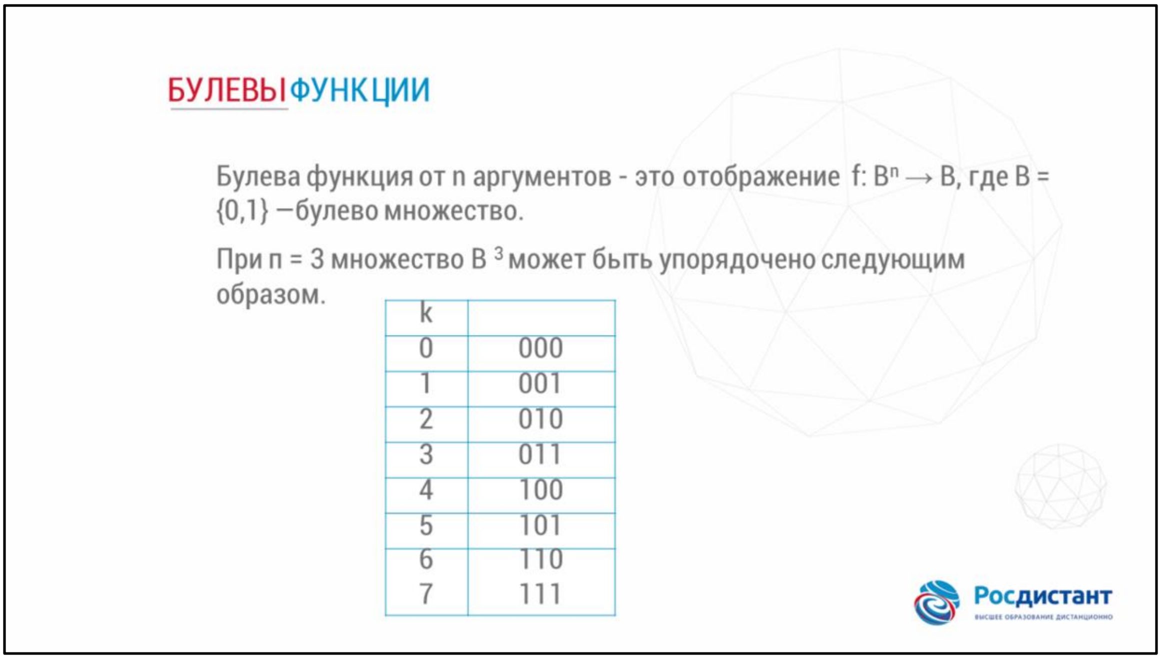
Росдистант

ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ ДИСТАНЦИОННО

ОСНОВЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ И ЛОГИКИ

9 ЧАСТЬ



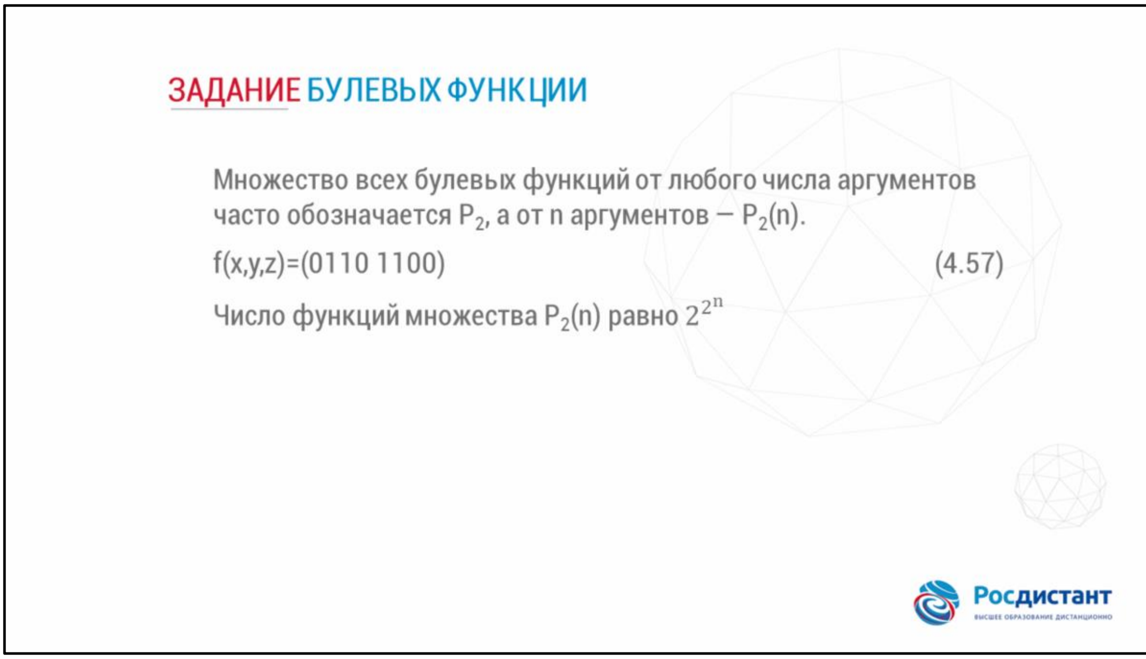
Слайд 114

Тема 4.2. Булевы функции. Реализация функций формулами

Булева функция от n аргументов – это отображение f n-й декартовой степени множества B на множество B, состоящее из двух элементов 0 и 1. Булеву функцию называют также логической функцией, или функцией алгебры логики. Двухэлементное множество B называется булевым множеством. Элементы этого множества можно интерпретировать как логические значения «истинно» и «ложно», но стоит отметить, что в общем случае они рассматриваются как формальные символы, не несущие определенного смысла. Неотрицательное целое число n называют арностью, или местностью функции, в случае n = 0 булева функция превращается в булеву константу. Элементы декартова произведения B в степени n называют булевыми векторами.

Как известно, множество B в степени n содержит 2 в степени n элементов – упорядоченных наборов длины n. Его можно естественным образом упорядочить. Для этого достаточно считать каждый набор двоичным разложением целого числа k, которое изменяется от нуля до двух в степени n минус один. При этом мы предполагаем, что число k записано с помощью n двоичных знаков. Упорядочение наборов проводится по числу k.

Такое упорядочение называют «скользящей единицей».



Слайд 115

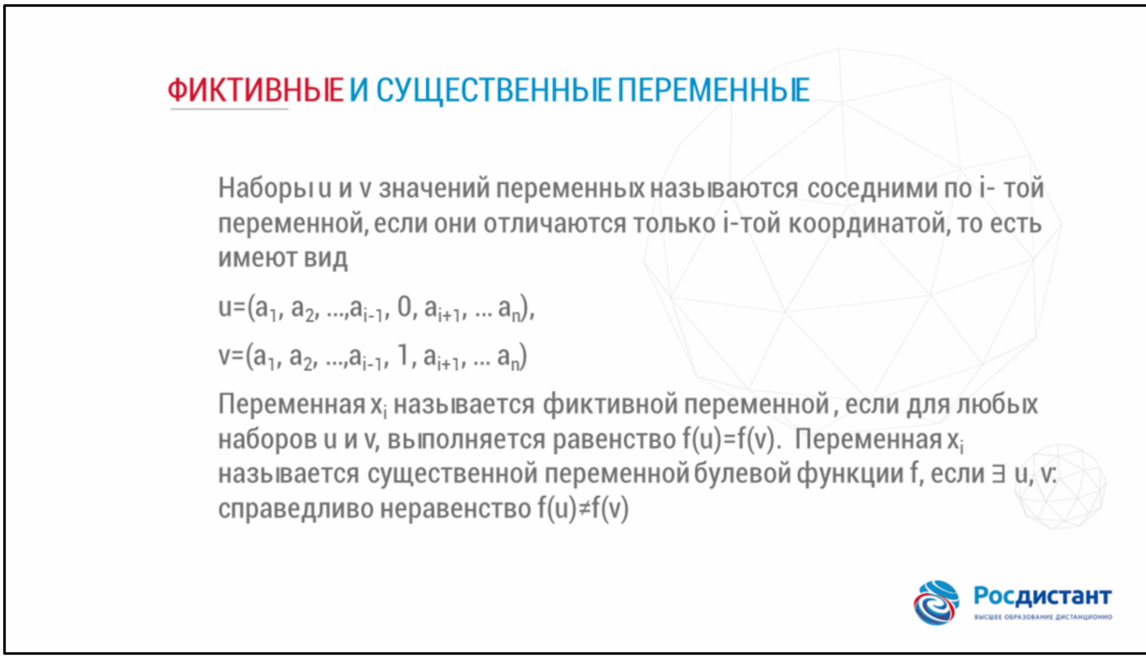
Переменные, принимающие значения из булева множества, называются булевыми переменными. Булевы функции и переменные названы по фамилии математика Джорджа Буля.

Для задания булевой функции можно использовать таблицу ее значений, которую принято называть таблицей истинности.

Две функции от одних и тех же переменных будут равными, если их таблицы истинности совпадают.

Если последовательность наборов множества В в степени n упорядочить, то это позволит определять булеву функцию только последним столбцом, который для экономии места часто записывают в строчку. Пример записи функции трех переменных приведен в формуле (4.57).

Общее число функций от n переменных можно вычислить по правилу произведения. В каждой строке таблицы истинности такой функции можно поставить два значения – нуль или один, а общее количество строк в таблице равно двум в степени n. Таким образом, теоретически количество всех функций от n переменных выражается числом 2 в степени 2 в степени n. Но некоторые из них являются по существу функциями меньшего числа переменных, а две – вообще константами. Отметим, что все функции п переменных так же, как и наборы из нулей и единиц, можно занумеровать по принципу «скользящей единицы».



Слайд 116

Познакомимся с понятиями фиктивной и существенной переменных булевой функции.

На слайде представлено определение соседних по i-той переменной наборов. Как видно из определения, эти наборы отличаются только значениями i-той переменной, все остальные переменные принимают одинаковые значения. На основе данного определения вводится понятие фиктивной переменной. Переменная x_i называется фиктивной переменной булевой функции f, если для всех пар соседних по этой переменной наборов функция принимает одинаковые значения на обоих элементах пары. Переменная x_i называется существенной переменной булевой функции f, если найдется хотя бы одна пара соседних по данной переменной наборов, на которых функция принимает различные значения.

Функции f_1 и f_2 называются равными, если функцию f_2 можно получить из f_1 путем введения или удаления фиктивных переменных.

Слайд 117

Покажем на примере, как определять, какие переменные у функции являются существенными, а какие – фиктивными.

Обратимся к функции, представленной на слайде. Рассмотрим сначала переменную x. Наборами, соседними по этой переменной, будут первый и пятый, второй и шестой, третий и седьмой, четвертый и восьмой. Сравним значения функции на указанных наборах. Мы видим, что уже на элементах первой пары значения функции разные, следовательно, переменная x – существенная.

Для переменной y соседними будут наборы первый и третий, второй и четвертый, пятый и седьмой, шестой и восьмой. На элементах всех этих пар значения функции одинаковые, а значит, переменная y фиктивная.

Перейдем к переменной z. Соседними по ней будут наборы первый и второй, третий и четвертый, пятый и шестой, седьмой и восьмой. Рассматривая первую пару, видим, что значения функции на ее элементах различны. Поэтому переменная z – существенная.

БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

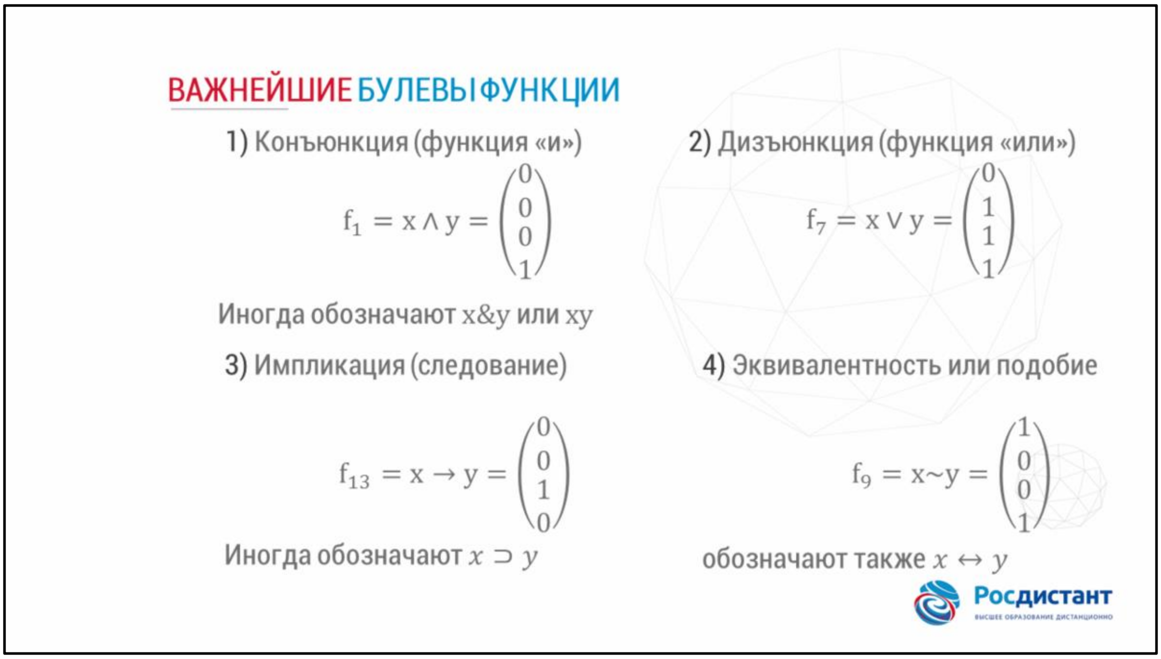
x	f_0	f_1	f_2	f_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

$f_2(x) = \bar{x}$

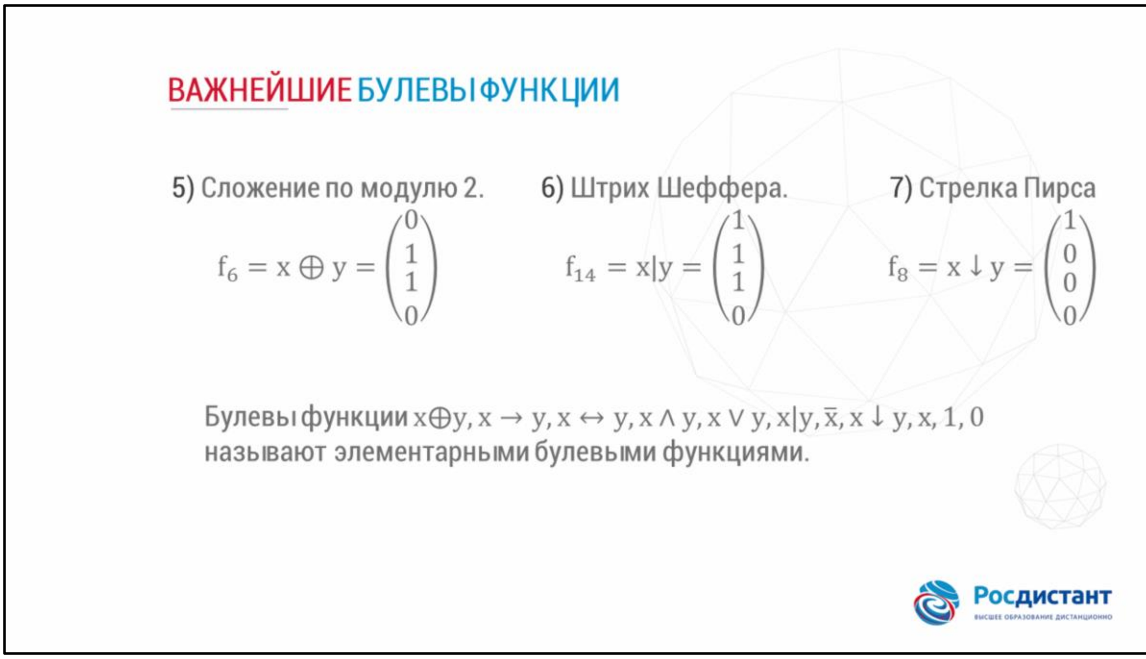
x	y	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Росдистант
высшее образование дистанционно

Слайд 118
Рассмотрим основные функции дискретной математики.
Сначала обратимся к функциям одной переменной. Согласно приведенной ранее формуле их количество равно двум во второй степени, т. е. четырем. Пронумеруем эти функции естественным образом и поместим их значения в таблицу.
Анализируя таблицу, мы видим, что функции f_0 и f_3 являются постоянными, т. е. эти две функции не зависят от x. Другими словами, переменная x является в данном случае фиктивной. Функция f_0 представляет собой тождественный нуль, а функция f_3 – тождественную единицу. Функция f_1 совпадает с переменной x, т. е. она не меняет аргумента. Переменная x здесь – существенная. Так же обстоит дело и с функцией f_2. Она принимает значения, противоположные значениям аргумента, и называется отрицанием.
Перейдем к рассмотрению булевых функций двух переменных. Число всех таких функций равно двум в четвертой степени, то есть шестнадцати. Пронумеруем их по принципу «скользящей единицы» и внесем значения этих функций в таблицу.
Функции f_0 и f_{15} являются константами. Первая из них – тождественный ноль, вторая – тождественная единица. Функции f_3, f_5, f_{10}, f_{12} являются по существу функциями одной переменной. Первая из них совпадает с x, вторая – с y, третья представляет собой отрицание y, последняя – отрицание x. Для функций f_3 и f_{12} переменная y является фиктивной. Для функций f_5 и f_{10} фиктивной переменной является x.
Наиболее важные функции двух переменных имеют специальные названия и обозначения.



Слайд 119
Остановимся более подробно на семи важнейших функциях алгебры логики.
Начнем с функции, называемой конъюнкцией. В приведенной ранее таблице это функция f_1. Заметим, что вычисление значений этой функции осуществляется по обычным правилам умножения двоичной арифметики. Конъюнкция принимает значение один в том и только в том случае, когда оба ее аргумента принимают значение один. Эту функцию называют по-другому функцией «и». На слайде приведены три возможных ее обозначения.
Следующая функция называется дизъюнкцией. В сводной таблице функций двух переменных она имеет седьмой номер. Эта функция принимает значение ноль тогда и только тогда, когда оба ее аргумента принимают значение ноль. Другое название данной функции – функция «или». Ее обозначение представлено на слайде.
Обратимся к функции, имеющей в сводной таблице тринадцатый номер. Она называется импликацией, или следованием, читается «из x следует y». Импликация принимает значение ноль в том и только в том случае, когда ее первый аргумент принимает значение один, а второй – значение ноль. Другими словами, по определению мы считаем, что из истины не может следовать ложь. На слайде представлены два возможных обозначения данной функции.
Теперь рассмотрим функцию f_9. Она называется эквивалентностью, или подобием, читается «x эквивалентно y». Данная функция принимает значение один тогда и только тогда, когда оба ее аргумента принимают одинаковые значения. Еще одно название этой функции – биимпликация. На практике используются два различных обозначения данной функции, которые приведены на слайде.



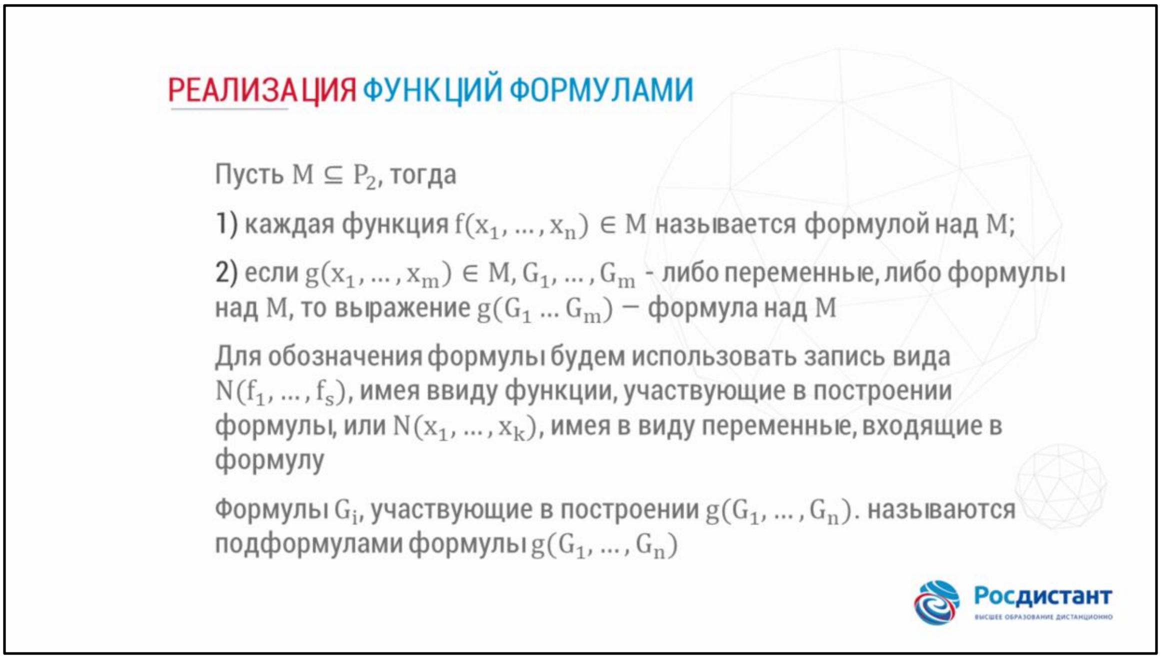
Слайд 120

Обратимся к функции f_6. Она называется сложением по модулю два. Данная функция принимает значение один в том и только в том случае, когда ее аргументы принимают различные значения. По значениям этой функции видно, что она представляет собой отрицание эквивалентности. Обозначение данной функции приведено на слайде.

Перейдем к рассмотрению функции f_{14}. Ее называют штрихом Шеффера. Данная функция принимает значение ноль тогда и только тогда, когда оба ее аргумента принимают значение один. По существу она представляет собой отрицание конъюнкции. Поэтому иногда эту функцию называют «не и». Ее обозначение представлено на слайде.

Функцию f_8 называют стрелкой Пирса, или штрихом Лукасевича. Она принимает значение один в том и только в том случае, когда оба ее аргумента принимают значение ноль. Эта функция является отрицанием дизъюнкции, поэтому иногда ее называют «не или».

Три оставшиеся функции – f_2, f_4 и f_{11} – не имеют специальных названий, поскольку не играют особой роли в дискретной математике. Первая из них представляет собой импликацию «из y следует x», две другие являются отрицаниями импликаций.



Слайд 121
На основе введенных выше элементарных функций можно строить формулы, которые, аналогично формулам алгебры высказываний, определяются индуктивно.
Рассмотрим множество М, являющееся подмножеством множества всех булевых функций P_2. Тогда
1) каждая функция из множества M называется формулой над M;
2) если в формулу из M вместо каких-то переменных подставить некоторые формулы над M, то полученное выражение также является формулой над M.
Строгая математическая формулировка данного определения представлена на слайде.
Формулы называются эквивалентными, если реализуемые ими функции равны.
При записи формул для указания порядка выполнения операций используются скобки.
Число скобок в записи формул можно уменьшить, если ввести следующие правила.
Конъюнкция считается самой сильной операцией. При отсутствии скобок она выполняется в первую очередь. Операция дизъюнкции имеет больший приоритет, чем операция импликации. В свою очередь, импликация считается сильнее эквивалентности.
Знак отрицания над формулой играет роль скобок и позволяет не заключать в скобки стоящее под ним выражение.
Одна и та же функция алгебры логики может быть задана различными формулами.
От формульного задания функции всегда можно перейти к табличному заданию. И наоборот, если функция задана таблицей, то можно построить формулу, выражающую данную функцию.

ТАБЛИЦА И ФОРМУЛА ФУНКЦИИ

$f(x, y, z) = x \to y \land z \lor \bar{x}$

Решение

1	2	3	4	5	6	7
x	y	z	$\bar{x}$ (1)	$y \land z$ (2 и 3)	$y \land z \lor \bar{x}$ (5 и 4)	$x \to y \land z \lor \bar{x}$ (1 и 6)
0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	1	1	1

Росдистант
ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ ДИСТАНЦИОННО

Слайд 122

Рассмотрим пример построения таблицы булевой функции, заданной формулой.

Выпишем в таблицу под символами переменных все наборы значений, которые эти переменные принимают, а под символами булевых операций запишем значения функций, соответствующие этим наборам. Ниже символов булевых функций написаны номера столбцов, над которыми производится действие. Исходя из правил приоритета операций, сначала строим столбец значений функции отрицания, которая принимает значения, противоположные значениям переменной x. Следующей будет операция конъюнкции, которая дает значение нуль, если хотя бы одна переменная равна нулю. Далее выполняется операция дизъюнкции для четвертого и пятого столбцов. В последнюю очередь выполняется операция импликации, которая и дает значения функции f.

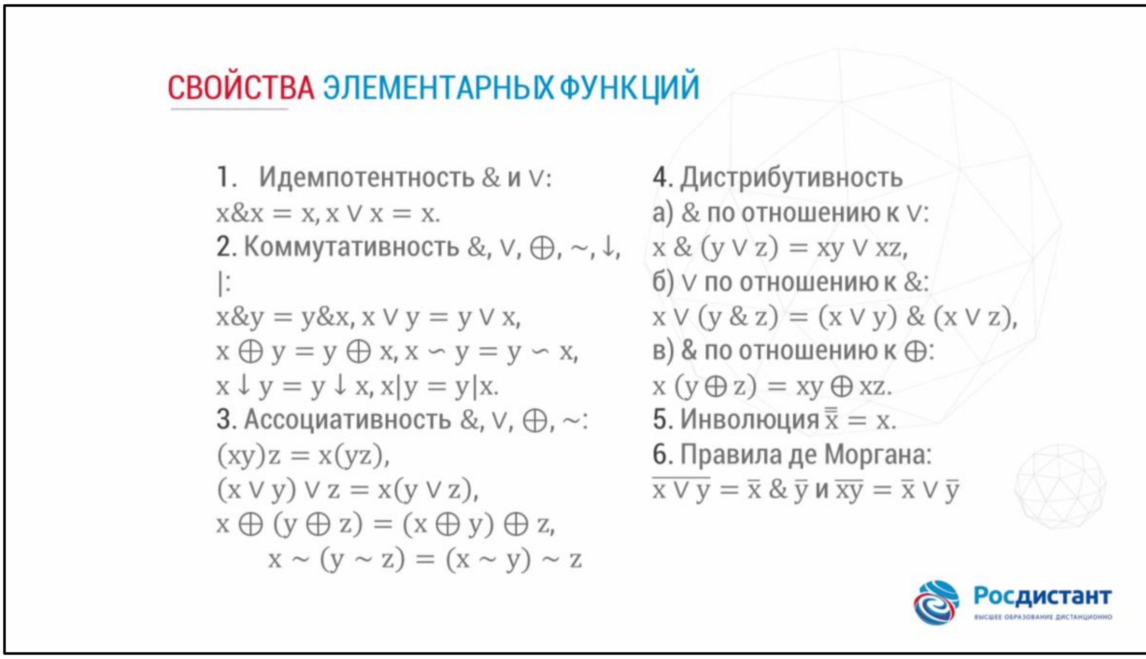
Слайд 123

Рассмотрим еще один пример построения таблицы булевой функции, которая является суперпозицией двух функций от трех переменных.

Распишем полностью таблицу истинности функций f_1 и f_2, чтобы видеть все наборы переменных. Функция h является функцией двух переменных, поэтому достаточно рассмотреть четыре набора значений для переменных x и y.

Рассмотрим первый набор значений переменных для функции h, это будет набор (0, 0). Определяем значение функции f_1 на соответствующем наборе с помощью ее таблицы истинности. Оно равно единице, а значит, набор, на котором требуется вычислить значение функции f_2, есть (0, 0, 1). Определяем по таблице ее значение на рассматриваемом наборе. Полученное значение единица и является искомым значением функции h.

Проделываем такие же операции для оставшихся трех наборов. На каждом из них функции h принимает значение 1. Выписываем окончательный результат.



Слайд 124

Рассмотрим основные свойства элементарных функций. Основная их часть уже известна вам из алгебры высказываний. Но здесь добавляются новые свойства, поскольку появились новые функции – сложение по модулю два, штрих Шеффера и стрелка Пирса.

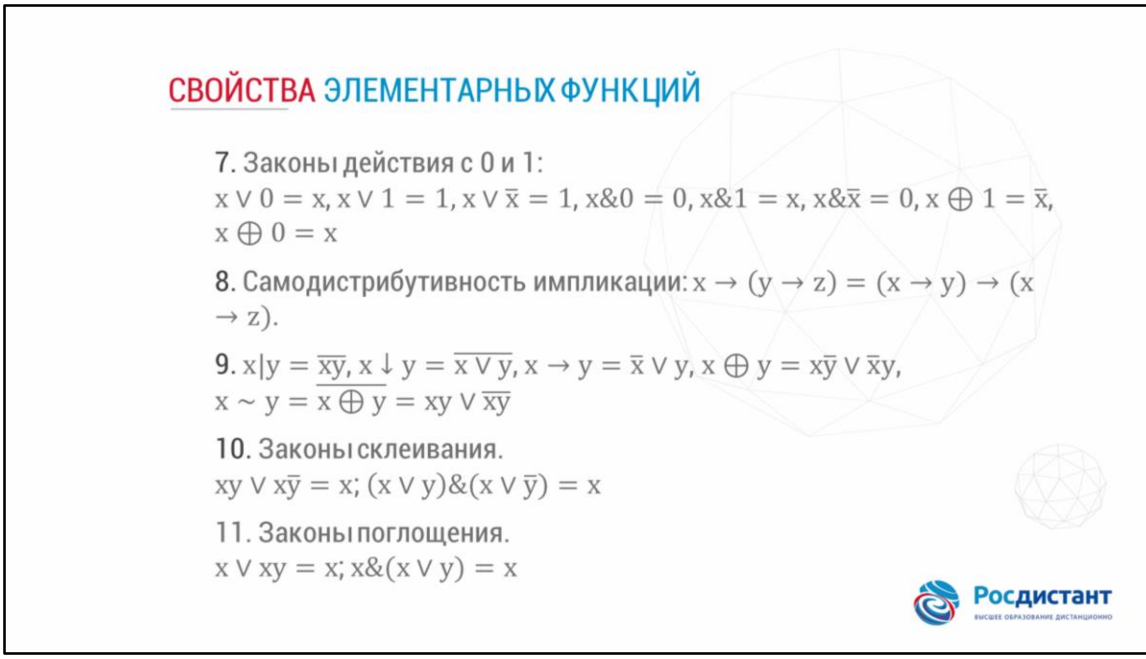
Как видно на слайде, свойством идемпотентности обладают только операции конъюнкции и дизъюнкции. Свойством коммутативности, помимо операций конъюнкции и дизъюнкции, обладают еще четыре операции – сложение по модулю два, эквивалентность, штрих Шеффера и стрелка Пирса. Из семи важнейших булевых функций данное свойство не присуще только импликации. Свойством ассоциативности обладают четыре операции – конъюнкция, дизъюнкция, сложение по модулю два и эквивалентность.

Свойство ассоциативности позволяет не ставить скобки в выражениях, представляющих собой конъюнкцию или дизъюнкцию нескольких булевых переменных. То же самое касается суммы по модулю два и эквивалентности.

Конъюнкция обладает свойством дистрибутивности относительно дизъюнкции и сложения по модулю два. Дизъюнкция обладает свойством дистрибутивности относительно конъюнкции. На слайде представлены формульные выражения указанных свойств.

Свойство инволюции состоит в том, что двукратное применение операции отрицания к переменной x приводит снова к переменной x. Законы де Моргана устанавливают связь между операциями дизъюнкции и конъюнкции.

Все перечисленные здесь равенства доказываются с помощью определений соответствующих функций и их таблиц истинности. Обоснуем, например, свойство 4а. Левая часть равенства обращается в единицу только тогда, когда по крайней мере две переменные принимают значение один. То же самое можно сказать и про правую часть равенства. Таким образом, функции, задаваемые формулами в левой и правой частях рассматриваемого равенства, совпадают.



Слайд 125

На данном слайде приводится еще несколько свойств булевых функций. Первый представленный здесь блок свойств можно охарактеризовать как законы действий с нулем и единицей. Исходя из таблицы истинности функции дизъюнкции, можно утверждать, что присутствие нуля в дизъюнкции не играет роли, а появление единицы делает всю дизъюнкцию равной единице. И наоборот, наличие единицы в конъюнкции не играет роли, а присутствие нуля приводит к тому, что вся конъюнкция обращается в ноль. В сумме по модулю два не играет роли наличие нуля, а прибавление единицы изменяет значение выражения на противоположное.

Важное значение имеет третий блок свойств, с помощью которых одна из булевых функций выражается через другие булевы функции.

Представленные на слайде законы склеивания и поглощения доказываются с помощью свойств дистрибутивности.

Отметим, что все перечисленные свойства булевых функций останутся справедливыми, если вместо участвующих в них переменных подставить любые формулы. При этом, естественно, предполагается, что одна и та же переменная всюду заменяется на одну и ту же формулу.

Свойства булевых функций позволяют упрощать формулы.

ПРИМЕНЕНИЕ СВОЙСТВ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

Пример. Преобразовать формулу $f(x,y,z) = xy \vee \bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee yz \vee \overline{x \vee \bar{y} \vee z}$ в эквивалентную ей, но не содержащую фиктивных переменных

Решение

$$xy \vee \bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee yz \vee \overline{x \vee \bar{y} \vee z} = xy \vee \bar{y}x \vee \bar{x}y\bar{z} \vee yz \vee \bar{x}y\bar{z} =$$

$$= xy \vee \bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee yz = xy \vee (\bar{y} \vee y)z \vee \bar{x}y\bar{z} = xy \vee z \vee \bar{x}y\bar{z} =$$

$$= xy \vee (z \vee \bar{x}y)(z \vee \bar{z}) = xy \vee (z \vee \bar{x}y) \cdot 1 =$$

$$= xy \vee z \vee \bar{x}y = y \vee z$$

Росдистант
ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ ДИСТАНЦИОННО

Слайд 126

Покажем на примере, как свойства булевых функций используются для упрощения формул.

Обратимся к задаче, представленной на слайде. Исходное выражение представляет собой дизъюнкцию пяти элементов. Для ее упрощения на первом этапе применяем закон де Моргана. В результате появляются две одинаковые конъюнкции, и по закону идемпотентности одну из них можно убрать. В получившемся выражении ко второй и четвертой конъюнкциям можно применить закон склеивания. Результатом склеивания является переменная z. Итак, мы получили дизъюнкцию трех элементов. Теперь ко второму и третьему ее элементам применяем закон дистрибутивности, и во вторых скобках получается единица, которая в конъюнкции не играет роли. Остается еще раз применить закон склеивания.

Отметим, что изложенный способ упрощения данной формулы не является единственно возможным.