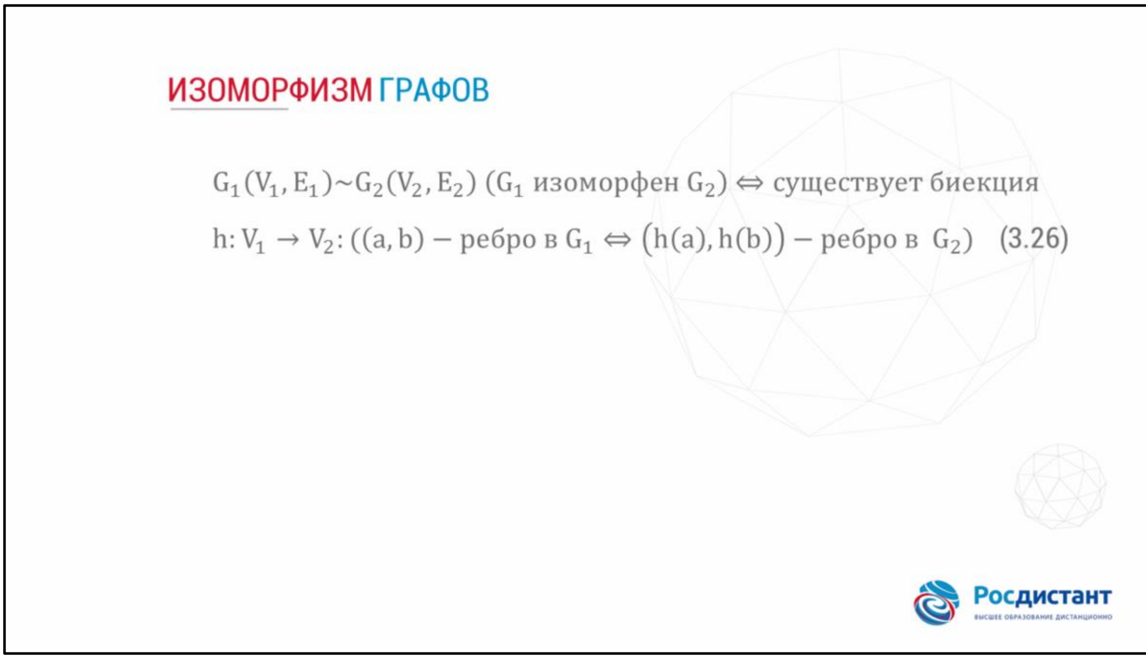
ОСНОВЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ И ЛОГИКИ

6 ЧАСТЬ

Росдистант

ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ ДИСТАНЦИОННО



Слайд 72

Тема 3.2. Изоморфизм графов. Понятия полного и двудольного графов. Операции над графами. Измерение расстояний на графе. Связность

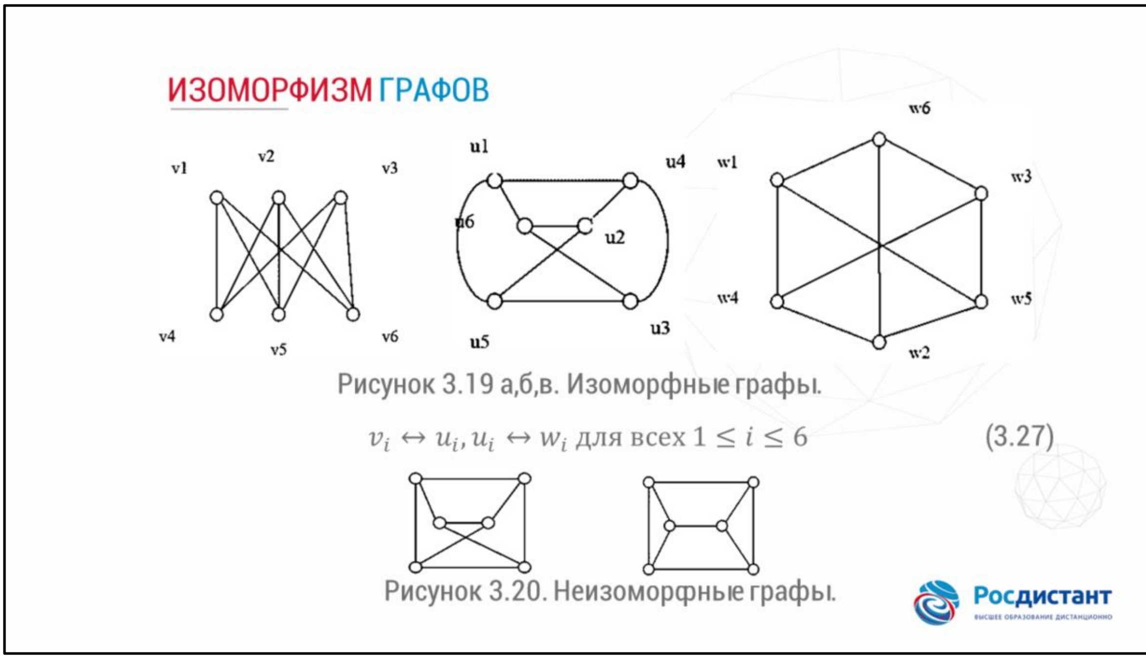
Важным понятием в теории графов является понятие изоморфизма.

Пусть граф G_1 имеет множество вершин V_1 и множество ребер E_1, а граф G_2 – множество вершин V_2 и множество ребер E_2.

Говорят, что граф G_1 изоморфен графу G_2, если существует биективное отображение V_1 на V_2, сохраняющее смежность вершин. Определение изоморфных графов с помощью математических символов представляет формула (3.26).

Изоморфизм графов является отношением эквивалентности. Действительно, каждый граф изоморфен сам себе; если первый граф изоморфен второму, то и второй изоморфен первому; если первый граф изоморфен второму, а второй – третьему, то и первый граф изоморфен третьему.

Графы, не являющиеся изоморфными, называются неизоморфными.



Слайд 73

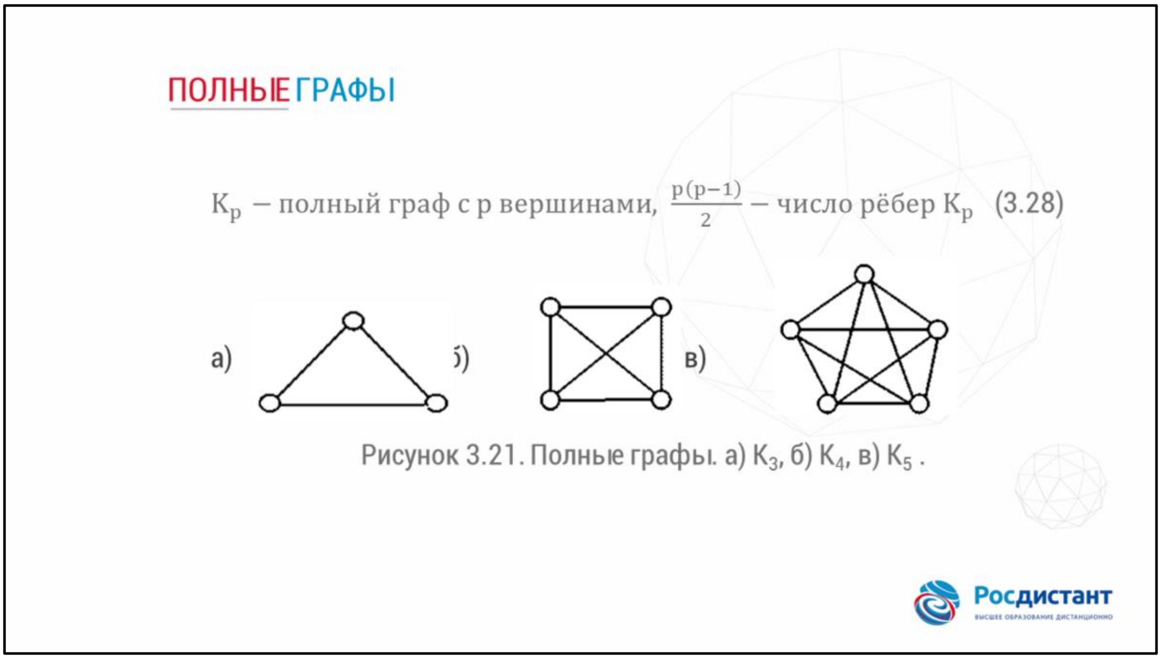
Из определения изоморфизма графов следует, что изоморфные графы отличаются лишь обозначением вершин и их расположением на плоскости.

Графы изучаются с точностью до изоморфизма, то есть рассматриваются не отдельно взятые графы, а классы эквивалентности относительно изоморфизма.

У изоморфных графов одинаково число вершин, число ребер, число вершин одинаковой степени или полустепени.

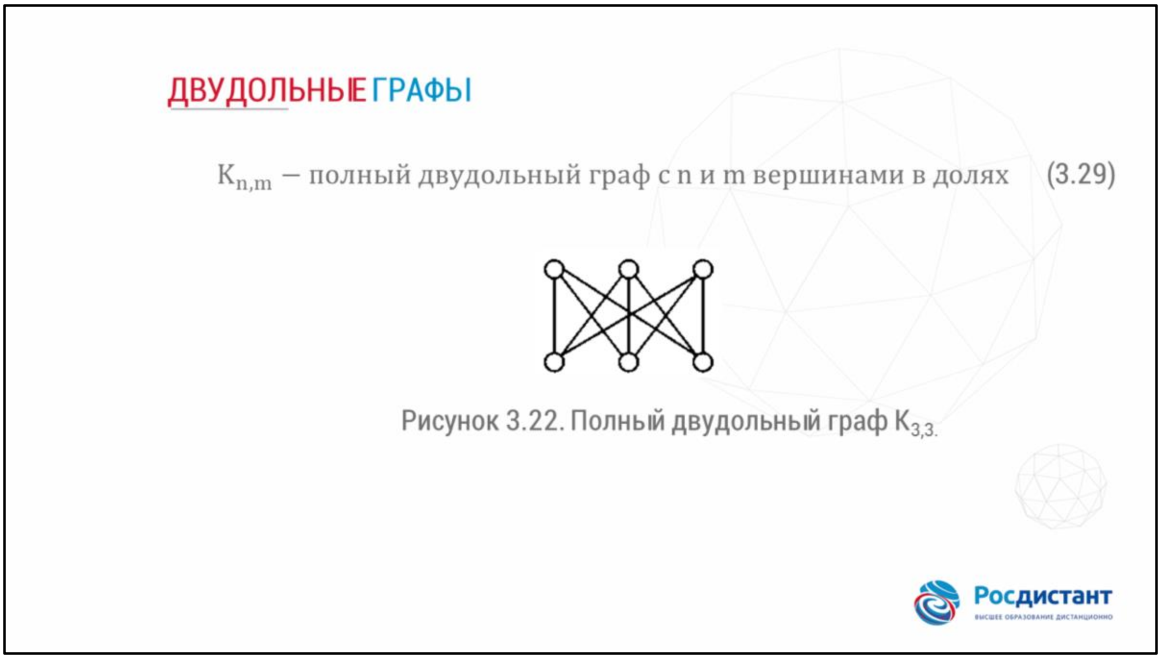
На рис. 3.19 приведены три внешне различные диаграммы, являющиеся диаграммами одного и того же графа. Требуемые соответствия между множествами вершин задаются формулой (3.27).

Количество вершин, ребер и количество смежных вершин для каждой вершины не определяют граф. У графов, изображенных на рис. 3.20, указанные характеристики совпадают, но при этом графы не являются изоморфными.



Слайд 74

Граф, состоящий из одной вершины, называется тривиальным. Неориентированный граф без петель и кратных ребер, в котором любые две вершины смежны, называется полным**.** Другими словами, в полном графе каждая вершина соединяется ребрами со всеми другими вершинами. Полный граф имеет максимально возможное число ребер. Обозначение полного графа с p вершинами и правило нахождения числа его ребер приведены в формуле (3.28). Обоснуем указанное правило. Если рассматриваемый граф имеет p вершин, то из каждой его вершины выходит $p - 1$ ребро. Тогда из всех p вершин выходит $p(p - 1)$ ребер. При таком подсчете каждое ребро было учтено два раза. Поэтому окончательный ответ получаем делением этого произведения на два. На рис. 3.21 изображены полные графы с тремя, четырьмя и пятью вершинами.

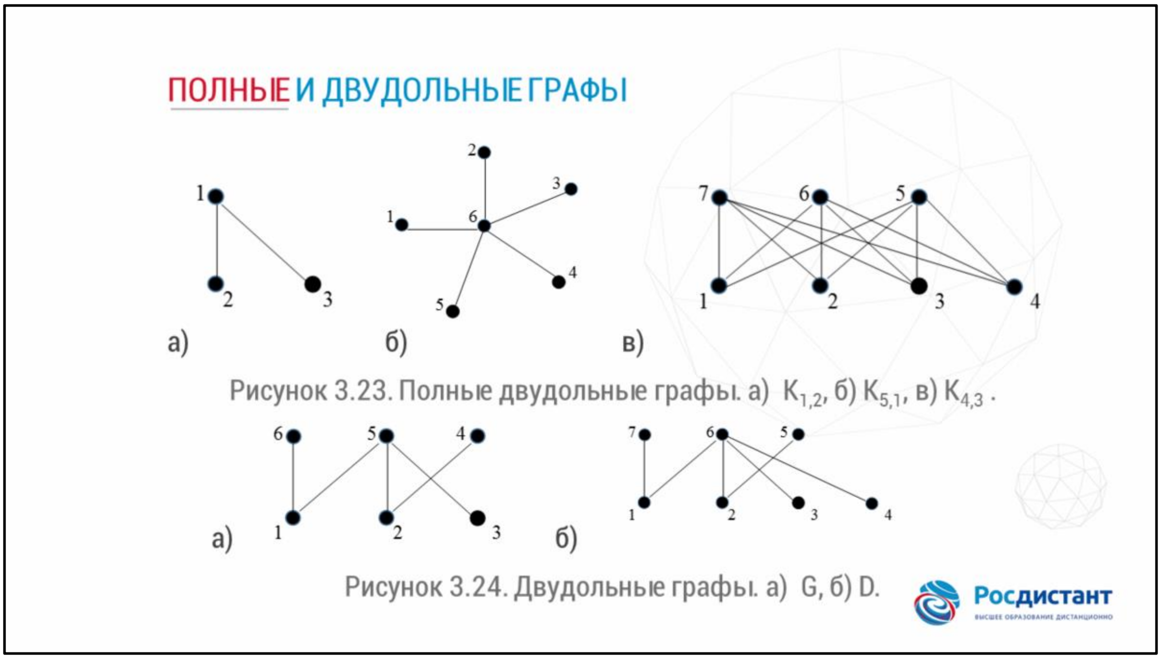


Слайд 75

Пусть G – неориентированный граф без кратных ребер, имеющий множество вершин V и множество ребер E. Граф G называется двудольным, если множество его вершин разбито на непересекающиеся подмножества V_1 и V_2 и всякое ребро инцидентно вершине из V_1 и вершине из V_2. Множества V_1 и V_2 называются долями двудольного графа.

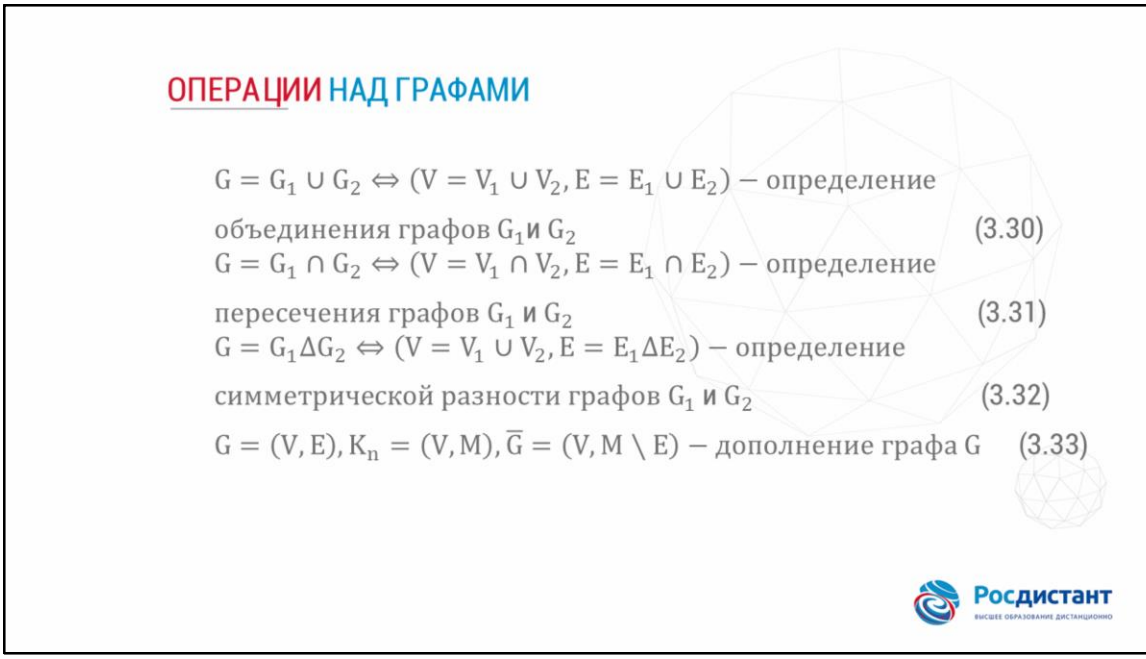
Если в двудольном графе каждая вершина из V_1 соединяется ребрами со всеми вершинами из V_2, то граф называется полным двудольным графом.

Обозначение полного двудольного графа в случае, когда множество V_1 имеет n элементов, а множество V_2 − m элементов, приведено в формуле (3.29). На рис. 3.22 изображен полный двудольный граф с тремя вершинами в каждой доле. К первой доле относятся вершины верхнего ряда, ко второй – вершины нижнего ряда.



Слайд 76

Рассмотрим другие примеры полных двудольных графов. Обратимся к рис. 3.23. На нем изображены графы $K_{1,2}$, $K_{5,1}$и К $_{4,3}$. В первую долю графа $K_{1,2}$ входит вершина 1, во вторую – вершины 2 и 3. В графе $K_{5,1}$ одна доля образована вершинами 1, 2, 3, 4, 5, другая состоит из одной вершины 6. К первой доле графа $K_{4,3}$ относятся относятся вершины 1, 2, 3, 4, ко второй – вершины 5, 6, 7. Граф $K_{1,2}$ имеет два ребра, граф $K_{5,1}$ – пять ребер, в графе $K_{4,3}$ двенадцать ребер. В общем случае количество ребер полного двудольного графа равно произведению числа вершин первой доли и числа вершин второй доли.
На рис. 3.24 изображены двудольные графы G и D, не являющиеся полными. Граф G имеет шесть вершин и пять ребер. К первой доле относятся вершины 1, 2, 3, ко второй – вершины 4, 5, 6. У графа D семь вершин и пять ребер. Первую долю образуют вершины 1, 2, 3, 4, вторую – вершины 5, 6,7.



Слайд 77

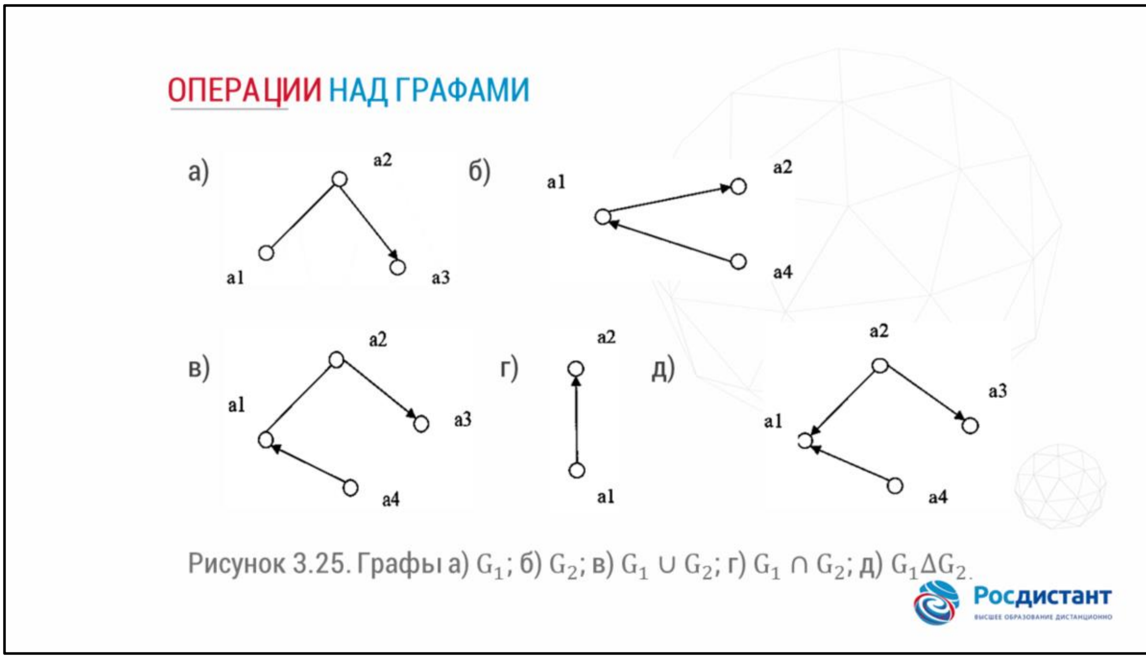
Всякий неориентированный граф можно сделать ориентированным, заменив каждое ребро парой дуг, идущих в противоположных направлениях. Будем называть смешанными графы, которые могут содержать и неориентированные ребра, и дуги. Неориентированные графы и орграфы являются частными случаями смешанных графов. Говоря об операциях над графами, под словом «граф» мы будем понимать смешанный граф, а под словом «ребро» – неориентированное ребро или дугу. Для того чтобы различать неориентированные ребра и дуги, для обозначения первых мы будем использовать квадратные скобки, а для обозначения вторых – круглые скобки.

Пусть G – граф с множеством вершин V и множеством ребер E, G_1 – граф со множеством вершин V_1 и множеством ребер E_1. Говорят, что граф G_1 является подграфом графа G, если V_1 является подмножеством V, а E_1 – подмножеством E. Подграф G_1 называется собственным подграфом графа G, если G_1 не совпадает с G.

Пусть граф G_1 имеет множество вершин V_1 и множество ребер E_1, а граф G_2 множество вершин V_2 и множество ребер E_2.

Объединением графов G_1 и G_2 называется граф G, определяемый формулой (3.30). Формула (3.31) задает граф, являющийся пересечением графов G_1 и G_2, а

формула (3.32) определяет симметрическую разность, или сумму по модулю 2, графов G_1 и G_2.
Пусть G граф с n вершинами без петель и кратных ребер. На множестве его вершин V построим полный граф, имеющий множество ребер M. Дополнением графа G называется граф, определяемый формулой (3.33).

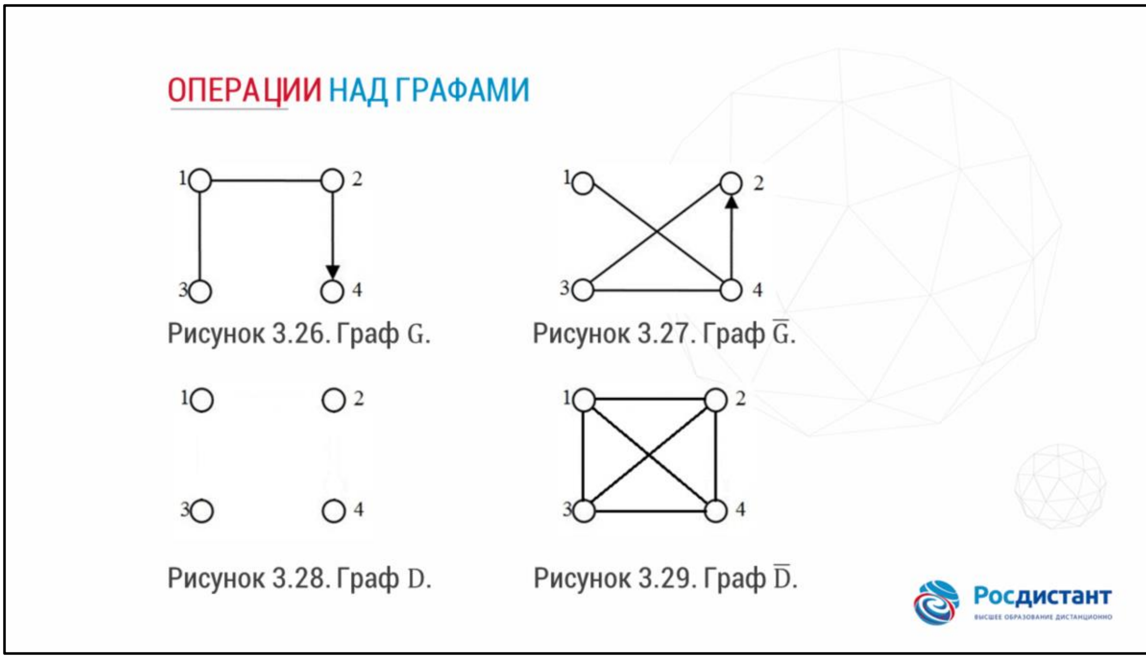


Слайд 78

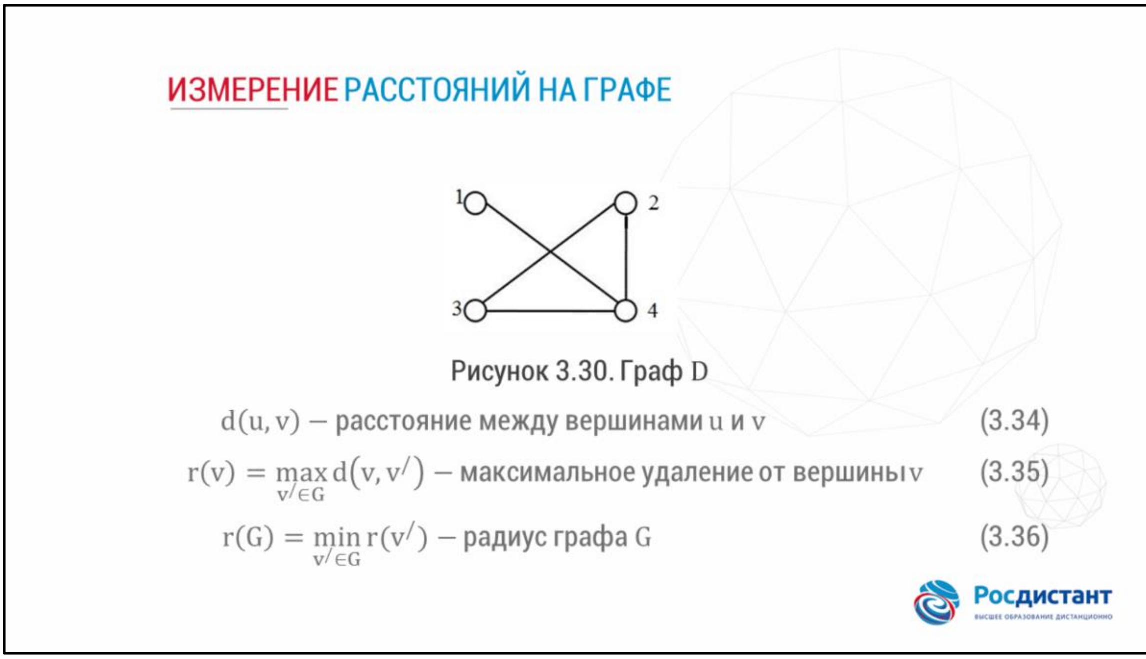
Рассмотрим графы G_1 и G_2, изображенные на рис. 3.25, а и 3.25, б соответственно. Вершины a_1 и a_2 графа G_1 соединяет неориентированное ребро, то есть двигаться по нему можно как от a_1 к a_2, так и от a_2 к a_1. Поэтому мы рассматриваем его как совокупность двух дуг. Остальные ребра данных графов являются ориентированными, то есть двигаться по ним можно только в направлении стрелок. Граф, являющийся объединением данных графов, изображен на рис. 3.25, в. Для его построения мы объединяем множества вершин и множества ребер исходных графов. Результатом объединения ориентированного ребра с неориентированным, соединяющим те же вершины, является неориентированное ребро.

На рис. 3.25, г представлен граф, получающийся в результате применения к исходным графам операции пересечения. Он состоит только из одного ориентированного ребра, так как пересечением неориентированного ребра с ориентированным, соединяющим те же вершины, является ориентированное ребро. Других общих ребер у исходных графов нет.

Граф, представляющий собой симметрическую разность заданных графов, изображен на рис. 3.25, д. Все три его ребра являются ориентированными. Множество его вершин получается в результате объединения множеств вершин исходных графов. Множество ребер представляет собой симметрическую разность множеств ребер графов G_1 и G_2. Для нахождения этой разности из множества ребер первого графа убираем те ребра, которые есть во втором графе.



Слайд 79
Остановимся на примерах графов, дополнительных к данным.
Рассмотрим граф G, изображенный на рис. 3.26. Он имеет два неориентированных ребра и одно ориентированное. Дополнительный к нему граф представлен на рис. 3.27. Ему принадлежат те и только те ребра, которых нет в графе G. Одно из них ориентированное, три – неориентированные.
Отметим, что если исходный граф является полным, то его дополнением будет граф, имеющий те же вершины и не имеющий ребер. На рис. 3.28 изображен полный граф D, а на рис. 3.29 – его дополнение.
Если, наоборот, исходный граф состоит из одних лишь вершин, то дополнительным к нему будет полный граф с теми же вершинами.
Если граф D является дополнением графа G, а граф F дополнением графа D, то графыG и F совпадают.



Слайд 80

Пусть G – неориентированный граф, в котором для любых двух вершин существует соединяющая их цепь.

Расстоянием между вершинами u и v называется длина кратчайшей цепи, соединяющей эти вершины. Обозначение для расстояния между вершинами графа приведено в формуле (3.34).

Наибольшее из расстояний между вершинами графа называется диаметром графа.

Максимальное удаление от вершины v в графе G определяется формулой (3.35).

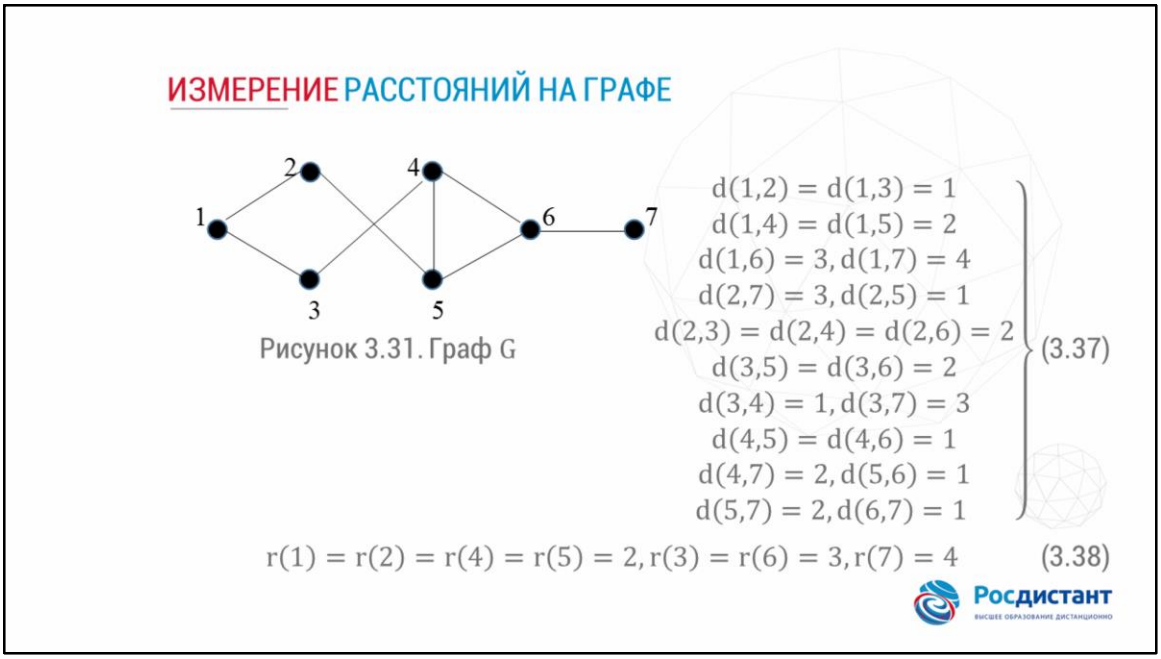
Центром графа называется вершина с наименьшим максимальным удалением от нее.

Максимальное удаление от центра называется радиусом графа. Формула (3.36) определяет радиус графа с помощью математических символов.

Центр не обязательно единственный. В полном графе радиус равен 1 и любая вершина является центром.

Множество вершин, находящихся на одинаковом расстоянии от вершины v, называется ярусом вершины v.

Для графа D, изображенного на рис. 3.30, диаметр равен двум, радиус – единице, центром графа является вершина 4.



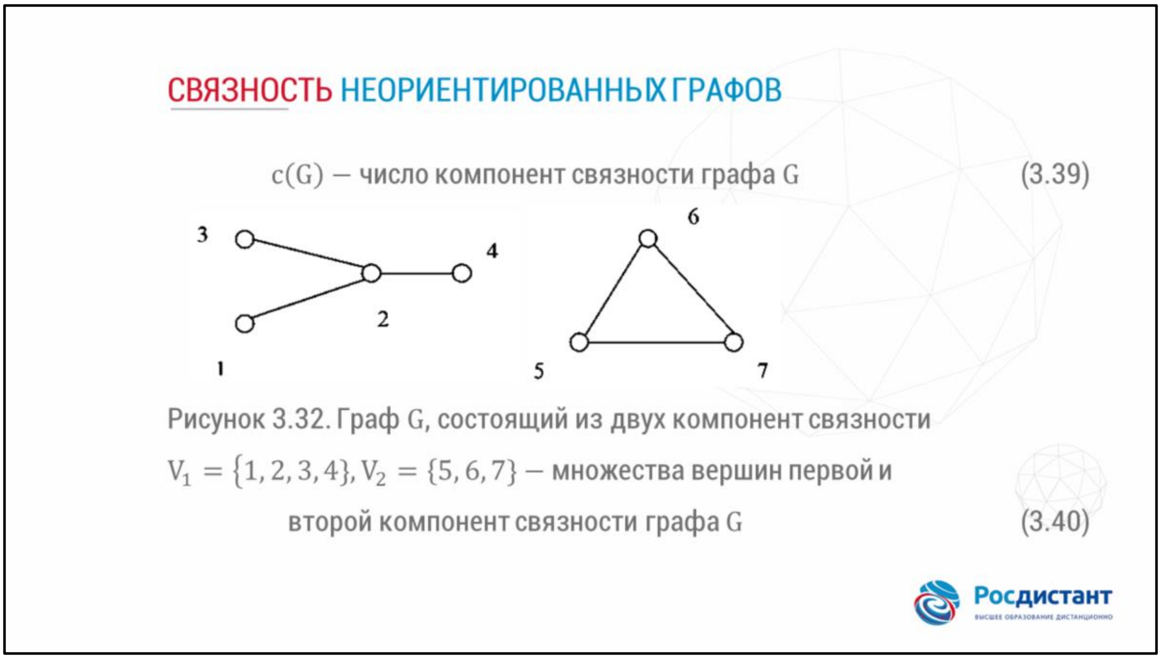
Слайд 81

Рассмотрим граф, изображенный на рис. 3.31. Расстояния между его вершинами представлены соотношениями (3.37). Диаметр графа равен наибольшему из расстояний, то есть четырем. Из равенств (3.37) находим максимальные удаления от вершин графа G. Их значения определяются формулами (3.38). Центрами графа являются вершины 1, 2, 4 и 5 с наименьшим максимальным удалением. Радиус графа G равен максимальному удалению от центра, то есть двум.

Вершина 1 имеет 4 яруса. Первый ярус образуют вершины 2 и 3, второй – вершины 4 и 5, третий – вершина 6, четвертый – вершина 7. Столько же ярусов имеет вершина 7.

У вершины 2 графа 3 яруса. Один из них образован вершинами 1 и 5, другой – вершинами 3, 4 и 6, третий – вершиной 3. Вершины 3 и 6 также имеют по 3 яруса.

Число ярусов вершины 4 равно двум. Первый ярус состоит из вершин 3, 5 и 6, второй – из вершин 1, 2 и 7. Столько же ярусов у вершины 5.



Слайд 82

Пусть G – неориентированный граф.

Говорят, что вершины u и v в графе G связаны отношением достижимости, если существует соединяющая их цепь. Граф, в котором любые две вершины связаны отношением достижимости, называется связным. Тривиальный граф, состоящий из изолированной вершины, по определению считается связным. Граф, не являющийся связным, называется несвязным.

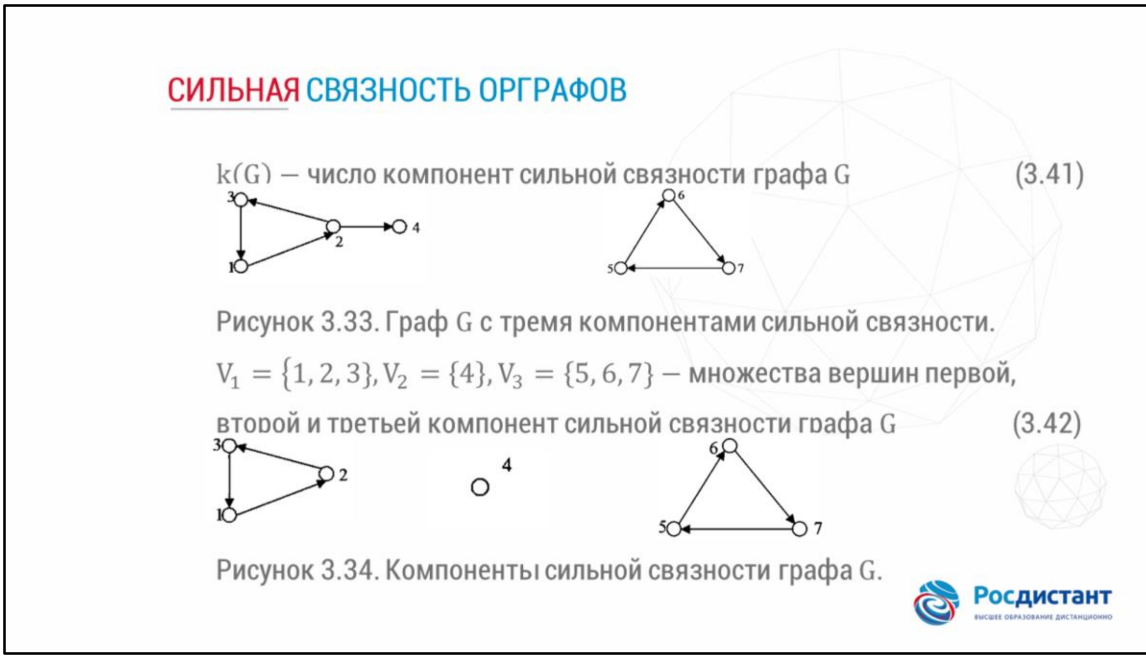
Отношение достижимости вершин является отношением эквивалентности.

Компонентой связности графа G называется такой его связный подграф, который не является собственным подграфом никакого другого связного подграфа графа G.

Классы эквивалентности по отношению достижимости образуют разбиение множества вершин графа G на подмножества вершин, входящих в одну компоненту связности. Для построения компоненты связности достаточно взять один класс эквивалентности и перенести на его вершины ребра из графа G.

Одной из характеристик графа является число его компонент связности. Обозначение для данной величины приведено в формуле (3.39). Граф G является связным тогда и только тогда, когда он имеет одну компоненту связности. Граф, состоящий из двух или более изолированных вершин,

называется вполне несвязным.
Граф G, изображенный на рис. 3.32, имеет две компоненты связности. Формула (3.40) представляет множества V_1 и V_2 вершин, входящих соответственно в первую и вторую компоненты.



Слайд 83

Пусть теперь G – ориентированный граф.

Говорят, что вершины u и v в орграфе G связаны отношением двусторонней достижимости, если существует как путь из u в v, так и путь из v в u. Орграф, в котором любые две вершины связаны отношением двусторонней достижимости, называется сильно связным. Тривиальный граф, состоящий из изолированной вершины, по определению считается сильно связным.

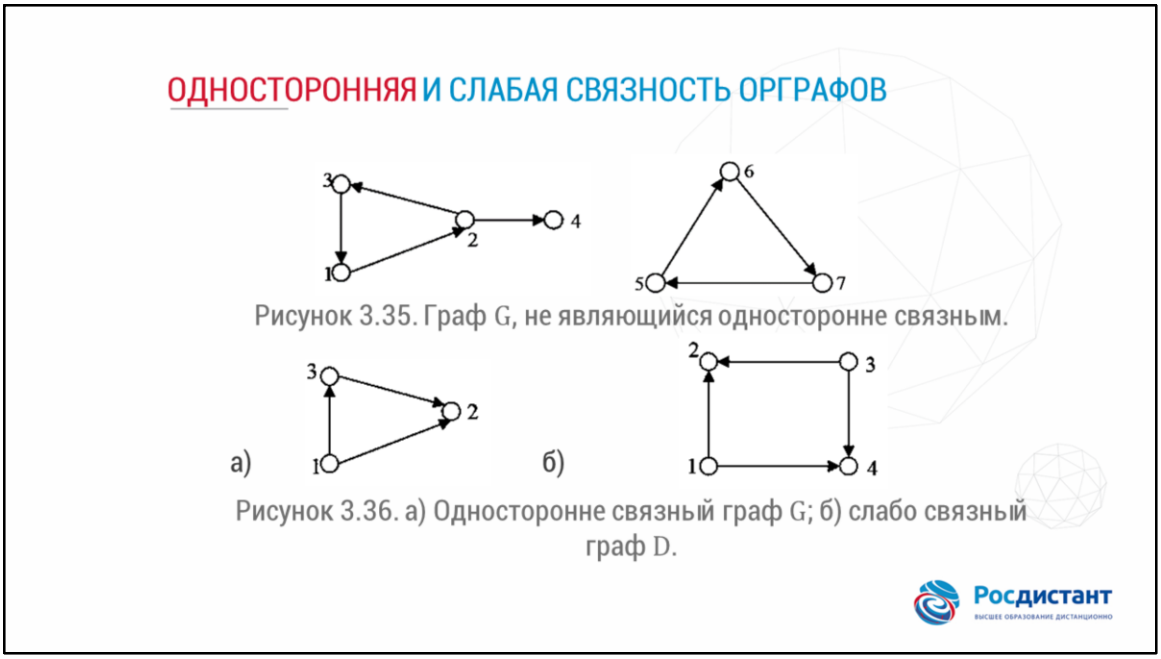
Отношение двусторонней достижимости вершин является отношением эквивалентности.

Компонентой сильной связности орграфа G называется такой его сильно связный подграф, который не является собственным подграфом никакого другого сильно связного подграфа орграфа G.

Классы эквивалентности по отношению двусторонней достижимости образуют разбиение множества вершин орграфа G на подмножества вершин, входящих в одну компоненту сильной связности. Для построения компоненты сильной связности достаточно взять один класс эквивалентности и перенести на его вершины дуги из орграфа G.

Одной из характеристик орграфа является число его компонент сильной связности. Обозначение для данной величины приведено в формуле (3.41).

Орграф G является сильно связным тогда и только тогда, когда он имеет одну компоненту сильной связности.
Граф G, изображенный на рис. 3.33, не является сильно связным, так как имеет три компоненты сильной связности. Им соответствуют множества вершин, представляемые формулой (3.42). Сами компоненты сильной связности графа G изображены на рис. 3.34.



Слайд 84

Орграф G называется односторонне связным, если для любых его вершин и u и v существует либо путь из u в v, либо путь из v в u.

Очевидно, что если орграф является сильно связным, то он будет и односторонне связным.

Граф, изображенный на рис. 3.35, не является односторонне связным, так как, скажем, из вершины 1 нет пути в вершину 5 и, наоборот, из вершины 5 нет пути в вершину 1.

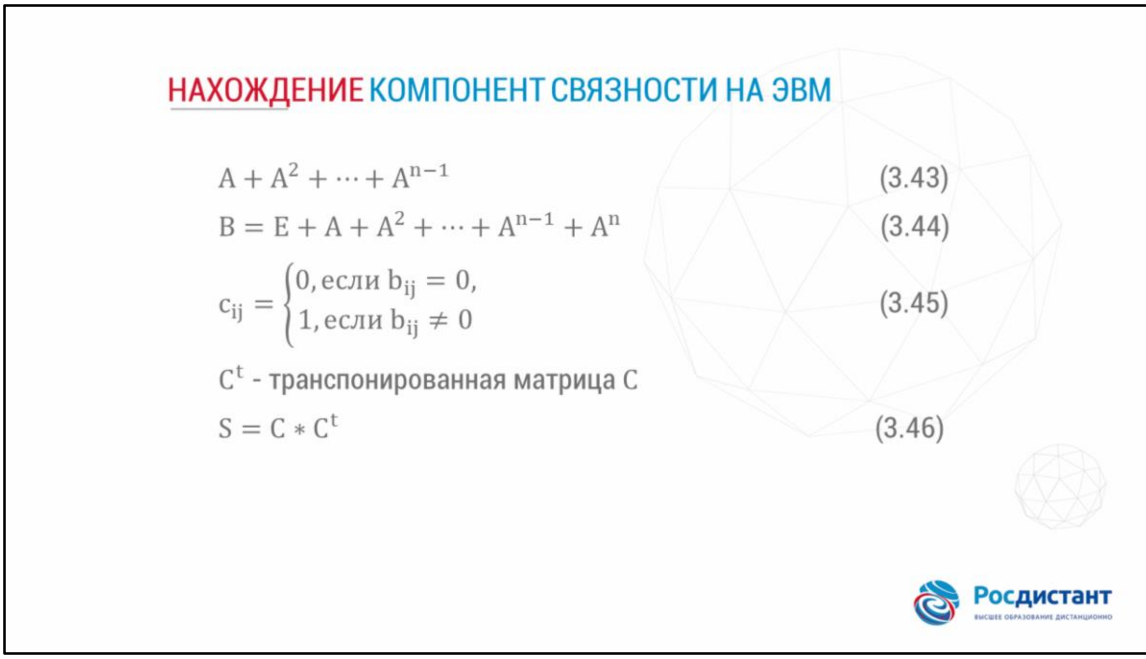
На рис. 3.36, а представлен односторонне связный граф, не являющийся сильно связным.

Пусть G – ориентированный граф, имеющий множество вершин V и множество ребер E.

Графом, ассоциированным с орграфом G, называется неориентированный граф G_1, имеющий то же множество вершин V и множество ребер E_1 получающееся из множества E заменой всех дуг на неориентированные ребра.

Орграф G называется слабо связным, если ассоциированный с ним неориентированный граф является связным.

На рис. 3.36, б представлен слабо связный граф, не являющийся односторонне связным.



Слайд 85

Рассмотрим способ нахождения компонент связности с помощью ЭВМ. Чтобы в n-вершинном графе или орграфе G существовал маршрут из вершины v_i в вершину v_j, необходимо и достаточно, чтобы итый-житый элемент матрицы 3.43 был отличен от нуля.

Составим из матрицы B, определенной в формуле (3.44), матрицу C, используя правило (3.45).

Матрица C называется матрицей связности, если G – неориентированный граф, и матрицей достижимости, если G – орграф. Граф G будет содержать маршрут из вершины v_i в вершину v_j тогда и только тогда, когда элемент C_{ij} равен 1.

Значит, матрица C содержит информацию о существовании связей между различными элементами графа с помощью маршрутов. Если все элементы матрицы связности равны единице, то граф является связным.

В случае неориентированного графа матрица C совпадает с транспонированной и является матрицей связности. В случае ориентированного графа транспонированная матрица C называется матрицей контрдостижимости, так как если итый-житый элемент матрицы C показывает наличие пути из вершины v_i в вершину v_j, то житый-итый элемент транспонированной матрицы показывает наличие обратного пути из вершины вэ житое в вершину вэ итое.

Матрицы достижимости и контрдостижимости можно использовать для нахождения сильных компонент орграфа.
Рассмотрим матрицу, определенную в формуле (3.46), где операция звездочка означает поэлементное произведение матриц. Элемент матрицы S равен 1 тогда и только тогда, когда вершины v_i и v_j взаимно достижимы. Следовательно, компонента сильной связности, содержащая вершину v_i, состоит из элементов v_j, для которых элемент v_{ij} равен единице.