремы сумма числа ребер и шести не должна превосходить утроенного количества вершин. Требуемое соотношение, выражаемое формулой (3.56), очевидно, выполняется.

Наконец, степени всех вершин графа G[жэ] не превосходят пяти, что подтверждает справедливость второго следствия теоремы Эйлера.

Слайд 94

Рассмотрим классическую задачу, известную как задача о семи кёнигсбергских мостах. С постановки этой задачи начала свое развитие теория графов. Имеются два острова, соединенных семью мостами с берегами реки и друг с другом, как показано на рис. 3.54. Нужно осуществить прогулку по городу таким образом, чтобы, пройдя по каждому мосту один раз, вернуться обратно. Данная задача была поставлена философом Иммануилом Кантом в 1736 году, во время его прогулки по городу Кёнигсбергу.

Решение этой задачи сводится к нахождению некоторого специального маршрута на графе. Поставим в соответствие плану расположения участков суши и мостов, приведенному на рис. 3.54, мультиграф, вершины которого обозначают части суши, а ребра – соединяющие их мосты. Указанный граф изображен на рис. 3.55. Теперь задача звучит следующим образом: найти цикл, содержащий все ребра графа. Эта задача была решена Леонардом Эйлером, петербургским математиком швейцарского происхождения.

Слайд 95

Пусть G[жэ] – неориентированный граф.

Если G[жэ] имеет цикл, содержащий все ребра графа, то такой цикл называется эйлеровым циклом, а граф G[жэ] – эйлеровым графом. Если G имеет цепь, содержащую все вершины графа по одному разу, то такая цепь называется эйлеровой цепью, а граф G[жэ] – полуэйлеровым графом.

Граф G, изображенный на рис. 3.56, является эйлеровым. Он имеет эйлеров цикл, представленный формулой (3.57).

Граф D на рис. 3.57 является полуэйлеровым. Входящая в него эйлерова цепь представлена формулой (3.58).

Для всякого связного нетривиального графа G[жэ] следующие утверждения эквивалентны.

1. G[жэ] – эйлеров граф.

2. Каждая вершина G[жэ] имеет четную степень.

3. Множество ребер графа G[жэ] можно разбить на простые циклы.

Заметим, что в задаче о кёнигсбергских мостах все вершины графа имеют нечетные степени. Поэтому данная задача решения не имеет.

Граф F[эф], изображенный на рис. 3.58, не является эйлеровым, например, потому, что степень его вершины 4 равна трем. В то же время он принадлежит классу полуэйлеровых графов, поскольку содержит эйлерову цепь, задаваемую формулой (3.59).

Если граф без петель содержит $2k$[два ка] вершин нечетной степени, то его можно разбить на k[ка] полуэйлеровых графов, то есть нарисовать k[ка] росчерками пера.

Задачи с эйлеровыми графами часто встречаются в книгах по занимательной математике – например, можно ли нарисовать какую-нибудь диаграмму, не отрывая карандаша от бумаги и не проходя никакую линию дважды. Принято всякую замкнутую линию, если ее можно начертить, не отрывая карандаша от бумаги, проходя при этом каждый участок в точности один раз, называть уникурсальной. Рисунок графа, обладающего эйлеровым путем или эйлеровым циклом, является уникурсальной линией.

Слайд 96

Напомним, что эйлеров цикл в связном нетривиальном графе существует тогда и только тогда, когда все его вершины имеют четные степени.

На этой теореме основан алгоритм построения эйлерова цикла.

Сначала нужно убедиться, что граф эйлеров, и построить любой цикл. После такого построения возникают две возможности:

а) в цикл входят все ребра графа;

б) на графе остались неучтенные ребра.

В случае «а» задача решена. В случае «б» в построенном цикле нужно найти вершину, из которой выходит еще не пройденное ребро, и сформировать цикл из не задействованных ранее ребер. Затем надо объединить два имеющихся цикла в один и вновь проверить, все ли ребра пройдены. И так далее. Процедура объединения двух циклов в один продемонстрирована на рис. 3.59.

Алгоритм заканчивает свою работу, когда будут задействованы все ребра графа.

Рассмотрим некоторые приложения теоремы Эйлера, которые в основном связаны с так называемой задачей китайского почтальона.

Пусть имеется связный граф, ребрам которого соответствуют некоторые числа, называемые весами. Требуется найти такой цикл, при котором каждое ребро проходится по крайней мере один раз и суммарный вес всех ребер, вошедших в цикл, минимален. Заметим, что если граф эйлеров, то искомым циклом является содержащийся в графе эйлеров цикл.

Эта задача имеет много приложений, одним из которых является поливка улиц одной машиной. Здесь ребра графа – дороги, вершины – перекрестки, веса – длины дорог. Подобная задача возникает при сборе мусора, доставке почты, выборе наилучшего маршрута для осмотра музея, уборке помещений и коридоров в больших учреждениях.

Слайд 97

Кратко остановимся на проблеме, связанной с возможностью обхода всех вершин в графе. Задача ставится следующим образом: выяснить, существует ли в данном графе простой цикл, проходящий через каждую вершину графа.

Рассмотрим неориентированный граф G[жэ].

Если G[жэ] имеет простой цикл, содержащий все вершины графа, то такой цикл называется гамильтоновым циклом, а граф G[жэ] – гамильтоновым графом.

Граф G[жэ] на рис. 3.60 является гамильтоновым. Он имеет гамильтонов цикл, представленный формулой (3.60).

Гамильтонов цикл не всегда содержит все ребра графа. Рассмотрим граф *F*[эф], изображенный на рис. 3.61. Его гамильтонов цикл, задаваемый формулой (3.61), содержит только 5 из 8 ребер графа.

Граф, являющийся гамильтоновым, обязательно связен.

Слайд 98

Несмотря на сходство постановки задач для гамильтоновых и эйлеровых графов, «хорошего» решения для гамильтоновых графов нет. Вообще, о гамильтоновых графах известно очень мало. В основном это теоремы типа «Если в графе достаточное число ребер, то он гамильтонов». Ясно, что подобные теоремы не могут служить критерием для проверки того, является ли граф гамильтоновым. Ведь в графах такого типа вершин может быть очень много, а ребер сравнительно мало.

Имеет место следующее утверждение, называемое теоремой Дирака.

Если в графе *G*[жэ], содержащем *n*[эн] вершин, степень любой вершины больше *n*/2[эн пополам], то граф *G*[жэ] является гамильтоновым.

Применим данную теорему к графу *D*[дэ], изображенному на рис. 3.62. Этот граф имеет четыре вершины, причем степень каждой вершины больше двух. Следовательно, граф *D*[дэ] является гамильтоновым.

К графу *F*[эф], изображенному на рис. 3.63, указанная теорема не применима. Тем не менее он также является гамильтоновым.

Гамильтоновы путь, цикл и граф названы в честь ирландского математика Уи́льяма Га́мильтона, который впервые определил эти классы, исследовав задачу «кругосветного путешествия» по додекаэдру. В этой задаче вершины додекаэдра символизировали известные города, такие как Брюссель, Амстердам, Эдинбург, Пекин, Прагу, Дели, Франкфурт и другие, а ребра – соединяющие их дороги. Путешествующий должен пройти «вокруг света», найдя путь, который проходит через все вершины ровно один раз. Чтобы сделать задачу более интересной, порядок прохождения городов устанавливался заранее. А чтобы было легче запомнить, какие города уже соединены, в каждую вершину додекаэдра был вбит гвоздь, и проложенный путь отмечался небольшой веревкой, которая могла обматываться вокруг гвоздя. Однако такая конструкция оказалась слишком громоздкой, и Гамильтон предложил новый вариант игры, заменив додекаэдр плоским графом, изоморфным графу, построенному на ребрах додекаэдра.

Слайд 99

Тема 4.1. Высказывания и операции над ними. Понятие формулы алгебры высказываний. Эквивалентные преобразования формул

Предложение, относительно которого можно вполне объективно и определенно сказать, является оно истинным или ложным, называется высказыванием. Высказывания чаще всего обозначаются большими буквами латинского алфавита, иногда с индексами. Примеры обозначений высказываний приведены в формуле (4.1).

На множестве всех высказываний задается функция истинности $\mu(P)$ [мю от пэ], принимающая значения из множества, состоящего из двух элементов – нуль и один. Функция истинности представлена формулой (4.2). Значение функции называют значением истинности высказывания P[пэ] или логическим значением.

Рассмотрим пример. Предложения P, Q, S[пэ кю эс] являются высказываниями. Истинными высказываниями являются высказывания P и S. Высказывание Q[кю] – ложное высказывание. Так как про предложения R[эр] и T[тэ] нельзя сказать, будут они истинны или ложны, то R[эр] и T[тэ], вообще говоря, не являются высказываниями.

Значения функции истинности для высказываний P, Q и G[пэ кю жэ] представлены формулой (4.3).

В алгебре высказываний содержание высказываний не имеет значения, важно только, являются высказывания истинными или ложными. Поэтому значок μ[мю] часто опускают, каждому ложному высказыванию присваивают значение «0», каждому истинному высказыванию – значение «1».

Слайд 100

Введем операции, их еще называют логическими связками, с помощью которых можно из имеющихся высказываний создавать новые. Рассмотрим два высказывания *P*[пэ] и *Q*[кю].

Отрицанием, или инверсией, высказывания *P*[пэ] будем называть высказывание, которое является истинным, когда *P*[пэ] ложно, и является ложным, когда *P*[пэ] истинно. Отрицание высказывания *P*[пэ] читается «не *P*[пэ]».

Конъюнкцией высказываний *P*[пэ] и *Q*[кю] будем называть высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда *P*[пэ] и *Q*[кю] истинны. Конъюнкция высказываний *P*[пэ] и *Q*[кю] читается «*P*[пэ] и *Q*[кю]».

Дизъюнкцией высказываний *P*[пэ] и *Q*[кю] называется высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда истинно хотя бы одно из высказываний *P*[пэ] и *Q*[кю]. Дизъюнкция высказываний *P*[пэ] и *Q*[кю] читается «*P*[пэ] или [кю]».

Составим таблицу истинности для операций отрицания, конъюнкции и дизъюнкции.

Конъюнкция высказываний *P*[пэ] и *Q*[кю] – это высказывание «*P*[пэ] и *Q*[кю]», принимающее значение «1» в том случае, когда оба высказывания истинны, и значение «0» во всех остальных случаях. Конъюнкция выполняет роль связки «и».

Дизъюнкция высказываний *P*[пэ] и *Q*[кю] – это высказывание «*P*[пэ] или *Q*[кю]», принимающее значение «0» в том случае, когда оба высказывания ложны, и значение «1» во всех остальных случаях. Дизъюнкция выполняет роль связки «или».

Слайд 101

Импликацией высказываний P[пэ] и Q[кю] называется высказывание, которое является ложным тогда и только тогда, когда высказывание P[пэ] истинно, а высказывание Q[кю] ложно. При этом P[пэ] называется посылкой, а Q[кю] – следствием. Импликация P[пэ] и Q[кю] читается «если P[пэ], то Q[кю]», или «из P[пэ] следует Q[кю]», или «P[пэ] достаточно для Q[кю]», или «Q[кю] необходимо для P[пэ]».

Эквиваленцией, или эквивалентностью, высказываний P[пэ] и Q[кю] называется высказывание, которое является истинным тогда и только тогда, когда P[пэ] и Q[кю] либо оба истинны, либо оба ложны. Эквиваленция P[пэ] и Q[кю] читается «P[пэ] равносильно Q[кю]», или «P[пэ] тогда и только тогда, когда Q[кю]», или «P[пэ] необходимо и достаточно для Q[кю]».

Составим таблицу истинности для операций импликации и эквиваленции.

Перечисленные выше операции – конъюнкция, дизъюнкция, импликация и эквиваленция – применяются к двум высказываниям, то есть являются бинарными операциями. Операция отрицания применяется к одному высказыванию, это унарная операция.

Слайд 102

Переменные, вместо которых можно подставлять конкретные высказывания, называются высказывательными переменными, или переменными высказываниями. Они обозначаются заглавными буквами латинского алфавита с индексами или без индексов. Примеры высказывательных переменных представлены формулой (4.4).

Из исходных высказывательных переменных с помощью операций отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, импликации и эквиваленции могут быть образованы различные выражения, называемые формулами. Сформулируем точное определение формулы алгебры высказываний.

1. Каждая высказывательная переменная есть формула.

2. Если F_1 и F_2 – формулы, то выражения (4.5) также являются формулами.
3. Никаких других формул, кроме получающихся согласно пунктам 1 и 2, нет.

Любая часть формулы, которая сама является формулой, называется подформулой.

Для краткости записи внешние скобки у формулы договариваются опускать.

Количество скобок в записи формулы можно уменьшить, если договориться считать, что операция конъюнкции сильнее операции дизъюнкции, дизъюнкция сильнее импликации, а импликация сильнее эквиваленции. Черта над подформулой, обозначающая знак отрицания, выполняет функцию скобок и позволяет их не ставить.

Пусть дана формула алгебры высказываний (4.6). Если вместо соответствующих переменных подставить некоторые конкретные высказывания, то получится составное высказывание (4.7).

Рассмотрим следующий пример. Формула (4.8) является формулой алгебры высказываний. Формулы (4.9) и (4.10) являются подформулами формулы (4.8).

Слайд 103

Для того чтобы определить значение составного высказывания, требуется подставить символы 0 или 1 соответственно вместо каждого из простых высказываний и выполнить над этими символами все операции, предписываемые формулой.

Представленная на слайде формула задает функцию, множество значений которой можно определить с помощью таблицы истинности, придавая значениям переменных значения 0 и 1. Для формулы, содержащей n[эн] исходных высказывательных переменных, таблица истинности имеет 2^n [два в степени эн] строчек.

Заполним таблицу истинности для нашей формулы. Всевозможные системы значений исходных высказывательных переменных представлены в первых трех колонках таблицы восемью строчками.

Далее заполняем столбец, соответствующий первой операции в формуле – импликации. Затем заполняем пятый столбец, соответствующий операции конъюнкции, применяемой к выражениям, указанным в четвертом и третьем столбцах таблицы. Последний столбец определяет значения заданной формулы.

Слайд 104

Введем понятия выполнимой и опровержимой формул алгебры высказываний.

Если существует набор значений высказывательных переменных, на котором формула обращается в истинное высказывание, то формула называется выполнимой.

Если существует набор значений высказывательных переменных, на котором формула обращается в ложное высказывание, то формула называется опровержимой.

Приведенная на слайде формула (4.11) соответствует определению выполнимой формулы, так как на наборе (0, 0, 1)[ноль ноль один] она принимает значение один.

Обратимся к формуле (4.12). Указанная формула удовлетворяет определению опровержимой формулы, так как на наборе (1, 1, 0)[один один ноль] она принимает значение ноль.

Слайд 105

Формула алгебры высказываний называется тождественно истинной, или тавтологией, если она обращается в истинное высказывание при всех наборах значений высказывательных переменных.

Приведенные на слайде формулы (4.13–4.17) являются тождественно истинными. Они выражают основные законы математической логики, к которым относятся закон тождества, закон исключенного третьего, закон противоречия, а также законы двойного отрицания и контрапозиции. Докажем, например, что формула (4.17) является тавтологией. Для истинности эквиваленции требуется, чтобы выражения в левой и правой ее частях принимали одинаковые логические значения. Импликация в левой части формулы (4.17) обращается в ложное высказывание в том и только в том случае, когда F = 1[эф равно единице], а G = 0[же равно нулю]. То же самое можно сказать и про импликацию в правой части этой формулы. Таким образом, на любых наборах значений высказывательных переменных логические значения обеих импликаций совпадают, а значит, формула (4.17) является тавтологией.

Формула алгебры высказываний называется тождественно ложной, или противоречием, если она обращается в ложное высказывание при всех наборах значений высказывательных переменных.

Формулы (4.18) представляют собой примеры тождественно ложных формул.

Слайд 106

Введем понятие логического следствия формул.

Пусть формулы $F_1,\ldots, F_m$[эф один и т.д. эф эм] и формула G[жэ] зависят от одних и тех же переменных. Если для всех наборов значений переменных, для которых формулы $F_1,\ldots, F_m$[эф один и т.д. эф эм] одновременно обращаются в истинные высказывания, формула G[жэ] также обращается в истинное высказывание, то формула G[жэ] называется логическим следствием формул $F_1,\ldots, F_m$[эф один и т.д. эф эм]. Формулы $F_1,\ldots, F_m$[эф один и т.д. эф эм] называются посылками для логического следствия G[жэ]. Выражение (4.19) используется для обозначения того, что формула G[жэ] является логическим следствием формул $F_1,\ldots, F_m$[эф один и т.д. эф эм].

Представленные на слайде выражения (4.20–4.23) задают примеры логического следствия формул.

Из сформулированного определения вытекает алгоритм проверки формул на логическое следствие. Нужно составить таблицу истинности для формул $F_1,\ldots, F_m$[эф один и т.д. эф эм] и формулы G[жэ]. Если в каждой строке таблицы, в которой все формулы $F_1,\ldots, F_m$[эф один и т.д. эф эм] принимают значение 1, формула G[жэ] также принимает значение 1, то формула G[жэ] является логическим следствием формул $F_1,\ldots, F_m$[эф один и т.д. эф эм]. Если же в некоторой строке таблицы истинности все формулы $F_1,\ldots, F_m$[эф один и т.д. эф эм] принимают значение 1, а формула G[жэ] принимает значение 0, то формула G[жэ] не является логическим следствием формул $F_1,\ldots, F_m$[эф один и т.д. эф эм].

Слайд 107

Рассмотрим пример логического следствия формулы.

Представленное на слайде соотношение (4.24) означает, что всякий раз, когда импликация в левой части обращается в истинное высказывание, дизъюнкция в правой части также должна обращаться в истинное высказывание.

В перечне (4.25) указаны наборы значений переменных, обращающие в единицу левую часть соотношения (4.24). Действительно, если следствие импликации принимает значение один, то импликация истинна. Таким образом, если переменная R[эр] принимает значение один, то при любых значениях переменных P[пэ] и Q[кю] импликация равна единице. Если же переменная R[эр] принимает значение нуль, посылка также должна быть равна нулю. А дизъюнкция принимает значение нуль только случае, когда P[пэ] и Q[кю] равны нулю.

На каждом из приведенных наборов правая часть соотношения (4.24) также обращается в единицу. Действительно, дизъюнкция принимает нулевое значение только в том случае, когда все участвующие в ней элементы являются нулями. Но это возможно лишь при значениях переменных, указанных в равенствах (4.26). Такого набора значений нет в перечне (4.25). Следовательно, при обращении в единицу левой части соотношения (4.24) его правая часть также обращается в единицу.

Слайд 108

Рассмотрим на примере, как решается вопрос о том, является ли одна из двух данных формул следствием другой.

Пусть заданы формулы (4.27) и (4.28). Формула (4.28) представляет собой дизъюнкцию, а значит, она обращается в ноль только в случае, когда значения всех переменных равны нулю. Данная ситуация отражена в равенствах (4.29). Но при этих значениях переменных формула (4.27) также обращается в ноль. Поэтому мы можем утверждать, что всякий раз, когда формула (4.27) обращается в единицу, формула (4.28) тоже обращается в единицу. Таким образом, формула (4.28) является логическим следствием формулы (4.27).

С другой стороны, при значениях переменных, указанных в равенствах (4.30), формула (4.28) обращается в единицу, а формула (4.27) – в ноль. Это говорит о том, что формула (4.27) не является логическим следствием формулы (4.28).

Слайд 109

Рассмотрим формулы (4.31), (4.32), (4.33), (4.34) и (4.35). Поставим задачу расположить их таким образом, чтобы после каждой формулы стояли все логически из нее вытекающие формулы.

Из определения логического следования получаем, что тождественно ложная формула является посылкой для любой формулы, а тождественно истинная формула является следствием для любой системы посылок.

Для решения задачи составим таблицу значений заданных формул. Из таблицы видно, что формулы (4.31) и (4.34) принимают одинаковые значения, а формула (4.35) является тождественно ложной. На первое место в искомом ряду поставим формулу (4.35). Второе место займет формула (4.32), принимающая значение 1 только на одном наборе значений переменных. На третье место поставим формулу (4.33), которая принимает значение 1 уже на двух наборах значений переменных. Четвертое и пятое места займут формулы (4.31) и (4.34). Их можно располагать в любом порядке, поскольку принимаемые ими значения совпадают. Один из указанных способов расстановки формул представлен последовательностью (4.36).

Слайд 110

Введем понятие равносильности формул.

Пусть формулы F[эф] и G[жэ] зависят от одних и тех же переменных. Если логические значения формул F[эф] и G[жэ] для всех значений переменных совпадают, то формулы F[эф] и G[жэ] называют эквивалентными, или равносильными. Для указания равносильности формул используют обозначение (4.37).

Из определения эквивалентности формул вытекают свойства рефлексивности, симметричности и транзитивности. Они выражаются соотношениями (4.38), (4.39) и (4.40) соответственно.

Наличие трех свойств эквивалентности формул говорит о том, что множество всех формул можно разбить на непересекающиеся классы. Все формулы одного и того же класса будут эквивалентны друг другу, а любые две формулы из разных классов не эквивалентны. Такие классы называются классами эквивалентности.

Слайд 111

Рассмотрим основные эквивалентности алгебры высказываний. Они вытекают непосредственно из определения операций отрицания, конъюнкции и дизъюнкции.

Соотношения (4.41) и (4.42) выражают коммутативные законы операций конъюнкции и дизъюнкции соответственно.

Соотношения (4.43) и (4.44) представляют ассоциативные законы операций конъюнкции и дизъюнкции.

Соотношения (4.45) и (4.46) выражают дистрибутивные законы операций конъюнкции и дизъюнкции.

Обратим внимание на порядок выполнения операций в левой части соотношения (4.45) и правой части соотношения (4.46). В связи с отмеченными ранее приоритетами логических операций в первую очередь в указанных формулах применяется операция конъюнкции, а затем – операция дизъюнкции.

Свойство ассоциативности операций конъюнкции и дизъюнкции позволяет опускать скобки в выражениях, представляющих собой дизъюнкцию или конъюнкцию нескольких высказывательных переменных.

Слайд 112

Для проверки эквивалентностей алгебры высказываний достаточно заполнить таблицы истинности рассматриваемых формул и убедиться в том, что последние столбцы этих таблиц совпадают. Наряду с уже рассмотренными эквивалентностями имеют место эквивалентности (4.47), называемые законами де Моргана. Они устанавливают связь между операциями конъюнкции и дизъюнкции. Заметим, что данные законы допускают обобщение на произвольное конечное число высказывательных переменных.

Обозначим тождественно истинное высказывание заглавной буквой «И», а тождественно ложное высказывание – заглавной буквой «Л». Нетрудно проверить справедливость эквивалентностей (4.48) и (4.49). Законы (4.49) называют законами идемпотентности для операций конъюнкции и дизъюнкции.

Эквивалентность (4.50) выражает закон противоположности. Соотношение (4.51) представляет закон контрапозиции.

Используя эквивалентности, или равносильности, алгебры высказываний, можно от одних формул переходить к другим, им эквивалентным. Преобразования такого вида называются равносильными преобразованиями. Можно показать, что с помощью равносильных преобразований всякая формула приводится к виду, содержащему только знаки операций конъюнкции, дизъюнкции и отрицания.

Слайд 113

Введем понятие двойственной формулы.

Пусть формула F[эф] содержит только знаки операций конъюнкции, дизъюнкции и отрицания. Формула G[жэ] называется двойственной формуле F[эф], если она получена из формулы F[эф] заменой в ней каждого знака операции конъюнкции знаком операции дизъюнкции и каждого знака операции дизъюнкции знаком операции конъюнкции. Обозначение двойственной формулы представлено выражением (4.52). Если формула G[жэ] является двойственной для формулы F[эф], то формула F[эф] является двойственной для формулы G[жэ].

Если формула F[эф] образована из высказывательных переменных X_1, X_2,… , X_n[икс один, икс два и т.д., икс эн] только с помощью операций отрицания, дизъюнкции и конъюнкции, то справедливо соотношение (4.53).

Если формулы F[эф] и G[жэ], образованные из высказывательных переменных X_1, $X2$,… , X_n[икс один, икс два и т.д., икс эн] только с помощью операций отрицания, дизъюнкции и конъюнкции, эквивалентны, то двойственные им формулы также эквивалентны. Это отражено в соотношении (4.54).

Для формулы, представленной равенством (4.55), двойственной является формула (4.56).

Слайд 114

Тема 4.2. Булевы функции. Реализация функций формулами

Булева функция от *n*[эн] аргументов – это отображение *f*[эф] *n*-й [энной] декартовой степени множества *B*[бэ] на множество *B*[бэ], состоящее из двух элементов 0 и 1. Булеву функцию называют также *логической функцией*, или *функцией алгебры логики*. Двухэлементное множество *B*[бэ] называется булевым множеством. Элементы этого множества можно интерпретировать как логические значения «истинно» и «ложно», но стоит отметить, что в общем случае они рассматриваются как формальные символы, не несущие определенного смысла. Неотрицательное целое число *n*[эн] называют арностью, или местностью функции, в случае *n* = 0[эн равного нулю] булева функция превращается в *булеву константу*. Элементы декартова произведения *B*[бэ] в степени *n*[эн] называют *булевыми векторами*.

Как известно, множество *B*[бэ] в степени *n*[эн] содержит 2 в степени *n*[эн] элементов – упорядоченных наборов длины *n*[эн]. Его можно естественным образом упорядочить. Для этого достаточно считать каждый набор двоичным разложением целого числа *k*[ка], которое изменяется от нуля до двух в степени *n*[эн] минус один. При этом мы предполагаем, что число *k*[ка] записано с помощью *n*[эн] двоичных знаков. Упорядочение наборов проводится по числу *k*[ка].

Такое упорядочение называют «скользящей единицей».

Слайд 115

Переменные, принимающие значения из булева множества, называются *булевыми переменными*. Булевы функции и переменные названы по фамилии математика Джорджа Буля.

Для задания булевой функции можно использовать таблицу ее значений, которую принято называть таблицей истинности.

Две функции от одних и тех же переменных будут *равными*, если их таблицы истинности совпадают.

Если последовательность наборов множества B[бэ] в степени n[эн] упорядочить, то это позволит определять булеву функцию только последним столбцом, который для экономии места часто записывают в строчку. Пример записи функции трех переменных приведен в формуле (4.57).

Общее число функций от n[эн] переменных можно вычислить по правилу произведения. В каждой строке таблицы истинности такой функции можно поставить два значения – нуль или один, а общее количество строк в таблице равно двум в степени n[эн]. Таким образом, теоретически количество всех функций от n[эн] переменных выражается числом 2 в степени 2 в степени n[эн]. Но некоторые из них являются по существу функциями меньшего числа переменных, а две – вообще константами. Отметим, что все функции n[эн] переменных так же, как и наборы из нулей и единиц, можно занумеровать по принципу «скользящей единицы».

Слайд 116

Познакомимся с понятиями фиктивной и существенной переменных булевой функции.

На слайде представлено определение соседних по i-той[итой] переменной наборов. Как видно из определения, эти наборы отличаются только значениями i-той[итой] переменной, все остальные переменные принимают одинаковые значения. На основе данного определения вводится понятие фиктивной переменной.

Переменная x_i[икс итое] называется *фиктивной переменной* булевой функции f[эф], если для всех пар соседних по этой переменной наборов функция принимает одинаковые значения на обоих элементах пары. Переменная x_i[икс итое] называется *существенной переменной* булевой функции f[эф], если найдется хотя бы одна пара соседних по данной переменной наборов, на которых функция принимает различные значения.

Функции f_1[эф один] и f_2[эф два] называются *равными*, если функцию f_2[эф два] можно получить из f_1[эф один] путем введения или удаления фиктивных переменных.

Слайд 117

Покажем на примере, как определять, какие переменные у функции являются существенными, а какие – фиктивными.

Обратимся к функции, представленной на слайде. Рассмотрим сначала переменную x[икс]. Наборами, соседними по этой переменной, будут первый и пятый, второй и шестой, третий и седьмой, четвертый и восьмой. Сравним значения функции на указанных наборах. Мы видим, что уже на элементах первой пары значения функции разные, следовательно, переменная x[икс] – существенная.

Для переменной y[игрек] соседними будут наборы первый и третий, второй и четвертый, пятый и седьмой, шестой и восьмой. На элементах всех этих пар значения функции одинаковые, а значит, переменная y[игрек] фиктивная.

Перейдем к переменной z[зет]. Соседними по ней будут наборы первый и второй, третий и четвертый, пятый и шестой, седьмой и восьмой. Рассматривая первую пару, видим, что значения функции на ее элементах различны. Поэтому переменная z[зет] – существенная.

Слайд 118

Рассмотрим основные функции дискретной математики.

Сначала обратимся к функциям одной переменной. Согласно приведенной ранее формуле их количество равно двум во второй степени, т. е. четырем. Пронумеруем эти функции естественным образом и поместим их значения в таблицу.

Анализируя таблицу, мы видим, что функции f_0[эф нулевое] и f_3[эф третье] являются постоянными, т. е. эти две функции не зависят от x[икс]. Другими словами, переменная x[икс] является в данном случае фиктивной.

Функция f_0[эф нулевое] представляет собой тождественный нуль, а функция f_3[эф третье] – тождественную единицу. Функция f_1[эф первое] совпадает с переменной x[икс], т. е. она не меняет аргумента. Переменная x[икс] здесь – существенная. Так же обстоит дело и с функцией f_2[эф второе]. Она принимает значения, противоположные значениям аргумента, и называется отрицанием.

Перейдем к рассмотрению булевых функций двух переменных. Число всех таких функций равно двум в четвертой степени, то есть шестнадцати. Пронумеруем их по принципу «скользящей единицы» и внесем значения этих функций в таблицу.

Функции f_0[эф нулевое] и f_{15}[эф пятнадцатое] являются константами. Первая из них – тождественный ноль, вторая – тождественная единица. Функции f_3, f_5, f_{10}, f_{12}[эф третье эф пятое эф десятое и эф двенадцатое] являются по существу функциями одной переменной. Первая из них совпадает с x[икс], вторая – с y[игрек], третья представляет собой отрицание y[игрек], последняя – отрицание x[икс]. Для функций f_3[эф третье] и f_{12}[эф двенадцатое] переменная y[игрек] является фиктивной. Для функций f_5[эф пятое] и f_{10}[эф десятое] фиктивной переменной является x[икс].

Наиболее важные функции двух переменных имеют специальные названия и обозначения.

Слайд 119

Остановимся более подробно на семи важнейших функциях алгебры логики.

Начнем с функции, называемой конъюнкцией. В приведенной ранее таблице это функция f_1[эф первое]. Заметим, что вычисление значений этой функции осуществляется по обычным правилам умножения двоичной арифметики. Конъюнкция принимает значение один в том и только в том случае, когда оба ее аргумента принимают значение один. Эту функцию называют по-другому функцией «и». На слайде приведены три возможных ее обозначения.

Следующая функция называется дизъюнкцией. В сводной таблице функций двух переменных она имеет седьмой номер. Эта функция принимает значение ноль тогда и только тогда, когда оба ее аргумента принимают значение ноль. Другое название данной функции – функция «или». Ее обозначение представлено на слайде.

Обратимся к функции, имеющей в сводной таблице тринадцатый номер. Она называется импликацией, или следованием, читается «из x[икс] следует y[игрек]». Импликация принимает значение ноль в том и только в том случае, когда ее первый аргумент принимает значение один, а второй – значение ноль. Другими словами, по определению мы считаем, что из истины не может следовать ложь. На слайде представлены два возможных обозначения данной функции.

Теперь рассмотрим функцию f_9[эф девятое]. Она называется эквивалентностью, или подобием, читается «x[икс] эквивалентно y[игрек]». Данная функция принимает значение один тогда и только тогда, когда оба ее аргумента принимают одинаковые значения. Еще одно название этой функции – биимпликация. На практике используются два различных обозначения данной функции, которые приведены на слайде.

Слайд 120

Обратимся к функции f_6[эф шестое]. Она называется сложением по модулю два. Данная функция принимает значение один в том и только в том случае, когда ее аргументы принимают различные значения. По значениям этой функции видно, что она представляет собой отрицание эквивалентности. Обозначение данной функции приведено на слайде.

Перейдем к рассмотрению функции f_{14}[эф четырнадцатое]. Ее называют штрихом Шеффера. Данная функция принимает значение ноль тогда и только тогда, когда оба ее аргумента принимают значение один. По существу она представляет собой отрицание конъюнкции. Поэтому иногда эту функцию называют «не и». Ее обозначение представлено на слайде.

Функцию f_8[эф восьмое] называют стрелкой Пирса, или штрихом Лукасевича. Она принимает значение один в том и только в том случае, когда оба ее аргумента принимают значение ноль. Эта функция является отрицанием дизъюнкции, поэтому иногда ее называют «не или».

Три оставшиеся функции – f_2, f_4 и f_{11}[эф второе, эф четвертое и эф одиннадцатое] – не имеют специальных названий, поскольку не играют особой роли в дискретной математике. Первая из них представляет собой импликацию «из y[игрек] следует x[икс]», две другие являются отрицаниями импликаций.

Слайд 121

На основе введенных выше элементарных функций можно строить формулы, которые, аналогично формулам алгебры высказываний, определяются индуктивно.

Рассмотрим множество M[эм], являющееся подмножеством множества всех булевых функций P_2[пэ два]. Тогда

1) каждая функция из множества M[эм] называется формулой над M[эм];

2) если в формулу из M[эм] вместо каких-то переменных подставить некоторые формулы над M[эм], то полученное выражение также является формулой над M[эм].

Строгая математическая формулировка данного определения представлена на слайде.

Формулы называются *эквивалентными*, если реализуемые ими функции равны.

При записи формул для указания порядка выполнения операций используются скобки. Число скобок в записи формул можно уменьшить, если ввести следующие правила.

Конъюнкция считается самой сильной операцией. При отсутствии скобок она выполняется в первую очередь. Операция дизъюнкции имеет больший приоритет, чем операция импликации. В свою очередь, импликация считается сильнее эквивалентности.

Знак отрицания над формулой играет роль скобок и позволяет не заключать в скобки стоящее под ним выражение.

Одна и та же функция алгебры логики может быть задана различными формулами.

От формульного задания функции всегда можно перейти к ее табличному заданию. И наоборот, если функция задана таблицей, то можно построить формулу, выражающую данную функцию.

Слайд 122

Рассмотрим пример построения таблицы булевой функции, заданной формулой.

Выпишем в таблицу под символами переменных все наборы значений, которые эти переменные принимают, а под символами булевых операций запишем значения функций, соответствующие этим наборам. Ниже символов булевых функций написаны номера столбцов, над которыми производится действие.

Исходя из правил приоритета операций, сначала строим столбец значений функции отрицания, которая принимает значения, противоположные значениям переменной x[икс]. Следующей будет операция конъюнкции, которая дает значение нуль, если хотя бы одна переменная равна нулю. Далее выполняется операция дизъюнкции для четвертого и пятого столбцов. В последнюю очередь выполняется операция импликации, которая и дает значения функции f[эф].

Слайд 123

Рассмотрим еще один пример построения таблицы булевой функции, которая является суперпозицией двух функций от трех переменных.

Распишем полностью таблицу истинности функций f_1 и f_2, чтобы видеть все наборы переменных. Функция h[аш] является функцией двух переменных, поэтому достаточно рассмотреть четыре набора значений для переменных x[икс] и y[игрек].

Рассмотрим первый набор значений переменных для функции h[аш], это будет набор (0, 0)[ноль ноль]. Определяем значение функции f_1 на соответствующем наборе с помощью ее таблицы истинности. Оно равно единице, а значит, набор, на котором требуется вычислить значение функции f_2, есть (0, 0, 1)[ноль ноль один]. Определяем по таблице ее значение на рассматриваемом наборе. Полученное значение единица и является искомым значением функции h[аш].

Проделываем такие же операции для оставшихся трех наборов. На каждом из них функции h[аш] принимает значение 1. Выписываем окончательный результат.

Слайд 124

Рассмотрим основные свойства элементарных функций. Основная их часть уже известна вам из алгебры высказываний. Но здесь добавляются новые свойства, поскольку появились новые функции – сложение по модулю два, штрих Шеффера и стрелка Пирса.

Как видно на слайде, свойством идемпотентности обладают только операции конъюнкции и дизъюнкции. Свойством коммутативности, помимо операций конъюнкции и дизъюнкции, обладают еще четыре операции – сложение по модулю два, эквивалентность, штрих Шеффера и стрелка Пирса. Из семи важнейших булевых функций данное свойство не присуще только импликации. Свойством ассоциативности обладают четыре операции – конъюнкция, дизъюнкция, сложение по модулю два и эквивалентность.

Свойство ассоциативности позволяет не ставить скобки в выражениях, представляющих собой конъюнкцию или дизъюнкцию нескольких булевых переменных. То же самое касается суммы по модулю два и эквивалентности.

Конъюнкция обладает свойством дистрибутивности относительно дизъюнкции и сложения по модулю два. Дизъюнкция обладает свойством дистрибутивности относительно конъюнкции. На слайде представлены формульные выражения указанных свойств.

Свойство инволюции состоит в том, что двукратное применение операции отрицания к переменной x[икс] приводит снова к переменной x[икс]. Законы де Моргана устанавливают связь между операциями дизъюнкции и конъюнкции.

Все перечисленные здесь равенства доказываются с помощью определений соответствующих функций и их таблиц истинности. Обоснуем, например, свойство 4а. Левая часть равенства обращается в единицу только тогда, когда по крайней мере две переменные принимают значение один. То же самое можно сказать и про правую часть равенства. Таким образом, функции, задаваемые формулами в левой и правой частях рассматриваемого равенства, совпадают.

Слайд 125

На данном слайде приводится еще несколько свойств булевых функций. Первый представленный здесь блок свойств можно охарактеризовать как законы действий с нулем и единицей. Исходя из таблицы истинности функции дизъюнкции, можно утверждать, что присутствие нуля в дизъюнкции не играет роли, а появление единицы делает всю дизъюнкцию равной единице. И наоборот, наличие единицы в конъюнкции не играет роли, а присутствие нуля приводит к тому, что вся конъюнкция обращается в ноль. В сумме по модулю два не играет роли наличие нуля, а прибавление единицы изменяет значение выражения на противоположное.

Важное значение имеет третий блок свойств, с помощью которых одна из булевых функций выражается через другие булевы функции.

Представленные на слайде законы склеивания и поглощения доказываются с помощью свойств дистрибутивности.

Отметим, что все перечисленные свойства булевых функций останутся справедливыми, если вместо участвующих в них переменных подставить любые формулы. При этом, естественно, предполагается, что одна и та же переменная всюду заменяется на одну и ту же формулу.

Свойства булевых функций позволяют упрощать формулы.

Слайд 126

Покажем на примере, как свойства булевых функций используются для упрощения формул.

Обратимся к задаче, представленной на слайде. Исходное выражение представляет собой дизъюнкцию пяти элементов. Для ее упрощения на первом этапе применяем закон де Моргана. В результате появляются две одинаковые конъюнкции, и по закону идемпотентности одну из них можно убрать. В получившемся выражении ко второй и четвертой конъюнкциям можно применить закон склеивания. Результатом склеивания является переменная z[зет].

Итак, мы получили дизъюнкцию трех элементов. Теперь ко второму и третьему ее элементам применяем закон дистрибутивности, и во вторых скобках получается единица, которая в конъюнкции не играет роли. Остается еще раз применить закон склеивания.

Отметим, что изложенный способ упрощения данной формулы не является единственно возможным.

Слайд 127

Тема 4.3. Нормальные формы. Понятия тупиковой, минимальной и сокращенной ДНФ. Методы получения сокращенной и минимальной ДНФ

Далее рассмотрим специальные виды булевых функций.

Простой, или элементарной, конъюнкцией называется конъюнкция одной или нескольких переменных, при этом каждая переменная встречается не более одного раза – либо она сама, либо ее отрицание.

Дизъюнктивной нормальной формой, далее ДНФ[дэ эн эф], называется дизъюнкция различных простых конъюнкций.

Совершенной дизъюнктивной нормальной формой, далее СДНФ[эс дэ эн эф], называется такая дизъюнктивная нормальная форма, у которой в каждую конъюнкцию входят все переменные данного списка, либо сами, либо их отрицания, причем в одном и том же порядке.

Если заменить в приведенных выше определениях конъюнкцию на дизъюнкцию, а дизъюнкцию – на конъюнкцию, то получим определения простой дизъюнкции, конъюнктивной нормальной формы и совершенной конъюнктивной нормальной формы. Для двух последних понятий в дальнейшем будут использоваться сокращения КНФ[ка эн эф] и СКНФ[эс ка эн эф].

На слайде представлены примеры функций указанных видов. Третье выражение является дизъюнктивной нормальной формой, но не совершенной, так как первая простая конъюнкция не содержит переменные y[игрек] и z[зет], а вторая – переменную x[икс].

Для перехода от КНФ[ка эн эф] к ДНФ[дэ эн эф] или наоборот используются законы дистрибутивности.

Слайд 128

Остановимся на задачах перехода от одной нормальной формы к другой.

Пусть нам нужно осуществить переход от ДНФ[дэ эн эф] к СДНФ[эс дэ эн эф]. Так как нам дана нормальная форма, не являющая совершенной, то в некоторой конъюнкции не хватает переменной и необходимо ее добавить. Для этого в конъюнкцию добавляем единицу в соответствии с законами нуля и единицы. Добавленную единицу представляем в виде дизъюнкции переменной и ее отрицания. После этого применяем закон дистрибутивности. В конце преобразований при необходимости применяем закон идемпотентности.

Аналогично, для перехода от КНФ к СКНФ в неполную дизъюнкцию добавляем нуль, который представляем в виде конъюнкции переменной и ее отрицания. Применяя законы дистрибутивности и идемпотентности, получаем окончательный результат.

Всякую отличную от нуля функцию можно представить в виде СДНФ с помощью ее таблицы истинности. Для этого нужно взять наборы, для которых функция принимает значение один, и составить по ним простые конъюнкции по следующему правилу. Если итая переменная равна нулю, то включаем ее в конъюнкцию с отрицанием. Если итая переменная принимает значение один, то включаем ее в простую конъюнкцию. Составляя дизъюнкцию этих простых конъюнкций, придем к СДНФ.

Аналогично, с помощью таблицы истинности можно для любой отличной от единицы функции составить ее СКНФ. В этом случае нам понадобятся наборы значений переменных, на которых функция принимает нулевое значение, причем если переменная принимает значение один, то записываем ее с отрицанием, в противном случае – без отрицания.

Таким образом, любую логическую функцию можно выразить через три логические функции – конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание. Приведенные правила позволяют для любой таблично заданной функции написать ее формулу. На практике часто возникает необходимость получить вместо СДНФ как можно более «короткую» ДНФ.

Слайд 129

Словам «короткая дизъюнктивная нормальная форма» можно придать разный смысл.

Элементарная конъюнкция E[е] называется *импликантой* булевой функции f[эф], если импликация «из E[е] следует f[эф]» тождественно равна единице. Исходя из определения импликации, получаем, что если на некотором наборе значений переменных функция *f*[эф] принимает значение один, то и импликация на этом наборе принимает значение один.

Определение простой импликанты булевой функции представлено на слайде. Здесь же приведено определение ядровой импликанты.

Сокращенной дизъюнктивной нормальной формой называется ДНФ, состоящая из всех простых импликант данной булевой функции.

Тупиковой дизъюнктивной нормальной формой функции называется такая ее ДНФ, состоящая из простых импликант, что удаление из нее любой конъюнкции нарушает равносильность ДНФ данной функции. Другими словами, в тупиковую ДНФ входят только ядровые импликанты.

Минимальная дизъюнктивная нормальная форма данной функции – это ДНФ, имеющая наименьшее число символов переменных из всех ДНФ, задающих функцию.

Сложностью дизъюнктивной нормальной формы называется количество символов переменных, использованных при записи формулы.

Для получения сокращенной дизъюнктивной нормальной формы из совершенной дизъюнктивной нормальной формы можно последовательно использовать формулы склеивания, пока это возможно.

Слайд 130

Рассмотрим пример получения сокращенной, а затем минимальной ДНФ.

Обратимся к функции, представленной на слайде. Сначала запишем ее совершенную дизъюнктивную нормальную форму. Как было сказано ранее, для этого берем наборы, обращающие функцию в единицу. Такие наборы называются единичными. В данном случае их десять. Для каждого набора составляем элементарные конъюнкции по приведенному ранее правилу. Те переменные, которые принимают нулевое значение, записываются со знаком отрицания.

Первым подходящим набором является набор из четырех нулей. Ему соответствует конъюнкция $\bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{t}$ [не икс, не игрек, не зет, не тэ]. Следующий набор – 0-0-0-1[ноль, ноль, ноль, один], ему соответствует конъюнкция $\bar{x}\bar{y}\bar{z}t$ [не икс, не игрек, не зет, тэ]. Аналогичным образом записываем простые конъюнкции для остальных наборов. Дизъюнкция составленных простых конъюнкций дает совершенную дизъюнктивную нормальную форму.

Построим также совершенную конъюнктивою нормальную форму. Как мы говорили ранее, для этого берем нулевые наборы функции, т. е. наборы, на которых функция принимает значение нуль. Таких наборов у данной функции шесть. Для каждого такого набора записываем элементарную дизъюнкцию, которая, исходя из определения совершенной формы, будет содержать все четыре переменные. Если переменная принимает значение один, то записываем ее с отрицанием.

Таким образом, первый нулевой набор – это набор 0-0-1-0[нуль, нуль, один, нуль]. Ему соответствует элементарная дизъюнкция $x \vee y \vee \bar{z} \vee t$[икс дизъюнкция игрек дизъюнкция не зет дизъюнкция тэ]. Аналогично составляем элементарные дизъюнкции для оставшихся пяти нулевых наборов. Конъюнкция этих элементарных дизъюнкций дает нам совершенную конъюнктивную форму.

Слайд 131

Основным методом минимизации логических функций, представленных в виде совершенных форм, является операция попарного неполного склеивания и элементарного поглощения. Операция попарного склеивания осуществляется между двумя термами – членами, содержащими одинаковые переменные, вхождения которых – прямые и инверсные, совпадают для всех переменных, кроме одной. В этом случае все переменные, кроме одной, можно вынести за скобки, а оставшиеся в скобках прямое и инверсное вхождение одной переменной подвергнуть склейке.

Теперь получим сокращенную ДНФ из построенной СДНФ с помощью законов склеивания.

Для более короткой записи и наглядности вместо символов переменных будем работать только с их значениями. Поскольку закон склеивания можно применять только к простым конъюнкциям, отличающимся одной переменной, склеивать можно наборы, различающиеся только одной позицией. Поэтому, выписывая единичные наборы данной булевой функции в таблицу, будем разбивать их на группы в соответствии с количеством единиц в наборах. В первую группу берем набор без единиц, во вторую – наборы с одной единицей, в третью – с двумя единицами, в четвертую – с тремя единицами, в пятую – с четырьмя единицами. Некоторые группы могут быть пустыми. Теперь для применения формулы склеивания достаточно просмотреть все возможные пары наборов, входящих в соседние группы.

В первой полосе таблицы поместим исходные единичные наборы функции. Каждый набор из первой группы проверим на возможность склеивания с каждым набором из второй группы. Затем каждый набор из второй группы проверим на возможность склеивания с каждым набором из третьей группы и т. д. Наборы, которые участвовали в склеивании, отметим крестиком. Во второй полосе таблицы поместим результаты склеивания наборов из первой полосы. Далее аналогичным образом проводим склеивание наборов из второй полосы, записывая результаты в третью полосу, и т. д. После того как процедура склеивания будет завершена, все простые импликанты, находящиеся в таблице, не будут помечены крестиком. Выписав эти импликанты, мы получим сокращенную ДНФ.

Слайд 132

Так как склеивание проводилось максимально возможное количество раз, то некоторые импликанты могут быть излишними. Для того чтобы получить минимальную дизъюнктивную нормальную форму из сокращенной

ДНФ, будем использовать следующую таблицу, называемую матрицей Квайна. Ее строки – это исходные единичные наборы функции, столбцы – простые импликанты. На пересечении строки и столбца ставится единица, если значение импликанты на данном наборе равно единице.

Нам необходимо выбрать минимальное количество столбцов так, чтобы они обеспечили единицу в каждой строке. Анализ начинаем с тех строк, в которых одна единица, например, с пятой строки. Выделяем эту единицу, и первая импликанта будет ядровой, затем выделяем все единицы первого столбца. Следующей берем восьмую строку, в которой также одна единица, и четвертая импликанта будет ядровой. Затем рассматриваем последнюю строку и отбираем пятую импликанту. В результате неотмеченной осталась только первая строка, в которой две единицы. Значит, можно взять любую из второй и третьей импликант. В итоге мы получаем две минимальные ДНФ. Они имеют сложность, равную количеству символов переменных в формуле, т. е. сложность девять.

Слайд 133

Рассмотрим еще один способ получения минимальной ДНФ. Он основан на применении *карт Карно́*, позволяющих достаточно просто работать с большими выражениями. Карта Карно́ – графический способ минимизации переключательных булевых функций, обеспечивающий относительную простоту работы с большими выражениями и устранение потенциальных гонок. Представляет собой операции попарного неполного склеивания и элементарного поглощения.

Карта Карно представляет собой перестроенную соответствующим образом таблицу истинности булевой функции. Она может рассматриваться как плоская развертка *n*[эн]-мерного булева куба. Карты Карно́ применяются для минимизации СДНФ и СКНФ.

Карты Карно были изобретены в 1952 Эдвардом Вейчем и усовершенствованы в 1953 Морисом Карно́, физиком из «Bell Labs»[белл лебс], и были призваны помочь упростить цифровые электронные схемы.

В карту Карно наборы значений булевых переменных заносятся из таблицы истинности, при этом они упорядочиваются с помощью кода Грея. В этом коде каждый следующий набор отличается от предыдущего только одной позицией.

Карта Карно для функции *n*[эн] переменных представляет собой таблицу, содержащую две в степени *n*[эн] ячеек. Для этих таблиц следует помнить, что соседними являются клетки, находящиеся в соответственных клетках крайних столбцов и соответственных клетках верхней и нижней строки. Для таблиц 5 и более переменных нужно учитывать также, что квадраты 4x4[четыре на четыре] виртуально находятся друг над другом в третьем измерении, поэтому соответственные клетки двух соседних квадратов 4x4[четыре на четыре] являются соседними, и соответствующие им термы можно склеивать. На слайде представлены карты Карно для функций от трех, четырех и пяти переменных.

Далее будут рассмотрены примеры применения карт Карно для минимизации СДНФ для функций трех и четырех переменных.

Слайд 134

Покажем, как используются карты Карно для минимизации СДНФ для функции трех переменных.

Обратимся к примеру, представленному на слайде. Возьмем шаблон карты Карно для трех переменных и расставим в таблице значения заданной функции. Например, пересечение первой строки и первого столбца дает набор (0, 0, 0)[ноль ноль ноль], и функция на этом наборе принимает значение один.

При отыскании минимальной ДНФ задача состоит в том, чтобы покрыть все единицы прямоугольниками, размеры которых выражаются степенями двойки. Точнее, нас интересуют прямоугольники размеров 2×2[два на два], 1×2[один на два], 1×4[один на четыре] и т. п. Итак, покрываем все единицы прямоугольниками как можно больших размеров, при этом само количество прямоугольников должно быть минимальным.

Теперь необходимо для каждого прямоугольника записать соответствующую импликанту. Начнем с прямоугольника 2×2[два на два], он объединяет две строки, в которых переменная x[икс] принимает разные значения, следовательно, в результате склейки получится конъюнкция, не содержащая x[икс]. Аналогично уходит переменная z[зет], так как в третьем и четвертом столбцах она принимает разные значения. Переменная y[игрек] в этих столбах принимает значение один, а значит, в искомую импликанту будет входить y[игрек].

Найдем импликанту для второго прямоугольника. Во втором и третьем столбцах разные значения принимает переменная y[игрек], поэтому в импликанте она отсутствует, переменная x[икс] принимает значение ноль, а значит, в импликанту переменная x[икс] войдет с отрицанием, переменная z[зет] принимает значение один, она войдет в импликанту без отрицания.

Дизъюнкция двух построенных импликант дает минимальную ДНФ.

Слайд 135

Рассмотрим пример применения карт Карно для минимизации СДНФ для функции четырех переменных.

Обратимся к примеру, представленному на слайде. Возьмем шаблон карты Карно для четырех переменных и разместим в таблице значения функции.

Как отмечалось выше, карты Карно можно рассматривать как плоскую развертку n[эн]-мерного булева куба, поэтому первая и последняя строки считаются соседними, первый и последний столбцы также считаются соседними. Следовательно, единицы, стоящие в угловых ячейках таблицы, можно объединять в один прямоугольник.

Покроем все единицы прямоугольниками. Начнем с единиц, которые стоят в углах таблицы. Им соответствует прямоугольник размера 2×2. Для единицы, стоящей во второй строке и первом столбце, существует только одна возможность для изображения прямоугольника. Незатронутыми остались единицы в третьем столбце, их следует объединить с единицами второго столбца.

В результате у нас получилось три прямоугольника. Для каждого из них необходимо записать импликанту. Первый прямоугольник объединяет первую и четвертую строки, которые отличаются значениями переменной *x*[икс], а переменная *y*[игрек] в этих строках принимает значение нуль. Следовательно, в импликанту войдет *y*[игрек] со знаком отрицания. В то же время этот прямоугольник объединяет первый и последний столбец, которые отличаются значениями переменной *z*[зет], а переменная *t*[тэ] в этих столбцах принимает значение нуль. Значит, в импликанту войдет *t*[тэ] со знаком отрицания.

Второй и третий прямоугольники объединяют первую и вторую строки, которые отличаются значениями переменной *y*[игрек], а переменная *x*[икс] в этих строках принимает значение нуль. Следовательно, в импликанты запишем *x*[икс] под знаком отрицания. Второй прямоугольник, объединяя первый и второй столбец, во вторую импликанту дает *z*[зет] с отрицанием. Анализируя третий прямоугольник, видим, что в соответствующую импликанту войдет переменная *t*[тэ]. Дизъюнкция полученных импликант образует минимальную ДНФ.

Слайд 136

Тема 4.4. Понятие полноты системы булевых функций. Теорема Жегалкина. Замкнутые классы. Теорема о полноте

Система *A*[а] функций алгебры логики называется полной во множестве всех булевых функций, если любую функцию алгебры логики можно выразить формулой над *A*[а]. Другими словами, система полна, если каждую булеву функцию можно задать формулой, в которой задействованы только функции данной системы.

С одной из таких систем мы уже знакомы. Поскольку любую булеву функцию можно выразить через операции дизъюнкции, конъюнкции и отрицания, то система, образованная этими функциями, является полной.

Приведенная лемма позволяет на основе полноты некоторой системы булевых функций доказывать полноту других систем. Для этого достаточно показать, что функции полной системы выражаются через функции второй системы.

Далее будут рассмотрены различные примеры полных систем.

Слайд 137

Рассмотрим примеры доказательств полноты систем функций.

Докажем полноту систем 1–4. Система 1 отличается от известной полной системы тем, что в ней отсутствует операция конъюнкции. Следовательно, для доказательства полноты системы 1 достаточно показать, что конъюнкцию можно выразить через отрицание и дизъюнкцию, а для этого, как известно, используются законы де Моргана.

Аналогично для доказательства полноты системы 2 с помощью законов де Моргана выражаем дизъюнкцию через отрицание и конъюнкцию.

Для доказательства полноты системы 3 используем полную систему 2 и выражаем операции этой системы – конъюнкцию и отрицание – через операцию штрих Шеффера. Справедливость приведенных равенств следует из таблиц истинности соответствующих функций.

Для доказательства полноты системы 4 используем полную систему 2. Поскольку в систему 4 входит конъюнкция, то остается только отрицание выразить через сумму по модулю два и единицу.

Слайд 138

Полином – это синоним слова «многочлен». Полином Жегалкина представляет собой запись булевой функции только с помощью тождественной единицы, операций конъюнкции и сложения по модулю два.

Определение полинома Жегалкина дается с помощью понятия монотонной конъюнкции. Отметим, что частным случаем монотонной конъюнкции является константа один.

Как видно из приведенного на слайде определения, полином Жегалкина представляет собой сумму по модулю два различных монотонных конъюнкций. Частным случаем многочлена Жегалкина является константа ноль.

Поскольку система функций, содержащая конъюнкцию, сумму по модулю два и тождественную единицу, является полной, то всякая булева функция представляется в виде полинома Жегалкина. Более того, можно доказать, что такое представление единственно.

Слайд 139

Рассмотрим методы получения полинома Жегалкина для функций, заданных формулой или таблично. Для нахождения полинома Жегалкина функции, заданной формулой, нужно выразить все встречающиеся в данном выражении булевы функции через сумму по модулю два и конъюнкцию. Затем, пользуясь свойствами функций, максимально упростить полученное выражение.

Обратимся к примеру, представленному на слайде. Исходная функция представляет собой конъюнкцию одной отрицаемой переменной и дизъюнкции. Выполним преобразования, приводящие эту формулу к полиному Жегалкина. Сначала выразим дизъюнкцию через сумму по модулю два. Затем последнее слагаемое в скобках заменим нулем, который в дальнейшем можно отбросить. Далее выразим отрицание через сумму по модулю два и единицу. Затем применим закон дистрибутивности, раскроем скобки и приведем подобные слагаемые. Осталось еще раз применить закон дистрибутивности и получить полином Жегалкина.

Слайд 140

Если булева функция задана с помощью ее таблицы истинности, то существуют два способа построения соответствующего ей полинома Жегалкина. Первый из них основан на использовании совершенной дизъюнктивной нормальной формы данной функции.

Для получения многочлена Жегалкина из СДНФ нужно заменить дизъюнкцию элементарных конъюнкций на сумму по модулю два. В получившемся выражении вместо каждой отрицаемой переменной надо записать сумму по модулю два этой переменной без знака отрицания и единицы. В результате указанных преобразований мы получим формулу, представленную на слайде. Сумма в ней понимается как сумма по модулю два. Суммирование осуществляется по всем наборам, на которых функция равна единице.

Приведенная здесь формула показывает, как устроен полином Жегалкина для функции трех аргументов. Она допускает обобщение на случай любого числа переменных.

Слайд 141

Покажем на примере, как применяется приведенная формула для получения полинома Жегалкина таблично заданной функции.

Обратимся к функции, представленной на слайде. Данная функция на пяти наборах принимает значение, равное единице. Следовательно, при записи полинома Жегалкина в сумме будет пять слагаемых. В скобках к каждой переменной прибавляется отрицание ее значения в соответствующем наборе. Сначала вычисляем отрицания констант и отбрасываем нули в суммах по модулю два. Затем раскрываем скобки, используя закон дистрибутивности. Далее приводим подобные слагаемые. Если одно и то же выражение встречается в сумме четное число раз, то в результате оно пропадает. Если же слагаемое участвует в сумме нечетное число раз, то оно остается в результирующей сумме.

Окончательно получаем многочлен Жегалкина, содержащий пять слагаемых.

Слайд 142

Второй способ получения полинома Жегалкина называется методом неопределенных коэффициентов. Для функции трех переменных существуют восемь различных монотонных конъюнкций. Каждая из них может входить или нет в полином Жегалкина данной функции. Коэффициенты полинома принимают значения нуль или единица, они показывают, входит ли соответствующая конъюнкция в полином Жегалкина данной функции. Для определения коэффициентов используем значения функции на каждом наборе значений переменных.

Возьмем первый набор 0-0-0[ноль ноль ноль], подставим в формулу функции f[эф] вместо переменных их значения, упростим и приравняем полученное выражение значению функции на этом наборе. В результате определяем значение коэффициента a_0[а нулевое].

Проделаем аналогичную операцию для каждого набора, подставляя в получаемые выражения уже найденные коэффициенты. Восемь наборов позволяют однозначно определить восемь неизвестных коэффициентов. Подставляя их в формулу функции f[эф], получаем окончательный ответ.

Слайд 143

Важным понятием теории булевых функций является понятие замкнутого класса. Оно определяется с помощью операции замыкания.

Пусть A[а] – произвольная система функций алгебры логики. Замыканием множества A[а] называется совокупность всех булевых функций, которые можно задать с помощью функций данного множества. Обозначение операции замыкания приведено на слайде.

Отметим основные свойства операции замыкания.

Суть первого свойства заключается в том, что всякое множество является частью своего замыкания. Данное свойство вытекает непосредственно из определения операции замыкания.

Второе свойство – это свойство монотонности. Оно говорит о том, что если множество B[бэ] является частью множества A[а], то и замыкание B[бэ] содержится в замыкании A[а].

Смысл третьего свойства в том, что повторное применение операции замыкания к множеству A[а] не выводит за пределы замыкания A[а].

Слайд 144

Используя понятие замыкания, можно другим способом записать определение полной системы. Мы говорили, что система является полной, если любая булева функция выражается с помощью функций этой системы. Но множество функций, выражаемых с помощью функций данной системы, есть замыкание этой системы. Получаем, что если замыкание системы A[а] совпадает с множеством всех булевых функций, то система полная.

Если же замыкание класса совпадает с самим классом, то такой класс называется замкнутым. Рассмотрим примеры замкнутых классов.

Одним из замкнутых классов является класс функций, сохраняющих нуль. Он обозначается T_0[тэ нулевое]. Функции этого класса на наборе, состоящем из одних нулей, принимают значение нуль. Любая суперпозиция функций данного класса дает функцию, принимающую значение нуль на наборе, состоящем из одних нулей. Это говорит о замкнутости класса.

Аналогично определяется класс функций, сохраняющих единицу.

Слайд 145

Еще одним примером замкнутого класса является класс линейных функций, который обозначается через L[эль]. В класс линейных функций входят функции, полином Жегалкина которых не содержит конъюнкций. Можно провести аналогию с понятием линейной функции, известной нам из курса математического анализа. У линейной функции все переменные имеют степень не больше первой.

Для доказательства того, что функция является линейной, нужно построить ее полином Жегалкина и убедиться в том, что степень полученного полинома не больше первой.

Рассмотрим пример проверки функции на линейность.

Обратимся к функции, представленной на слайде. Сначала упростим выражение, склеивая первую конъюнкцию с третьей, а вторую – с четвертой. Затем заменим операцию дизъюнкции на сумму по модулю два. Выразим отрицание через сумму по модулю два и единицу, раскроем скобки, приведем подобные слагаемые. В результате получим полином Жегалкина, который не содержит конъюнкций, а следовательно, функция является линейной.

Слайд 146

Во многих задачах используется функция, двойственная к заданной булевой функции. Если исходная функция выражается формулой, содержащей переменные x_1[икс один], x_2[икс два] и т. д., x_n[икс эн], то для получения двойственной функции нужно поставить знак отрицания над каждой переменной и над всей формулой. Обозначение и формульное определение двойственной функции представлены на слайде.

Функция алгебры логики называется самодвойственной, если она совпадает с двойственной к ней функцией. Другими словами, самодвойственная функция на противоположных наборах значений переменных принимает противоположные значения. Множество всех самодвойственных функций обозначается буквой S[эс]. Класс, образованный самодвойственными функциями, дает нам еще один пример замкнутого класса.

На слайде представлены примеры функций, принадлежащих классу S[эс], и функций, не являющихся самодвойственными.

Слайд 147

Покажем на примере, как определяется двойственная функция для данной функции. Согласно определению для нахождения значения двойственной функции на некотором наборе надо взять противоположный набор и отрицание значения исходной функции на этом наборе.

Первый набор – 0-0-0[ноль ноль ноль], противоположный к нему – 1-1-1[один один один], значение исходной функции на нем равно единице, значит, двойственная функция на первом наборе принимает значение нуль.

Для набора 0-0-1[ноль ноль один] противоположным является набор 1-1-0[один один ноль]. Функция *f*[эф] на этом наборе принимает значение ноль. Следовательно, значение двойственной функции на наборе 0-0-1[ноль ноль один] равно единице.

Аналогичными рассуждениями найдем все значения двойственной функции. Отметим, что противоположными будут первый набор с восьмым, второй – с седьмым, третий – с шестым, четвертый – с пятым.

Слайд 148

Из алгоритма нахождения двойственной функции мы получаем алгоритм проверки функции на самодвойственность.

Функция является самодвойственной, если она принимает противоположные значения на противоположных наборах.

Обратимся к примеру, представленному на слайде. Запишем значения функции *f*[эф] в виде вектор-строки. Соединим линиями значения, принимаемые данной функцией на противоположных наборах. Если на первой позиции стоит ноль, то на восьмом месте должна быть единица. Вторую позицию занимает единица, значит, седьмым должен быть ноль. Третье по счету значение функции нулевое, следовательно, на шестом месте должна стоять единица. Четвертую позицию занимает единица, значит, следующим должен быть ноль. Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что все необходимые требования выполняются. Итак, *f*[эф] – самодвойственная функция.

Слайд 149

Последним замкнутым классом, который мы рассмотрим, является класс монотонных функций. Он обозначается буквой *M*[эм].

Понятие монотонно возрастающей функции нам известно из математического анализа: функция монотонно возрастает, если с увеличением аргумента значение функции не убывает.

Так как булевы функции заданы на множестве наборов значений переменных, прежде чем дать определение монотонной функции, мы должны определить операцию сравнения наборов. Говорят, что набор альфа предшествует набору бета, если на каждой позиции набора альфа значение не больше значения на той же позиции в наборе бета.

Существуют наборы, к которым неприменимо отношение упорядоченности, определенное выше. Например, наборы 0-0-1[ноль ноль один] и 0-1-0[ноль один ноль] не сравнимы.

Определение монотонной функции представлено на слайде.

Слайд 150

Для проверки монотонности функции можно воспользоваться ее таблицей истинности. Стоит отметить, что набор 0-0-0[ноль ноль ноль] сравним со всеми наборами и является предшествующим для них, для набора 1-1-1[один один один] все другие наборы являются предшествующими. Поэтому на наборе 0-0-0[ноль ноль ноль] монотонная непостоянная функция принимает значение нуль, а на наборе 1-1-1[один один один] – значение единица. Т. е. монотонная функция, не являющаяся константой, принадлежит классу функций, сохраняющих нуль, и классу функций, сохраняющих единицу.

Обратимся к примеру, представленному на слайде. Проверим, является ли данная функция монотонной. Условие, которое было описано выше, выполняется. Проанализируем значения функции на других наборах. При этом нас не будут интересовать наборы, на которых функция принимает нулевое значение. Так как в этом случае на всех последующих наборах функция принимает значение, большее или равное данному. Возьмем второй набор 0-0-1[ноль ноль один], функция на нем равна единице, следовательно, на всех последующих для него наборах функция должна принимать то же значение. Последующими для второго набора будут наборы 0-1-1[ноль один один], 1-0-1[один ноль один] и 1-1-1[один один один], на каждом из них функция равна единице.

Далее рассматриваем четвертый набор 0-1-1[ноль один один], для него последующим является только восьмой набор 1-1-1[один один один], то же касается и шестого набора 1-0-1[один ноль один]. Мы видим, что для всех пар сравнимых наборов значение функции на большем наборе больше или равно значения функции на меньшем наборе. Следовательно, функция является монотонной.

Слайд 151

Рассмотрим задачу построения булевых функций с требуемыми свойствами.

Обратимся к примеру, представленному на слайде. Требуется построить монотонную функцию f[эф], линейную функцию g[жэ] и самодвойственную функцию h[аш]. Доопределим функцию f[эф], используя определение монотонной функции. На наборе 1-1-0[один один ноль] функция принимает значение 0. Этому набору предшествуют наборы 0-0-0[ноль ноль ноль] и 1-0-0[один ноль ноль]. Значит, на них функция должна принимать значение ноль.

На наборе 0-0-1[ноль ноль один] функция обращается в единицу. Этот набор предшествует наборам 1-0-1[один ноль один] и 1-1-1[один один один]. Следовательно, на указанных наборах функция должна принимать значение один.

Таким образом, функция с требуемым свойством построена.

Слайд 152

Перейдем к построению функции g[жэ]. По условию задачи она должна быть линейной. Согласно определению линейной функции ее полином Жегалкина может содержать только линейные слагаемые. Нам известны значения функции на четырех наборах значений переменных. Это позволяет нам записать четыре уравнения с четырьмя неизвестными. Указанные уравнения представлены на слайде.

Сравнивая первое и четвертое уравнения, получаем, что a_1[а первое] равно единице. Подставляем найденное значение в третье уравнение и, сопоставляя полученный результат с первым уравнением, делаем вывод, что a_3[а третье] равно единице. Найденные коэффициенты позволяют нам из второго и третьего уравнений определить оставшиеся два коэффициента. Мы получаем, что a_0[а нулевое] и a_2[а второе] равны нулю.

Теперь мы можем записать выражение для функции g[жэ] и найти недостающие значения функции.

Слайд 153

Теперь нам осталось доопределить функцию h[аш] так, чтобы она была самодвойственной. Самодвойственная функция на противоположных наборах значений переменных должна принимать противоположные значения. В таблице истинности функции h[аш] соединим линиями противоположные наборы. На наборе 0-0-0[ноль ноль ноль] функция принимает значение один. Значит, на наборе 1-1-1[один один один] она должна обращаться в ноль. На наборе 0-1-0[ноль один ноль] значение функции также равно единице. Следовательно, на противоположном ему наборе 1-0-1[один ноль один] она обязана принимать нулевое значение. На наборе 0-1-1[ноль один один] функция обращается в ноль. Значит, на наборе 1-0-0[один ноль ноль] она принимает значение один. На наборе 1-1-0[один

один ноль] значение функции равно единице. Следовательно, на наборе 0-0-1[ноль ноль один] она обращается в ноль.

Итак, мы определили все значения функции *h*[аш], а значит, задача решена.

Слайд 154

Мы рассмотрели пять замкнутых классов функций алгебры логики. Вспомним, что это классы линейных, монотонных, самодвойственных функций, функций, сохраняющих ноль, и функций, сохраняющих единицу. Указанные классы функций называются классами По́ста. С помощью функций этих классов определяется полнота некоторой системы *A*[а] булевых функций. Для полноты системы *A*[а] необходимо и достаточно, чтобы для каждого класса По́ста в ней нашлась хотя бы одна функция, не принадлежащая этому классу.

Система *A*[а], состоящая из конъюнкции, дизъюнкции и отрицания, является полной по теореме По́ста. В самом деле, функция отрицания не сохраняет ноль и единицу и не является монотонной функцией. Конъюнкция не является ни линейной, ни самодвойственной функцией. Дизъюнкция также не принадлежит классу самодвойственных функций. Все это позволяет сделать вывод о полноте рассматриваемой системы.

Слайд 155

Рассмотрим пример, представленный на слайде. Если система функций является полной, то с помощью этой системы можно выразить любую булеву функцию, в том числе и функцию *g*[жэ]

В нашем случае система состоит из одной функции *f*[эф]. Согласно теореме Поста проверим *f*[эф] на принадлежность классам Поста. Мы видим, что эта функция не принадлежит классам T_0, T_1, *M* и *S*[тэ нулевое, тэ первое, эм и эс].

Для проверки на принадлежность классу L[эль] построим полином Жегалкина. Так как в полиноме Жегалкина функции f[эф] присутствуют конъюнкции, то $f \notin$ L[эф не принадлежит классу L].

Таким образом, функция f[эф] не принадлежит ни одному из классов Поста. Значит, данная система является функционально полной и с помощью суперпозиций из f[эф] можно получить любую булеву функцию, в частности, функцию g[жэ].

Слайд 156

Тема 5.1. Понятие предиката. Логические и кванторные операции над предикатами. Формулы логики предикатов

Для анализа многих математических рассуждений важна структура высказываний, а также их содержание. Поэтому для получения заключений в научных исследованиях очень часто средств алгебры высказываний недостаточно.

Рассмотрим, например, следующие предложения.

1. Из дифференцируемости функции следует непрерывность.
2. Показательная функция является дифференцируемой функцией.
3. Показательная функция является непрерывной функцией.

Ясно, что из первых двух предложений следует третье, но даже такое простое утверждение на языке алгебры высказываний невозможно доказать. Символика алгебры высказываний недостаточна для выражения существенных связей между предложениями.

Алгебра предикатов обладает более широкими возможностями, она позволяет строить формализованную теорию и включает в себя алгебру высказываний как частный случай.

Рассмотрим непустое множество M[эм]. Выражение, содержащее n[эн] переменных и обращающееся в высказывание при замене переменных элементами множества M[эм], называется n[эн]-местным предикатом на множестве *M*[эм]. Формула (5.1) задает обозначение *n*[эн]-местного предиката. Высказывание будем считать 0[нуль]-местным предикатом.

Переменные в алгебре предикатов называются предметными переменными.

Рассмотрим примеры. Формула (5.2) – высказывание или 0[нуль]-местный предикат. Формула (5.3) – 1-местный предикат на множестве натуральных чисел. Формула (5.4) – 2-местный предикат на множестве действительных чисел. Формула (5.5) – 3-местный предикат на множестве действительных чисел. Формула (5.6) – *n*[эн]-местный предикат на множестве действительных чисел.

Слайд 157

На предикаты переносятся все логические операции, которые выполняются над высказываниями: отрицание, дизъюнкция, конъюнкция, импликация, эквиваленция. Но, в отличие от высказываний, для предикатов определены еще две операции, называемые операциями квантификации, или навешивания кванторов. Различают два вида кванторов – квантор общности и квантор существования.

Квантор общности, стоящий перед предикатом, вместе с самим предикатом читается: «Для всех *x*[икс] имеет место *P(x)*[пэ от икс]». Соответствующая запись представлена формулой (5.7).

Квантор существования, стоящий перед предикатом, вместе с самим предикатом читается: «Существует *x*[икс], для которого имеет место *P(x)*[пэ от икс]». Соответствующая запись представлена формулой (5.8).

Пусть все переменные пробегают множество действительных чисел.

Формула (5.9) читается следующим образом: «Для любого действительного числа *x*[икс] найдется действительное число *y*[игрек], такое, что сумма чисел *x*[икс] и *y*[игрек] будет равна 25».

Утверждение, задаваемое формулой (5.10), можно выразить словами: «Найдется действительное число *y*[игрек] такое, что сумма любого действительного числа *x*[икс] и числа *y*[игрек] будет равна 25».

В формулах (5.9) и (5.10) навешивание кванторов привело к тому, что двуместные предикаты превратились в высказывания, то есть 0[нуль]-местные предикаты. Если применить квантор к n[эн]-местному предикату, то получится $(n-1)$[эн минус один]-местный предикат. Переменную, к которой относится квантор, называют связанной. Остальные переменные называются свободными.

Слайд 158

Приведем примеры записей на языке алгебры предикатов. Рассмотрим одноместные предикаты, представленные на слайде.

Предикат $N(x)$[эн от икс] выражает свойство числа x[икс] быть натуральным. Предикат $R(x)$[эр от икс] выражает свойство числа x[икс] быть действительным.

Из предикатов $N(x)$[эн от икс] и $R(x)$[эр от икс] путем навешивания кванторов составим высказывания, полученные высказывания запишем на языке алгебры предикатов.

Высказывание «Все натуральные числа – действительные» представлено формулой (5.11).

Высказывание «Ни одно натуральное число не является действительным» представлено формулой (5.12).

Высказывание «Некоторые натуральные числа действительные» представлено формулой (5.13).

Слайд 159

Предикат называется выполнимым, если при некоторой подстановке вместо переменных конкретных элементов из соответствующих множеств он обращается в истинное высказывание.

Предикат называется опровержимым, если при некоторой подстановке вместо переменных конкретных элементов из соответствующих множеств он обращается в ложное высказывание.

Множество, на котором предикат обращается в истинное высказывание, называется множеством истинности предиката.

Рассмотрим примеры.

Предикат «Для любого x[икс] сумма x[икс] и y[игрек] равна 25» является выполнимым предикатом при $y = 25 - x$[игрек равном 25 минус икс]. Данный предикат представлен формулой (5.14). Множество истинности предиката (5.14) описывается формулой (5.15). Одновременно этот же предикат является опровержимым при y[игрек], не равном $25 - x$[25 минус икс]. Данная ситуация описывается формулой (5.16).

Предикат называется тождественно истинным, если при любой подстановке вместо переменных конкретных элементов из соответствующих множеств он превращается в истинное высказывание.

Предикат (5.17), заданный на множестве действительных чисел, является тождественно истинным, так как высказывание «Для любого числа x[икс] найдется число y[игрек] такое, что сумма x[икс] и y[игрек] будет равна 25» истинно.

Предикат называется тождественно ложным, если при любой подстановке вместо переменных конкретных элементов из соответствующих множеств он превращается в ложное высказывание.

Предикат (5.18), заданный на множестве действительных чисел, является тождественно ложным, так как высказывание «Существует число y[игрек] такое, что какое бы число x[икс] мы ни взяли, сумма x[икс] и y[игрек] будет равна 25» ложно.

Слайд 160

На слайде приведены примеры предикатов, заданных на конечном множестве M[эм], и перечислены их множества истинности. Для пунктов «а – г» запись множества истинности очевидна.

Разберем пункт «д». Дана импликация двух предикатов, импликация принимает ложное значение на наборе (1,0) [один ноль], поэтому из множества M[эм] исключаем четные числа, не являющиеся квадратами натуральных чисел, это 2, 6, 8, 10, 12, 14, 18, 20. Остальные числа из M[эм] образуют множество истинности предиката.

В пункте «е», рассуждая аналогично, исключаем нечетные числа, являющиеся квадратами натуральных чисел. Это 1 и 9. Остальные числа входят во множество истинности предиката.

В пункте «ж» дана конъюнкция двух предикатов. Число, которое одновременно больше пятнадцати и является делителем числа шестнадцать, есть число шестнадцать.

Слайд 161

Два предиката над одними и теми же множествами называются эквивалентными, если один из них обращается в истинное высказывание на тех и только тех наборах значений переменных, на которых в истинное высказывание обращается другой предикат. Такие предикаты называются также равносильными. На слайде данное определение записано с помощью математических символов.

Рассмотрим примеры. Для заданных пар предикатов выясним, будут ли они равносильны над множествами натуральных, целых, рациональных и действительных чисел.

Пункт «а». Предикаты P[пэ] и Q[кю] определяются алгебраическими уравнениями. Корнями первого уравнения являются числа, заданные формулой (5.19); корни второго уравнения представлены формулой (5.20). Сравнивая множества корней уравнений, мы видим, что данные предикаты равносильны над множествами натуральных и целых чисел и не являются равносильными над множествами рациональных и действительных чисел.

Слайд 162

Продолжим рассмотрение примеров.

Пункт «б». Равенство, определяющее предикат P[пэ], справедливо на множествах натуральных, целых и рациональных чисел. На множестве действительных чисел оно не является верным, так как знаменатель дроби не определен при значении x[икс], равном арифметическому квадратному корню из трех. Неравенство, определяющее предикат Q[кю], справедливо для всех действительных чисел. Отсюда делаем вывод, что заданные предикаты равносильны над множествами натуральных, целых и рациональных чисел и не являются равносильными над множеством действительных чисел.

Пункт «в». Равенство, определяющее предикат P[пэ], как и неравенство, определяющее предикат Q[кю], справедливо только при $x = 0$[икс равном нулю]. Поэтому данные предикаты равносильны над всеми четырьмя множествами.

Пункт «г». Поскольку арифметический квадратный корень определен только для неотрицательных чисел, данные предикаты равносильны лишь над множеством натуральных чисел.

Пункт «д». Заданные предикаты равносильны над множеством натуральных чисел, так как в этом случае модуль числа совпадает с самим числом. Над другими тремя множествами равносильности нет, поскольку совпадение абсолютных величин двух чисел допускает их противоположность.

Пункт «е». Данные предикаты не являются равносильными ни над одним из четырех множеств, так как, например, пара (1; 3)[один три] удовлетворяет первому неравенству и не удовлетворяет второму.

Слайд 163

Продолжим рассматривать ту же задачу для новых пар предикатов.

Пункт «ж». Ввиду того что логарифм определен только для положительных чисел, данные предикаты равносильны лишь над множеством натуральных чисел.

Пункт «з». В силу свойства показательной функции уравнения определяющие предикаты являются равносильными на множестве действительных чисел. Поэтому рассматриваемые предикаты равносильны над всеми четырьмя множествами.

Пункт «и». Равенство, определяющее первый предикат, справедливо только для положительных чисел, а равенство, задающее второй предикат, верно для всех действительных чисел. Следовательно, данные предикаты равносильны только над множеством натуральных чисел.

Пункт «к». Равенство, определяющее предикат P[пэ], справедливо на множестве положительных действительных чисел, а равенство, задающее предикат Q[кю], верно для всех неотрицательных действительных чисел. Поэтому рассматриваемые предикаты равносильны лишь над множеством натуральных чисел.

Пункт «л». Формулы (5.21) и (5.22) представляют множества корней уравнений, определяющих соответственно первый и второй предикаты. Сравнивая данные множества, мы делаем вывод о том, что данные предикаты равносильны над множествами натуральных и целых чисел и не являются равносильными над множествами рациональных и действительных чисел.

Слайд 164

Пусть P[пэ] и Q[кю] – n[эн]-местные предикаты, заданные над одними и теми же множествами. Предикат Q[кю] называется следствием предиката P[пэ], если он обращается в истинное высказывание на всех тех наборах значений переменных из соответствующих множеств, на которых в истинное высказывание обращается предикат P[пэ]. На слайде данное определение записано с помощью математических символов.

Рассмотрим следующий пример. Для заданных пар предикатов, рассматриваемых на множестве действительных чисел, выясним, будет ли какой-либо из предикатов являться следствием другого.

Пункт «а». Неравенству, определяющему предикат P[пэ], удовлетворяют все числа из интервала $(-3; 3)$ [от минус трех до трех]. Корнями уравнения, задающего предикат Q[кю], являются числа 1 и 2. Таким образом, множество истинности предиката Q[кю] является строгим подмножеством множества истинности предиката P[пэ]. Отсюда вытекает, что P[пэ] является следствием Q[кю], а Q[кю] не является следствием P[пэ].

Слайд 165

Продолжим рассмотрение нашей задачи.

Пункт «б». Уравнение, определяющее первый предикат, имеет корни ± 2[плюс минус два]. Уравнение, задающее второй предикат, не имеет действительных корней. Поэтому первый предикат является следствием второго, а второй предикат не является следствием первого. Стоит отметить, что из тождественно ложного предиката следует любой предикат.

Пункт «в». Неравенству, определяющему предикат P[пэ], удовлетворяют все числа, большие единицы. Корнями уравнения, задающего предикат Q[кю], являются числа 2 и 5. Отсюда вытекает, что P[пэ] является следствием Q[кю], а Q[кю] не является следствием P[пэ].

Пункт «г». Уравнение, определяющее первый предикат, так же, как и уравнение, задающее второй предикат, не имеет действительных корней. Поэтому в данном случае каждый из предикатов является следствием другого.

Пункт «д». Неравенству, определяющему предикат P[пэ], удовлетворяют все числа, которые меньше минус шести или больше единицы. Уравнению, задающему предикат Q[кю], удовлетворяют все действительные числа. Отсюда вытекает, что Q[кю] является следствием P[пэ], а P[пэ] не является следствием Q[кю]. Отметим, что тождественно истинный предикат является следствием любого предиката.

Слайд 166

Продолжим рассматривать ту же задачу для новых пар предикатов.

Пункт «е». Неравенству, определяющему предикат P[пэ], удовлетворяет только число ноль. Оно же является единственным корнем уравнения, задающего предикат Q[кю]. Отсюда вытекает, что каждый из предикатов является следствием другого.

Пункт «ж». Число десять обращает первый предикат в истинное высказывание, а второй – в ложное. Число минус десять, наоборот, обращает первый предикат в ложное высказывание, а второй – в истинное. Таким образом, ни один из предикатов не является следствием другого.

Пункт «з». Неравенству, определяющему предикат P[пэ], удовлетворяют все положительные числа, не превосходящие десяти. Неравенству, задающему предикат Q[кю], удовлетворяют все числа отрезка от одного до десяти. Отсюда вытекает, что P[пэ] является следствием Q[кю], а Q[кю] не является следствием P[пэ].

Слайд 167

Продолжим рассмотрение нашей задачи.

Пункт «и». Предикат P[пэ] определяется уравнением, предикат Q[кю] – неравенством. Очевидно, что множество истинности первого предиката ýже, чем множество истинности второго предиката. Поэтому можно утверждать, что второй предикат является следствием первого, а первый не является следствием второго.

Пункт «к». Предикаты P[пэ] и Q[кю] задаются с помощью неравенств. Множество истинности предиката P[пэ], как и в предыдущем случае, ýже множества истинности предиката Q[кю]. Значит, Q[кю] является следствием P[пэ], а P[пэ] не является следствием Q[кю].

Пункт «л». Корнями уравнения, определяющего первый предикат, являются числа минус два, один и три. Уравнение, задающее второй предикат, имеет корни один и три. Отсюда вытекает, что первый предикат является следствием второго, а второй не является следствием первого.

Слайд 168

Понятие формулы алгебры предикатов вводится аналогично понятию формулы алгебры высказываний. Сначала задается алфавит символов, из которых будут составляться формулы. Мы будем использовать символы предметных переменных – малые буквы латинского алфавита, символы предикатных переменных – заглавные буквы латинского алфавита, символы логических операций, кванторы и вспомогательные символы – скобки и запятую.

Определение формулы алгебры предикатов дается индуктивным образом. Оно представлено на слайде.

Формулы, определенные в пунктах 1 и 2, называются атомарными, или элементарными.

Как и в алгебре высказываний, договоримся внешние скобки у формулы не писать.

Подформулой формулы алгебры предикатов называется всякая ее часть, которая сама является формулой. Если формула образована из предикатных переменных F[эф] и G[жэ] с помощью операций дизъюнкции, конъюнкции, импликации, эквиваленции, то F[эф] и G[жэ] являются подформулами этой формулы.

Формулы, в которых нет свободных предметных переменных, называются замкнутыми, а формулы, содержащие свободные предметные переменные, – открытыми.

Слайд 169

Если в формулу логики предикатов вместо каждой предикатной переменной подставить конкретный предикат, определенный на некотором выбранном множестве M[эм], то формула превратится в конкретный предикат, заданный над множеством M[эм]. При этом если исходная формула была замкнутой, то полученный конкретный предикат оказывается нульместным, т. е. будет высказыванием. Если же исходная формула была открытой, т. е. содержала свободные вхождения предметных переменных, то в результате подстановки получим предикат, зависящий от некоторых предметных переменных. Если теперь подставить вместо этих предметных переменных конкретные предметы из множества M[эм], то полученный предикат, а следовательно, и исходная формула превратятся в конкретное высказывание.

Превращение формулы логики предикатов в высказывание описанным способом, а также само полученное высказывание называется интерпретацией этой формулы на множестве M[эм]. Итак, если формула логики предикатов замкнутая, т. е. не содержит свободных переменных, то ее интерпретация состоит из одного этапа и сводится к подстановке вместо всех предикатных переменных конкретных предикатов.

Если же формула логики предикатов открытая, т. е. содержит ряд свободных переменных, то ее интерпретация состоит из двух этапов. Во-первых, вместо всех предикатных переменных необходимо подставить конкретные предикаты. В результате чего формула превратится в конкретный предикат, зависящий от такого количества предметных переменных, сколько было свободных предметных переменных в исходной формуле. Во-вторых, нужно придать значение каждой предметной переменной, от которой зависит получившийся предикат, в результате чего этот предикат и, значит, исходная формула превратится в конкретное высказывание, истинное или ложное.

Рассмотрим пример, формула (5.23). В первом случае формула превратится в следующее, очевидно ложное высказывание «У каждого мужчины есть сын». Этой же формуле можно дать и другую интерпретацию. Во второй случае исходная формула превратится в очевидно истинное высказывание «Для каждого натурального числа существует большее по сравнению с ним натуральное число».

Слайд 170

Формула алгебры предикатов называется *выполнимой* на множестве M[эм], если при некоторой подстановке вместо предикатных переменных конкретных предикатов, заданных на M[эм], она обращается в выполнимый предикат.

Формула алгебры предикатов называется *опровержимой* на множестве M[эм], если при некоторой подстановке вместо предикатных переменных конкретных предикатов, заданных на M[эм], она обращается в опровержимый предикат.

Другими словами, формула выполнима или опровержима на M[эм], если существует истинная или ложная ее интерпретация на M[эм].

Приведем примеры выполнимых и опровержимых формул.

Рассмотрим формулу (5.24). Она является выполнимой на множестве действительных чисел. Действительно, пусть *P(x, y)*[пэ от икс игрек] – это предикат «$x > y$»[икс больше игрек]. При такой интерпретации формула превращается в истинное высказывание «Для любого действительного числа x[икс] найдется такое действительное число y[игрек], что $x > y$[икс больше игрек]».

В то же время формула (5.24) является опровержимой на множестве натуральных чисел. В самом деле, если *P(x, y)*[пэ от икс игрек] – это предикат «$x > y$»[икс больше игрек], то формула превращается в ложное высказывание «Для любого натурального числа x[икс] найдется такое натуральное число y[игрек], что $x > y$[икс больше игрек]».

Обратимся к формуле (5.25). Она является выполнимой на множестве M[эм], состоящем из чисел 12, 24, 36. Действительно, пусть предикат *P(x)*[пэ от икс] выражает свойство числа x[икс] делиться на два, предикат *Q(x)*[кю от икс] – свойство делимости на три, а предикат *R(x)*[эр от икс] – свойство делимости на двенадцать. При такой интерпретации формула превращается в истинное высказывание «Всякое число из множества M[эм], делящееся на два и на три, делится и на двенадцать».

В то же время формула (5.25) является опровержимой на множестве натуральных чисел. При подстановке в нее рассмотренных выше предикатов данная формула превращается в ложное высказывание «Всякое натуральное число, делящееся на два и на три, делится и на двенадцать». В самом деле, число восемнадцать, например, делится на два и на три, но при этом оно не делится на двенадцать.

Слайд 171

Формула алгебры предикатов называется *тождественно истинной* на множестве M[эм], если при всякой подстановке вместо предикатных переменных любых предикатов, заданных на M[эм], она превращается в тождественно истинный предикат.

Формула алгебры предикатов называется *тождественно ложной* на множестве M[эм], если при всякой подстановке вместо предикатных переменных любых предикатов, заданных на M[эм], она превращается в тождественно ложный предикат.

Приведем примеры.

Представленная на слайде формула (5.26) является тождественно истинной на любом одноэлементном множестве M_1[эм один]. Однако она не будет тождественно истинной на двухэлементном множестве M_2[эм два].

Формула (5.27) является тождественно ложной на одноэлементном множестве M_1[эм один]. Но она не будет тождественно ложной на двухэлементном множестве M_2[эм два].

Слайд 172

Формулу алгебры предикатов называют *общезначимой, или тавтологией,* если при всякой подстановке вместо предикатных переменных любых предикатов, заданных на произвольных множествах, она превращается в тождественно истинный предикат.

Формула общезначима в том и только в том случае, когда ее отрицание невыполнимо ни на одном множестве.

Формулу алгебры предикатов называют *тождественно ложной, или противоречием*, если при всякой подстановке вместо предикатных переменных любых предикатов, заданных на произвольных множествах, она превращается в тождественно ложный предикат.

Рассмотрим пример общезначимой формулы.

Докажем, что формула алгебры предикатов (5.28) является тавтологией. Предположим, что формула превращается в ложное высказывание при подстановке в нее некоторых конкретных предикатов $P(x)$[пэ от икс] и $Q(x)$[кю от икс], заданных на некотором множестве. Тогда левая часть формулы (5.28) будет истинной, а правая часть – ложной. На слайде это отмечено в утверждениях (5.29) и (5.30).

Из (5.30) следует, что найдется некоторый элемент a[а] из области определения предикатов, для которого $P(a)$[пэ от а] – истинное высказывание, а $Q(a)$[кю от а] – ложное высказывание. Обозначим этот факт как (5.31). Мы видим, что (5.31) противоречит (5.29). Следовательно, формула (5.28) является тавтологией.

Слайд 173

Рассмотрим основные равносильности алгебры предикатов.

При записи эквивалентные выражения будем соединять друг с другом знаком равенства. По определению операции навешивания кванторов являются самыми сильными из всех операций. Это позволяет уменьшить число скобок при записи выражений на языке алгебры предикатов. При отсутствии скобок первыми выполняются операции с кванторами.

Прежде всего отметим, что две эквивалентные формулы алгебры высказываний при замене входящих в нее пропозиционных переменных произвольными предикатными переменными превращаются в эквивалентные формулы логики предикатов.

На слайде представлены наиболее важные эквивалентности логики предикатов, не сводящиеся к равносильности алгебры высказываний. Все такие эквивалентности содержат кванторы.

Знак отрицания можно внести под знак квантора, сменив квантор на двойственный – формулы (5.32). Эти формулы носят названия законов де Моргана для кванторов.

Одинаковые кванторы можно переставлять – формулы (5.33). При перестановке разных кванторов формулы не равносильны. В этом случае формула (5.37) является тавтологией.

Квантор существования разбивается на два по дизъюнкции – формула (5.34). Квантор общности разбивается на два по конъюнкции – формула (5.35). Заметим, что нельзя разбивать квантор общности на два по дизъюнкции. Нельзя разбивать квантор существования на два по конъюнкции.

Под номером (5.36) записаны формулы, отражающие законы пронесения кванторов через импликацию. Участвующая в них предикатная переменная Q[кю] не зависит от предметной переменной x[икс].

Слайд 174

Если формула алгебры предикатов не содержит символов импликации и эквиваленции, а присутствующие в ней знаки отрицания относятся только к предикатным переменным и высказываниям, то она называется приведенной формулой.

Приведенная формула, равносильная исходной формуле, называется приведенной формой.

Каждая формула алгебры предикатов имеет приведенную форму. Для получения приведенной формы заданной формулы необходимо:

1) избавиться от импликации и эквиваленции с помощью основных равносильностей алгебры высказываний;

2) перенести знак отрицания на элементарные формулы с помощью внесения отрицания под знак квантора и законов де Моргана;

3) избавиться от двойных отрицаний с помощью закона двойного отрицания.

Пример приведенной формулы алгебры предикатов – формула (5.38).

Пример нахождения приведенной формы формулы алгебры предикатов представлен преобразованиями (5.39).

Предварённой нормальной формой формулы алгебры предикатов называется такая ее приведенная форма, в которой кванторные операции либо вовсе отсутствуют, либо используются после всех операций алгебры высказываний.

Каждая формула алгебры предикатов имеет предварённую нормальную форму. Примеры предваренных нормальных форм – формулы (5.40) и (5.41).

Слайд 175

Рассмотрим еще один пример нахождения приведенной формы для заданной формулы алгебры предикатов. Исходная формула представляет собой эквиваленцию двух выражений, содержащих знаки кванторов.

На слайде показано, как с помощью равносильных преобразований эквиваленция сводится к конъюнкции, представляющей собой приведенную формулу. Сначала мы заменяем эквиваленцию на конъюнкцию двух импликаций на основании соответствующей равносильности алгебры высказываний. Затем переходим от импликаций к дизъюнкциям. На заключительном этапе мы используем правила внесения отрицания под знак квантора.

При приведении формул алгебры предикатов к предваренной нормальной форме часто оказываются полезными равносильности (5.42) и (5.43). Участвующая в них предикатная переменная Q[кю] не зависит от предметной переменной x[икс].

Слайд 176

В заключение рассмотрим пример получения предваренной нормальной формы для заданной формулы алгебры предикатов.

Обратимся к формуле, приведенной на слайде. Она представляет собой конъюнкцию двух дизъюнкций, причем элементами каждой дизъюнкции являются выражения, содержащие кванторы. Прокомментируем выполняемые преобразования.

Сначала мы переобозначим связанные предметные переменные, затем используем свойство пронесения квантора существования через дизъюнкцию, далее применяем свойство дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции. Затем вновь переобозначим переменную, выносим за скобки кванторы общности по переменным y[игрек] и z[зет], еще раз повторяем процедуру вынесения за скобки кванторов общности по указанным переменным. Последнее преобразование – повторное применение свойства дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции.