ОСНОВЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ И ЛОГИКИ

4 ЧАСТЬ

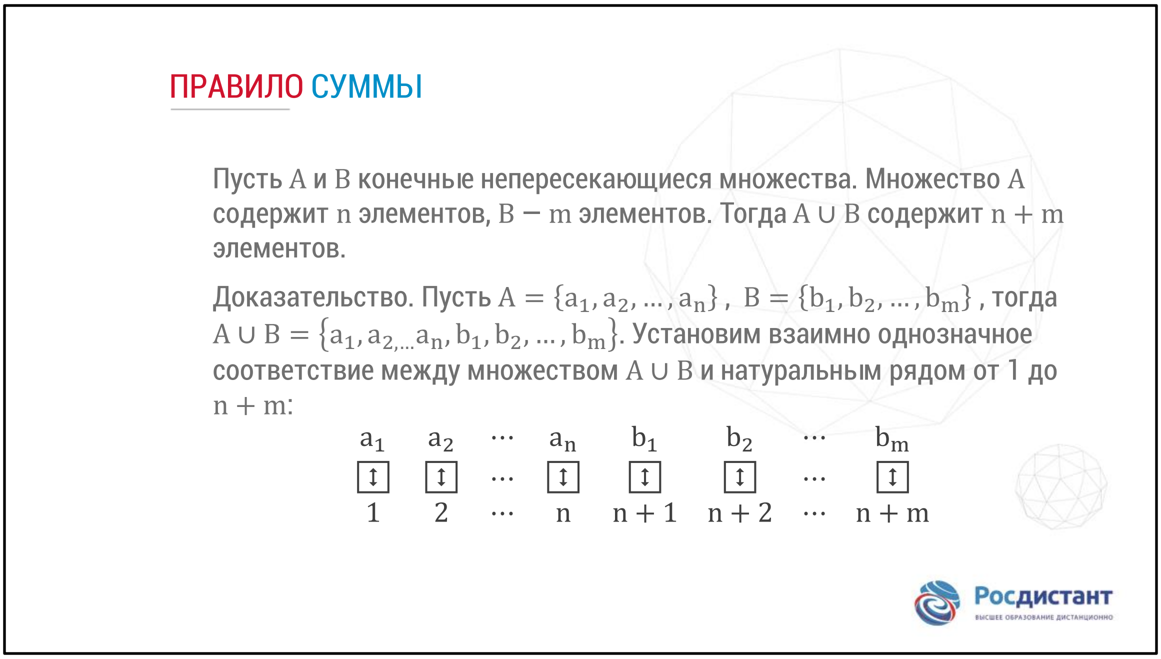
Слайд 35

Тема 2.1. Элементы комбинаторики

Комбинаторика позволяет вычислять количество возможных комбинаций объектов, удовлетворяющих определенным условиям.

Первоначально комбинаторика рассматривалась как раздел «досуговой» математики. Впервые теоретическое исследование проблем комбинаторики было проведено в XVII веке Паскалем, Ферма́, Лейбницем и в XVIII веке Якобом Берну́лли, Эйлером. Тогда же сложилась и принятая в комбинаторике терминология – сочетания, размещения, перестановки и т. п. К началу XX века комбинаторика считалась в основном завершенным разделом математики, лежащим вне основного русла развития математики и ее приложений. В XX веке комбинаторику стали рассматривать как раздел теории множеств, в котором изучаются различные проблемы, возникающие при исследовании конечных множеств. Такая точка зрения привела к более естественной и последовательной классификации основных понятий и задач комбинаторики.

В связи с развитием компьютерных наук и технологий возросла роль комбинаторики как инструмента решения многих задач. В настоящее время комбинаторика является одним из наиболее интенсивно развивающихся разделов математики. Она как область математического знания входит в дискретную математику. На грани дискретной математики и программирования появляются новые дисциплины, в частности, комбинаторные алгоритмы.

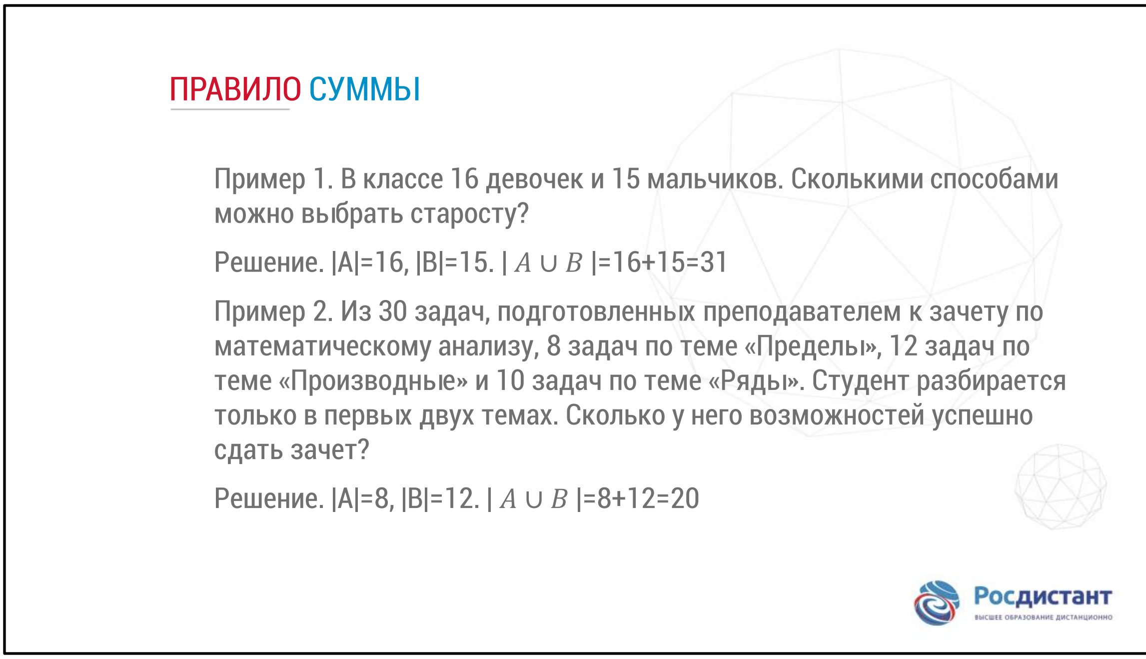


Слайд 36

Рассмотрим основные правила комбинаторики. Их два, и первым их них является правило суммы. Это правило позволяет определить число элементов объединения непересекающихся множеств.

Так как множества не пересекаются, то у них нет общих элементов. Элементы первого множества обозначим буквой a с индексом. Индекс последнего элемента показывает, что множество A содержит n элементов. Аналогично элементы второго множества обозначим буквой b, и индекс последнего из них означает, что это множество содержит m элементов. Выпишем множество, равное объединению множеств A и B. Сначала запишем все элементы множества A, затем – все элементы множества B. Установленное взаимно однозначное соответствие показывает, что объединение данных множеств состоит из $n + m$ элементов.

Правило суммы можно интерпретировать следующим образом. Если элемент a из множества A можно выбрать n способами, а элемент b из множества B – m способами, то выбор элемента x, принадлежащего их объединению, можно осуществить $n + m$ способами.



Слайд 37

На слайде представлены два примера применения правила суммы.

В первой задаче роль множеств A и B играют соответственно множество девочек и множество мальчиков одного класса. Мощность первого множества равна шестнадцати, мощность второго – пятнадцати.

Выбор старосты соответствует выбору одного элемента из объединения этих множеств, и по правилу суммы число способов для осуществления этого выбора равно сумме шестнадцати и пятнадцати, то есть тридцати одному.

Во второй задаче множество A включает в себя все вопросы, относящиеся к теме «Пределы», множество B – все вопросы по теме «Производные». Мощность первого множества равна восьми, мощность второго – двенадцати. Объединение множеств A и B состоит из вопросов, каждый из которых относится либо к первой, либо ко второй теме. Поскольку множества A и B не пересекаются, по правилу суммы мы получаем, что количество «счастливых» вопросов равно сумме восьми и двенадцати, то есть двадцати.

ПРАВИЛО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

2. Правило произведения.

Пусть A и B конечные множества. Множество A содержит n элементов, B – m элементов. Тогда $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ содержит $n \cdot m$ элементов

Доказательство. Пусть $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$, тогда $A \times B = \{(a_i, b_j): a_i \in A, b_j \in B, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m\}$

Рассмотрим множества $M_1 = \{(a_1, b_j): a_1 \in A, b_j \in B, j = 1, 2, \dots, m\}$,
$M_2 = \{(a_2, b_j): a_2 \in A, b_j \in B, j = 1, 2, \dots, m\}$, ...,
$M_n = \{(a_n, b_j): a_n \in A, b_j \in B, j = 1, 2, \dots, m\}$

$A \times B = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_n$. Следовательно по правилу сложения получаем, что множество $A \times B$ содержит $\underbrace{m + m + \dots + m}_{n} = n \cdot m$ элементов

Росдистант
высшее образование дистанционно

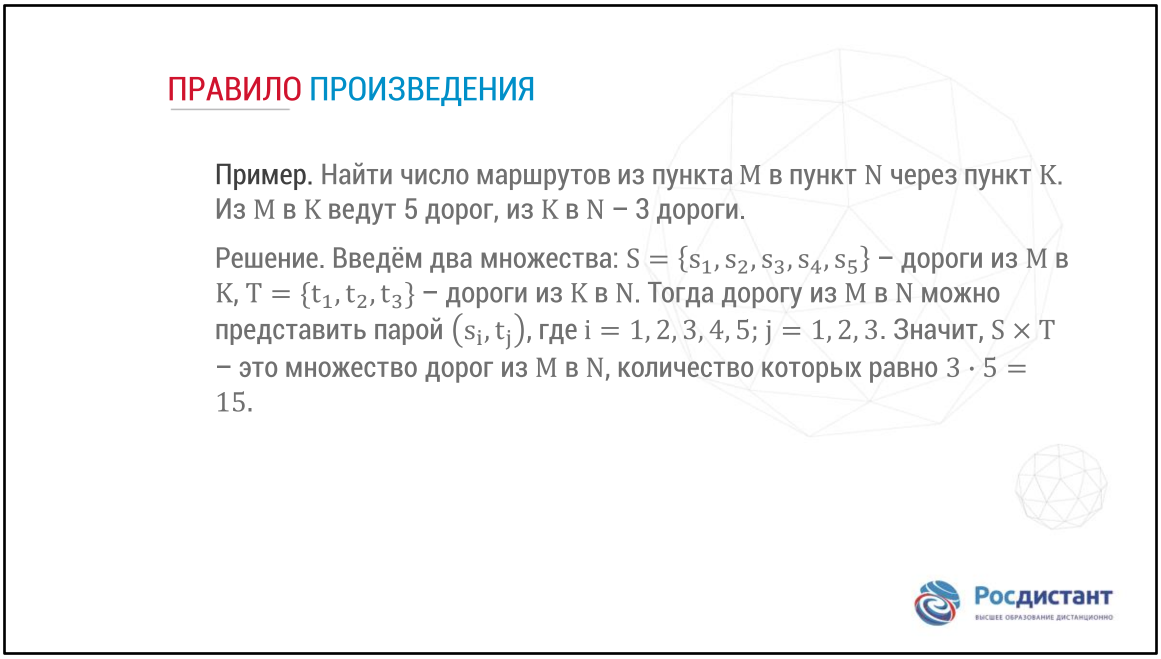
Слайд 38

Второе правило комбинаторики – это правило произведения. Данное правило позволяет определить, чему равно количество элементов декартова произведения двух множеств.

Для доказательства этого правила введем вспомогательные множества. Эти множества построим следующим образом. На первое место в пары, образующие множества, будем ставить фиксированный элемент множества A, а на второе место – всевозможные элементы множества B. У элементов множества M_1 на первое место поставим элемент a_1, на второе место будем поочередно ставить все элементы множества B. У элементов множества M_2 на первое место поставим элемент a_2, а на второе место будем поочередно ставить все элементы множества B и т. д. При таком построении каждое множество M_i состоит из m элементов, а количество таких множеств совпадает с мощностью множества A, т. е. равно n. Объединение этих введенных множеств M_i дает декартово произведение множеств A и B. Применяя правило суммы к объединению множеств M_i, получаем требуемое утверждение.

Правило произведения можно интерпретировать следующим образом. Если элемент a из множества A

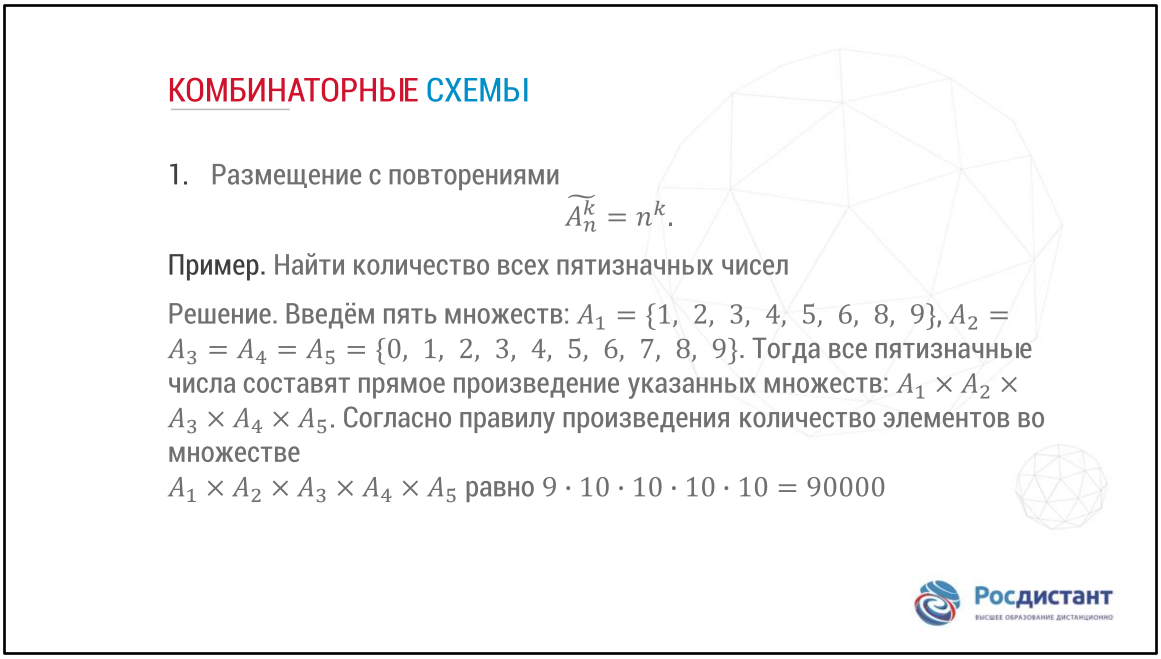
можно выбрать n способами и если после каждого такого выбора элемент b из множества B можно выбрать m способами, то выбор пары (a, b) из декартова произведения можно осуществить $n \cdot m$ способами. В этом случае говорят, что выбор элементов множества A не зависит от способа выбора элементов множества B .



Слайд 39

Теперь рассмотрим пример применения правила произведения. Введем в рассмотрение два множества. Первое множество состоит из всевозможных дорог из M в K, второе множество содержит всевозможные дороги из K в N. Для того чтобы построить маршрут из пункта M в пункт N, необходимо сначала выбрать элемент из первого множества, а затем произвести выбор элемента из второго множества. Выбор элемента из первого множества можно осуществить пятью способами. При каждом варианте осуществления этого действия выбор элемента второго множества можно произвести тремя способами. Образуем все возможные пары из элементов этих двух множеств. Упорядоченные пары являются элементами декартова произведения. Значит, нам необходимо найти мощность декартова произведения введенных множеств.

Поскольку мощность первого множества равна пяти, а мощность второго множества трем, по правилу произведения получаем, что количество элементов декартова произведения равно пятнадцати.



Слайд 40

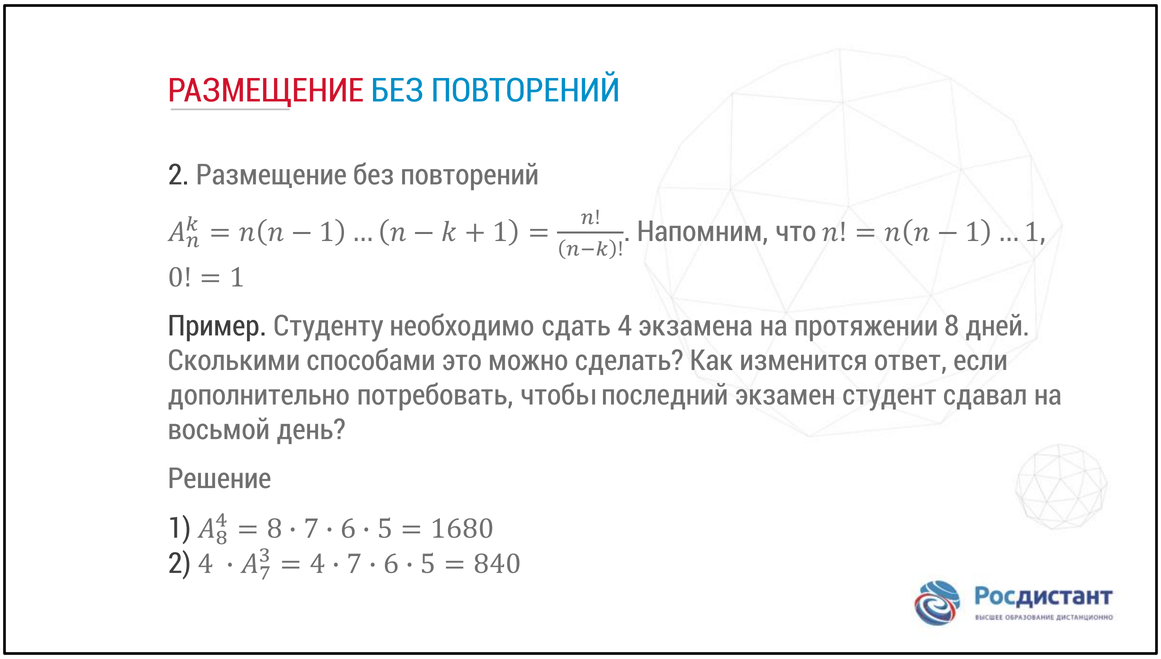
Теперь перейдем к рассмотрению основных комбинаторных схем, с помощью которых можно посчитать количество всевозможных комбинаций, которые получаются при выборе элементов из имеющихся.

Первая комбинаторная схема, с которой мы познакомимся, называется размещением с повторениями.

Задача формулируется следующим образом. Имеются элементы n различных видов, причем элементов каждого вида неограниченное количество. Из этих элементов составляют всевозможные упорядоченные наборы длины k , в которых элементы одного вида могут повторяться. Такие наборы называются размещениями с повторениями из n по k .

Выведем формулу для количества размещений с повторениями из n по k . На каждое из k мест элемент можно выбрать n способами. По правилу произведения получаем, что общее число размещений с повторениями из n по k равно n в степени k .

На слайде приведен пример, в котором применяются приведенные выше рассуждения.



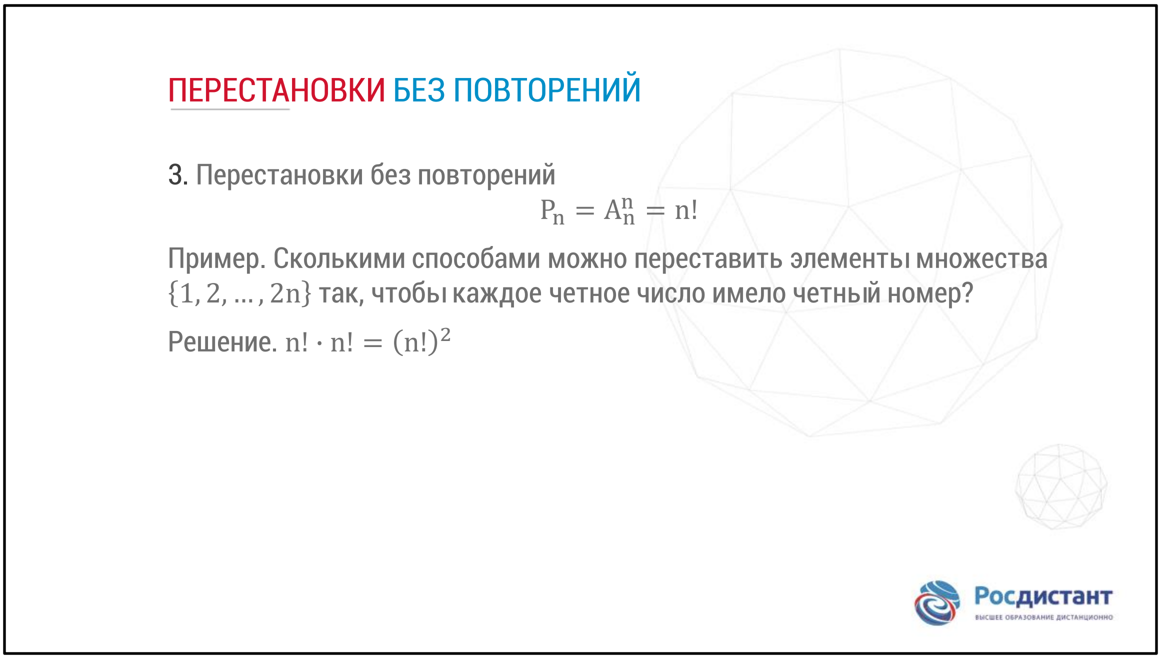
Слайд 41

Далее рассмотрим размещения без повторений. Задача формулируется следующим образом. Имеется n различных элементов. Из них составляют всевозможные упорядоченные наборы длины k . Такие наборы называются размещениями без повторений из n по k .

Выведем формулу для количества размещений без повторений. При записи таких наборов на первое место можно поставить любой из имеющихся n элементов. Тогда на второе место можно выбрать только любой из $n-1$ оставшихся. На третье место остается уже $n-2$ претендента. И так далее. Наконец, на k-тое место можно поставить любой из $n-k+1$ оставшихся элементов. В результате по правилу произведения получаем, что общее число размещений без повторений из n по k равно произведению упомянутых выше чисел. Используя факториал, это произведение можно записать в виде дроби.

Рассмотрим пример, представленный на слайде. Так как в каждый день можно сдать только один экзамен и порядок сдачи экзаменов имеет значение, используем формулу размещения без повторений.

Если известно, что последний экзамен студент будет сдавать на восьмой день, то существует 4 варианта выбора экзамена на последний день и вариантов распределения оставшихся трех экзаменов в течение семи дней.

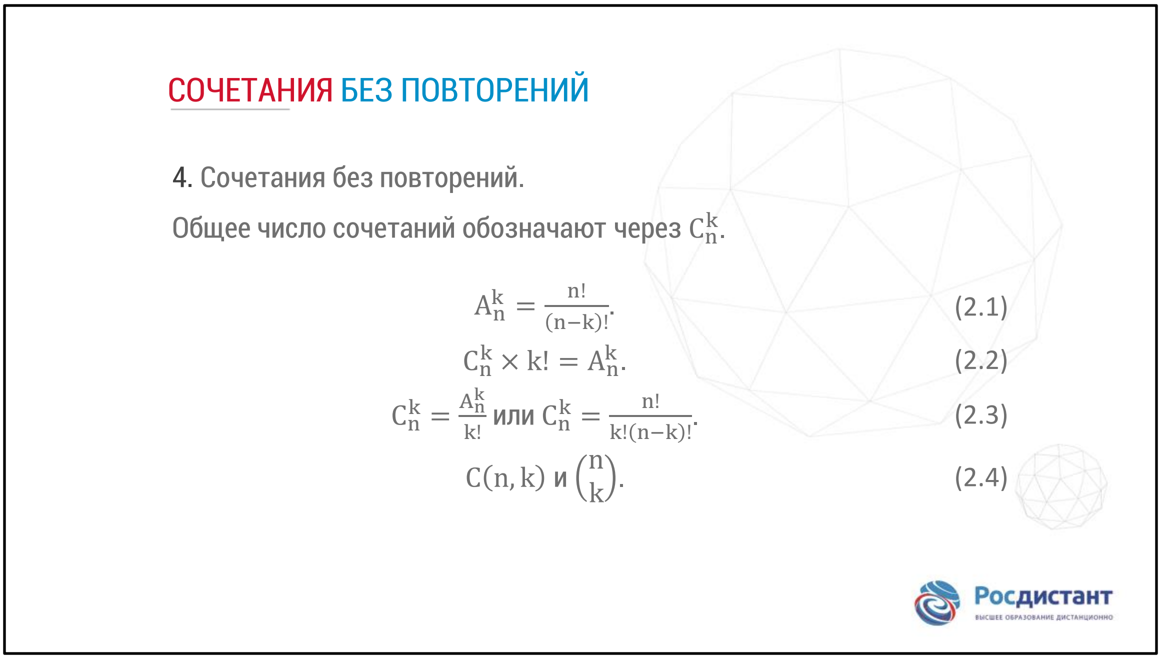


Слайд 42

Далее рассмотрим перестановки без повторений. Пусть имеется n различных элементов. Будем образовывать из них всевозможные упорядоченные наборы длины n. Такие наборы называются перестановками из n элементов, а их общее число обозначается P_n. Перестановки являются частным случаем размещений без повторений из n по k, когда

k совпадает с n. Поэтому для вывода формулы общего числа перестановок используем формулу для размещений без повторений и получаем n факториал.

Рассмотрим пример, представленный на слайде. Так как в условии задачи есть требование, что четные числа должны стоять на четных местах, то эти числа можно переставлять только между собой и это можно сделать $n!$ способами; каждому такому способу расстановки четных чисел соответствует $n!$ способов расстановки нечетных чисел на нечетных местах. Тогда общее число перестановок получаем с помощью правила произведения.



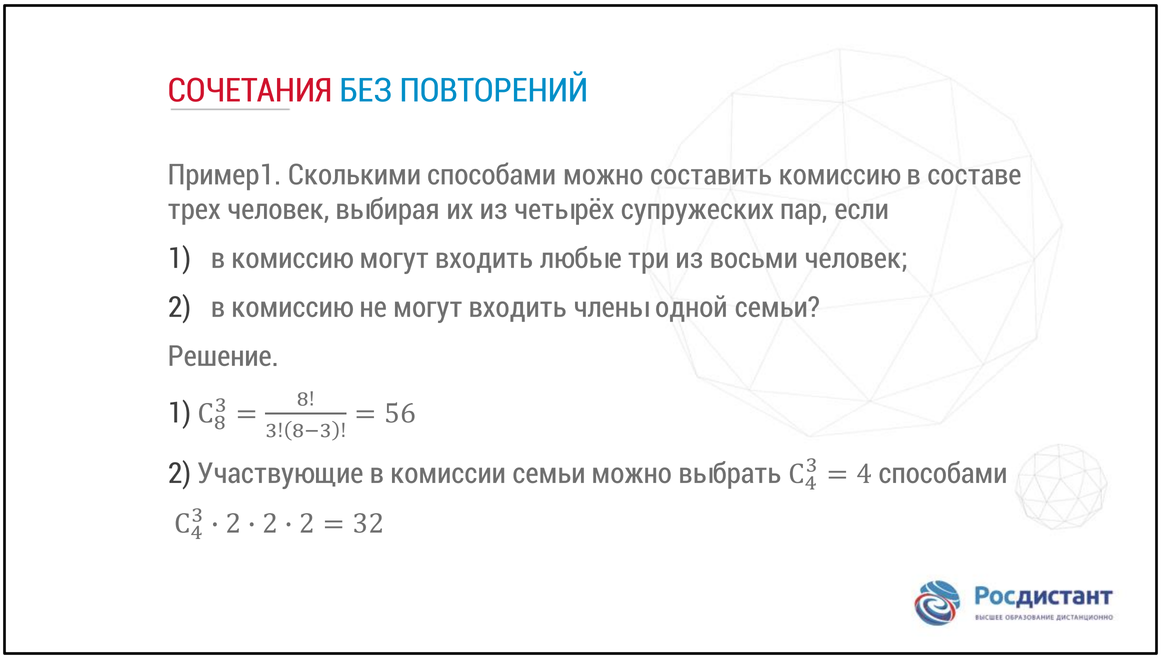
Слайд 43

Следующая комбинаторная схема называется сочетанием без повторений. Задача формулируется следующим способом. Пусть имеется n различных элементов. Сочетаниями из n по k называются все возможные неупорядоченные наборы, состоящие из k элементов.

Выведем формулу общего числа сочетаний из n

по k . Составим сначала все различные сочетания из n по k . После этого произведем всевозможные перестановки элементов для каждого из таких наборов. В результате этого действия мы получим все размещения без повторений из n по k , а их общее число отображено в формуле (2.1). Так как элементов в наборе k , то из одного сочетания можно получить $k!$ размещений. Тогда по правилу произведения можно записать формулу (2.2). Выразив из этой формулы число сочетаний, мы получим окончательный ответ, который отображается в формуле (2.3).

Для числа всех сочетаний без повторений из n по k используются также обозначения, записанные в формуле (2.4).

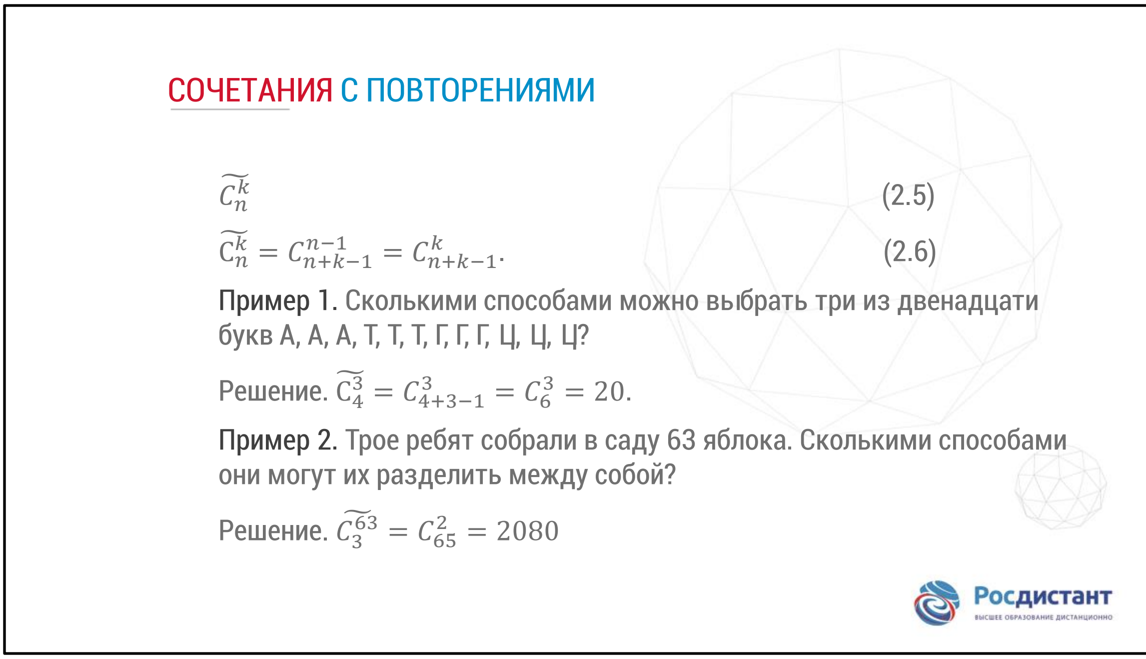


Слайд 44

Рассмотрим пример, представленный на слайде. Так как нам необходимо составить комиссию из трех человек, то порядок выбранных элементов не играет роли, а следовательно, мы имеем дело с сочетаниями без повторений.

В первом случае, если в комиссию входят любые трое из восьми человек, то число всех возможных комиссий равно числу сочетаний без повторений из восьми по три.

Рассмотрим теперь вторую ситуацию, когда в комиссию не входят члены одной семьи. Это означает, что в ней будут представлены три из четырех семей. Выбор семей, участвующих в комиссии, можно осуществить четырьмя способами. Предположим, что этот выбор уже сделан. В первой из отобранных семей можно двумя способами выбрать представителя – мужа или жену. Точно так же дело обстоит со второй и третьей семьями. По правилу произведения получаем, что число всех возможных комиссий равно тридцати двум.



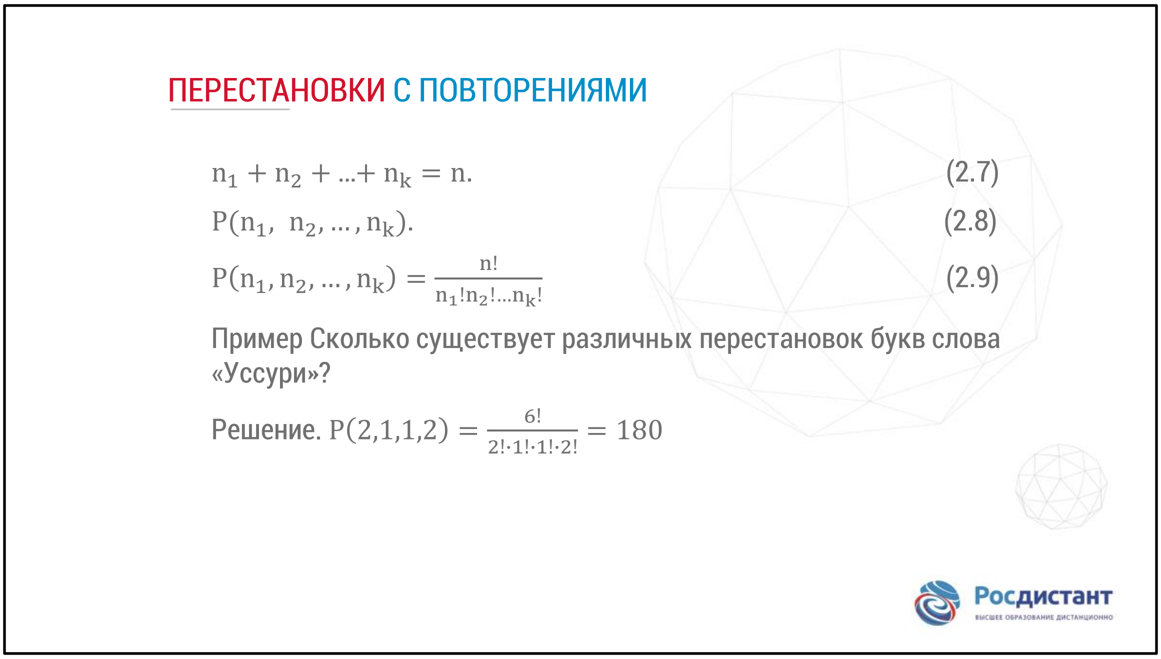
Слайд 45

Пусть имеются предметы n различных типов. Сколькими способами можно составить из них комбинацию из k элементов, если не принимать во внимание порядок элементов в комбинации, но допускать, что предметы одного и того же типа могут повторяться? Иными словами, различные комбинации должны отличаться количеством предметов хотя бы одного типа. Такие комбинации называются сочетаниями с повторениями, а обозначение их общего числа записано в формуле (2.5). Рассмотрим следующий пример. Пусть имеется три элемента: a, b и c . Из них можно составить шесть сочетаний с повторениями по два элемента: ab , ac , bc , aa , bb , cc .

Таким образом, сочетание с повторениями из n элементов по k , где k и n произвольные, может содержать любой элемент сколько угодно раз от 1 до k включительно или не содержать его совсем. Следует отметить, что если, например, две комбинации по k элементов отличаются друг от друга только порядком расположения элементов, то они не считаются различными сочетаниями. В схеме сочетаний с повторениями имеют дело не с элементами, а с их видами. При этом считается, что имеется неограниченное число элементов каждого вида, т. е. достаточное для выбора любого числа элементов. Формула (2.6) показывает, как можно определить число сочетаний с повторениями из n элементов по k .

Рассмотрим примеры применения данной формулы. В первом примере n равно четырем, поскольку мы имеем четыре сорта предметов – А, Т, Г, Ц. Значение k равно трем. Поэтому мы находим число сочетаний с повторениями из четырех по три.

Обратимся ко второму примеру, представленному на слайде. Каждому способу деления яблок между ребятами поставим в соответствие сочетание с повторениями следующим образом. Типами элементов будут ребята, а элементами – яблоки. Таким образом, имеем три типа элементов, из которых предстоит составить различные наборы объема шестьдесят три. Наличие в наборе элемента определенного типа означает принадлежность данного яблока соответствующему мальчику. Применяя формулу для числа сочетаний с повторениями при n , равном трем, и k равном четырем, получаем общее число способов распределения яблок между ребятами.

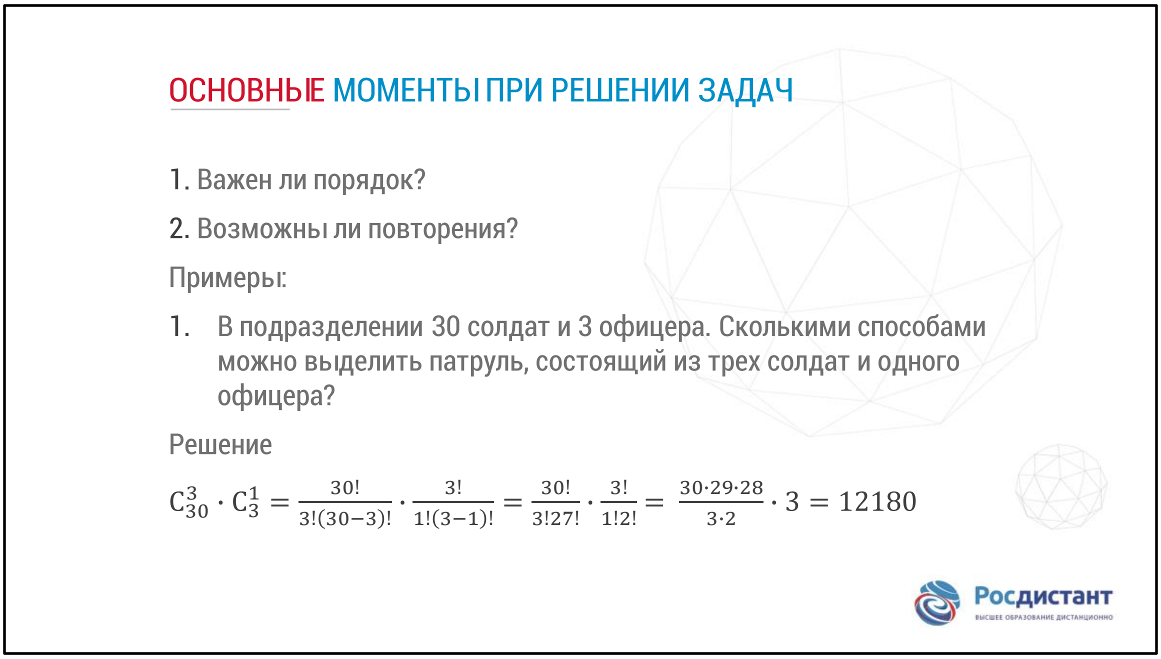


Слайд 46

И последней комбинаторной схемой являются перестановки с повторениями. Задача формируется следующим образом. Имеется n предметов, среди них n_1 элементов первого вида, n_2 элементов второго вида и т. д., n_k элементов k-го вида, причем выполняется соотношение (2.7). Упорядоченные наборы длины n , составленные из этих элементов, называются перестановками с повторениями. Обозначение общего числа перестановок с повторениями показано в формуле (2.8).

Поясним формулу для вычисления числа перестановок с повторениями. Количество таких перестановок получается из общего числа перестановок уменьшением во столько раз, сколько раз можно по-разному переставить сначала предметы первого вида, затем предметы второго вида и т. д., наконец, предметы k-го вида. В результате получаем формулу (2.9).

Рассмотрим следующий пример. В слове «Уссури» две буквы «у», две буквы «с», одна буква «р» и одна буква «и». Используя формулу для перестановок с повторениями, получаем, что общее число перестановок букв данного слова равно ста восьмидесяти.



Слайд 47

Подведем итог изучения всех комбинаторных схем.

Мы рассмотрели два основных вида схем – это размещения и сочетания. Перестановки являются частным случаем размещений, когда k равно n . Размещения характеризуются тем, что в них учитывается порядок расположения элементов. К сочетаниям относятся наборы, которые отличаются друг от друга только входящими в них элементами, а не их порядком.

Для правильного выбора комбинаторной схемы и формулы для решения задачи необходимо ответить на два ключевых вопроса. Они представлены на слайде. Если при ответе на первый вопрос мы говорим «да», то в задаче необходимо использовать размещения. В случае ответа «нет» – используем сочетания. В зависимости от ответа на второй вопрос мы применяем формулы для схем с повторением или без них.

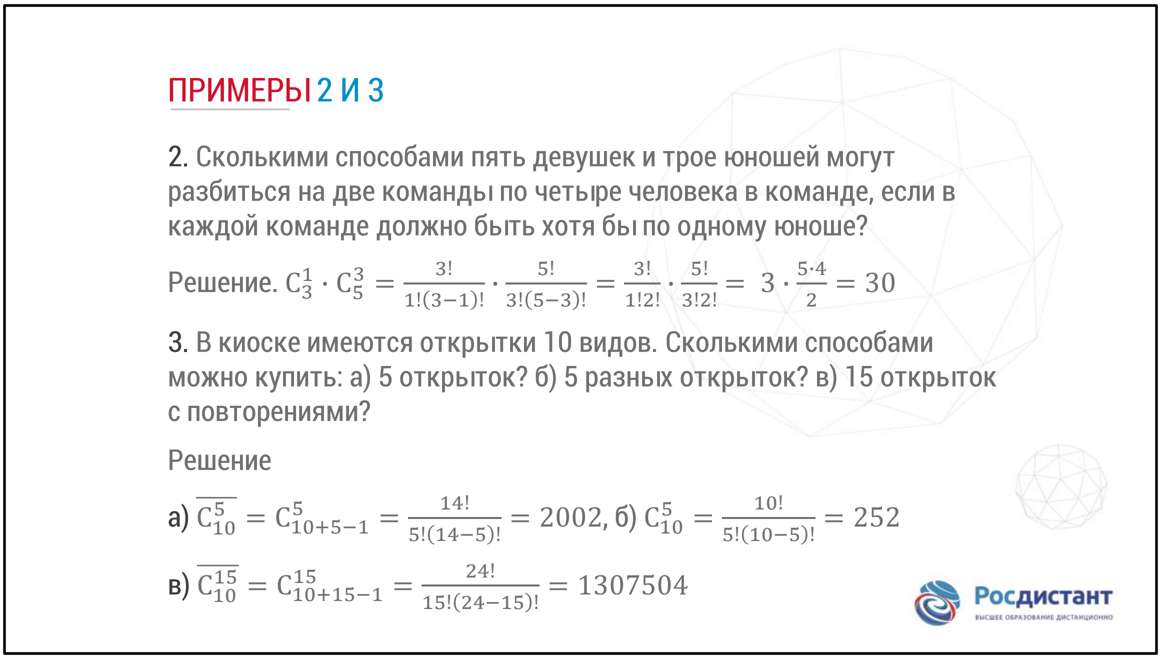
Рассмотрим несколько примеров применения комбинаторных схем. Первый из них представлен на слайде.

Для назначения патруля нам необходимо выбрать трех солдат из имеющихся тридцати, а затем одного офицера из трех. При каждом выборе для нас не имеет значения порядок и повторения, конечно же, здесь исключаются. Поэтому как в случае выбора солдат, так и в случае выбора офицера мы должны использовать формулу для сочетаний без повторений.

Число различных способов выбора солдат равно числу сочетаний из тридцати по три.

Количество вариантов выбора офицера равно числу сочетаний из трех по одному.

В соответствии с правилом произведения мы должны перемножить два указанных выше числа. Записывая соответствующие дробные выражения и проводя вычисления, мы получаем общее количество способов назначения патруля.



Слайд 48

Перейдем к рассмотрению второго примера. Текст задачи представлен на слайде.

Нам необходимо разбить восемь человек на две команды по четыре человека. Другими словами, нужно выбрать четыре человека в первую команду. Тогда четверо оставшихся автоматически попадут во вторую команду. В данном случае порядок нам неважен и повторений быть не может. Поэтому следует использовать формулу для сочетаний без повторений.

Необходимо учесть и ограничение, состоящее в том, что в каждой команде должно быть не менее одного юноши. Если в одной команде будет один юноша, то во вторую попадут двое других.

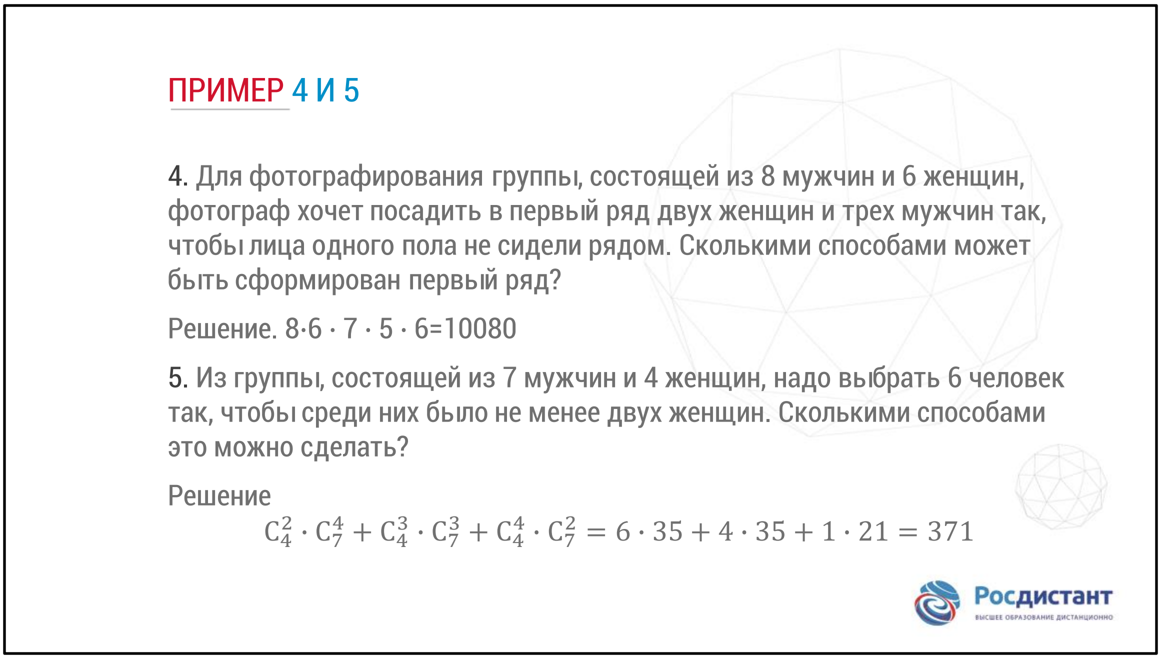
Таким образом, нам необходимо выбрать одного юношу и трех девушек. Можно, наоборот, выбрать двух юношей и двух девушек. Результат, естественно, будет одинаковый. В решении, представленном на слайде, реализован первый случай. Число способов выбора одного юноши из трех равно числу сочетаний из трех по одному. Число вариантов выбора трех девушек из пяти равно числу сочетаний из пяти по три. Согласно правилу произведения мы перемножаем указанные числа и получаем требуемый результат.

Перейдем к рассмотрению третьей задачи. Она содержит три пункта, каждый из которых проанализируем отдельно. Прежде всего заметим, что во всех трех случаях не имеет значения порядок выбора открыток, поэтому речь здесь идет о сочетаниях.

В пункте «а» задачи возможны повторяющиеся элементы. Следовательно, искомое количество наборов равно числу сочетаний с повторениями из десяти по пять.

По условию пункта «б» все открытки должны быть различными. Поэтому интересующее нас число наборов выражается числом сочетаний без повторений из десяти по пять.

В пункте «в» задачи речь идет о выборе пятнадцати произвольных открыток. Здесь повторяющиеся элементы неизбежны, поскольку видов открыток всего десять. Требуемое количество наборов находим как число сочетаний с повторениями из десяти по пятнадцать.



Слайд 49

Обратимся к четвертому примеру. В данном случае для нас важен порядок и повторений быть не может. Значит, будем использовать размещения без повторяющихся элементов.

В задаче есть ограничение, согласно которому лица одного пола не должны сидеть рядом. Так как в один ряд сажают троих мужчин и двух женщин, то требуемая ситуация возможна только в том случае, когда первым в ряду будет мужчина.

Для выбора мужчины на первое место имеем восемь возможностей. Далее выбираем женщину, и для этого есть шесть различных вариантов. Затем опять выбираем мужчину одним из семи возможных способов. Для дальнейшего выбора женщины на четвертое место имеется пять вариантов. Наконец, мужчину на пятое место можно выбрать шестью различными способами. Окончательный ответ получаем с помощью правила произведения, перемножая пять указанных выше чисел.

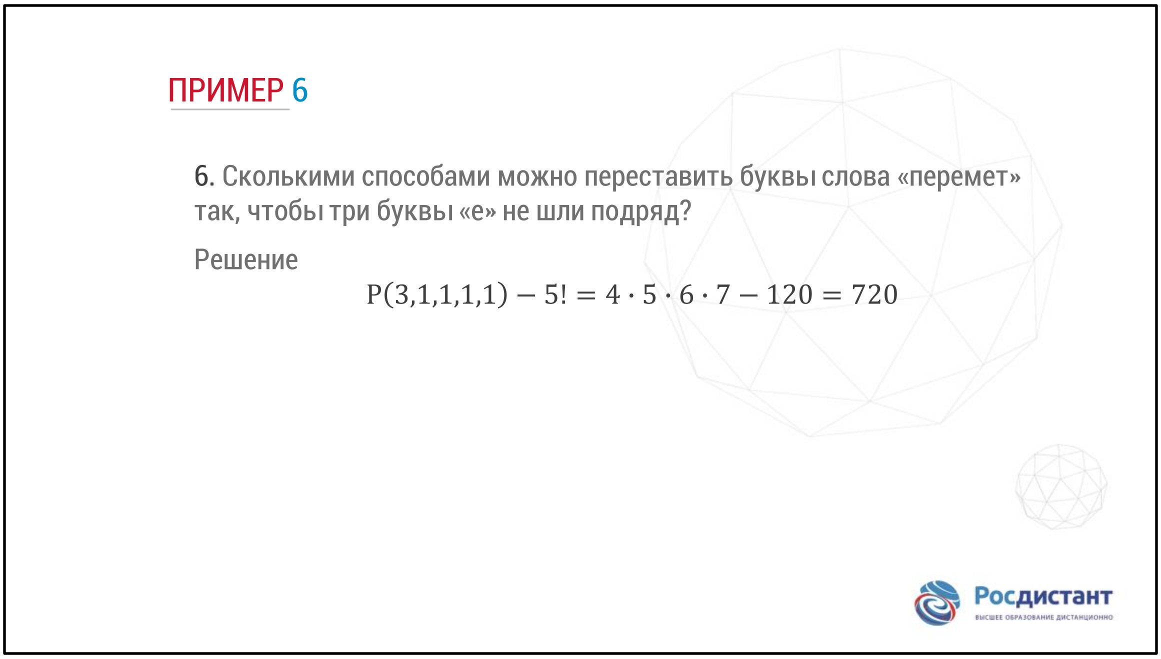
Перейдем к рассмотрению пятой задачи. Принимая во внимание, что порядок при выборе группы людей неважен, мы приходим к выводу, что речь идет о сочетаниях. Из условия задачи ясно, что повторений здесь быть не может.

Согласно присутствующему в задаче

ограничению должно быть выбрано не менее двух женщин, а значит, или две, или три, или четыре. Таким образом, искомое число будет складываться из трех слагаемых.

Необходимо выбрать всего шесть человек. Если мы выбираем двух женщин, то затем надо выбрать четверых мужчин. При выборе трех женщин остальные трое будут мужчины. Наконец, если мы выбираем четырех женщин, то остается выбрать двух мужчин. Для нахождения каждого из трех слагаемых воспользуемся правилом произведения.

В первом случае из трех нами обозначенных сомножителями являются число сочетаний из четырех по два и число сочетаний из семи по четыре. Во втором случае мы считаем произведение числа сочетаний из четырех по три и числа сочетаний из семи по три. В последнем случае мы должны перемножить число сочетаний из четырех по четыре и число сочетаний из семи по два. Складывая три полученных произведения, приходим к окончательному результату.



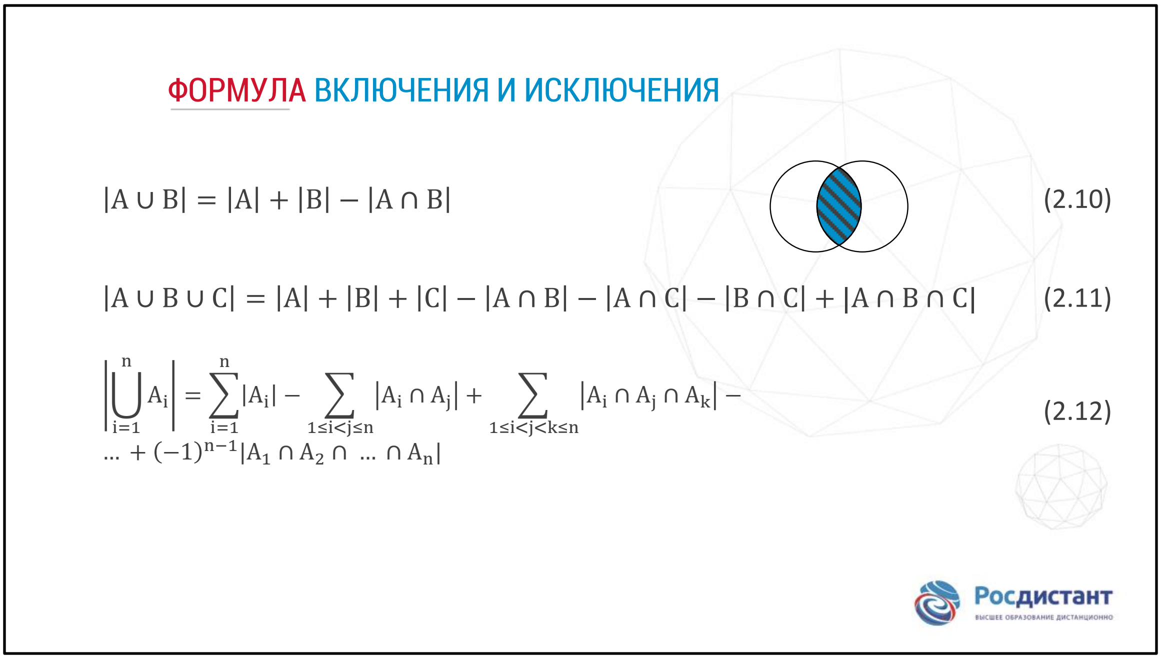
Слайд 50

Обратимся к шестому примеру. В данной задаче мы имеем дело с перестановками с повторениями. Но при этом существует ограничение: три буквы «е» не должны идти подряд. В рассматриваемой ситуации проще найти число таких перестановок букв слова «перемет», в которых все буквы «е» стоят рядом. Для ответа на вопрос задачи это число нужно будет вычесть из общего числа перестановок.

Всего в нашем слове семь букв, при этом буква «е» встречается три раза, а остальные буквы – по одному разу. По формуле для перестановок с повторениями общее количество перестановок равно произведению чисел 4, 5, 6 и 7.

Найдем число перестановок, в которых три буквы «е» идут подряд. «Склеим» эти три буквы вместе и будем считать их за единый символ. При таком подходе нам нужно найти число перестановок пяти различных элементов. Это число есть пять факториал, или сто двадцать.

Находя разность двух указанных чисел, получаем искомый ответ.

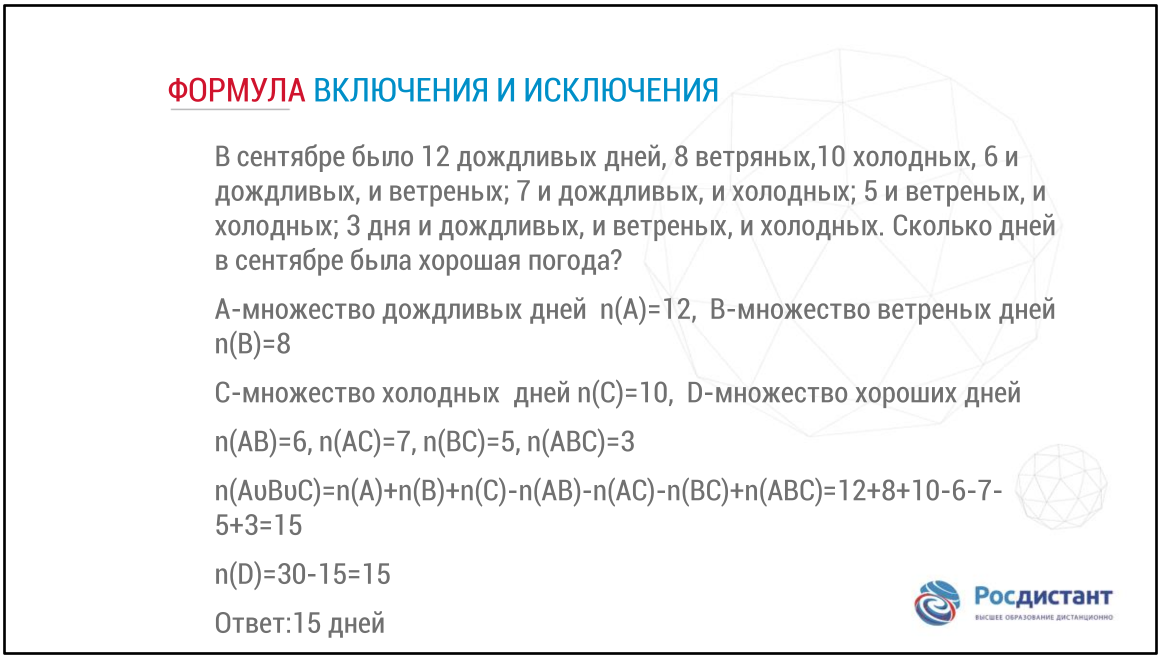


Слайд 51

С помощью первого правила комбинаторики определяется количество элементов объединения двух непересекающихся множеств. Для определения числа элементов объединения произвольных множеств применяется формула включения и исключения. Для двух множеств ее вид представлен в формуле (2.10).

Расположенная на слайде диаграмма Эйлера – Венна объединения двух множеств объясняет справедливость этой формулы. Когда мы суммируем мощности множеств A и B , то число элементов, которые принадлежат каждому из этих множеств, мы учитываем два раза. Поэтому необходимо из этой суммы вычесть мощность пересечения данных множеств.

Для трех множеств принцип включения и исключения отображен в формуле (2.11). Для произвольного числа множеств принцип включения и исключения описывается формулой (2.12). Сначала суммируются мощности всех множеств, затем исключаются мощности всех возможных пересечений двух множеств, затем опять прибавляются мощности всех возможных пересечений трех множеств и т. д. Доказательство формулы (2.12) может быть проведено методом математической индукции.



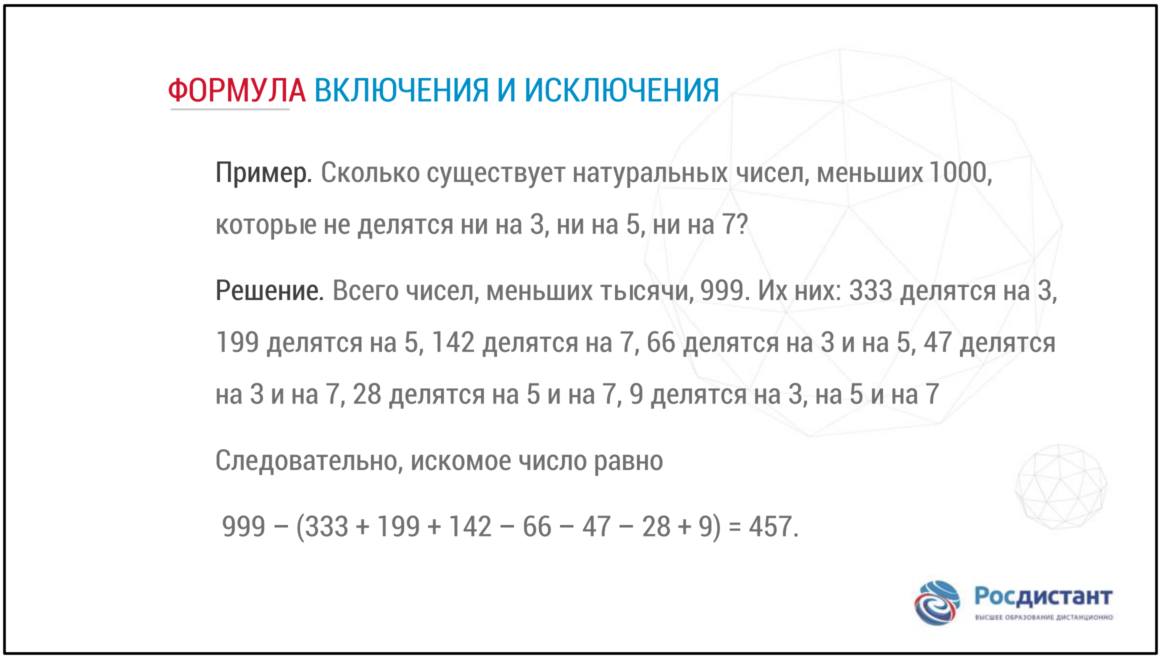
Слайд 52

Рассмотрим примеры применения принципа включения и исключения. Обратимся к задаче, представленной на слайде.

Введем три множества, соответствующих дням с плохой погодой, и четвертое множество D дней с хорошей погодой.

Нам даны мощности каждого из множеств A , B , C , содержащих дни с плохой погодой, и мощности множеств всевозможных их пересечений. Это дает нам возможность вычислить мощность объединения этих трех множеств с помощью формулы включения и исключения.

Мощность объединения множеств A , B , C равна количеству дней месяца с плохой погодой. В результате вычислений мы получаем, что число таких дней равно пятнадцати. Тогда количество хороших дней можно определить как разность числа всех дней месяца и количества ненастных дней. Окончательно получаем, что число дней с хорошей погодой равно пятнадцати.



Слайд 53

На слайде приведен еще один пример применения принципа включения и исключения. Нам надо вычислить количество чисел, которые не удовлетворяют сразу трем свойствам, т. е. не делятся ни на 3, ни на 5, ни на 7. Для этого из общего числа чисел, меньших тысячи, нужно вычесть количество чисел, которые обладают хотя бы одним из этих свойств.

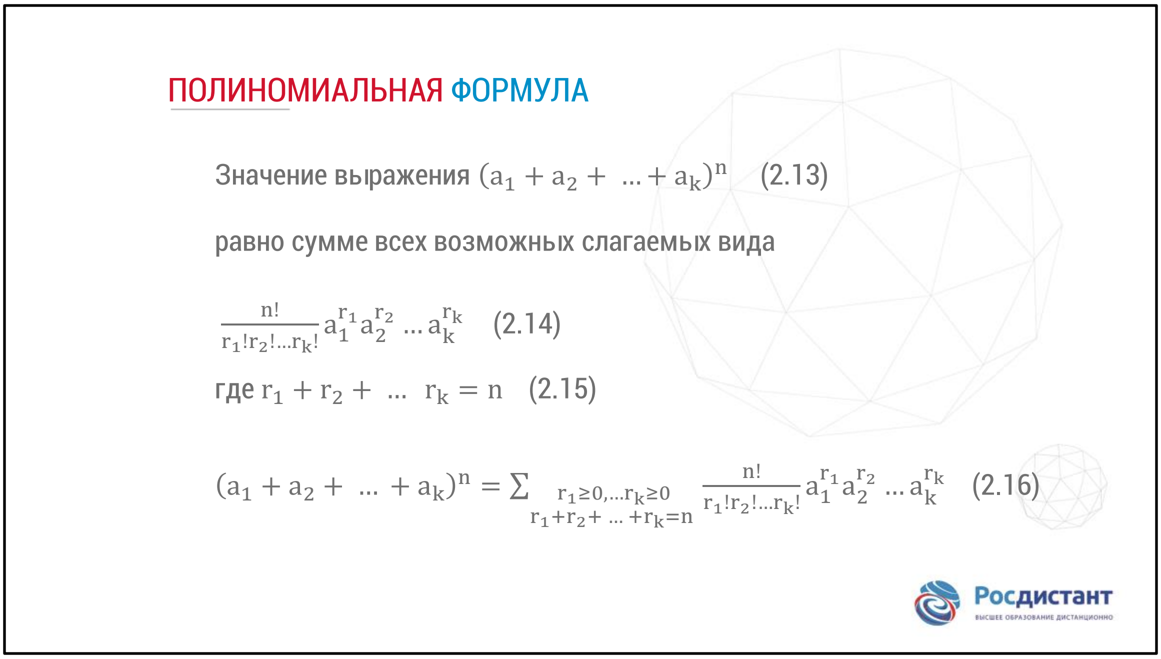
Количество чисел, обладающих хотя бы одним из указанных свойств, равно мощности объединения трех множеств, образованных из чисел, не делящихся соответственно на 3, на 5, на 7. Как мы знаем, для определения мощности объединения пересекающихся множеств используется принцип включения и исключения.

Для применения этого принципа нужно вычислить мощности множеств, участвующих в формуле. Каждое третье число делится на три, поэтому, чтобы найти количество чисел, делящихся на три, надо взять целую часть от деления общего числа чисел на три. Аналогичным образом вычисляются мощности множества чисел, делящихся на пять, и множества чисел, делящихся на семь.

Если число делится на три и на пять, то оно делится на пятнадцать. Мощность множества таких чисел равна целой части от деления общего числа чисел на пятнадцать. Таким же образом вычисляются мощности двух других множеств, представляющих собой попарные пересечения исходных множеств.

Число, делящееся на три, на пять и на семь, делится на сто пять. Количество таких чисел равно целой части от деления общего числа чисел на сто пять.

Подставляя найденные числовые значения в формулу включения и исключения, находим искомое число.



Слайд 54

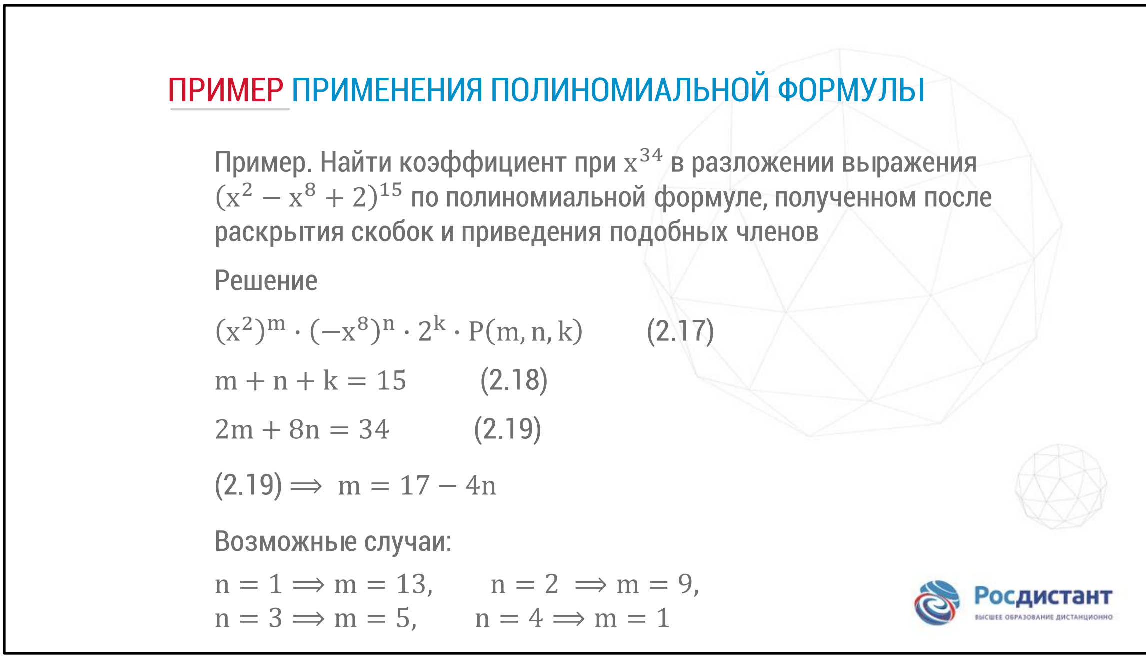
Во многих задачах возникает необходимость раскрытия скобок при вычислении значения выражения вида (2.13). В таких ситуациях применяется так называемая полиномиальная формула, позволяющая возвести в степень n сумму k слагаемых.

Количество участвующих в формуле слагаемых определяется числом различных наборов неотрицательных значений показателей степеней, дающих в сумме число n . Последнее требование обозначено равенством (2.15).

Вид каждого отдельного слагаемого представлен формулой (2.14).

Сама полиномиальная формула выражается равенством (2.16).

В частном случае, когда n и k равны двум, формула содержит три слагаемых и представляет собой известную из школьного курса математики формулу квадрата суммы двух слагаемых. В случае, когда k равно двум, а n равно трем, мы получаем формулу куба суммы двух слагаемых.

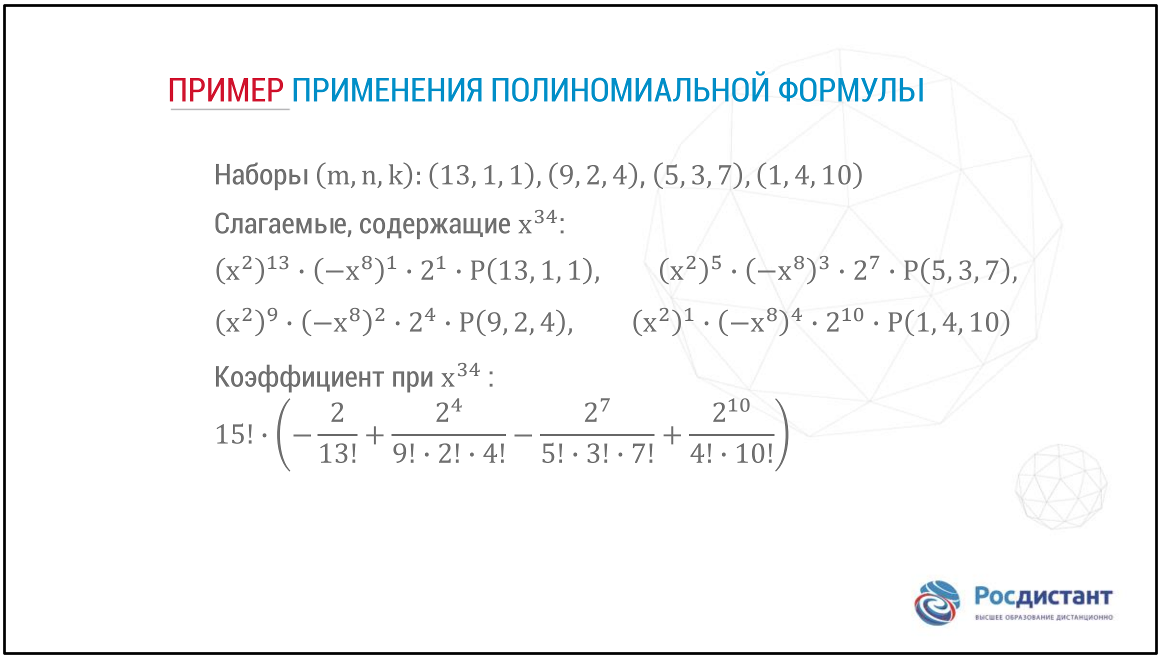


Слайд 55

На слайде приведен пример применения полиномиальной формулы для определения коэффициента при переменной x в тридцать четвертой степени.

В данном случае в пятнадцатую степень возводится сумма трех слагаемых. Два первых слагаемых содержат переменную x , третье слагаемое является константой. Сначала мы записываем общий член разложения по полиномиальной формуле. Он представлен формулой (2.17). Уравнение (2.18) выражает условие, которому должны удовлетворять показатели степеней m, n и k. Вычисляя суммарный показатель степени переменной x в формуле (2.18) и приравнивая его к тридцати четырем, получаем уравнение (2.19).

Решаем уравнение (2.19) в целых неотрицательных числах. Требуемым условиям удовлетворяют значения n, равные единице, двум, трем и четырем. По ним находим соответствующие значения показателя m. Получаем четыре возможных решения, которые представлены на слайде.



Слайд 56

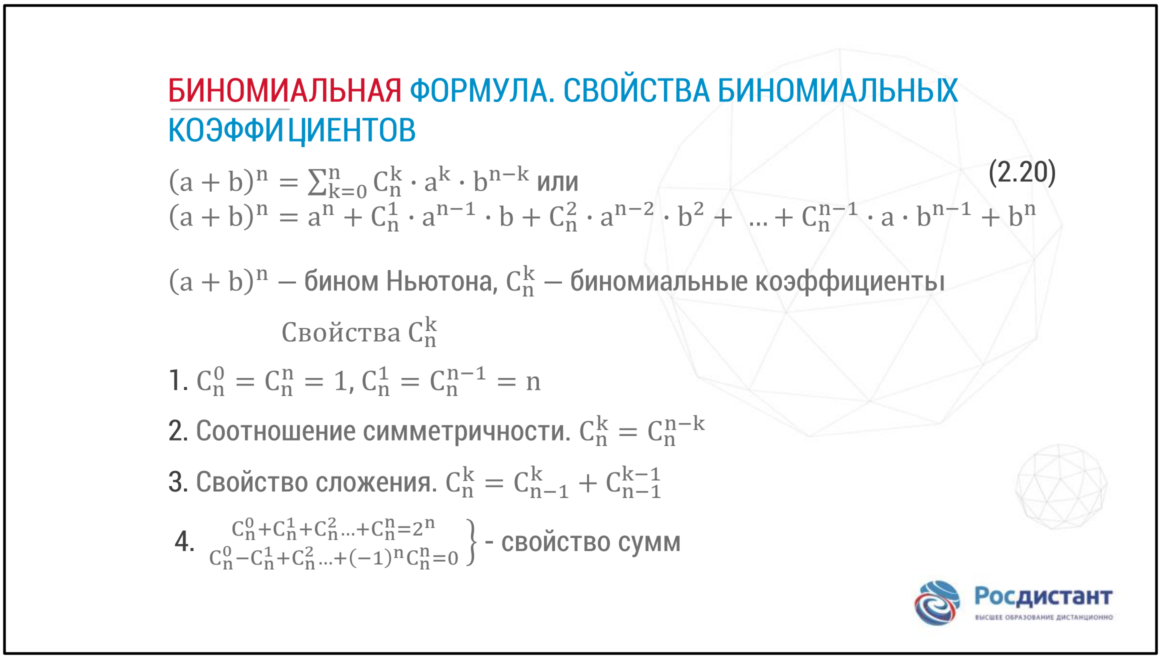
Продолжим решение нашей задачи.

Для каждого найденного набора значений m и n определим соответствующее значение переменной k. Получим четыре набора значений, представленных на слайде.

По каждому набору значений показателей m, n и k построим слагаемое полиномиальной формулы, содержащее x в тридцать четвертой степени. Эти слагаемые указаны на слайде.

Вычислим числовые коэффициенты найденных выражений и просуммируем их. В результате мы получим искомый коэффициент при x в тридцать четвертой степени.

Алгоритм решения, использованный для данной задачи, применим для всех задач подобного вида. При этом неважно, сколько слагаемых суммируется, в какую степень возводится сумма, какое количество слагаемых содержит переменную.



Слайд 57

Частным случаем полиномиальной формулы при k , равном двум, является биномиальная формула (2.20). Выражение в левой части формулы (2.20) называется биномом Ньютона.

Числа, участвующие в формуле бинома Ньютона, называются биномиальными коэффициентами.

На слайде представлены некоторые свойства биномиальных коэффициентов.

Первое свойство проверяется непосредственными вычислениями.

Второе свойство является обобщением первого. Для его доказательства достаточно сравнить дробные выражения для биномиальных коэффициентов с номерами k и $n-k$.

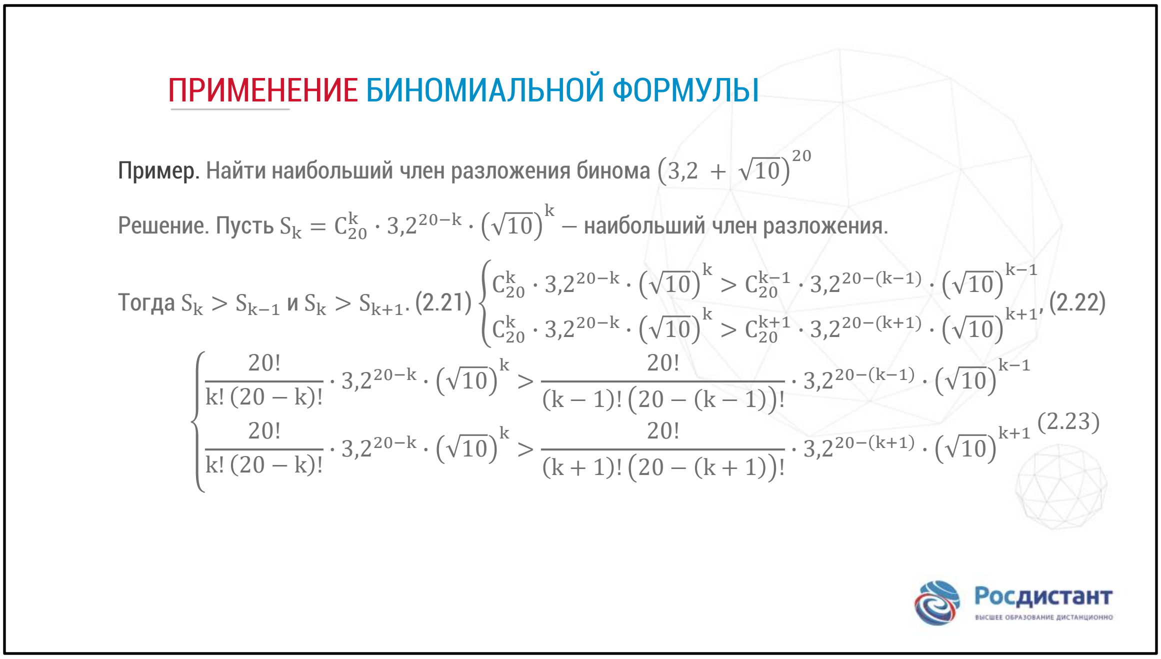
Для обоснования третьего свойства нужно записать выражения для коэффициентов с номерами k и $k-1$ и произвести сложение дробей.

Для доказательства первого равенства из четвертого свойства надо применить формулу биномиальную формулу к n-й степени суммы двух единиц. Для проверки второго равенства нужно применить ту же формулу к n-й степени разности двух единиц.

Из третьего свойства биномиальных

коэффициентов вытекает эффективный способ рекуррентного вычисления значений биномиальных коэффициентов, который можно представить в графической форме, известной как треугольник Паскаля.

В этом равнобедренном треугольнике каждое число, кроме единиц на боковых сторонах, является суммой двух чисел, стоящих над ними. Биномиальный коэффициент находится в (n + 1)-м ряду на (k + 1)-м месте.



Слайд 58

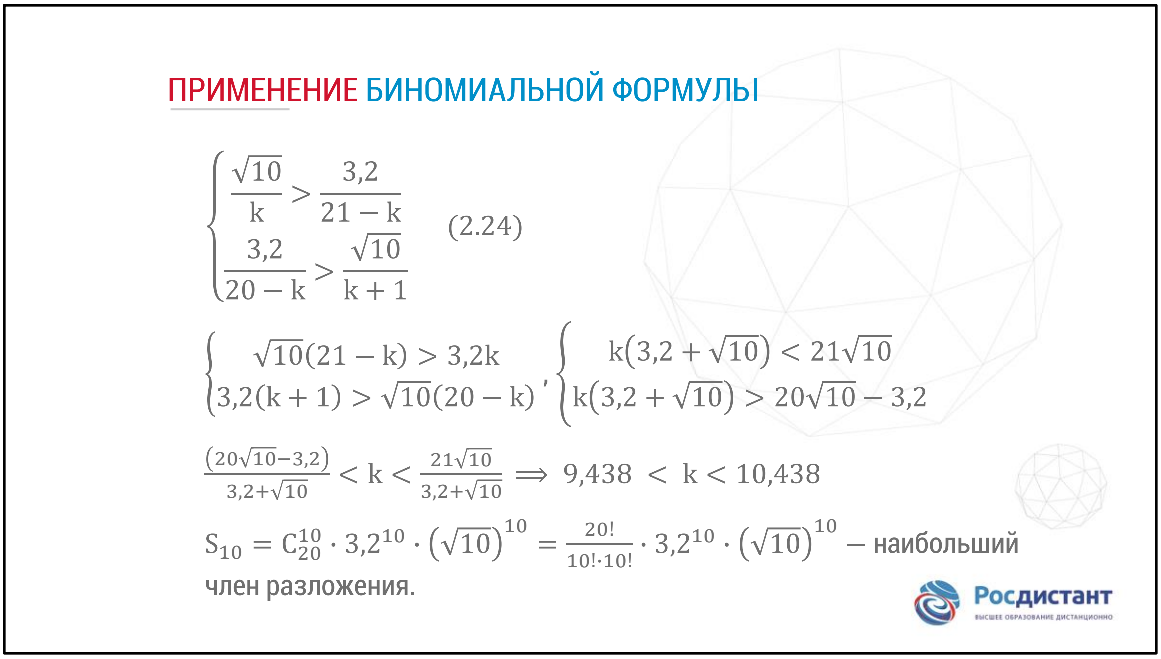
Рассмотрим пример применения биномиальной формулы. Обратимся к задаче, представленной на слайде.

Пусть наибольшим слагаемым является S_k. Тогда оно больше $(k-1)$-го слагаемого и $(k+1)$-го. Таким образом, должны выполняться неравенства (2.21).

Подставляя в неравенства (2.21) выражения для

S_k , получаем систему (2.22). Заменяя в системе (2.22) биномиальные коэффициенты на соответствующие дробные выражения, приходим к системе (2.23). Далее мы упрощаем полученную систему.

Каждое из неравенств системы (2.23) разделим на общие множители левой и правой частей. Ими являются факториалы и степени корня из десяти и трех целых двух десятых. После проведенных преобразований в каждой части обоих неравенств системы останется по одному вхождению k . Продолжение решения системы представлено на следующем слайде.



Слайд 59

Продолжим решение нашей задачи.

В результате упрощений мы получаем систему (2.24). Умножим обе части неравенств системы (2.24) на общие знаменатели участвующих в них дробей. В результате мы получим систему линейных относительно переменной k неравенств. Преобразуем эту систему так, чтобы переменная k содержалась лишь в одной части каждого из неравенств. Полученная система равносильна двойному неравенству для переменной k . Упростим данное неравенство, вычислив приближенные значения участвующих в нем дробей. Единственное целое значение k , удовлетворяющее последнему неравенству, равно десяти.

Таким образом, мы определили номер наибольшего члена разложения бинома. Теперь мы можем записать его формулу. Для этого достаточно подставить в выражение для S_k значение k , равное десяти.