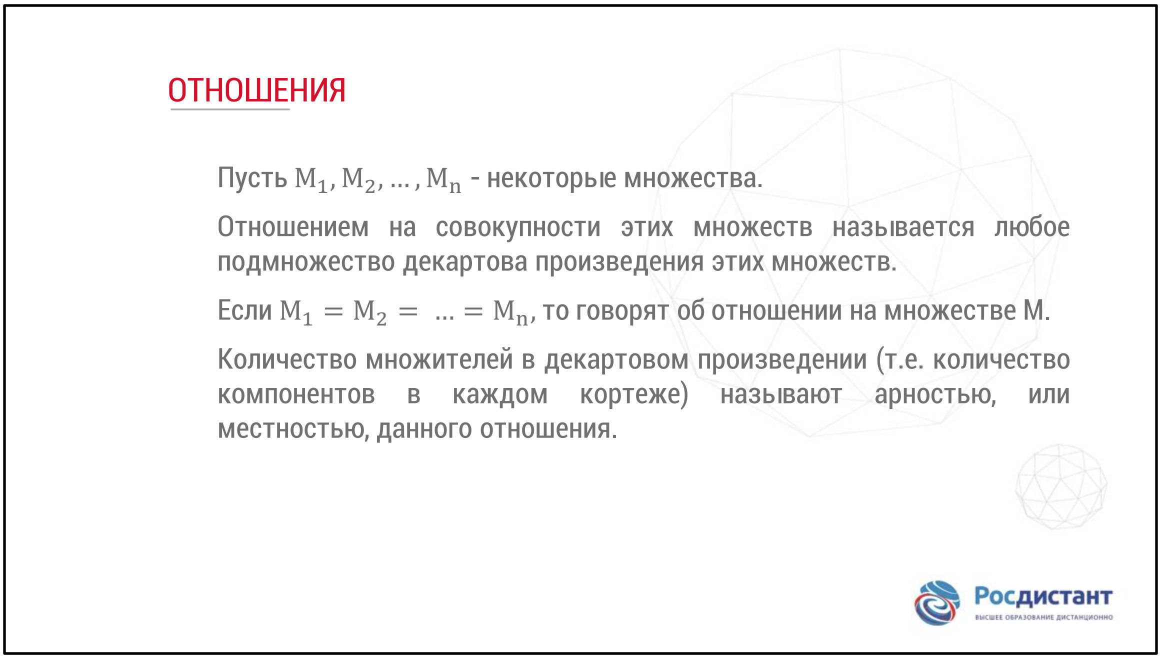
ОСНОВЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ И ЛОГИКИ

3 ЧАСТЬ

Росдистант

ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ ДИСТАНЦИОННО



Слайд 24

Тема 1.3. Отношения и их свойства

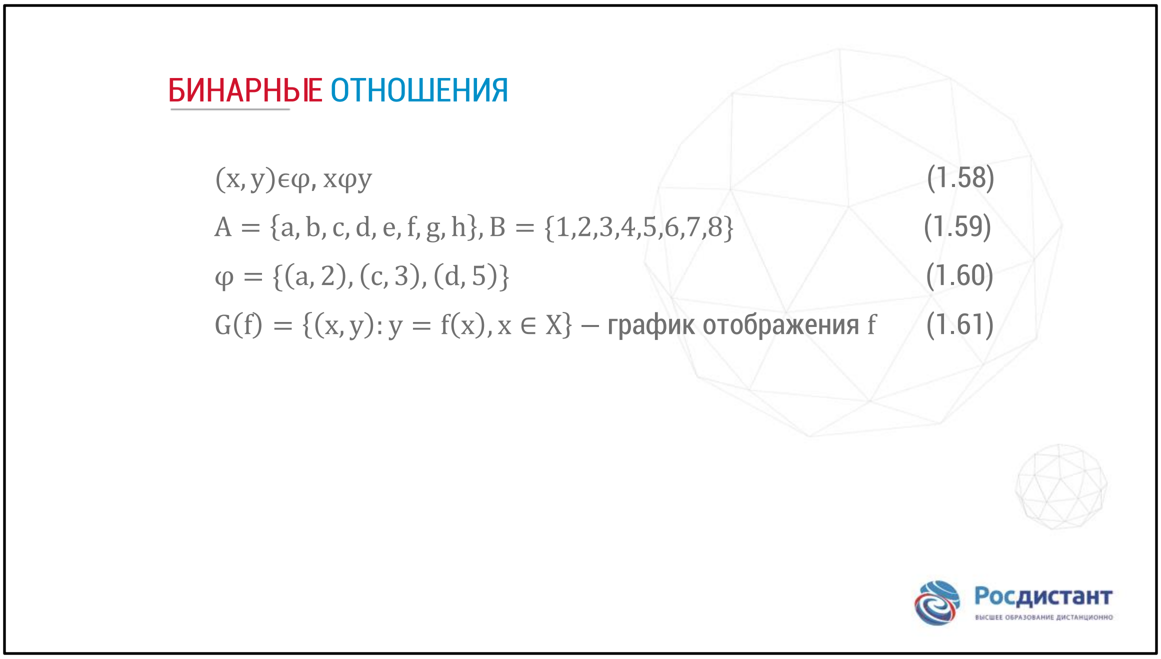
Мы уже обсудили, что множества играют фундаментальную роль в самой математике и ее многообразных приложениях. Однако описывая окружающий мир, мы не только перечисляем интересующие нас объекты, т. е. задаем множество, но и указываем отношения, которыми эти объекты могут быть связаны. Такие связи могут быть весьма разнообразными, но мы начнем с наиболее общего представления об отношениях элементов множеств.

В отношениях могут находиться элементы самых разнообразных множеств. Например, могут быть родственные отношения между людьми, скажем, один человек другому является братом; между числами – одно число меньше другого; между геометрическими объектами – некоторая точка принадлежит той или иной прямой и т. д.

Совсем не обязательно, чтобы отношение связывало равно два объекта – человека с человеком, число с числом, точку и прямую. Например, «отношение точка A лежит между точками B и C» связывает, как мы видим, три объекта.

Как нередко фиксируются отношения в обыденной жизни? Например, что два человека стали мужем и женой. Идут в ЗАГС, и там им выдают бумагу, в которой так и написано, что эти два человека – муж и жена. Как фиксируется, что такой-то является сыном или дочерью таких-то двух человек? То же самое – выдается бумага, в которой фигурируют эти три человека. Как фиксируется, что данный человек принят на работу на такое-то предприятие? Заключается договор между этим человеком и уполномоченным представителем предприятия. Что общего во всех этих примерах? В каждом из них просто фиксируется, кто именно или что именно, находится в рассматриваемом отношении. Если отвлечься от того, о чем эти отношения, то становится понятно, что задать отношение – это записать те объекты, которые находятся в данном отношении. Такую запись удобно представлять кортежем, а список всех таких записей и есть описание данного отношения. Каждый кортеж, в свою очередь, – это элемент декартова произведения тех множеств, откуда берутся элементы кортежа. Тем самым мы приходим к следующему определению.

Таким образом, отношения бывают двуместные, или бинарные, трехместные, четырехместные и т. д. Отношение «меньше» на множестве чисел бинарное. Отношение «точка лежит внутри треугольника» тоже бинарное на совокупности из двух множеств – множества точек и множества треугольников. Отношение «лежать между» на множестве точек трехместное, отношение «четыре точки лежат на одной окружности» на множестве точек плоскости четырехместное.



Слайд 25

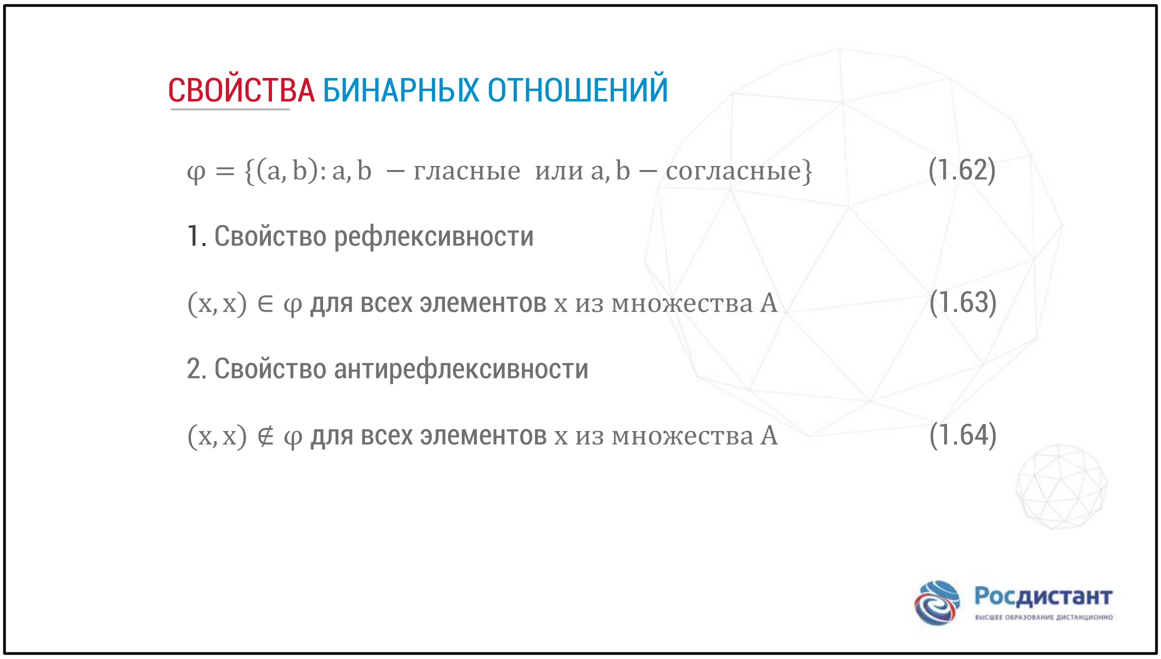
Остановимся более подробно на отношении, заданном на двух множествах, т. е. бинарном отношении. Бинарные отношения занимают особое место среди всех отношений, поскольку многие из наиболее важных отношений бинарные.

Бинарным отношением между множествами A и B называется любое подмножество φ декартова произведения этих множеств. Если упорядоченная пара (x, y) принадлежит бинарному отношению φ, то говорят, что x находится в отношении φ с y. Обозначения, используемые в этом случае, приведены в формуле (1.58). Если множества A и B совпадают, то говорят, что отношение φ задано на множестве A. Формула (1.59) задает конкретные множества A и B, а формула (1.60) – пример бинарного отношения между ними.

Понятие отношения как подмножества декартова произведения формализовано в теории множеств и получило широкое распространение в языке математики во всех ее ветвях. Теоретико-множественный взгляд на отношение характеризует его с точки зрения объема – какими комбинациями элементов оно наполнено. Содержательный подход рассматривается в математической логике, где отношение – пропозициональная функция, то есть выражение с неопределенными переменными, подстановка конкретных значений для которых делает его истинным или ложным. Важную роль отношения играют в универсальной алгебре, где базовый объект изучения раздела – множество с произвольным набором операций и отношений. Одно из самых ярких применений техники математических отношений в приложениях – реляционные системы управления базами данных, методологически основанные на формальной алгебре отношений.

Поскольку отношение – это по определению некоторое множество, то его можно задавать так же, как задают множества – списком или указанием характеристического свойства. Ясно, что первый способ целесообразен, когда множества, на которых рассматривается отношение, конечны. Если же среди множеств имеются бесконечные, то отношение задается с помощью характеристического свойства.

Если f отображение из X в Y, то бинарным отношением между множествами X и Y является график этого отображения, определяемый формулой (1.61).



Слайд 26

Примером бинарного отношения на множестве действительных чисел R является отношение порядка . Оно состоит из всех упорядоченных пар действительных чисел (x, y) , для которых x не превосходит y . Это отношение можно рассматривать и на других числовых множествах, например, на множестве целых чисел Z , на множестве натуральных чисел N . Другим примером бинарного отношения на множестве натуральных чисел N является отношение делимости, состоящее из всех упорядоченных пар натуральных чисел (x, y) , для которых x без остатка делится на y .

Примером бинарного отношения на множестве A букв русского алфавита является отношение, задаваемое формулой (1.62). Исходя из данной формулы, мы видим, что в данном отношении φ состоят пары гласных или согласных букв.

Теперь рассмотрим, какими свойствами обладают отношения.

Бинарное отношение φ на множестве A называется рефлексивным, если каждый элемент x множества A находится в отношении φ с самим собой.

Примером рефлексивного отношения является отношение порядка на множестве действительных чисел.

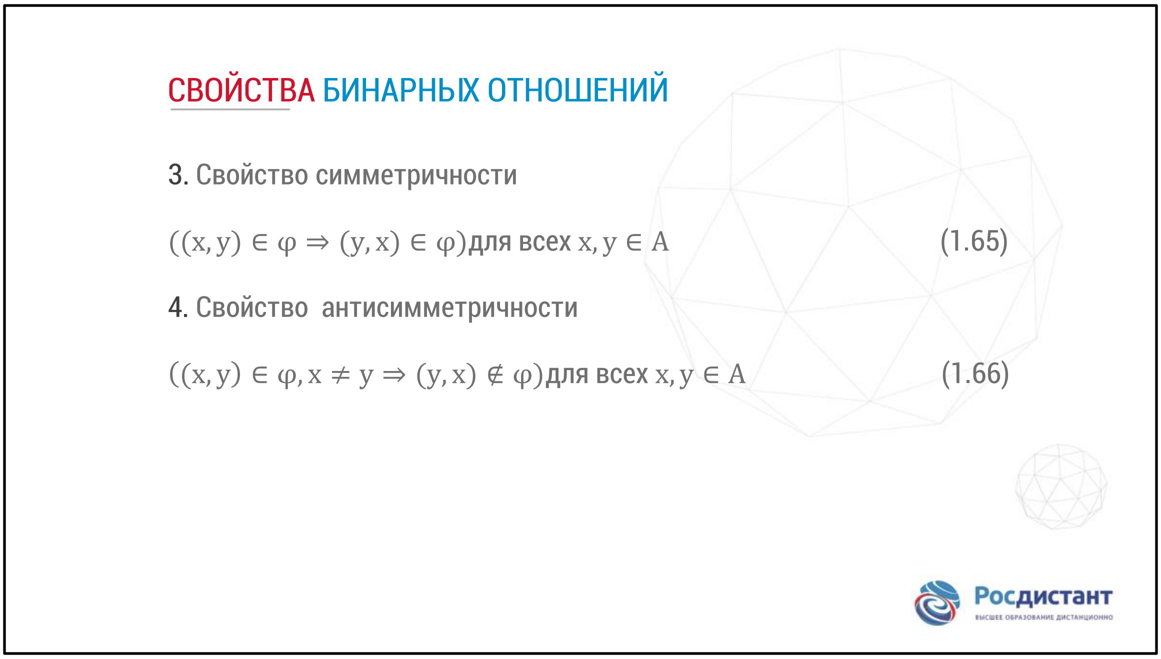
Бинарное отношение φ на множестве A называется антирефлексивным, если каждый элемент x множества A не находится в отношении φ с самим собой.

Стоит отметить, что свойство антирефлексивности не является противоположным свойству рефлексивности. Отношение может не обладать ни свойством рефлексивности, ни свойством антирефлексивности.

Примером антирефлексивного отношения может служить отношение строгого порядка < на множестве действительных чисел. Это отношение состоит из всех упорядоченных пар действительных чисел (x, y), для которых x строго меньше y .

Определения рефлексивного и антирефлексивного отношений с помощью математических символов представлены формулами

(1.63), (1.64).



Слайд 27

Бинарное отношение φ на множестве A называется симметричным, если для любых элементов x, y множества A из того что x находится в отношении φ с y следует, что y находится в отношении φ с x .

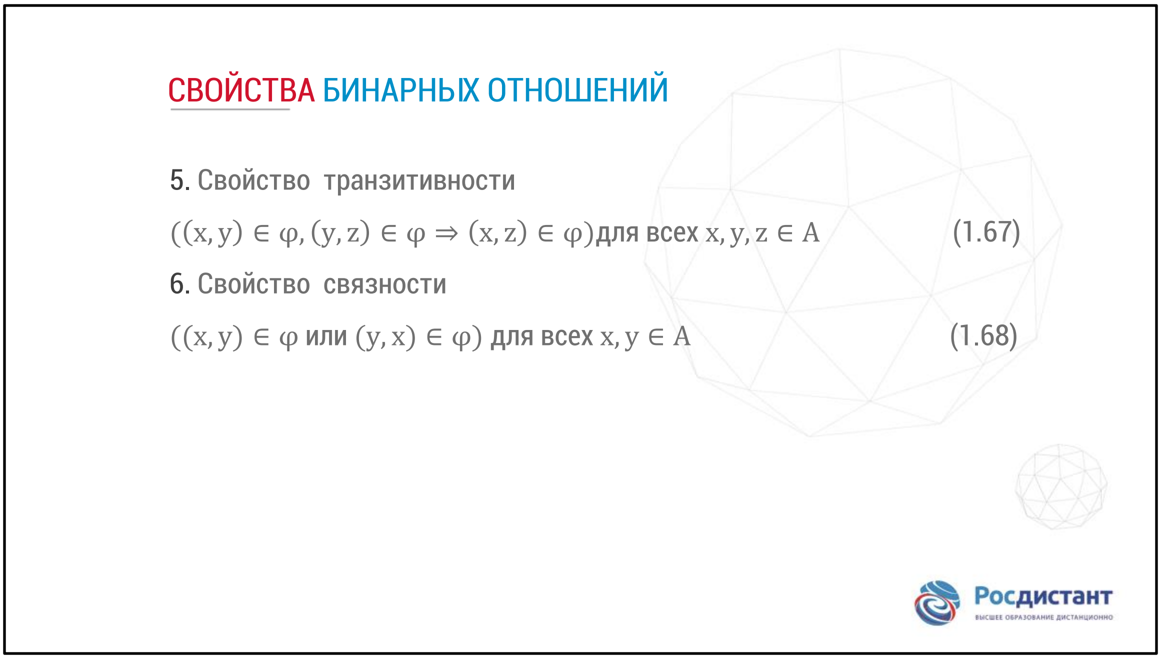
Примером симметричного отношения является отношение равенства на множестве целых чисел, состоящее из всех пар целых чисел вида (x, x) .

Бинарное отношение φ на множестве A называется антисимметричным, если для любых различных элементов x, y множества A из того что x находится в отношении φ с y следует, что y не находится в отношении φ с x .

Примером антисимметричного отношения может служить отношение $<$ на множестве действительных чисел.

Определения симметричного и антисимметричного отношений с помощью математических символов представлены формулами (1.65), (1.66).

Аналогично свойству рефлексивности свойства симметричности и антисимметричности не являются противоположными друг другу. Если отношение не является симметричным, то это не означает, что оно обладает свойством антисимметричности.



Слайд 28

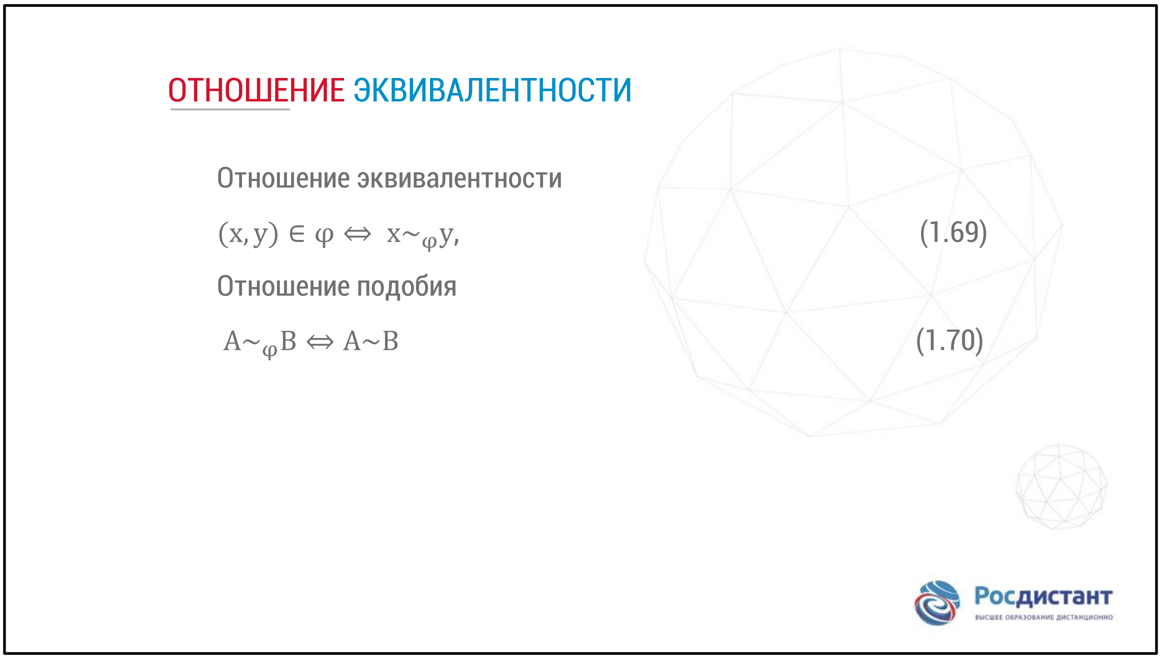
Бинарное отношение φ называется транзитивным, если для любых x, y, z из того, что x находится в отношении с y, а y находится в отношении с z следует, что x находится в отношении с z. Определение данного свойства с помощью математических символов представлено формулой (1.67).

Примером транзитивного отношения является отношение $<$ на множестве действительных чисел.

Бинарное отношение φ на множестве A называется связным, если для любых элементов x, y множества A либо x находится в отношении φ с y, либо y находится в отношении φ с x. Формула (1.68) определяет свойство связности с помощью математических символов.

Примером связного отношения может служить отношение на множестве действительных чисел. Помимо уже отмеченных свойств рефлексивности и связности, данное отношение обладает свойствами антисимметричности и транзитивности.

Рассмотренное ранее отношение делимости на множестве натуральных чисел обладает свойствами рефлексивности, антисимметричности и транзитивности.

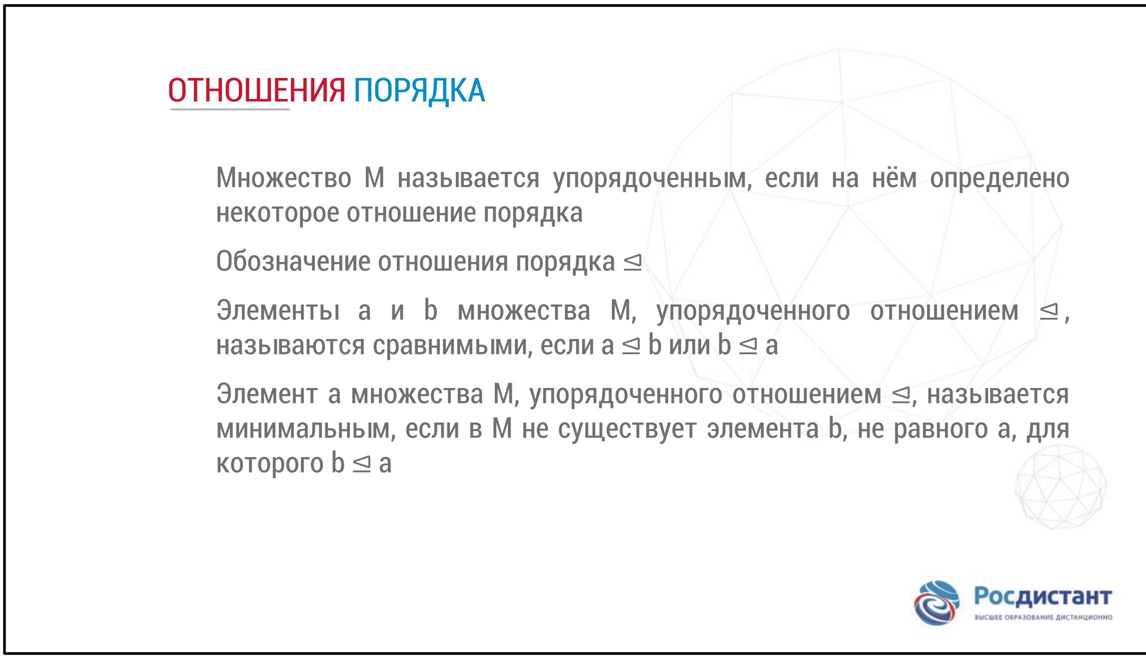


Слайд 29

Говорят, что бинарное отношение φ на множестве A является отношением эквивалентности, если оно одновременно рефлексивно, симметрично и транзитивно. Для отношения эквивалентности φ используют запись, приведенную в формуле (1.69).

Примером отношения эквивалентности является отношение равенства на множестве целых чисел. Это же отношение можно рассматривать на множествах действительных, натуральных, рациональных чисел. Другим примером отношения эквивалентности служит отношение подобия на множестве всех треугольников плоскости. Данное отношение определяет формула (1.70).

Если на множестве A задано отношение эквивалентности, то множество A разбивается на непересекающиеся подмножества эквивалентных друг другу элементов. Эти подмножества называются классами эквивалентности. Примером такого разбиения является разбиение множества всех четырехугольников плоскости на подмножества равновеликих четырехугольников.



Слайд 30

Отношение на множестве М называется отношением порядка, если оно рефлексивно, транзитивно и антисимметрично.

Вот несколько примеров отношений порядка: на множестве прямоугольников: содержаться; на множестве действительных чисел: меньше или равно; на множестве сотрудников одного учреждения: быть начальником.

Исторически сложилось так, что отношение порядка в литературе обычно называют отношением частичного порядка. Мы для краткости слово «частичного» будем опускать.

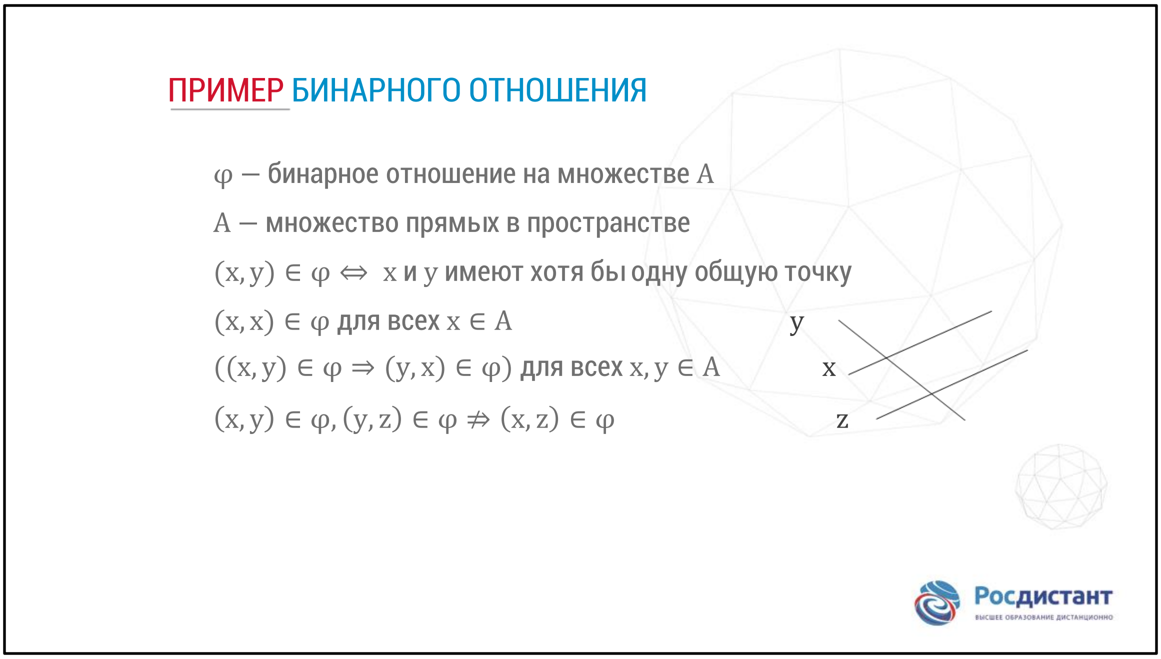
Множество целых чисел упорядочено отношением «меньше или равно», множество подмножеств произвольного множества упорядочено отношением «быть подмножеством». Даже знаки для этих отношений похожи. Удобно и для произвольного отношения порядка иметь какой-то похожий значок. Обозначение отношения порядка приведено на слайде.

В упорядоченном множестве нередко интересуются, так сказать, крайними элементами, т. е. такими, для которых уже нет меньших элементов или, наоборот, больших.

Рассмотрим примеры. **Пример 1.** В множестве неотрицательных действительных чисел, упорядоченном отношением «меньше или равно», минимальным элементом является число 0. В множестве положительных действительных чисел, упорядоченном этим же отношением, минимальных элементов нет.

Пример 2. Естественно считать точку окружностью нулевого радиуса – ведь это множество всех точек, удаленных от заданной точки на расстояние 0. На множестве всевозможных окружностей, включая окружности нулевого радиуса, рассмотрим отношение «одна окружность лежит внутри другой или совпадает с ней». Это отношение порядка, и любая точка является минимальным элементом этого множества. Если это же отношение рассмотреть на множестве окружностей ненулевого радиуса, то такое множество минимальных элементов иметь не будет.

Эти примеры показывают, что упорядоченное множество может не иметь минимальных элементов, может иметь один минимальный элемент, а может иметь несколько, и даже бесконечно много, минимальных элементов.



Слайд 31

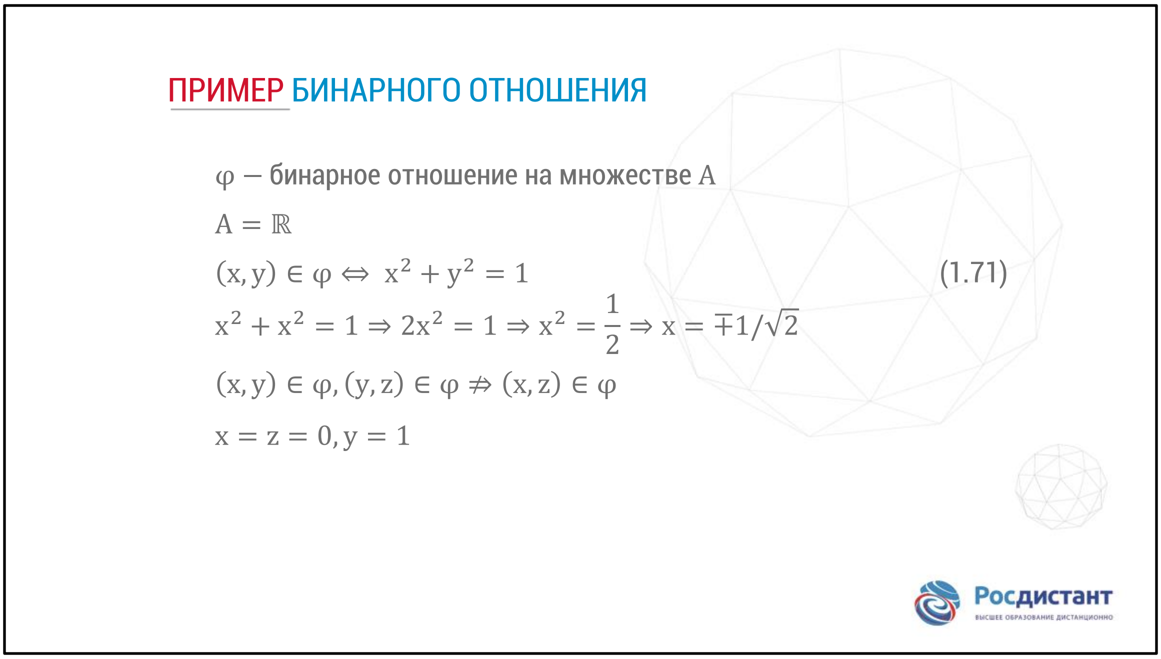
Рассмотрим примеры отношения и определим, какими свойствами они обладают. Первый пример – это отношение, заданное на множестве прямых в пространстве. Две прямые находятся в отношении φ, если они имеют хотя бы одну общую точку.

Любая прямая имеет с собой множество общих точек, следовательно, отношение рефлексивно.

Если прямая x имеет общую точку с прямой y, то, конечно же, прямая y имеет общую точку с прямой x, т. е. отношение симметрично.

Проверим, обладает ли данное отношение свойством транзитивности. На рисунке представлена ситуация, когда x находится в отношении φ с y, y находится в отношении φ с z, но x не находится в отношении φ с z. Следовательно, свойство транзитивности не выполняется.

Так как существуют прямые, которые не пересекаются, т. е. есть элементы, не находящиеся в данном отношении друг с другом, то отношение не является связным.



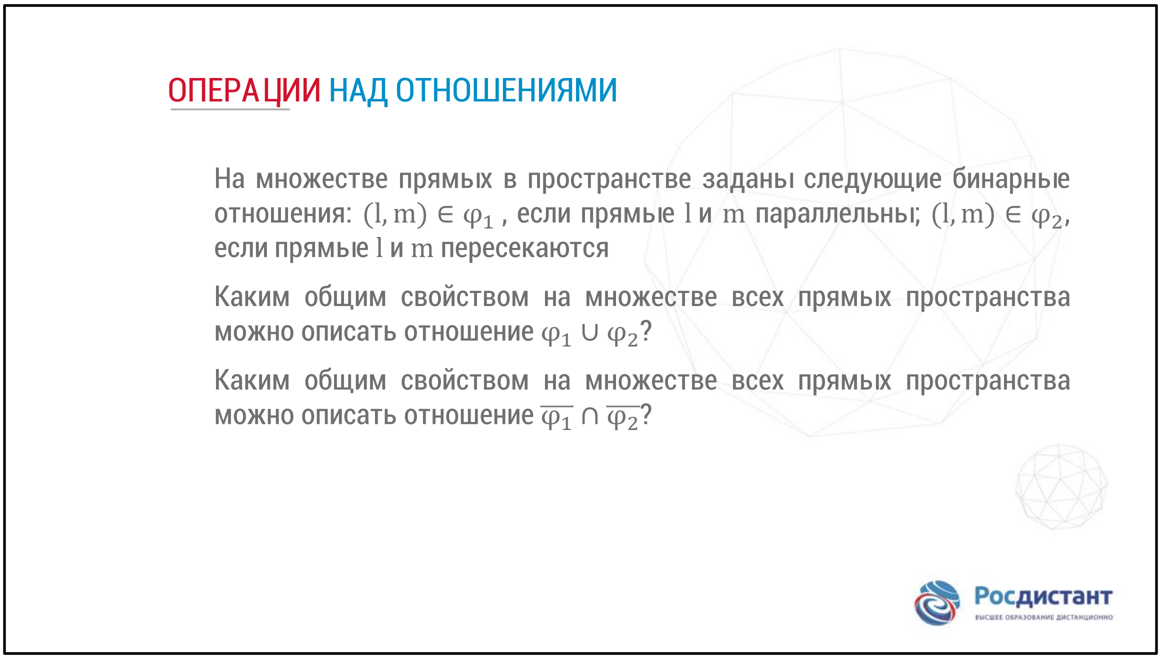
Слайд 32

Рассмотрим еще один пример отношения, заданного на множестве действительных чисел. Два числа находятся в отношении φ друг с другом, если они удовлетворяют уравнению в правой части формулы (1.71), т. е. сумма их квадратов равна единице. Поскольку указанное уравнение имеет в точности два решения, данное отношение не является ни рефлексивным, ни антирефлексивным.

Уравнение является симметричным относительно переменных x и y, а следовательно, отношение φ будет симметричным.

Рассматриваемое отношение не обладает свойством транзитивности. Это подтверждает пример таких значений x, y, z, что x находится в отношении φ с y, y находится в отношении φ с z, но при этом x не находится в отношении φ с z. Такими значения являются x, равное нулю, y, равное единице, и z,. равное нулю.

Отношение φ не является связным, так как существуют такие пары значений x и y, которые не удовлетворяют требуемому уравнению. Например, пара (1;1).



Слайд 33

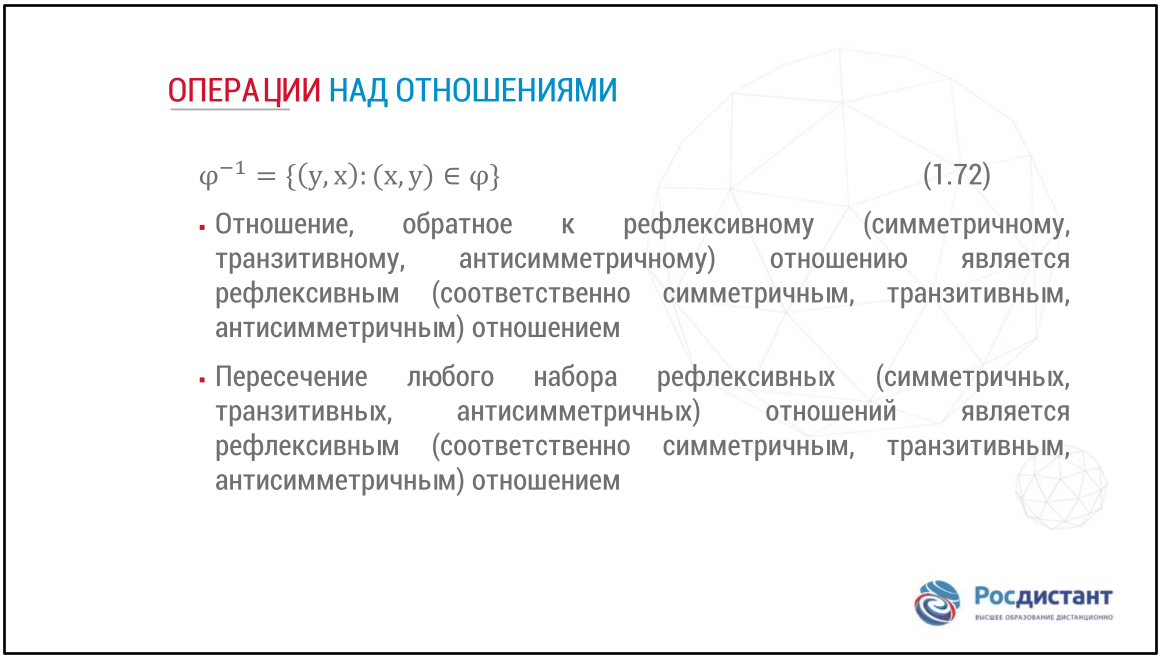
Поскольку отношения – это подмножества декартова произведения, для них определены теоретико-множественные операции объединения и пересечения. Они называются соответственно операциями объединения и пересечения отношений. Можно также рассматривать операцию дополнения заданного отношения до универсального отношения.

Обозначения этих операций такие же, как для операций над множествами.

Отношение, совпадающее с декартовым произведением двух множеств, на которых задано данное отношение, называется универсальным.

Рассмотрим пример, приведенный на слайде. Так как объединение двух множеств состоит из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств, то в объединение данных отношений входят все пары прямых, которые параллельны или пересекаются. Параллельные или пересекающиеся прямые в пространстве определяют плоскость, поэтому свойством, задающим объединение данных отношений, является принадлежность прямых одной плоскости.

Теперь определим свойство, описывающее отношение, равное пересечению дополнений данных отношений. В дополнение первого отношения входят пары прямых, которые не являются параллельными, т. е. пары пересекающихся или скрещивающихся прямых. В дополнение второго отношения входят пары прямых, которые не являются пересекающимися, т. е. пары параллельных или скрещивающихся прямых. Тогда в пересечение дополнений входят пары скрещивающихся прямых.



Слайд 34

Отношение, обратное данному, определяется аналогично обратному соответствию. Математическая запись определения обратного отношения приведена в формуле (1.72). В обратное отношение входят те пары переменных y , x , для которых пара x , y принадлежит отношению φ .

Операция обращения отношения сохраняет свойства отношения, т. е. обратное отношение обладает теми же свойствами, что и отношение φ . Например, если отношение рефлексивно, то оно содержит все пары вида (x, x) , и обратное отношение также будет содержать все пары такого вида.

Аналогично операция пересечения нескольких отношений, имеющих общее свойство, сохраняет это свойство.

Для объединения отношений ситуация иная. При объединении отношений, обладающих общим свойством, может получиться отношение, не имеющее этого свойства. Рассмотрим, например, антисимметричные отношения. Они не содержат одновременно пары вида x , y и y , x . При объединении двух отношений может оказаться, что первое отношение содержит пару x , y , а второе – пару y , x , тогда объединение данных отношений не будет обладать свойством антисимметричности.