

539.3/6
Ф425

В. И. ФЕОДОСЬЕВ

Десять
лекций-бесед
по сопротивлению
материалов

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ, СТЕРЕОТИПНОЕ



2682 / 76

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1975

6-05

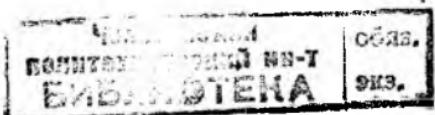
Ф 42

УДК 620.10

Десять лекций-бесед по сопротивлению материалов, Феодосьев В.И., Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», Москва, 1975.

Дается углубленное изложение ряда разделов сопротивления материалов — таких, как теория предельных состояний, температурные напряжения, усталостная прочность и устойчивость. Излагаются некоторые взгляды на вопросы взаимосвязи практических целей расчета и развития средств анализа: выбор расчетной схемы, обоснование коэффициентов запаса, применение вычислительных машин и практических методов расчета.

Рис. 108.



Ф 30106-1091
053(02)-75 150-75

Предисловие

Сопротивление материалов, строительная механика, теория упругости, теория пластичности... На первой стадии изучения этих дисциплин успевающий студент относительно просто справляется с задачами, где необходимое задано, а все ненужное — отброшено. Даны геометрия системы, размеры, характеристики материала, коэффициенты запаса, кем-то уже продуманные и назначенные на основе неведомых соображений. Да и сама обстановка школьного решения задач упрощает дело. Хотя и небольшой, но уже приобретенный опыт подсказывает студенту, что подход к каждой задаче надо искать только в сфере вопросов, преподавание которых возложено на его наставника.

Но вот неизбежно наступает время самостоятельной инженерной деятельности. Нужно решать задачи, когда далеко не все или почти ничего не задано и, в то же время, известно многое, к делу не относящееся.

Как будет вести себя молодой специалист в этих условиях? Там ли он будет искать необходимое? Правильно ли отбросит несущественное? Чем будет руководствоваться при выборе средств, которым его обучали, и уместно ли их использует? Не случится ли так, что, поддавшись удобной позиции математического нигилизма, он будет избегать теоретического анализа и полагаться только на высшую интуицию. А может быть, впадет в другую крайность и превратится в непризнанного горе-математика, производящего бесконечные выкладки, не отражающие существа дела... Понятно, что многих ошибок можно избежать, если перечисленным вопросам уделить некоторое внимание.

Изложению взглядов на задачи механики в духе практических расчетов конструкций на прочность и посвящена настоящая книга. Она предназначена для молодых инженеров и для студентов, заканчивающих обучение в техни-

ческом вузе, знакомых с курсами сопротивления материалов и с основами проектирования. Автор стремился подчеркнуть, что расчетные приемы сопротивления материалов, строительной механики и теории упругости являются только частью более общего и более широкого расчетного комплекса; что выбор аналитического метода в каждом конкретном случае должен быть подчинен целям производимого расчета, а точность анализа — находиться в оправданном соответствии с точностью исходных предпосылок. Автор отчетливо представляет, что такая концепция не должна низводиться до уровня утилитаризма. Современные прочностные расчеты требуют не только владения аналитическими средствами, но и тонкого их понимания. Поэтому в книге обсуждаются и другие вопросы, которые, по мнению автора, имеют значение для углубленной трактовки задач и методов сопротивления материалов. Сюда в первую очередь относятся главы, посвященные устойчивости и критериям прочности.

Естественно, что в работе нашли отражение личные вкусы и склонности автора. Поэтому не исключено, что некоторые суждения могут встретить возражения со стороны опытного читателя. Однако автор приложил немало усилий, чтобы его высказывания не носили категорического характера и во всех случаях стремился освободиться от пут узкой специализации, которые так часто лишают ученого объективности в оценке места и значимости того научного направления, которому он посвятил свою деятельность. Вместе с тем, автор не считал себя вправе воздерживаться от выражения своего, как положительного, так и критического отношения к некоторым научным направлениям. А это всегда связано с риском быть неправильно истолкованным.

Итак, эта книга — не учебник и не дополнение к нему. Это лекции-беседы на относительно свободные темы. Это — расширение и обобщение тех немногих вопросов, которых может лишь слегка коснуться в аудитории лектор, ограниченный рамками утвержденных программ.

Писать такую книгу трудно, и автор, по-видимому, долго еще не закончил бы ее, если бы не имел дружеской поддержки со стороны товарищей. Особую помощь оказал ему Л. И. Балабух, безжалостная критика которого сопутствовала работе над книгой от первой до последней страницы.

I

Сопротивление материалов, теория упругости и прочее...

Что такое сопротивление материалов? Ответ на этот вопрос дается на первых страницах каждого учебника по сопротивлению материалов. Сопротивление материалов — наука о прочности. Она учит рассчитывать инженерные конструкции и определять их надежные размеры.

Такое определение является традиционным, и оно, конечно, правильное, но вместе с тем — не совсем полное, да и не совсем точное. Расчеты инженерных конструкций, действительно, строятся прежде всего на основе методов сопротивления материалов. Вместе с тем на практике само понятие расчета имеет более широкое содержание, чем то, которое в него порой вкладывается.

Рассчитать конструкцию это значит дать оценку ее прочности. В сопротивлении материалов эта задача не решается. Сопротивление материалов еще не дает расчета конструкции. Оно дает только теоретические основы для ведения этих расчетов.

Каждый инженерный расчет, да и не только расчет, а вообще исследование в области технических наук, включает в себя, как известно, следующие три этапа:

I. Идеализация объекта. На этом этапе рассматривается реальная конструкция и выделяются те ее особенности, которые являются наиболее существенными для рассматриваемой задачи. В результате получаем расчетную схему.

II. Анализ расчетной схемы. Здесь при помощи средств теории выясняются закономерности расчетной схемы, отвечающей реальной конструкции.

III. Обратный переход от расчетной схемы к реальной конструкции и

Формулировка практических выводов, ради которых было предпринято ее исследование.

Содержание сопротивления материалов относится в основном к этапу II. В сопротивлении материалов излагаются приемы анализа типичных расчетных схем и даются методы определения напряжений и перемещений в балках, трубах, тонкостенных сосудах, методы раскрытия статической неопределенности стержневых систем и т. д. и т. п. Словом, рассматриваются все те расчетные схемы, которые являются практически общими для большей части инженерных конструкций. Что же касается выбора расчетной схемы и оценки надежности самой конструкции, то об этих вопросах в сопротивлении материалов лишь упоминается, но ответа на них в конечном итоге не дается. Да это и понятно. Многообразие современных инженерных задач столь велико, что в пределах одной дисциплины невозможно изложить специфические особенности прочностных расчетов по всем разделам техники. В связи с этим возникает необходимость создания специальных дисциплин, дополняющих сопротивление материалов для каждого инженерного направления.

Расчетные схемы, выходящие за рамки общетехнических и свойственные только конкретно взятой области техники, рассматриваются в разделах инженерной механики, название которых начинается со слов «Строительная механика...», например, строительная механика сооружений, строительная механика сварных конструкций, строительная механика корабля, самолета и т. д. Эти дисциплины посвящены в основном развитию эффективных методов анализа специфических расчетных схем. Так, например, в строительной механике самолета рассматриваются вопросы устойчивости пластин, подкрепленных оболочек и других тонкостенных элементов. В строительной механике сооружений большое место занимают специальные вопросы раскрытия статической неопределенности рам и стержневых систем. Словом, строительная механика любого профиля может рассматриваться как специализированное сопротивление материалов, изложенное в духе определенной отрасли техники.

Вопросы о выборе расчетной схемы (этап I), а также оценки коэффициентов безопасности и прочности конструкции (этап III) наиболее полно излагаются в технических

дисциплинах, название которых начинается со слова «прочность...»: прочность строительных сооружений, прочность корабля, прочность самолета и т. д.

Уместно заметить, что учебных курсов и монографий по этим дисциплинам создано очень немного. Объясняется это прежде всего сложностью вопроса. Курс прочности, в отличие от строительной механики, представляет собой взаимопроникающее единство расчетно-теоретического аппарата, особенностей конструкции, технологических и эксплуатационных условий. Правильное сочетание этих вопросов предъявляет к труду автора очень высокие требования, выполнение которых далеко не всегда под силу даже авторскому коллективу.

Большую роль играет также и элемент ответственности. Ясно, что общие суждения, связанные с подсчетом напряжений, с определенными математическими оценками, в частности, с возможностью пренебречь теми или иными слагаемыми в расчетных формулах, по сути говоря, ко многому не обязывают. Даже в том случае, когда они сомнительны, их легко оправдать (как это часто и делается) выражениями: «положим, что», «можно принять» и т. п. Все погрешности, допущенные в подобного рода анализе, могут быть в дальнейшем при практических расчетах перекрыты запасом прочности, а наиболее грубые — выявлены на стадии предварительных испытаний конструкции.

Что же касается назначения коэффициента запаса (или коэффициента безопасности), то всякие рекомендации в этой части являются достаточно ответственными. Для того чтобы их дать, надо учитывать и современный уровень производства, и опыт, который накоплен в области создания и эксплуатации подобных конструкций, и те последствия, которые влечет за собой выход из строя рассматриваемого узла, и многие другие обстоятельства.

Наконец, в вопросах создания курсов прочности большую роль играет скротечность тех изменений, которые претерпевают некоторые разделы техники. Поэтому курс прочности быстро устаревает, в то время как курс строительной механики в ряде случаев живет десятилетиями.

Итак, сопротивление материалов представляет собой азбуку и грамматику расчетов на прочность. Это — введение в высокое общество прикладных наук прочностного цикла, дающих углубленную проработку вопросов, связанных с конкретными техническими направлениями. Границы

между этими направлениями не являются строгими. Многие пути исследований пересекаются, многие идут параллельно. Бывает, что некоторые разделы строительной механики после надлежащей проработки приобретают достаточную общность и занимают прочное место в курсе сопротивления материалов. Так, в частности, исследования по статике тонкостенных стержней, проводившиеся в свое время для целей расчета авиационных и некоторых строительных конструкций, в последнее время стали входить в курс сопротивления материалов.

И сопротивление материалов, и строительная механика и прочность конструкций развиваются не изолированно от других дисциплин. И наиболее тесно они связаны с теорией упругости. Влияние этой науки на развитие прочностного цикла механики носит принципиальный характер.

Порой приходится слышать, что основное различие между сопротивлением материалов и теорией упругости сводится к точности применяемых методов. С одной стороны,— прикладная дисциплина «сопротивление материалов», использующая правдоподобные, но недоказанные гипотезы и упрощающие приемы. С другой,— строгая математическая наука, теория упругости, отрицающая недоказанные положения и дающая «точное» решение задач.

Такое сравнение является не только упрощенным, но даже неверным по существу.

Сопротивление материалов и теория упругости имеют в конечном счете общие цели, и там и здесь используются и приближенные методы и упрощающие приемы. Различие заключается в круге рассматриваемых задач и в глубине их проработки, хотя, конечно, вопросы простоты и практически необходимой точности играют не последнюю роль.

Как было уже сказано, при решении задач сопротивления материалов расчетная схема считается заданной. Таким образом, этап I из рассмотрения исключается. Тем не менее, приступая к решению любой задачи, мы должны помнить, что этот этап существует, что он был пройден до этого кем-то другим, что рассматриваемая расчетная схема получена как результат пренебрежения целым рядом особенностей реального объекта. Следовательно, анализ расчетной схемы должен быть проведен в пределах той точности, которая уже заложена выбором расчетной схемы.

Мы обычно не знаем, какие пренебрежения были сделаны при идеализации конструкции. Схема, предложенная

к анализу, может быть и очень грубой и очень точной. Но во всяком случае известно, что имеющиеся в ней погрешности не могут быть меньше определенного реального минимума. Этот уровень погрешностей связан со многими факторами. Сюда входит и неоднородность материала, и отклонения действительной зависимости $\sigma = f(\varepsilon)$ от идеальной пропорциональности, т. е. от закона Гука и особенности наложения связей и многое другое.

При решении задач сопротивления материалов всегда уместно спросить, как та или иная нагрузка может быть реализована, как обеспечить практически выполнение заданных граничных условий. Если они точно не могут быть выполнены, то сколь велика возникающая погрешность.

В сопротивлении материалов не выполняется также и этап III, и вопрос о расчете конструкции еще не получает своего решения. Но существование этого этапа, как и этапа I, налагает также свой отпечаток на характер проводимого анализа. Это сказывается хотя бы уже в том, что в задачу сопротивления материалов, кроме определения напряжений, входит определение коэффициента запаса (по пределу прочности, либо по разрушающим нагрузкам) или определение запаса циклической прочности. Решение тем самым подводится вплотную к заключительному этапу расчета конструкции.

Таким образом, анализ в сопротивлении материалов выглядит как средство для решения более широкой задачи — задачи расчета конструкции.

Для теории упругости такого рода подчиненность аналитического аппарата практическим целям не характерна. Теория упругости не скована необходимостью дать краткую сводку рекомендаций к расчету. Это позволяет провести более углубленную проработку не только конкретных задач, но в первую очередь — общих задач и методов.

Из сказанного не следует, конечно, что результаты, полученные методами теории упругости, не могут без надлежащей обработки получить практического применения. В тех случаях, когда решение получено в достаточно простой и общей форме, оно сразу может быть включено в арсенал средств практических расчетов. Достаточно вспомнить такие классические задачи теории упругости, как контактная задача, нашедшая прямое приложение, хотя бы в расчете шариковых подшипников, как задача

о кручении призматического бруса или задача определения местных напряжений вблизи отверстий и выточек и многие другие.

Теория упругости богата не только множеством решенных задач. Трудами Пуассона, Сен-Венана, Клебша созданы основы механики деформируемых систем и заложены принципы, соблюдение которых стало нормой во всех дисциплинах, прямо или косвенно связанных с вопросами прочности.

Когда мы пользуемся, например, технической теорией изгиба балок, мы часто забываем, что ее достоверность обеспечена многочисленными исследованиями, проведенными методами теории упругости. Именно эти исследования дают нам ориентировку в таких вопросах, как пренебрежение вторичными напряжениями, как применимость или неприменимость гипотезы плоских сечений, да и во многих других. Теория упругости, таким образом, не только обогащает сопротивление материалов новыми задачами и новыми постановками проблемы, но, образно говоря, «обеспечивает тылы» в тех простейших методах, которыми мы пользуемся повседневно.

Можно смело сказать: не будь теории упругости, сопротивление материалов напоминало бы удручающий свод прочностных нормативов. Так, кстати, и было до тех пор, пока в преподавании сопротивления материалов игнорировались достижения теории упругости.

Еще до 1929 г. появлялись в свет издания курса П. К. Худякова, в которых в полной мере проявился полу-рецептурный характер расчетов на прочность. И это было в то время, когда теория упругости уже достигла основных позиций, а С. П. Тимошенко создал основы современного курса сопротивления материалов.

Таким образом, сопротивление материалов и теория упругости могут рассматриваться как единое целое, и если случается услышать пожелания «о сближении» этих наук, то это следует понимать только как необходимость более глубокого овладения всеми достижениями современной науки в области теории деформируемых твердых тел.

Среди наук, занимающихся этими вопросами, за последние десятилетия возникли и развились новые дисциплины, родственные сопротивлению материалов, такие как теория пластичности и теория ползучести. Они значительно обогащают аппарат, используемый инженером-исследователем

и открывают перед ним новые возможности в выборе более точных расчетных схем, в которых учитывалось бы и наличие пластических деформаций, и влияние фактора времени.

Таким образом, дисциплин, занимающихся вопросами механики деформируемых тел, очень много. По степени теоретичности и прикладной направленности они образуют целую гамму оттенков. Среди этих дисциплин сопротивление материалов занимает одно из основных мест.

Методы сопротивления материалов не остаются неизменными. Они непрерывно развиваются и совершенствуются.

На заре развития науки о прочности все внимание было обращено на способность материала сопротивляться действующим нагрузкам. Термин «сопротивление материалов» тогда еще можно было понимать буквально. Постепенное внедрение в расчетную практику многообразных приемов анализа сделало это невозможным. От времен «младенчества» сохранилось только название.

Если проследить за эволюцией сопротивления материалов за последние 40 лет, то легко заметить общую тенденцию, направленную к переходу от решения задач строительного профиля к более общему машиностроительному. Сопротивление материалов заметно обогатилось, стало многообразнее и насыщеннее. В него вошли вопросы усталостной прочности и динамики. В современных учебных курсах нашли свое отражение теории пластичности и ползучести. Введены основные задачи теории пластин и оболочек, анализ которых прежде традиционно относился к теории упругости. В ближайшее время следует ожидать внедрения в сопротивление материалов некоторых элементов нелинейной теории упругих систем.

Наряду с появлением новых в курсе происходит отмирание некоторых устаревших разделов. Так исчезли графические и графоаналитические методы построения упругой линии. В настоящее время они повсеместно заменяются численными методами, которые вообще приобрели доминирующее значение в связи с развитием электронной вычислительной техники. Отбрасываются некоторые устаревшие трактовки и углубляется изложение.

Изучая курс сопротивления материалов, следует помнить, что изложенные в нем истины не являются незыблыми, что они тесно связаны с общим техническим и научным прогрессом и являются прямым его отражением.

III

От реальной конструкции к расчетной схеме

Приступая к расчету любой конструкции, необходимо прежде всего установить, что является в данном случае существенным и что несущественно; необходимо произвести ее схематизацию и отбросить все те факторы, которые на могут сколь-либо заметным образом повлиять на сущность рассматриваемого явления. Такого рода упрощение задачи во всех случаях совершенно необходимо,

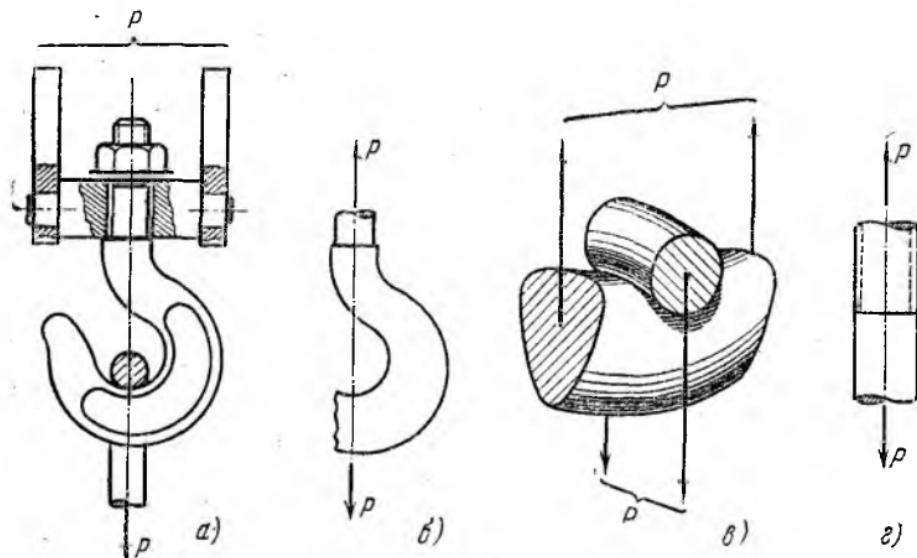


Рис. 1.

так как анализ с полным учетом всех свойств действительной конструкции является принципиально невозможным вследствие их очевидной неисчерпаемости.

Так, например, рассчитывая на прочность крюк подъемного крана (рис. 1, а), мы рассматриваем его как брус большой кривизны. При этом отвлекаемся прежде всего

от особенностей конкретного образца, полагая, что геометрические размеры соответствуют номинальным. В действительности от экземпляра к экземпляру размеры меняются в пределах допуска. В каждом конкретном экземпляре возможно возникновение неоднородностей — существование небольших допускаемых пустот, заусенцев и пр. Все эти особенности неисчерпаемы и рассматриваются как несущественные.

Проводимые пренебрежения касаются не только геометрических размеров, но и условий эксплуатации. Каждое грузоподъемное сооружение работает в каких-то конкретных условиях. Одно работает на ветру, другое — под навесом, третье в условиях более высокой, либо более низкой температуры и т. д. Эти различия несущественны, но они имеются, и отвлечение от них является первым необходимым шагом для проведения расчета. В итоге принимаем, что вес поднимаемого груза имеет вполне определенную величину и что нагружение является статическим.

Затем делаются пренебрежения, дополнительно упрощающие рассматриваемую конструкцию.

В соответствии с принципом Сен-Бенана отвлекаемся от особенностей закрепления крюка и особенностей приложения силы веса и считаем, что напряжения в наиболее опасном сечении определяются только величинами равнодействующих. В итоге получаем идеализированную систему (рис. 1, б), напряжения в которой определяем по формулам, выведенным для бруса большой кривизны.

Реальная конструкция, освобожденная от несущественных особенностей, носит название расчетной схемы. Для одной и той же конструкции может быть предложено несколько расчетных схем, в первую очередь в зависимости от того, какая сторона вопроса интересует исследователя в каждом конкретном случае.

Например, при рассмотрении того же самого крюка может возникнуть вопрос о смятии в зоне подвески груза. Очевидно, напряжения в этом случае наиболее просто определять при помощи расчетной схемы, взятой из теории контактных задач. В результате получаем схему, показанную на рис. 1, в.

Наконец, если возникает вопрос о прочности в зоне закрепления, то для того же крюка в зависимости от конструкции закрепления будет выбрана новая расчетная схема, например, схема растянутого стержня (рис. 1, г).

Итак, мы видим, что для одной конструкции может быть предложено несколько расчетных схем. С другой стороны, и одной расчетной схеме может соответствовать много различных конструкций. Последнее обстоятельство является весьма важным, так как, исследуя некоторую схему, можно получить в дальнейшем решение целого класса практических задач.

В частности, схема кривого бруса применима не только для расчета крюка, но и для других конструктивных элементов, встречающихся в машиностроении, например, для расчета звеньев цепи (рис. 2).

Остановимся на некоторых приемах схематизации, имеющих общий характер. Здесь следует обсудить три основных направления: схематизацию свойств материала, схематизацию нагрузки и, наконец, схематизацию геометрической формы.

Рассмотрим их по порядку. Первым шагом при выборе расчетной схемы является идеализация свойств материала.

Основное допущение связано с понятием сплошности. Среда наделяется свойством заполнять непрерывно без пустот весь объем в пределах установленных для тела границ. Эта предпосылка настолько универсальна, что правильнее ее относить не к выбору расчетной схемы, а, скорее, к принципам построения всей механики деформируемого тела.

Предпосылка о сплошности позволяет пользоваться в дальнейшем методами анализа бесконечно малых. Естественно, что она противоречит молекулярному строению вещества и приемлема лишь до тех пор, пока рассматриваются объекты с размерами, существенно превышающими межатомные расстояния. Понятно, что это нас не связывает. Более важным является существование в материале микротрещин и межкристаллических пустот. Именно это обстоятельство является определяющим. Применимость понятия сплошности ограничивается относительными размерами детали по сравнению с размерами, характерными для описания структурных особенностей.

Подчеркивая универсальность такой схемы, не следует забывать, что в механике встречаются задачи, постановка которых лежит на пределе применимости понятия сплош-



Рис. 2.

ности. В основном это вопросы развития трещин и задачи усталостной прочности.

К схеме сплошной среды близко примыкает предположение об однородности материала. Под однородностью понимается неизменность свойств среды в пределах рассматриваемой области. Ограничения, налагаемые на приемлемость схемы однородности, те же самые, что и для сплошности, и также связаны с особенностями структуры вещества.

Имеются задачи, где это предположение может привести к заметным погрешностям. Сюда, в частности, следует отнести задачи определения местных напряжений. Например, для стержня, имеющего острую выточку (рис. 3), область максимальных напряжений при их высокой концентрации может охватить всего несколько кристаллических зерен металла, что, естественно, ставит под сомнение правомерность основной предпосылки однородности.

Сплошная среда наделяется свойствами, отвечающими основным свойствам реального материала. При решении большей части задач среда считается совершенно упругой, а между напряжениями и деформациями принимается линейная зависимость (рис. 4, a). Между тем реальное тело

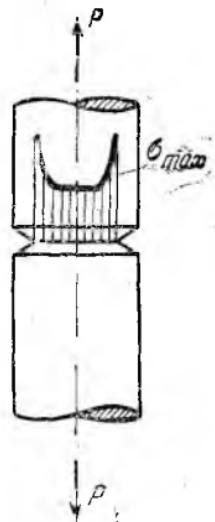


Рис. 3.

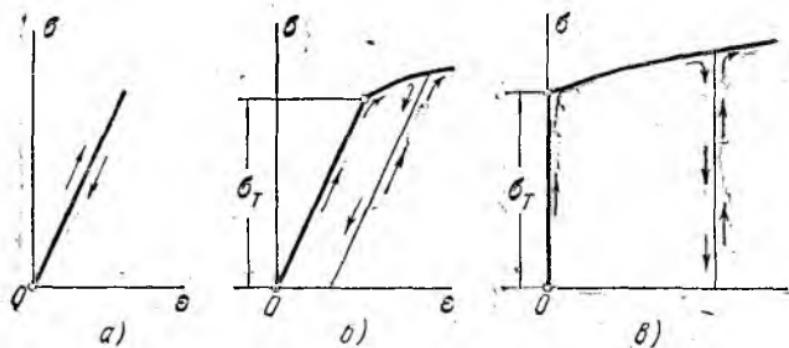


Рис. 4.

в действительности в какой-то небольшой степени обнаруживает отступление от свойств совершенной упругости. Наиболее заметно оно проявляется в колебательных

процессах и находит свое выражение в рассеянии энергии или в так называемом внутреннем трении материала.

По мере возрастания деформаций отступление свойств реального материала от идеальной упругости становится настолько существенным, что при выборе расчетной схемы среда наделяется другими свойствами и рассматривается как упруго-пластическая. Зависимость между напряжением и деформацией $\sigma = f(\epsilon)$ аппроксимируется той или иной функцией, вид которой выбирается в зависимости от вида диаграммы растяжения (рис. 4, б).

При еще больших деформациях пластические свойства материала становятся преобладающими, и представляется возможность пренебречь упругими деформациями по сравнению с пластическими. Тогда диаграмма растяжения может быть схематизирована кривой, имеющей вертикальный линейный участок (рис. 4, в). Соответственный вид приобретает и линия разгрузки; при напряжениях, меньших предела текучести, деформации принимаются равными нулю, и среда считается абсолютно жесткой, а при напряжениях, больших предела текучести, изменение деформаций происходит по некоторому закону в зависимости от вида диаграммы испытания. Среда, наделенная указанными свойствами, называется жестко-пластической. Эта схема эффективна для анализа процессов ковки или волочения, т. е. для решения такого рода задач, в которых рассматриваются большие пластические деформации.

Как видим, свойства среды могут быть схематизированы различным образом в зависимости от свойств реального материала и тех задач, которые ставит перед собой исследователь. Существенно отметить, что во всех случаях при этом мы отвлекаемся от физических процессов, обусловливающих тот или иной вид диаграммы растяжения. Мы не интересуемся особенностями поведения кристаллической решетки, вопросами развития дислокаций и т. д. Мы фиксируем только внешнюю суммарную сторону этих микропроцессов, проявляющуюся в численных значениях механических характеристик материала и в характере диаграммы растяжения.

Такой подход к описанию свойств материала называется феноменологическим, т. е. «описывающим явление». Он характерен не только для сопротивления материалов, но и вообще для всех разделов механики сплошной среды.

Сплошная среда, как правило, принимается изотропной, т. е. предполагается, что упругие и пластические свойства выделенного элемента не зависят от его угловой ориентации.

Отдельно взятый кристалл металла анизотропен. Но если в выделенном объеме содержится весьма большое количество произвольно ориентированных кристаллов, то материал можно в целом рассматривать как изотропный. Поэтому, если не сделано специальных оговорок, все наиболее часто применяемые материалы считаются изотропными.

Имеются, однако, анизотропные материалы. Анизотропно дерево. Анизотропна бумага. Существует анизотропия металлов, возникающая в результате предварительной прокатки, вытяжки, и наклена. В некоторых случаях это обстоятельство должно учитываться при расчетах.

Анизотропия, связанная со строением материалов, называется структурной. В отличие от структурной, может рассматриваться конструктивная анизотропия. Но об этом несколько позже (стр. 19).

Рассмотрим типичные упрощения, вводимые в систему внешних сил.

Наиболее универсальным приемом здесь является введение сосредоточенных сил, заменяющих некоторые распределенные нагрузки. Такого рода упрощение применимо, понятно, только в том случае, если размеры поверхности, по которой происходит передача усилий, малы по сравнению с общими размерами конструктивного элемента. Ясно, что в реальных конструкциях передача усилий в точке неосуществима, и сосредоточенная сила представляет собой понятие, свойственное только расчетной схеме. Замена распределенных сил сосредоточенной равнодействующей возможна лишь в тех задачах, где анализируется напряженное состояние системы в целом, т. е. в объемах, существенно превышающих объем контактной зоны.

Возникающее при деформации смещение масс связано с возникновением энергии движения. Если ускорения малы, то можно считать, что в любой момент нагружения система находится в равновесии. Такое нагружение носит название статического. Это — тоже схема. Ее применимость определяется тем, насколько кинетическая энергия мала по сравнению с упругой энергией деформируемого

тела. Может оказаться, что эти энергии соизмеримы, тогда рассматриваемый случай должен быть отнесен к категории не статического, а динамического нагружения.

Перейдем к упрощениям, вводимым в геометрию объекта.

Основным упрощающим приемом в сопротивлении материалов и в теории упругости является приведение геометрической формы тела к схеме бруса и к схеме оболочки. Промежуточное место между ними занимает схема тонкостенного стержня.

Под бруском понимается всякое тело, одно из измерений которого (длина) много больше двух других. Для оболочки характерным является такое соотношение размеров, когда одно из измерений тела (толщина) много меньше двух других. Наконец, для тонкостенного стержня толщина считается малой по сравнению с длиной дуги контура поперечного сечения, а последняя предполагается малой по сравнению с длиной стержня. Таким образом, тонкостенный стержень может рассматриваться и как брус, и как оболочка.

Геометрическая схема подсказывается, естественно, формой рассматриваемого объекта. Ясно, что крюк подъемного крана подходит под схему бруса большой кривизны, а бак, находящийся под давлением, под схему оболочки.

Описанные приемы схематизации свойств материала, нагрузок и геометрической формы конструктивного элемента являются настолько общими, что при практических расчетах такого рода упрощения обычно не оговариваются. Они представляются как нечто само собой разумеющееся. Но схематизация конструкции этим далеко не исчерпывается.

На практике выбор расчетной схемы представляет собой своеобразную задачу «на оптимум». Надо путем минимального отступления от действительной конструкции максимально приблизить расчетную схему к разработанному эффективному методу. Эта задача не простая. Для ее решения надо, с одной стороны, обладать некоторой интуицией, а с другой,— владеть в широком диапазоне различными методами анализа. Опыт работы конструкторских бюро показывает, что квалифицированная консультация по расчетам на прочность сводится в основном именно к решению подобного рода задач, т. е. к выбору оптимальной расчетной схемы.

Степень «оптимизации» в данном случае не может быть выражена численно. Можно только сказать, хорошо или плохо выбрана расчетная схема. В крайнем случае, ей можно дать оценку в баллах, подобно тому как это делается в некоторых видах спортивных состязаний. Такая оценка была бы, конечно, субъективной и отвечала бы состоянию вопроса только на данный момент.

Условное подчеркнутое выше разграничение свойств материала, нагрузок и геометрической формы для выбора расчетной схемы, вообще говоря, не характерно. Все эти факторы между собой тесно связаны.

Вернемся к схеме сплошной среды. Сначала мы отвлекаемся от молекулярного строения, а затем — от структурных особенностей.

Представим себе теперь, что рассматриваемая конструкция имеет множество однотипных конструктивных элементов, которые вследствие их большого числа невозможно или нецелесообразно рассматривать в отдельности. Тогда можно сделать еще один шаг в создании схемы сплошной среды. Можно «размазать» эти элементы по объему тела и рассматривать среду как однородную, но наделенную некоторыми новыми свойствами в соответствии с конструктивными особенностями объекта. Идеализированная среда при этом получается, как правило, анизотропной. Такого рода анизотропия носит название конструктивной.

Пусть, например, имеется резинокордная ткань (рис. 5), состоящая из нескольких слоев нитей, за- вулканизированных в резину. Нити одного слоя расположены под углом α по отношению к нитям соседнего слоя. Для расчета конструкции, изготовленной из такой ткани, например, автомобильной покрышки или пневматической подвески, целесообразно рассматривать ткань как сплошную среду, наделенную свойствами анизотропного тела. Жесткость на растяжение образца этой ткани, очевидно, зависит от того, в каком направлении вырезан образец. Одним из путей для решения задачи является проведение

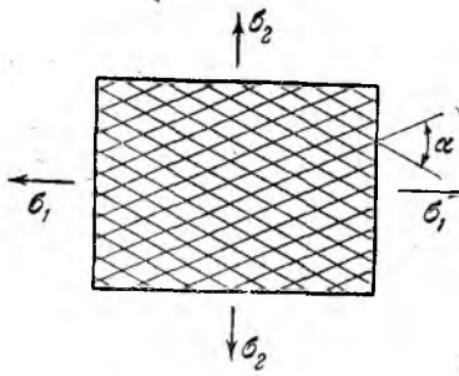


Рис. 5

серии испытаний с тем, чтобы экспериментально установить зависимость модуля упругости образца от его угловой ориентации. Это позволяет отвлечься от особенностей силового взаимодействия между нитями и резиной. После того как свойства среды установлены, необходимо определить внутренние усилия в конструкции с учетом анизотропии и вынести суждение о ее прочности. Предельные значения прочностных характеристик также должны быть определены заранее на основании предварительно проведенного с тканью эксперимента.

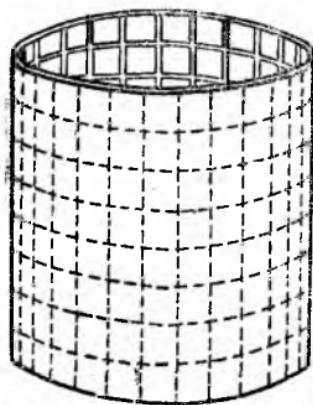


Рис. 6.

Естественно, что введение конструктивной анизотропии допустимо только в том случае, если общие геометрические размеры конструкции существенно превышают характерные размеры составляющих элементов. Так, цилиндрическая оболочка (рис. 6), имеющая продольные и поперечные подкрепления, только в том случае может рассматриваться как однородная, если подкрепляющие

элементы распределены равномерно и их число достаточно велико. Жесткость оболочки на изгиб, кручение и растяжение в осевом и поперечном направлениях может быть приближенно оценена путем расчета. Вместе с тем нужно помнить, что при переходе к схеме однородной анизотропной оболочки исключается возможность определения локальных напряжений, обусловленных подкрепляющими элементами, и определяются только общие средние напряжения и средние деформации.

Аналогичным образом обстоит дело с листовой сотовой конструкцией, показанной на рис. 7. Эта система также может рассматриваться как однородная и анизотропная при условии, что число ячеек в объеме тела является достаточно большим. При анализе схематизированной однородной сотовой пластины также определяются только средние условные напряжения. Местные изгибные напряжения, возникающие в стенках каждой ячейки, из рассмотрения, естественно, выпадают.

Для оценки прочности и жесткости конструкции необходимо предварительно провести испытание сотовых об-

разцов с замером средних напряжений. На основе этих же испытаний могут быть найдены и константы жесткости.

Таким образом, мы видим, что между приемами осреднения конструктивных и структурных особенностей имеется полная аналогия. Принимая схему сплошной среды,

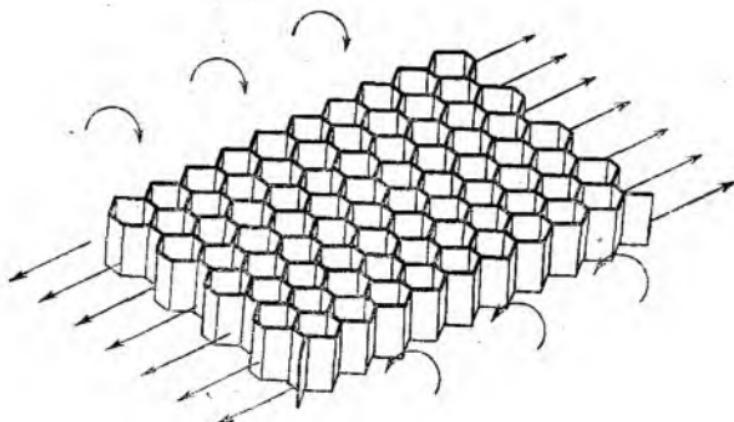


Рис. 7.

мы также отказываемся от определения местных напряжений, связанных с особенностями строения кристаллов, и находим только средние напряжения, свойственные сплошной среде (рис. 8). Структурные напряжения по величине могут заметно отличаться от средних. Независимо от того, насколько они существенны, их влияние учитывается через механические характеристики материала, установленные путем эксперимента.

Конструктивная анизотропия объединяет в себе схематизацию свойств материала и геометрических особенностей конструкции. Последние в сочетании с характером внешних нагрузок и условиями преобладания тех или иных внутренних силовых факторов позволяют создать целый ряд новых, весьма разнообразных расчетных схем.

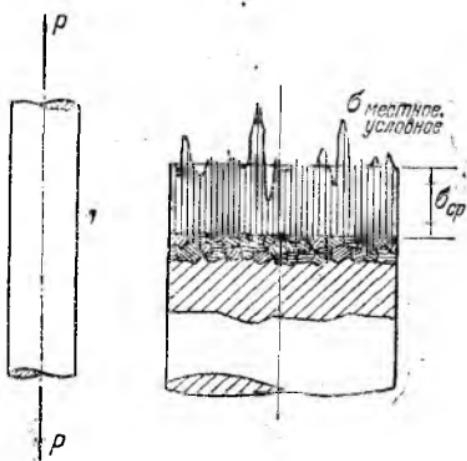


Рис. 8.

Уже две простейшие схемы бруса и оболочки, столь различные по своему характеру, оказываются в практических расчетах далеко не такими несовместимыми, как это может показаться на первый взгляд.

Так, например, оребренная крышка люка, показанная на рис. 9, а, может в первом приближении рассматриваться как переплет, состоящий из перекрещивающихся балок, имеющих размеры поперечных ребер (рис. 9, б). При таком подходе плоская панель исключается из рассмотрения и допускается ошибка, идущая в запас прочности. Такая расчетная схема может быть принята либо в том случае,

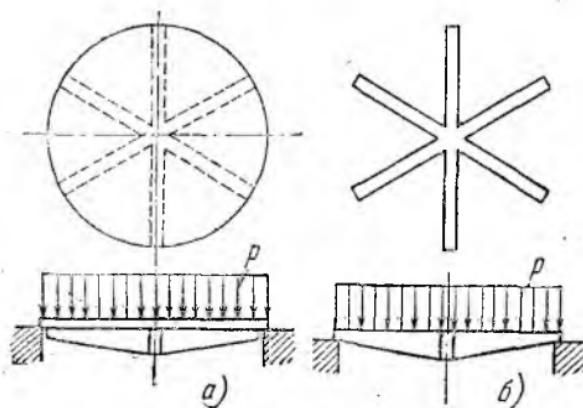


Рис. 9.

когда жесткость панели мала по сравнению с жесткостью ребер, либо в том случае, когда запас прочности конструкции достаточно велик. Тогда упрощенный расчет имеет своей целью показать только, что надобности в более точном расчете не имеется.

Если запас прочности сравнительно невелик, то можно в пределах балочной схемы уточнить решение, присоединяя часть пластины к ребрам. Тогда напряжения будут определяться по приведенному моменту сопротивления ребер.

В случае, когда жесткости панели и ребер соизмеримы, крышку люка можно рассчитывать как пластину, а наличие ребер (при большом их числе) учесть через показатели конструктивной анизотропии. В этом случае жесткость пластины на изгиб в радиальном направлении окажется большей, нежели в окружном.

Часто, вообще, пластина или оболочка представляются в виде системы перекрещивающихся связанных стержней и рассчитываются как многократно статически неопределенная рама или ферма. Этот метод вошел в практику в связи с внедрением электронно-цифровых машин и получил обобщенное название дискретизации системы. Смысл названия в том, что непрерывная (континуальная) система заменяется разрывной (дискретной).

Выбор схемы бруса или оболочки диктуется не только формой рассмотренной конструкции, но и рядом других соображений, связанных, например, со степенью напряженности конструкции и трудоемкостью расчета. Геометрическая форма тела может схематизироваться по-разному также в зависимости от того, как приложены внешние силы. Так, в случае переменных нагрузок, вызывающих усталостное разрушение, необходимо учитывать мелкие геометрические особенности — отверстия, выкружки, канавки, которые являются очагами концентрации напряжений. При постоянных нагрузках эти особенности в случае пластического материала могут быть отнесены к категории несущественных.

С уменьшением поперечных размеров брус теряет способность воспринимать изгибающие моменты. В этом случае целесообразно принять, что его жесткости на изгиб, кручение и на сжатие равны нулю, и что он способен работать только на растяжение. Так рождается схема гибкой нити. Её дальнейшим развитием является схема гибкой сети. Аналогичные обстоятельства позволяют создать схемы мембранны и гибкой оболочки, способных работать только на растяжение.

В зависимости от конкретных обстоятельств, возможно принятие схем, в которых элемент конструкции наделяется свойствами более полного, но тоже только частичного восприятия силовых факторов. В результате возникают схемы, промежуточные между балкой и нитью, между оболочкой и гибкой оболочкой. Например, брус тонкостенного открытого профиля способен воспринимать относительно малые крутящие моменты. Тогда можно принять, что он может работать только на изгиб, растяжение и сжатие. Так, в частности, обычно поступают при анализе некоторых авиационных конструкций, имеющих тонкостенные подкрепления (стрингеры, шпангоуты). Оболочке тоже может быть приписана способность работать только на растяжение, сжатие и сдвиг, но «отказано» в способности

работать на изгиб и кручение. Наконец, возможно создание «полубезмоментного» варианта оболочечных схем, когда жесткость на изгиб в одном направлении приравнивается равной нулю, а в другом — отлична от нуля. Выбор наиболее подходящего упрощения диктуется опять же геометрическими особенностями и условиями нагружения.

Несколько слов о внешних силах.

Схематизация внешних сил является составной частью выбора расчетной схемы и в ряде случаев вырастает в серьезную проблему. Это относится в первую очередь к задачам самолето- и ракетостроения. Нагрузки, действующие на конструкцию летательного аппарата, являются сложными и сильно меняются в зависимости от условий полета. Поэтому приходится выделять так называемые расчетные случаи, т. е. такие характерные режимы работы конструкции, при которых имеют место наименее благоприятные сочетания нагрузок и температур. Приходится выяснить основные и дополнительные нагрузки.

Однако такое деление является условным. Бывает так, что большая постоянная сила оказывается менее опасной, чем меньшая, но вибрационная. Второстепенная сила, не опасная для конструкции в целом, может оказаться опасной для отдельного узла и т. д.

Анализ нагрузок может в некоторых случаях потребовать постановки специального эксперимента, преследующего только одну цель — выяснение величин действующих сил. Характерным примером этому является анализ условий транспортировки. В связи с неопределенностью действующих сил, приходится иногда предпринимать специальные перевозки, снабжая транспортные средства регистрирующей аппаратурой. Большое значение в этом случае, да и не только в этом, имеет статистический анализ действующих сил как случайных величин.

Условия нагружения не всегда следует понимать буквально. Рассматривая некоторую конструкцию, мы обязаны очертить ее границы. Всякое воздействие со стороны тел, находящихся за пределами этой границы, для рассматриваемой конструкции является внешним. Это может быть силовое воздействие, температурное, это может быть заданное перемещение или ускорение. Казалось бы, что такая детализация не имеет значения, если только внешнее воздействие удалось свести к системе определенных сил. Однако это не так, и об этом подробно будет сказано в сле-

дующей главе. Здесь же мы остановимся только на одном частном вопросе, связанном с выбором расчетной схемы.

Очень важно не только установить правильный закон распределения внешних сил, но также выявить природу их возникновения. Особое

внимание необходимо обращать на более или менее четкое разграничение двух крайних случаев: случай, когда заданы силы, и случай, когда заданы смещения.

Например, на башне, имеющей ферменную конструкцию, укреплено в четырех точках кольцо K (рис. 10), на котором установлен резервуар веса P , заполненный водой. Совершенно ясно, что каждая из четырех стоек фермы воспринимает соответствующую часть веса резервуара и должна рассчитываться на прочность и на устойчивость. Для этих стоек независимым параметром внешнего воздействия является заданная сила веса.

Далее может быть поставлен вопрос о прочности опорного кольца K . При решении подобных задач часто допускается необоснованный переход к силовой схеме нагружения. Типичной в этом смысле является следующая ошибочная постановка расчета.

Вес бака равномерно распределяется по кольцу и уравновешивается четырьмя реакциями опор (рис. 11). Далее

кольцо рассчитывается на изгиб и на кручение, как статически неопределенная плоско-пространственная рама. Между тем такая схема нагружения далека от истины, поскольку кольцо, в отличие от фермы, не является свободно

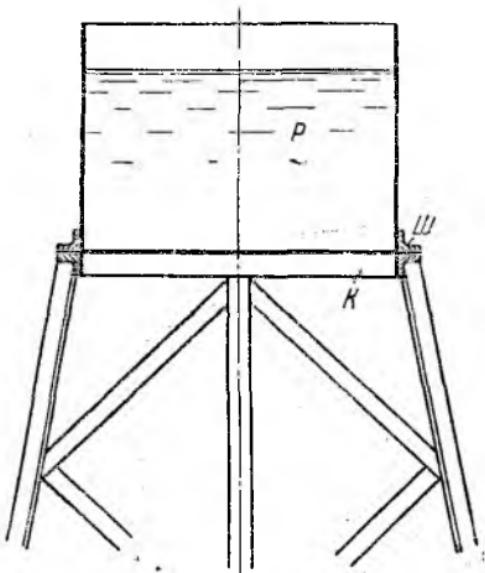


Рис. 10.

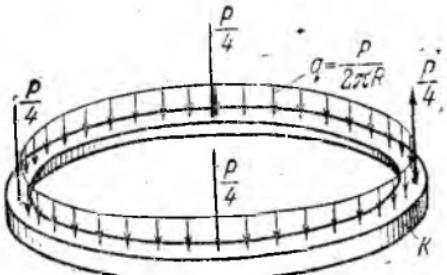


Рис. 11.

нагруженной системой. Оно прогибается ровно настолько, насколько прогнется несущий основную нагрузку донный шпангоут бака III . Последний же при изгибе в вертикальной плоскости обладает очень большой жесткостью, поскольку связан с цилиндрической обечайкой.

Таким образом, изгибающие и крутящие моменты, а следовательно, и напряженное состояние кольца, определяются не непосредственно весом бака, а теми прогибами, которые возникают в смежном несущем элементе. Если шпангоут удовлетворяет условиям прочности, то автоматически этим же условиям удовлетворяет и кольцо.

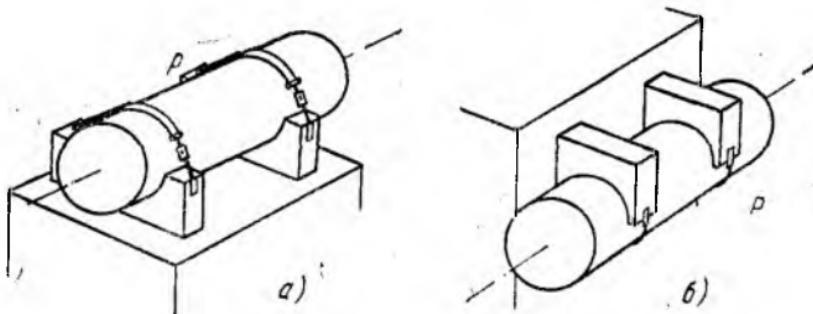


Рис. 12.

Еще один пример показан на рис. 12, *a*. Цилиндрический бак высокого давления расположен на ложементах и фиксируется на них при помощи двух лент. При увеличении давления бак несколько расширяется и ленты натягиваются. Ясно, что вопрос о прочности лент может ставиться здесь лишь в связи с их предварительной затяжкой при установке. Что же касается высокого давления, то оно воспринимается стенками бака, деформации которых определяют удлинение лент.

Нагрузка, возникающая как следствие заданного удлинения, обычно называется прессовой, по аналогии с работой винтового или гидравлического пресса. Те же самые ленты будут испытывать силовое нагружение (от веса бака), если бак подвесить так, как показано на рис. 12, *b*.

Рассмотрим еще некоторые дополнительные обстоятельства, которые необходимо принимать во внимание при выборе расчетной схемы.

Расчетная схема выбирается, как правило, по-разному, в зависимости от того, какова цель последующего анализа. В частности, при расчете по допускаемым напряжениям

расчетная схема может быть совершенно отличной от той, которая берется за основу при расчете по предельным нагрузкам.

Рассмотрим, например, гофрированную коробку (сильфон), играющую роль компенсатора смещений, установленного на стыке двух трубопроводов (рис. 13, а).

Положим сначала, что сильфон изготовлен из хрупкого материала — стекла или кварца (такие сильфоны применяются в вакуумной технике). Сильфон в этом случае

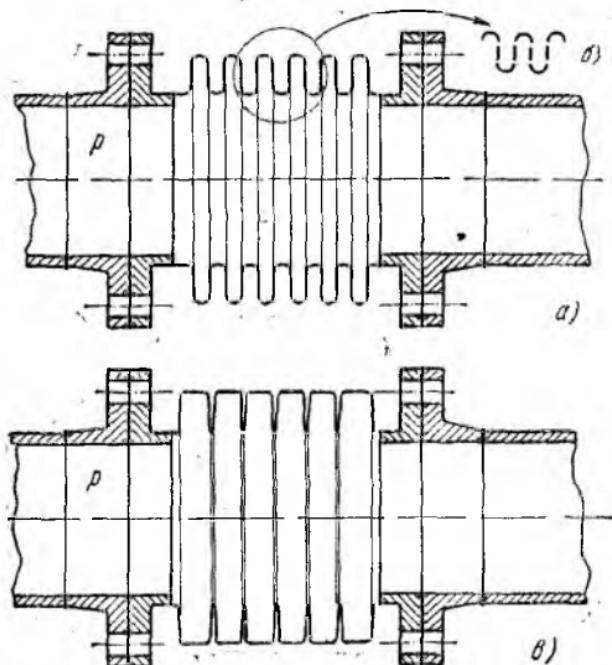


Рис. 13.

целесообразно рассчитывать по допускаемым напряжениям. Вводя упрощения в геометрическую форму, принимаем, например, что сильфон состоит из ряда кольцевых пластин, соединенных участками торовых оболочек (рис. 13, б). Далее, при помощи существующих методов определяем изгибающие напряжения, которые в дальнейшем сопоставляем с предельными для данного материала. Это — одна расчетная схема.

Положим теперь, что сильфон изготовлен из пластичного материала (латунь, бронза) и установлен в магистрали высокого давления на машине одноразового действия, например, на ракете. В этом случае сильфон

целесообразно рассчитывать на разрушающее давление. При испытании обнаруживается, что под действием давления внутренние гофры обжимаются, а внешние — распрямляются. Дуга образующей принимает форму кривой, показанной на рис. 13, в. При дальнейшем нагружении сильфон разрывается на внешнем гофре вдоль образующей.

Наблюдаемая картина разрушения, естественно, подсказывает расчетную схему. На предельное давление сильфон следует рассчитывать как обычновенный гладкий цилиндр, имеющий диаметр, равный внешнему диаметру сильфона. Понятно, что такая схема пригодна только для определения разрушающего давления.

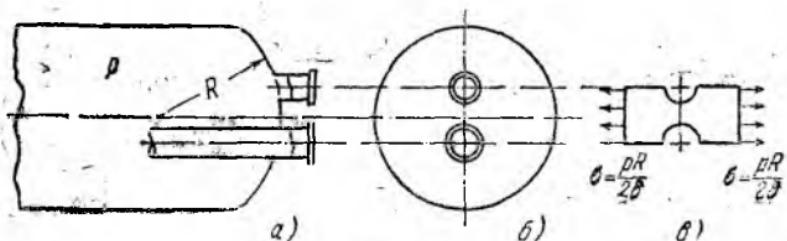


Рис. 14.

В качестве второго примера можно привести днище бака, имеющего несколько присоединенных к нему трубопроводов (рис. 14, а). Бак находится под действием внутреннего давления. Если материал хрупкий, то расчет ведется по допускаемым напряжениям. Определяются местные изгибающие напряжения, возникающие вблизи контура днища и в зоне присоединения трубопроводов. Эти напряжения сопоставляются затем с предельными. Если же материал пластичный, и надо определить только разрушающее давление, схема резко упрощается. Расчитывается на разрыв перемычки между трубопроводами (рис. 14, б, в). Основанием этому служит эксперимент, показывающий, что при близком расположении трубопроводов разрыв происходит именно в этой зоне. Если отверстия расположены на большем расстоянии друг от друга, схема, очевидно, должна быть изменена.

Как видим, при расчетах конструкции по предельным нагрузкам выбор расчетной схемы производится в соответствии с характером предполагаемого разрушения. Для более полной ориентировки в наиболее сложных случаях требуется постановка специального эксперимента.

Для анализа составных развертывающихся оболочечных систем (рис. 15) прибегают иногда к склейке бумажных моделей. Такой способ (в тех случаях, когда он возможен) не требует времени на выполнение механических работ. Модель склеивает сам расчетчик. Нагружая модель самыми простыми средствами (большой частью от руки), легко представить физическую сторону задачи и выделить наиболее опасные случаи нагружения.

При выборе расчетной схемы всегда необходимо сообразоваться, с одной стороны, с теми трудностями, которые ожидают исследователя в дальнейшем, а с другой,— учитывать значимость и ценность ожидаемого результата.

Найти разумную меру между тем и другим не всегда просто. И трудность, и ценность расчета могут проявляться в различных формах, и всегда — относительны. Например, вычислительные трудности могут оказаться легко преодолимыми, если имеется в виду использовать машинную технику. Возможно и обратное. То, что при обычных обстоятельствах казалось бы очень простым, оказывается сложным. Например, если расчетный отдел загружен другими столь же срочными и важными работами, то для данной у него просто не хватает сил.

Значимость полученного результата может также оцениваться в связи со многими факторами. Прежде всего значимость расчета может быть связана с последствиями разрушения. Одно дело, например, если из строя вышел тросик спидометра, а другое — если сломалась полуось автомашины. Ясно, что ответственность и ценность расчета во втором случае больше. Значимость расчета может связываться с требованиями по весу или по габаритам, что характерно для задач самолето- и ракетостроения. Чем крупнее рассчитываемый узел, тем большее значение для весовой оценки имеет результат расчета. При уточненном расчете такого узла получается большая экономия веса.

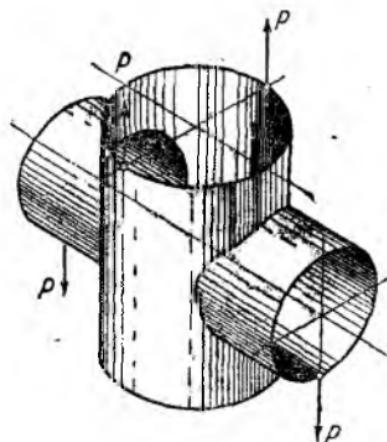


Рис. 15.

Значимость расчета определяется напряженностью узла. Если узел работает на пределе, расчет, и при том точный, имеет большее значение. Для мало напряженной детали не имеет смысла создавать сложную расчетную схему. Именно вследствие этого и возник способ расчета «в запас прочности», когда условно отбрасываются некоторые несущие элементы, суммируются максимальные нагрузки или совмещаются опасные сечения. Такого рода упрощенный подход дает эффект только в случае не очень напряженных условий работы узла и при допустимом перетяжении.

Наконец, значимость расчета зависит от наличия или отсутствия унифицированных расчетных схем, по которым имеются проверенные практикой значения коэффициентов запаса. Например, более правильно было бы рассчитывать коленчатый вал двигателя, как статически неопределенную многоопорную балку. Такая схема, однако, не применяется, во-первых, вследствие сложности, а во-вторых, ввиду наличия неучитываемых факторов, таких, как выработка вкладышей и т. п. Предпочитают рассчитывать коленчатый вал как разрезную балку, сопоставляя найденный коэффициент запаса с полученными тем же методом коэффициентами запаса для других отлаженных, надежно работающих двигателей.

Затронутый вопрос об однотипности расчетных схем и сравнительном характере расчета подобных конструкций имеет большое практическое значение и в дальнейшем мы к нему еще вернемся.

Примеров рационального выбора расчетных схем можно привести очень много. Но уже того, что было сказано, достаточно, чтобы представить себе многогранное содержание этого вопроса.

Для инженера искусство выбора расчетной схемы является очень важным. Этому искусству нигде специально не учат. В программах высших технических учебных заведений и, тем более, в университетских программах, нет таких курсов, таких дисциплин, где бы этот вопрос разбирался концентрированно и в должной мере.

Искусство выбора расчетной схемы постигается, как правило, только на практике.

Ну, как не вспомнить афоризм: «Только в государственной службе постигаешь истину» (К. Прутков).

Поэтому все то, что говорилось в этой, и то, о чем пойдет речь в следующей главе, для лиц, знакомых с условиями практических расчетов, является хорошо известным. Обе эти главы предназначаются для тех, кто уже знает сопротивление материалов, но еще не постиг его назначения, в основном для студентов и молодых инженеров. Им необходимо твердо усвоить, что расчет состоит не только вложении расчетных формул. Прежде, чем поставить практическую задачу на рельсы математических выкладок, приходится зачастую много и серьезно подумать над тем, как правильно воспринимать реальную конструкцию и как выбрать расчетную схему.

III

От расчетной схемы к реальной конструкции

Из трех перечисленных на стр. 5 этапов расчета мы рассмотрели первый. Следующим является анализ расчетной схемы. Здесь вступает в силу аналитический аппарат, т. е. все то, чем богата строительная механика, теория упругости и сопротивление материалов.

Понятно, что уже при выборе расчетной схемы мы ориентируемся на возможности существующих теорий. Так, если имеем оболочку, работающую в основном на растяжение или сжатие, то обращаемся к безмоментной теории. Если имеем систему, состоящую из тонкостенных стержней, то и для этого случая имеется достаточно теоретических разработок. Бывает и так, что сущность задачи требует выбора расчетной схемы, для которой теория еще не создана, а применение существующих схем ничем не оправдывается. И нельзя сказать, чтобы это было редко. Понятно, что в таких случаях приходится искать новые решения, на первых порах — упрощенные.

В результате анализа мы получаем напряжения, деформации и перемещения в идеализированном объекте. Если расчетная схема была выбрана правильно и отражает существо задачи, то результат анализа можно считать отражающим свойства реальной конструкции.

Остается выполнить этап III, т. е. установить, удовлетворяет ли конструкция тем требованиям в смысле прочности, которые к ней предъявляются. Иначе говоря, нужен обратный переход от расчетной схемы к реальной конструкции.

Естественно, слово «прочность» здесь не следует понимать буквально. По существу, речь идет о выполнении требований, связанных с общим состоянием конструкции при силовом, температурном и, вообще, внешнем воздействи-

вии. Точно так же и под разрушением будем понимать состояние, в котором конструкция уже не удовлетворяет своему назначению, независимо от того, произошло ли это в результате разрыва в каком-либо узле или в результате возникновения необратимых деформаций, приведших к чрезмерным отклонениям размеров от номинала.

Чтобы дать числовую оценку прочности, мы выбираем соответствующий критерий. Обычно это делается в зависимости от условий работы и назначения конструкции еще на стадии выбора расчетной схемы, с тем, чтобы путь расчета просматривался от начала до конца и анализ расчетной схемы велся в нужном направлении, а не «вообще».

Наиболее распространенным является подход, при котором в качестве критерия берутся возникающие в конструкции напряжения. Мерилом надежности в этом случае является коэффициент запаса, взятый по пределу текучести, либо по пределу прочности, либо, наконец, по пределу усталости.

Оснований для этого критерия более чем достаточно. Он с совершенной очевидностью вытекает из испытаний не только образцов, но и ряда натурных конструкций, особенно, если напряженное состояние является однородным или близким к нему. Этот критерий твердо укоренился в расчетной практике и многим представляется единственным возможным. Тем не менее, он не может рассматриваться как универсальный и нуждается в обсуждении.

Возникает прежде всего принципиальный вопрос. Является ли вычисленный по напряжениям коэффициент запаса достаточной характеристикой надежности конструкции?

На этот вопрос надо, конечно, дать отрицательный ответ. И не только потому, что, кроме всего прочего, нас могут лимитировать условия жесткости. Дело — в принципе. Не всякие напряжения одинаково опасны. Чтобы убедиться в этом, достаточно вернуться к рассмотренным ранее условиям силового и прессового нагружения.

Положим, что в стержне, показанном на рис. 16, груз P вызывает напряжение σ . Судя по виду показанной диаграммы, коэффициент запаса по пределу прочности имеет величину порядка 1,5.

Создадим те же напряжения другим способом. Пусть стержень помещен внутри полости массивного цилиндра

и последний нагревается до такой температуры, чтобы в стержне возникло то же самое напряжение σ (рис. 17).

В первом случае параметром внешнего воздействия является сила P . Увеличение ее в 1,5 раза приведет к разрыву стержня. Во втором случае параметром внешнего

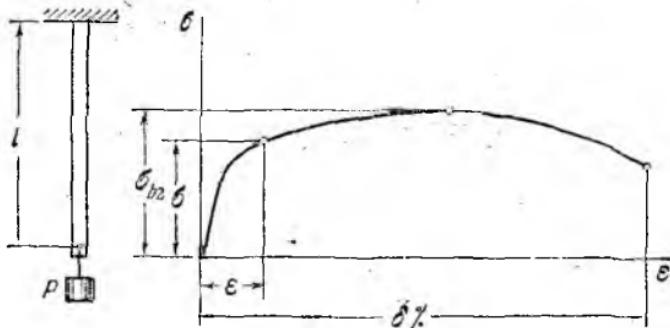


Рис. 16.

воздействия является изменение температуры Δt . Увеличение этого параметра в 1,5 раза приведет к соответствующему увеличению деформации, а до разрыва стержня практически будет так же далеко, как и было.

Как видим, для пластичного материала силовое нагружение в данном случае опаснее прессового, и различие буде-

дет тем больше, чем выше пластичные свойства материала. Если бы диаграмма растяжения до момента разрыва сохраняла линейность, то оба вида нагружения были бы равно опасны. В случае характеристики с возрастающей жесткостью более опасным будет прессовое нагружение. Например, для кони-

ческой пружины, работающей с посадкой витков, диаграмма сжатия имеет вид кривой, показанной на рис. 18, а. Для хрупкой высокоуглеродистой стали разрушение пружины наступает при полностью сжатых витках вследствие их контактного взаимодействия. Для приведенной диаграммы двукратное увеличение нагрузки не влечет за собой серьезных последствий; при двукратном же увеличении осадки следует разрушение пружины.

Рассмотренные примеры очень просты. Для силового нагружения стержня рис. 16 степень опасности разрушения характеризуется запасом по пределу прочности. При

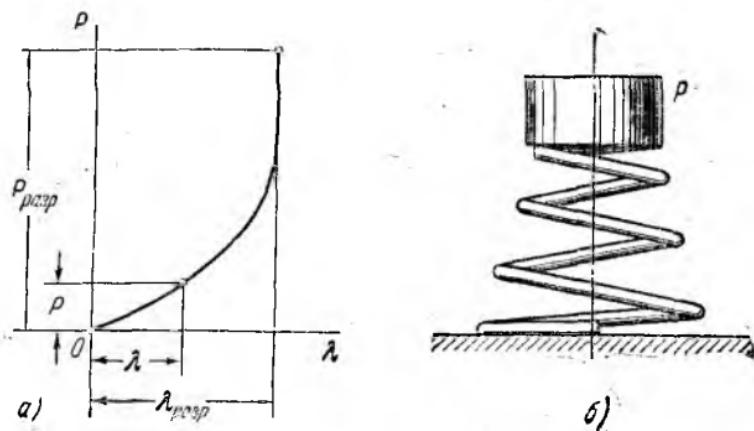


Рис. 18.

прессовом нагружении того же стержня в качестве определяющей характеристики целесообразно взять отношение удлинения при разрыве δ к рабочему удлинению ε . Аналогично для пружины (рис. 18, б) может быть взято соответственно отношение нагрузок $P_{разр}/P$ или перемещений $\lambda_{разр}/\lambda$.

Сложнее обстоит дело при смешанных видах нагружения, когда один и тот же элемент работает в условиях и прессового, и силового режима. В таких условиях работают, например, крепежные болты (рис. 19). По мере увеличения давления усилие в болтах меняется в большей или меньшей степени в зависимости от жесткости прокладки. Расчет по условию нераскрытия контакта является наиболее рациональным как по существу дела, так и по простоте подхода, хотя проверка болта на прочность при предварительной затяжке и не исключается.

Так или иначе, ясно одно. Напряжения не всегда определяют надежность конструкции, а в некоторых случаях

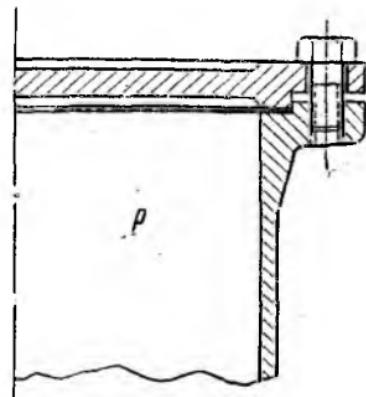


Рис. 19.

и вовсе ее не определяют. А в целом, для наиболее исчерпывающего решения вопроса необходимо знать, как ведет себя система при наличии заметных отклонений эксплуатационных параметров от номинала. При этом, понятно, должны рассматриваться реальные отклонения, т. е. такие, которые вытекают из взаимодействия рассматриваемого объекта с окружающей средой.

Вообще, когда мы хотим какому-либо понятию дать числовую оценку, то стремимся сделать это при помощи одной числовой величины. Это проще, доступнее, а главное, обеспечивает сопоставимость. Но имеются понятия, которые одним числом не выражаются. Например, вектор, тензор. Да и обязательно брать такие примеры из математики.

Следует признать, что понятие прочности и, вообще, надежности не настолько просто, чтобы его количественную оценку можно было бы выразить одним числом. В более широкой постановке для определения надежности надо вводить несколько параметров. Мало того, некоторые стороны этого понятия вовсе не поддаются числовой оценке. Сюда относится ответственность конструкции, степень подготовки и уровень квалификации обслуживающего персонала, культура производства, и некоторые другие обстоятельства. Таким образом, прочность — понятие разностороннее.

Наиболее просто задача прочности решается в случае, если имеется возможность сопоставить рассчитываемую конструкцию с подобной, уже себя зарекомендовавшей, работающей в тех же или близких условиях. Здесь коэффициент запаса приобретает характер критерия подобия. Естественно, что расчет во всех его этапах для той или другой конструкции должен вестись одинаковым образом. Одной и той же должна быть расчетная схема, одним и тем же должен быть метод анализа, и наконец, одинаково должен определяться коэффициент запаса. Тем самым устанавливается сравнительная степень надежности.

В более сложных случаях естественной является попытка, не отказываясь от понятия коэффициента запаса, найти такие пути для его определения, чтобы условия работы конструкции были бы в коэффициенте учтены наиболее полно. Попробуем подойти к этому вопросу с общих позиций.

Рассмотрим параметры, определяющие состояние системы (назовем их условно «внутренними»), и выберем из них те, которые представляются наиболее существенными для данной задачи. Это — напряжения, деформации, перемещения. Могут быть предложены к рассмотрению и другие параметры, например, перегрузки в точке подвеса приборов в спускаемом на землю контейнере в тех случаях, если сохранность приборов для нас важнее сохранности контейнера.

Итак, это — внутренние параметры. Они зависят от ряда других, которые будем называть «внешними». О них говорилось в предыдущей главе. Это — силы, температура, заданные извне независимые перемещения и прочее.

Параметры внешнего воздействия не выдерживаются точно. Всегда имеется какая-то вероятность их отклонения от номинального значения. Точно так же обстоит дело и с внутренними параметрами: существует разброс механических характеристик материала, неоднородность свойств, обусловленная технологическими операциями, отступления в геометрических размерах и прочее.

Если рассматривать перечисленные отступления как случайные, меняющиеся в известных пределах, то, пользуясь законами больших чисел, можно предсказать вероятность выхода конструкции из строя. Если окажется, что эта вероятность практически равна нулю или, во всяком случае, мала, то следует считать, что конструкция надежна.

Прежде, чем обсуждать возможности практической реализации такого подхода, следует остановиться на правомерности самой вероятностной концепции, трактующей разрушение как случайное событие. Это далеко не всегда и не всеми признается за очевидное.

Представим себе довольно типичный диалог приверженца вероятностных концепций в вопросах прочности и некоего строгого оппонента. Не вникая в схему предполагаемых расчетов, оппонент сразу ставит вопрос ребром: как можно, возводя жилой дом, мириться и даже рассчитывать и планировать какую-то вероятность его разрушения? Как мы можем при такой постановке оценивать труд проектировщика и строителя? А главное, можем ли мы всерьез воспринимать меру их ответственности за свою работу?

На это следует возражение: вероятность разрушения любого здания существует независимо от нас, нравится

нам это или нет. Она есть некоторая объективная характеристика. Она чрезвычайно мала, но все-таки отлична от нуля, и это проявляется в том, что даже в практике строительства жилых объектов раз в 10—20—30 лет бывают случаи разрушения на стадии возведения зданий или даже законченных объектов. Случаев же частичного разрушения не так уж и мало.

Правильно,— говорит оппонент. Но, согласитесь, что описанные вами примеры разрушения связаны вовсе не с вероятностью разброса в пределах установленных технических требований, а с вероятностью их нарушения: с вероятностью неправильного использования технологии, с вероятностью допущения брака, или, наконец, с вероятностью проявления прямого головотяпства. Естественно, что статистический учет подобных случаев был бы так же полезен, как, скажем, статистика уличных происшествий. Но то, о чем вы говорите, вовсе не дело механика, а скорее, социолога, работающего в сфере научной организации труда.

Конечно,— отвечает сторонник вероятностного подхода. Мой пример с разрушением зданий на стадии строительства, действительно, неуместен. Но представьте себе, что конструкция создана с полным соблюдением технических требований. Все равно, вероятность разрушения отлична от нуля. Особенно хорошо это видно в случае внешних нагрузок, известных нам лишь в статистической оценке. Возьмем к примеру то же самое строительство жилых зданий. Рассматривая их прочность при сейсмическом воздействии, мы полагаемся на статистику земных толчков в данном районе. При строительстве вблизи рек — рассчитываем на статистические данные по уровню паводка за много лет. Так же приходиться поступать и при расчетах на ветровые нагрузки.

С этими доводами оппонент согласен. Но его смущает другое.

Положим,— говорит он,— внешние нагрузки известны точно. Давайте поговорим о технических требованиях в производстве. Если они выполнены полностью и правильно сами по себе, то я представляю, что вероятность разрушения будет равна нулю. Ведь поэтапный контроль производства для того и создан, чтобы заранее отсечь те отклонения от номинала, которые в итоге могли бы создать аварийную ситуацию. Если же вероятность разрушения

сохраняется, то это как раз и означает, что установленный контроль неправилен.

Однако этот аргумент легко разбивается.

На то и предлагается вероятностный подход, чтобы проанализировать, в частности, и меры контроля. Научно их обосновать. Где нужно — ужесточить, а где можно — ослабить.

Скажите,— спрашивает оппонент, ведь для подобного анализа необходимо иметь обширные статистические данные, полученные из сферы производства. Я спрашиваю это неспроста. До сих пор мне не доводилось встречать ни одного расчета даже самой простой конструкции, проведенного на основе статистической обработки производственных факторов. Мало того. Мне представляется, что в настоящее время существует определенная увлеченность математической стороной вопроса в ущерб поиску исходных параметров. Необходимых данных, попросту говоря, нет. И совершенно не видно, как их искать.

На это следует ответ, основанный на справедливой вере в технический и научный прогресс.

Трудности получения исходных данных налицо. Однако можно выразить уверенность в том, что они преодолимы, и с улучшением качества контрольно-измерительной аппаратуры и ее количества эта задача будет решена. Так, по крайней мере, было во всех случаях внедрения вероятностных методов в различные отрасли техники.

Перед тем как покинуть спорящих, мы слышим заключительную реплику оппонента, из которой следует, что его сомнения не рассеяны: «В технике разрушение принято рассматривать не как случайное событие, а как чрезвычайное происшествие. Чтобы его избежать, на всех стадиях производства ведется и контроль, и испытания, и моделирование. Все эти операции непрерывно меняются и совершенствуются. Уследить за ними с позиций вероятностных концепций, попросту говоря, невозможно. Кто будет этим заниматься? Какой ценой могут быть приобретены необходимые вам данные, из которых вы, быть может, сумеете рассчитать теоретическую вероятность разрушения? Но не это главное. Повторяю, что для инженерной практики важна не столько вероятность разброса в пределах установленных требований, сколько вероятность отступления от них. Именно она все и определяет. Инженер, ответственный за конструкцию, озабочен в первую очередь,

узы, — не интересующей вас вероятностью разброса, а практическими мерами, обеспечивающими качество. И не обижайтесь на него. Его задача посложнее вашей. Ведь ему иногда даже приходится быть психологом. Кому из мастеров доверить сварку ответственного узла, в какое время суток и даже в какой день недели или месяца... Вот и попробуйте эту реальность уложить в вашу расчетную схему...»

Итак, прекратим эту дискуссию. Из приведенных доводов за и против становится очевидным многое.

Там, где речь идет о внешних параметрах (нагрузках, температурах и пр.), статистический подход не только правомерен, он — реализуем, а в ряде случаев является единственным возможным. Это и упомянутые выше сейсмические нагрузки, а также ветровые нагрузки и нагрузки, на которые рассчитываются или должны рассчитываться конструкции транспортных средств.

Сложнее обстоит дело с вероятностным подходом к оценке влияния внутренних параметров. Есть сфера вопросов, которые было бы неверно рассматривать без учета специфических сторон деятельности человека в длинной последовательности производственных операций, начиная от плавки металла и кончая эксплуатацией готовой конструкции. Учесть эту специфику (или пренебречь ею) в некоторых частных задачах, может быть, и удастся. Но ориентироваться на полное возобладание вероятностной концепции, даже в отдаленном будущем, было бы, по-видимому, неосновательно.

Если отказаться от оценки разрушения как вероятного события, то расчет конструкции на прочность существенно упрощается и ставится на реальную основу.

Определим зависимость одного или нескольких внутренних параметров от определяющего внешнего параметра. Это будет своего рода диаграмма «испытания» конструкции. Затем, подобно тому как это делается с диаграммой расстояния $\sigma = f(\varepsilon)$, когда определяется предел прочности или текучести, на найденном графике отметим характерные точки и установим «запас состояния» конструкции.

Сущность такого подхода удобнее всего пояснить на примерах.

Контейнер (рис. 20) космического аппарата отбрасывается пневмоподжателем с усилием P , передаваемым на жесткую пробку, вваренную в вершине сферического

днища. Материал оболочки, как и подавляющее большинство легких сплавов, обладает достаточной пластичностью. Поэтому возникновение местной пластической деформации в оболочке вблизи пробки не вызывает беспокойства. Важнее, чтобы местное, пусть даже остаточное, перемещение пробки не превышало (в целях сохранности содержимого контейнера) определенной нормы. Таким образом, в качестве внутреннего параметра выбирается перемещение точки приложения силы, а в качестве внешнего, определяющего — сама сила P .

Строим график сила — перемещение (рис. 21) и на нем отмечаем характерную точку, отсекающую область быстрого нарастания перемещений. В данном случае удобно взять точку максимального усилия P_{\max} . Если кривая не имеет максимума, предельную точку можно взять условно, подобно тому как определяется условный предел текучести при испытании образцов. Отношение P_{\max} к рабочему усилию $P_{\text{раб}}$ принимается за характеристику степени опасности нагружения. Если запас оказался недостаточным, оболочка должна быть усиlena. В частности, вблизи пробки для плавной «раздачи усилия» толщина оболочки может быть выполнена переменной.

В рассмотренном примере пояснен третий этап расчета, но весьма сложным выглядит второй этап, а именно — построение графика $P=f(\delta)$, в котором необходимо отразить как «геометрическую», так и «физическую» нелинейность. Однако современная электронно-цифровая техника позволяет решать и более сложные задачи. На этом вопросе мы еще остановимся в главе X.

Приведем другой пример. Контейнер спускается на парашюте (рис. 22). Необходимо сохранить, содержащиеся в нем приборы. Поэтому задается предельное значение

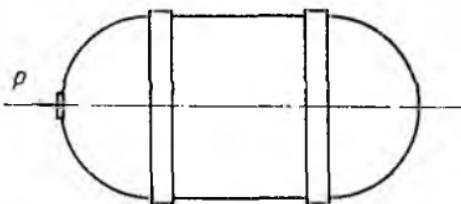


Рис. 20.

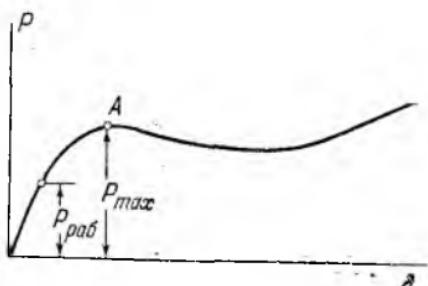


Рис. 21.

перегрузки, которую испытывает приборная плита при ударе контейнера о землю,

$$n_x = \frac{g + f}{g},$$

где f — отрицательное ускорение плиты. В качестве внутреннего параметра следует выбрать, очевидно, перегрузку, а в качестве внешнего — скорость встречи с землей v . Для построения диаграммы $n_x = f(v)$ необходимо знать жесткость грунта и податливость частично сминаемого конуса.

Что касается первой характеристики, т. е. жесткости грунта, то ее неопределенность устраняется рассмотрением наименее благоприятного случая, а именно — предположением о спуске на каменистое основание. Тогда податливость грунта принимается равной нулю. Характеристика смятия конуса должна быть либо рассчитана, что, как и в предыдущем примере, вполне возможно, либо определена путем испытаний, если затраты на подготовку расчета, программирование и оплату машинного времени представляются чрезмерными.

Далее на полученной диаграмме $n_x = f(v)$ выбирается точка, характеризующая определенный запас по отноше-

нию к предельному n_x . Отсюда предъявляются определенные требования к парашютной системе с тем, чтобы скорость спуска была снижена до определенного уровня. Одновременно могут быть изменены параметры переднего конуса. При более глубоком исследовании возникает задача поиска наименьшего веса всей системы, включая парашютную.

Рассмотрим еще один пример. Стартовый стол (рис. 23) ракеты представляет собой ферменную конструкцию. Проч-

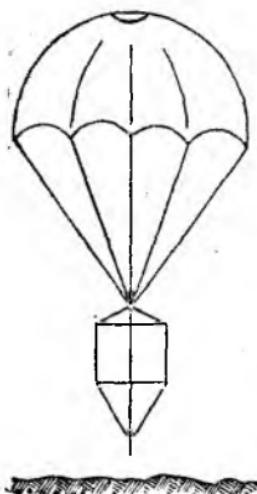


Рис. 22.

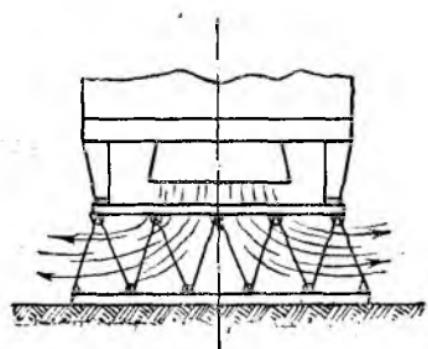


Рис. 23.

ность стола достаточна, чтобы выдержать вес полностью заправленной ракеты. При запуске двигателя стержни фермы интенсивно обогреваются отходящими газами, а нагрузка на ферму в процессе выхода двигателя на режим падает. Возникает опасение: не потеряет ли ферма за это сравнительно небольшое время несущую способность вследствие резкого снижения механических характеристик материала?

Понятно, что в земных условиях постановка такой задачи не актуальна. Стол может быть сделан достаточно прочным и предмета для расчета здесь нет. Но представим себе, что речь идет об обратном старте с поверхности Луны. Тогда весовые требования к конструкции становятся исключительно высокими, и прочность системы может оказаться на пределе.

За внутренний параметр выберем смещение опорной площадки стола, за внешний — время возрастания тяги с момента воспламенения от нуля до величины, равной стартовому весу ракеты. Для построения зависимости между этими параметрами необходимо решение динамико-теплопрочностной задачи. Должно быть составлено уравнение движения массы ракеты и уравнения движения стержней, изгибающихся под действием продольных сил. Жесткость стержней должна вычисляться шаг за шагом в зависимости от температуры. По диаграмме определяется степень опасности состояния.

В рассмотренных примерах мы видели большое разнообразие внешних определяющих параметров. Более ограничено число внутренних параметров. Обычно это — напряжения, перемещения и перегрузки. Иногда, может быть, и деформации. Например, головку жидкостного ракетного двигателя (рис. 24) при большом числе развальцованных форсунок можно рассматривать как однородную пластину. Под действием перепада давлений пластина изгибается, и в некоторых случаях возможно нарушение герметичности в местах развальцовки. За критерий герметичности целесо-

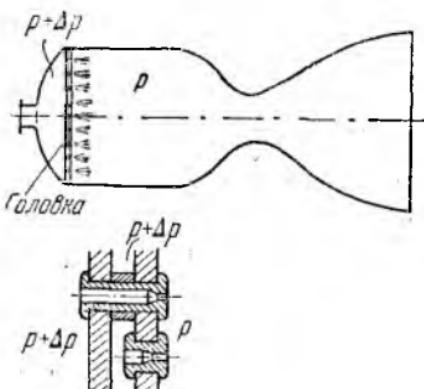


Рис. 24.

сообразно принять максимальную деформацию, возникающую в пластине. Действительно, если пластина в зоне посадки форсунки удлиняется, то натяг ослабевает, и в зону ослабленного контакта может проникнуть жидкость. Величина предельного значения деформации может быть определена только из специально проведенных экспериментов и зависит от технологических особенностей изготовления двигателя.

Возникает естественный вопрос. А всегда ли нужно строить диаграмму зависимости внутреннего параметра от внешнего? Если значение одного из них лимитировано, как, например, для контейнера была лимитирована перегрузка n_x , а в другом примере фактически неварьируемым оставалось время выхода двигателя на режим, то не проще ли ограничиться проверкой состояния.

Действительно, в ряде случаев так и поступают. Но нужно помнить, что степень надежности определяется не только отношением предельного параметра к рабочему, но и дальнейшим ходом диаграммы. В самом характере диаграммы содержится некоторая информация о пагубности последствий, и ориентироваться в том, как ведет себя система в закритическом состоянии очень важно. Это создает уверенность в подходе к задаче. Конечно аргументация типа «я уверен» — недостаточна, но быть уверенным — очень важно.

Даже в обычных расчетах по напряжениям было бы очень не плохо каждый раз «заглянуть подальше». Как будет вести себя конструкция при дальнейшем нагружении? Какие будут от этого последствия? Именно оценка этих последствий (даже глазомерная) позволяет различить, например, сущность прессового нагружения от силового. И вообще, если бы в каждом расчете анализ поведения конструкции был продолжен (или мог бы быть продолжен) в область ее закритического состояния, то необходимость «сортировки» разных типов напряжений по степени их важности отпала бы, если не полностью, то в значительной мере.

В свете всего сказанного расчет по напряжениям, с которого мы начали эту главу, ставится на определенное место. Это — упрощенный подход, в котором мы отказываемся от наблюдения за условиями жизни конструкций после того как напряжение, взятое в качестве внутреннего параметра, достигло некоторого значения. Упрощение это

весьма существенное. Из рассмотренных выше примеров было видно, что построение диаграммы «внутренний — внешний параметр» заставляет обращаться к аппарату теории пластичности, к учету больших перемещений, к машинному счету, что далеко не всегда оправдывается полученными результатами.

Однако упростив задачу, мы получаем неудобства другого рода. Они особенно осязаемы в случае неоднородного напряженного состояния, когда прочность оценивается по эквивалентному напряжению в наиболее «опасной» точке. Прежде всего возникает вопрос, в какой мере состояние в одной точке может определять степень надежности всей конструкции? Ведь на примерах многих испытаний можно видеть, что прочность конструкции остается вполне достаточной, несмотря на то, что в некоторых ее точках возникают такие напряжения, которые в условиях однородного напряженного состояния не могли бы быть допущены.

Если зона повышенных напряжений является локальной и ее объем соизмерим с объемом кристаллических зерен, то метод расчета по напряженному состоянию в точке вступает в противоречие со схемой сплошной среды. В этом случае нет никаких оснований ориентироваться на местные расчетные напряжения, если в материале и без того имеются неучитываемые местные силы взаимодействия между частицами, безусловно, превышающие расчетные (см. рис. 8).

С другой стороны, для некоторых хрупких материалов в определенных условиях возникновение высоких напряжений в точке влечет за собой разрушение всей конструкции, и расчет по напряженному состоянию в точке вполне оправдан. Точно так же местные напряжения необходимо учитывать при расчетах на усталостную прочность.

Словом, необходима та сортировка напряжений, о которой говорилось выше, и расчет по напряжениям имеет в себе элемент субъективного подхода и личной интуиции расчетчика.

Расчет по напряжениям в опасной точке требует вдумчивого отношения. Но часто бывает, что определение напряжений в конструкции рисуется как самоцель. Погоня за анализом напряженного состояния начинает заслонять существо дела. Поэтому все сказанное выше имеет целью

частично изменить широко распространенное представление об исключительности напряженного состояния в оценке прочности конструкции.

Отказавшись от построения диаграммы «внутренний — внешний параметры», мы можем поставить задачу в несколько ином плане. Попробуем определить такое значение внешнего параметра (обычно — нагрузки), при котором конструкцию по тем или иным соображениям можно заведомо считать не удовлетворяющей своему назначению. Иначе говоря, дадим верхнюю оценку сил, которые еще может выдержать система. Расчет при этом строится таким образом, чтобы избежать затруднений, связанных с анализом внутреннего состояния.

Классическим примером такого подхода является расчет по предельным нагрузкам. В качестве внешнего параметра принимается система действующих сил. Их предельное значение устанавливается различными способами в зависимости от особенностей конструкции. Для балок и рам, работающих на изгиб, наиболее распространенным является известный из сопротивления материалов прием врезания пластических шарниров. Нагрузка считается предельной в том случае, если рама с врезанными шарнирами становится кинематически изменяемой.

Уравнения равновесия составляются в предположении малости перемещений. В действительности образование пластического шарнира связано с бесконечно большим местным изменением кривизны. Таким образом, в расчете по предельным нагрузкам содержится логическое несоответствие. Однако, несмотря на это, расчет рам и балок по предельному состоянию оказывается в ряде случаев весьма плодотворным, так как позволяет избежать сложного анализа внутренних закономерностей и быстро приводит к цели.

Для оценки надежности конструкции можно предлагать и другие способы, в большей или меньшей степени отличающиеся от рассмотренных выше.

Многообразие существующих расчетных приемов несет в себе, безусловно, отражение специфики и традиций, сложившихся в различных областях техники. Вследствие однотипности создаваемых в каждой области конструкций происходит местная стабилизация подходов к расчету конструкции и к выбору величин коэффициента запаса. Поэтому всякая попытка унифицировать расчетные приемы

была бы обречена на неудачу, как небезызвестная попытка создать международный язык эсперанто.

Прочисты-практики, получившие опыт в различных областях техники, конечно, понимают друг друга. Но если, скажем, работнику, занимавшемуся прочностью строительных конструкций, случится перейти в область авиационной техники, потребуется время для перестройки «прочностного мышления».

Особенно заметные различия обнаруживаются в выборе коэффициентов запаса.

В общем машиностроении установился расчет по допускаемым напряжениям, которые берутся как некоторая доля от предела текучести или предела прочности. Коэффициент запаса меняется ориентировочно в пределах от 1,5 до 2,5 и является величиной слишком сильно зависящей от местных условий, чтобы здесь можно было назвать ее с точностью до десятых.

Подобно тому как приемы агротехники (время и глубина вспашки, сроки посева и уборки) определяются накопленным местным опытом и климатическими условиями, меняющимися, кстати, от года к году, так и выбор коэффициента запаса зависит от условий производства, от работы смежников, от комплекса задач, возложенных на конструкцию, и, конечно, от «местного» опыта. С течением времени этот опыт обобщается и вырабатываются какие-то традиционно принятые значения коэффициентов. Но дать какие-то строгие объективные правила для назначения коэффициентов запаса пока не представляется возможным.

Широко известна, например, попытка «математизировать» выбор коэффициента запаса при помощи так называемого комплексного метода, при котором коэффициент запаса представляется в виде произведения ряда других коэффициентов:

$$n = \zeta_1 \cdot \zeta_2 \cdots \zeta_m.$$

Каждый из коэффициентов ζ_i определяется независимо от других. Один из них «учитывает» динамичность нагрузки, другой — температуру, третий — ответственность конструкции и т. д. К такому подходу, безусловно, следует отнестись отрицательно. Прежде всего, он неправилен по существу. Такие факторы, как «динамика», свойства материалов, температура и прочие не могут рассматриваться

изолированно один от другого. Они образуют сложный узел взаимообусловленных параметров, которые не поддаются простому разделению. Комплексный подход не упрощает, а усложняет задачу. Вместо одного коэффициента приходится выбирать три — пять.

Наконец, как показывает опыт, на практике обычно получается, что коэффициент n , найденный при помощи комплексного метода, расходится с приемлемым в несколько раз, после чего приходится принимать то значение, которое представляется более разумным. Это очень напоминает встречающиеся нормы расценок за производимые работы. Подсчитаешь по нормам — получилось много: «Столько рабочий получать не может...». Подсчитаешь второй раз — получилось мало: «Рабочий за столько работать не будет...». Приходится назначить «сколько надо», а затем оправдать проставленную цифру при помощи расценок. Поскольку применение комплексного метода никем не предписывается, то и не удивительно, что он и не получил практического применения.

Выходит, что коэффициент запаса, имея сам числовое значение, через другие числа не выражается. Всегда ли так? По-видимому, всегда.

В авиационной технике к выбору коэффициента запаса установился подход, отличный от принятого в общем машиностроении. Это отличие обусловлено требованиями безопасности полета, и соответствующий коэффициент носит название коэффициента безопасности f . Основная идея сводится к тому, чтобы дать летчику некоторый не-прикосновенный резерв прочности на случай непредвиденных обстоятельств. Не пугая читателя описанием возможных ситуаций, укажем только, что обстановка может заставить экипаж самолета предпринять такие действия, которые связаны с возникновением перегрузок сверх номинала. Это в первую очередь — маневры, направленные на быстрое снижение, на выход из шквальной обстановки, на сбой пламени при пожаре и пр. В расчетах предполагается, что машина, как летательный аппарат, полностью выходит из строя при нагрузках, увеличенных в f раз по отношению к нормальным полетным. Такие мелкие повреждения, как отрыв обшивки или местная остаточная деформация отдельного узла, в счет не идут. При номинальных нагрузках, соответствующих различным расчетным случаям, сохранность конструкции должна быть обеспе-

чена полностью. Всякие дополнительные запасы в авиационной практике если и допускаются, то считаются признаком неквалифицированного конструирования. Что же касается коэффициента безопасности f , то он неприкоснovenен. Трудности определения разрушающей нагрузки, с одной стороны, и ответственность конструкции — с другой, предопределяют необходимость проведения натурных испытаний контрольного образца машины до полного разрушения.

Величина коэффициента безопасности в международной практике регламентируется нормами прочности (нормы Ллойда или JCAO). Инициатива их введения принадлежит страховым фирмам, и нормы регулярно пересматриваются компетентными органами.

Частично нормативная регламентация прочности свойственна также авиационному двигателестроению и таким отраслям техники, как котлостроение или строительство лифтов и подъемников. Введение норм прочности диктуется требованиями безопасности, но отнюдь не стремлением облегчить труд инженера, занимающегося расчетом конструкции. С нормами прочности работать не легче, а труднее. Нормы прочности в ряде случаев ограничивают творческую инициативу и создают благоприятную почву для формального отношения к делу. А порой — становятся тем инструментом, который позволяет людям, не сведущим в технике, активно вмешиваться в ее дела.

Мы уже говорили о том, что прочность конструкции является сложным понятием, которое не характеризуется полностью коэффициентом запаса. Хочется в этом же плане рассмотреть свойства материала.

В результате испытания образцов на растяжение или сжатие мы получаем объективные механические характеристики материала — предел текучести, предел прочности и удлинение при разрыве. Спрашивается, достаточно ли их, чтобы полностью характеризовать поведение материала в реальных условиях работы конструкции. Опыт практической работы подсказывает, что в основном все-таки достаточно. Но встречаются исключения, заставляющие относиться к этому вопросу с большим вниманием.

Обычно считается, что высокий предел прочности, это — хорошо. Опытный конструктор согласится с этим, но поинтересуется, каково удлинение при разрыве, а затем — постарается уточнить некоторые дополнительные

свойства материала. Как сваривается, нет ли склонности к образованию трещин и пр. Ведь может случиться так, что, применяя материал с более высоким пределом прочности, мы получим менее прочную конструкцию. Болты и шпильки, изготовленные, например, из некоторых типов молибденовых сталей с пределом прочности порядка $180-190 \text{ кг}/\text{мм}^2$ и имеющие достаточное удлинение при разрыве, не обеспечивают прочного соединения блоков двигателя и через некоторое время разрушаются, причем это может произойти на не работавшем двигателе через несколько часов после затяжки. Такое явление принято объяснять высокой чувствительностью материала к местным напряжениям. Высокопрочные хромо-марганцевые стали доставляют много хлопот при сварке баллонов высокого давления из-за склонности к трещинообразованию.

Таким образом, возникает мысль, что пригодность материала для данной конструкции должна оцениваться с учетом еще каких-то несформулированных характеристик сверх тех, которые получены в результате испытания образца. Этим характеристикам трудно дать числовую оценку и трудно поставить объективные испытания для их определения.

Словом, материал, кроме высоких показателей, должен обладать хорошими свойствами. Существует какая-то трудноуловимая степень конструктивного «благородства» материала. Кстати, точно так же можно говорить и о «благородстве» самой конструкции. Нельзя считать конструкцию «благородной», если малым отклонениям геометрической формы от номинала соответствует большое снижение несущей способности.

Эти нюансы в поведении материала и конструкции не остаются незамеченными. Они хорошо известны и образуют комплекс задач, вписывающихся в понятие конструктивной прочности.

Можно смело утверждать, что научные основы конструктивной прочности до сих пор не созданы. В вопросах подбора материала приходится пользоваться в первую очередь неписанными правилами, диктуемыми накопленным опытом. Таким образом, вопросы конструктивной прочности и выбора коэффициента запаса частично смыкаются.

Вопрос о прочности конструкций в целом очень сложный, а главное, комплексный. В нем фокусируется итог работы

проектировщиков, технологов, испытателей и теоретиков. Окончательно надежность конструкции определяется в результате длительных испытаний на этапе доводки. В настоящей главе речь шла только об одной стороне вопроса, т. е. о построении расчета на прочность. В одних случаях прочностная сторона является решающей, в других — имеет подчиненный характер. Поэтому, когда предполагается провести анализ некоторой конструкции, исследователь должен прежде всего определить место своей задачи среди смежных задач с тем, чтобы глубина проработки и объем затраченного труда соответствовали значимости вопроса.

IV

Основные правила и принципы в сопротивлении материалов

Как уже говорилось выше, при выборе расчетной схемы реальная конструкция идеализируется. Сохраняется существенное для рассматриваемой задачи и отбрасывается несущественное. Такого рода упрощений обычно недостаточно. При анализе выбранной расчетной схемы необходимо бывает принять еще некоторые предпосылки, относящиеся уже не к вопросам идеализации, а к методам последующего анализа. Если эти предпосылки носят общий характер и лежат в основе решения подавляющего большинства задач, их называют руководящими правилами или принципами.

Если следовать большинству толковых словарей, то руководящее правило и принцип — синонимы. Но в научном тексте они имеют различные оттенки. Принцип есть основополагающее недоказуемое в общем виде утверждение, отличающееся от аксиомы своей общностью. Руководящее правило — это нечто обыденное и менее универсальное.

Автор и лектор вольны употреблять эти термины в зависимости от обстоятельств и желания подчеркнуть относительную значимость вопроса.

В сопротивлении материалов и в теории упругости есть три таких правила-принципа. Это — относительная жесткость систем, принцип суперпозиции и принцип Сен-Венана.

Первый из указанных принципов основан на том, что в подавляющем большинстве случаев форма тела под действием внешних сил меняется несущественно. Это позволяет при составлении уравнений равновесия рассматривать тело как недеформированное, имеющее те же геометрические размеры, какие оно имело до нагружения.

До тех пор, пока теория упругости и сопротивление материалов рассматривали в основном относительно жесткие системы, это правило выглядело как достаточно универсальное. Оно называлось, да и сейчас обычно называется, принципом отвердевания или принципом неизменности начальных размеров.

Если на конце консоли (рис. 25, а) будет приложена сила P , то балка изогнется, и точка приложения силы сместится. Для определения внутренних сил в сечении A необходимо воспользоваться методом сечений и рассмотреть условия равновесия отсеченной части (рис. 25, б). Здесь, однако, возникает затруднение в связи с тем, что новые геометрические размеры отсеченной части остаются неизвестными, пока не определены внутренние силы, зависящие в свою очередь от геометрической формы системы. При малых перемещениях указанное обстоятельство не имеет значения, поскольку деформированная система несущественно отличается от недеформированной. В этом случае в соответствии с правилом относительной жесткости уравнения равновесия составляются для недеформированной системы, и тогда

$$N = 0, \quad Q = P, \quad M = Px.$$

Задача, таким образом, резко упрощается.

Понятно, что этого правила нельзя придерживаться в случае больших перемещений (рис. 26). Кроме того, оно может оказаться неприемлемым и при малых перемещениях, если форма нагруженного тела меняется существенным образом.

Например, при тех же малых прогибах изменение формы будет иметь существенное значение, если гибкая консоль нагружена не поперечной, а продольной силой P (рис. 27). Здесь изгибающий момент в сечении A может быть определен только с учетом возникающих прогибов балки.

Обычным примером для иллюстрации отступлений от правила относительной жесткости является система,

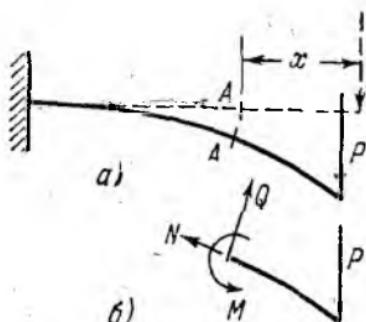


Рис. 25.

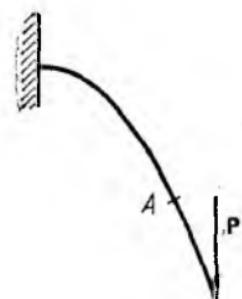


Рис. 26.

состоящая из двух шарнирно связанных стержней, расположенных на одной прямой (рис. 28, а). Уравнения равновесия для отсеченного узла должны в данном случае составляться с учетом угла, возникающего в результате удлинения стержней. Даже малые изменения формы системы в данном случае влияют на условия равновесия существенным образом.

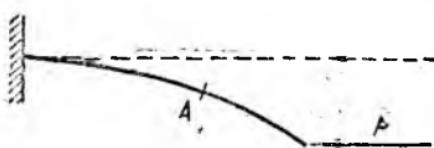


Рис. 27.

Это и понятно. Если геометрия тела меняется существенным образом, то каждому новому значению силы соответствует новая геометрия тела. Это означает, что в процессе изменения силы меняется жесткость системы, и зависимость между перемещениями и силой становится нелинейной.

Обратное утверждение неверно. Если зависимость между перемещениями и силами нелинейна, то это еще не

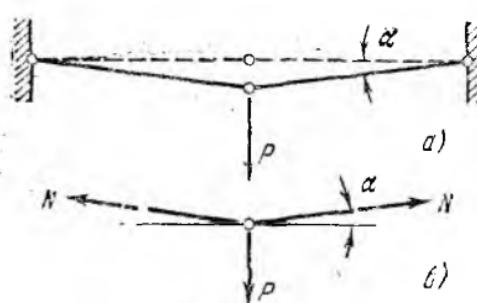


Рис. 28.

значит, что нельзя руководствоваться правилом относительной жесткости. В самом деле, нелинейность может иметь двоякое происхождение: либо она возникает вследствие существенных изменений формы тела в процессе нагружения, либо же она связана с тем, что материал не следует закону

Гука. В первом случае из нелинейности между перемещениями и силами вытекает неприменимость правила относительной жесткости. Во втором случае такого вывода сделать нельзя. Материал может не следовать закону Гука, но если изменение формы несущественно, к системе полностью применимо это правило.

Если заранее известно, что между перемещениями и силами существует линейная зависимость, то можно почти уверенно утверждать, что при анализе системы можно придерживаться правила относительной жесткости. В качестве исключения можно представить себе лишь искус-

ственно созданную систему, в которой нелинейности, связанные с существенными изменениями геометрической формы, в точности компенсировались бы нелинейностями свойств материала.

Необходимо отметить, наконец, что уже в законе Гука

$$\sigma = E\varepsilon$$

содержится в неявной форме признание принципа неизменности начальных размеров, поскольку не оговаривается, по отношению к какой площади и к какой длине следует вычислять при испытаниях образцов величины σ и ε .

Погрешности при определении модуля E будут не меньше, естественно, тех погрешностей, которые возятся принятием относительной неизменности начальных размеров.

В связи со сказанным наивно выглядят попытки при помощи чисто геометрического подхода учесть несущественные изменения формы тела и тем самым «уточнить» решение задачи. Такого рода попытки делаются обычно начинающими студентами при анализе, например, трехстержневой системы, показанной на рис. 29, когда учащийся задается целью «учесть» нелинейность, возникающую вследствие изменения угла α , по схеме:

Уравнение равновесия —

$$2N_2 \cos(\alpha - \Delta\alpha) + N_1 = P,$$

уравнение деформаций —

$$\Delta l_2 = \Delta l_1 \cos(\alpha - \Delta\alpha).$$

Понятно, что такого рода уточнение является иллюзорным, поскольку при этом не уточняется исходная зависимость $\Delta l = f(P)$.

Системы, для которых соблюдается условие пропорциональности между перемещениями и внешними силами, подчиняются второму из основных правил (принципов сопротивления материалов) — принципу суперпозиции,

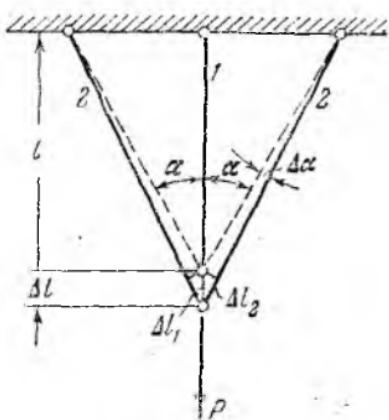


Рис. 29.

или независимости действия сил. В соответствии с этим принципом перемещения, напряжения и деформации нагруженного тела считаются не зависящими от порядка приложения сил; действие суммы сил равняется сумме их действий.

Положим, что к некоторому телу (рис. 30) приложена сила P_1 . Перемещение точки A в некотором произвольно выбранном направлении будет пропорционально силе P_1 , т. е.

$$u_1 = \delta_1 P_1, \quad (1)$$

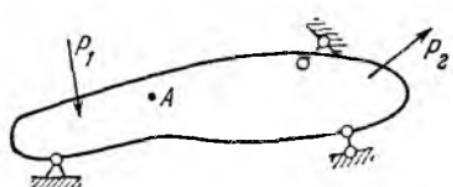


Рис. 30.

где δ_1 — коэффициент пропорциональности. Примем теперь, что сила P_1 снята

и в некоторой новой точке приложена сила P_2 . Перемещение, которое вызовет эта сила в точке A в том же направлении, будет

$$u_2 = \delta_2 P_2. \quad (2)$$

Коэффициенты пропорциональности δ_1 и δ_2 будут, конечно, различными, поскольку силы P_1 и P_2 приложены в разных точках тела. Будем считать, что принятая линейная зависимость между перемещениями и силами сохраняется как при возрастании, так и убывании сил и предопределляет, следовательно, и упругие свойства тела.

Рассмотрим теперь совместное действие сил P_1 и P_2 . Приложим к упругому телу силу P_1 , а затем, не снимая ее, силу P_2 . Тогда перемещение, которое получит точка A , можно записать при помощи следующего выражения:

$$u_A = \delta_1 P_1 + \delta'_2 P_2. \quad (3)$$

Коэффициент δ_1 в данном случае будет тем же, что и в выражении (1), поскольку сила P_1 прикладывалась к ненагруженной системе. Коэффициент же δ'_2 , в отличие от введенного ранее коэффициента δ_2 , отмечен штрихом, так как сила P_2 прикладывалась не к свободной системе, а к системе, предварительно нагруженной силой P_1 .

Если коэффициенты δ_2 и δ'_2 различны, то следует признать, что δ'_2 зависит от силы P_1 . Тогда выражение (3) противоречит основному предположению о том, что при любых силах перемещения зависят от действующих сил линейно. Следовательно δ'_2 от P_1 не зависит. При $P_1=0$

выражение (3) должно переходить в выражение (2). Следовательно, $\delta'_2 = \delta_2$, и тогда

$$u_A = \delta_1 P_1 + \delta_2 P_2. \quad (4)$$

Таким образом, перемещение определяется суммой результатов независимых действий сил P_1 и P_2 . В частности, оно будет верным и в том случае, если силы P_1 и P_2 приложены в одной точке. Если изменить порядок приложения сил, то путем аналогичных рассуждений легко прийти к тому же выражению (4). Следовательно, результат действия сил не зависит от порядка их приложения. Сказанное легко обобщается и на случай любого числа сил.

Итак, в основе принципа независимости действия сил лежит предположение о линейной зависимости между перемещениями и силами при любой системе сил и, кроме того, предположение об обратимости процессов нагрузки и разгрузки.

В свете сказанного становится правомерным наряду с силовым рассматривать и температурное воздействие. Температурная деформация пропорциональна изменению температуры. Если материал подчиняется закону Гука и при нагреве не возникает пластических деформаций, то в приведенных выше рассуждениях под P_1 или P_2 или под тем и другим вместе можно понимать температуры или, точнее говоря, температурные поля. Естественно, это верно до таких значений температур, при которых модуль упругости E может считаться не зависящим от температуры, как до этого он считался независимым от сил. Точно так же и коэффициент линейного расширения α предполагается не зависящим от напряжений и температуры.

Применимость правила относительной жесткости пред определяет заранее и применимость принципа суперпозиции. Обратное — неверно.

Сказанное можно пояснить схемой, изображенной на рис. 31, где показана группа систем, имеющих линейные и нелинейные зависимости между перемещениями и силами, а также области применения двух рассмотренных выше правил.

Применение принципа независимости действия сил к решению задач сопротивления материалов и теории упругости дает очень много. Оно позволяет, во-первых, при большом числе внешних сил получить решение как результат наложения частных решений. Кроме того, на

основе принципа независимости действия сил можно получить общие теоремы (теоремы взаимности, Кастилиано и др.), применение которых позволяет создать эффективные методы расчета многих сложных систем.

Перейдем теперь к принципу Сен-Венана. Этот принцип утверждает следующее: если в пределах некоторой области упругого тела приложена система сил, то на расстояниях,

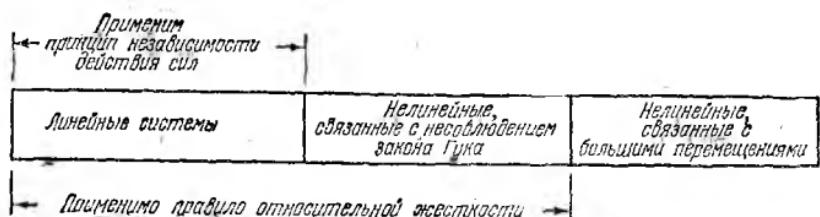


Рис. 31.

существенно превышающих характерные размеры взятой области, напряжения и деформации практически одинаковы для всех статически эквивалентных систем сил.

Принцип Сен-Венана прочно вошел в методы решения задач сопротивления материалов, и все то, что этим принципом утверждается, воспринимается обычно как само собой разумеющееся. Так, например, при решении задачи об изгибе балки (рис. 32) не ставится вопрос о том, как приложена сила P и каким образом осуществляется связь



Рис. 32.

балки с опорами. Между тем здесь возможен целый ряд конструктивных вариантов. Некоторые из них показаны на рис. 33.

В данном случае принцип Сен-Венана утверж-

дает, что независимо от конструкции узлов, и, следовательно, независимо от способа передачи усилий на балку, в зонах, достаточно удаленных от мест приложения сил, напряжения и деформации в балке определяются только равнодействующими — силой P и связанными с ней реакциями опор. Расстояние, на котором особенности приложения сил уже теряют свое значение, имеет величину порядка размеров поперечного сечения бруса.

Исследование напряжений, возникающих в подвесках, проушинах, тележках, сварных швах и в заклепках, пред-

ставляет собой особую задачу. При анализе напряжений в пределах каждого узла принцип Сен-Венана также находит свое место. В частности, напряжения в заклепках узла, показанного на рис. 34, определяются величиной равнодействующей и практически не зависят от того, каким образом распределены внешние силы в зоне проушины.

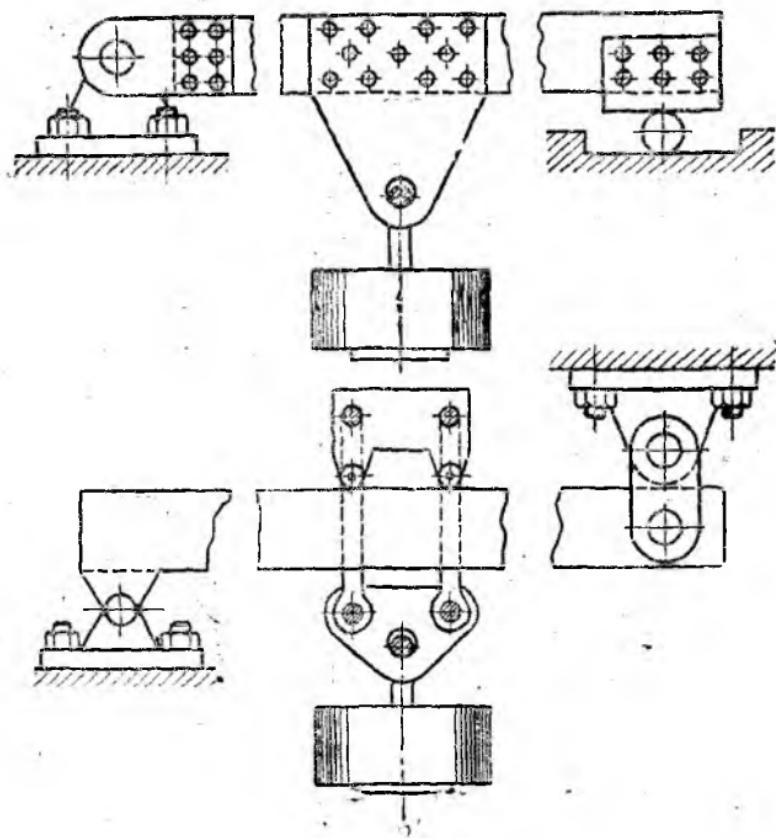


Рис. 33.

Применение принципа Сен-Венана позволяет существенно расширить общность основных расчетных формул сопротивления материалов, поскольку освобождает от необходимости учитывать конкретные особенности местного распределения сил.

Принцип Сен-Венана, как и все прочие принципы, в общем виде не доказывается, хотя в ряде частных случаев полностью подтверждается на примерах решения задач методами теории упругости.

Для подавляющего большинства встречающихся на практике систем можно применять принцип Сен-Венана. Так, на основе применения этого принципа построен расчет стержневых и рамных систем. На основе этого принципа устанавливаются статически эквивалентные условия на контуре пластин или оболочек. Имеются и другие наглядные примеры его эффективности. В данном случае, однако, интереснее рассмотреть не столько правила, сколько исключения.

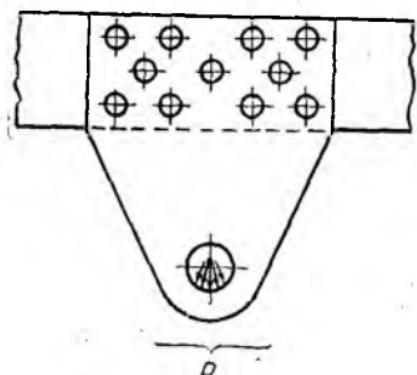


Рис. 34.

или, иначе говоря, об определении напряжений в зоне приложения сил. К числу подобных задач относятся в первую очередь все контактные задачи. Сюда же относятся задачи об определении напряжений в зоне наложения

местных связей типа жестких вставок или, наоборот, ненагруженных отверстий.

Широкий класс систем, при анализе которых не всегда можно воспользоваться принципом Сен-Венана, образуется на основе схемы тонкостенного стержня.

На рис. 35 показано нагружение тонкостенного и сплошного стержня силой P , передаваемой через жесткую скобу. Как в

одном, так и в другом случае в окрестности торца напряжения по поперечному сечению распределены неравномерно. Обычно принимается, что эта неравномерность является существенной лишь для областей, простирающихся по оси стержня на расстояние порядка размеров поперечного сечения. Для сплошного стержня такое ут-

верждение является правильным. Для тонкостенного же стержня размер зоны неравномерного распределения напряжений будет существенно выше. Иными словами, в тонкостенном стержне проникновение краевых особенностей вдоль оси заметно больше, чем в сплошном стержне. Поэтому нельзя сразу сказать, выравниваются или не выравниваются напряжения в поперечном сечении для стержня заданной длины, т. е. неизвестно, можно или нельзя воспользоваться в данном случае принципом Сен-Венана.

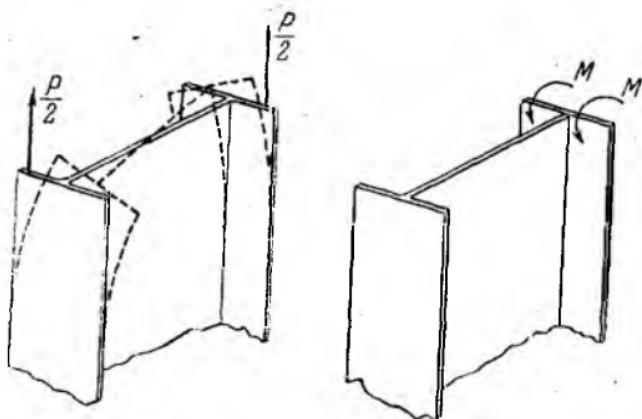


Рис. 36.

Рис. 37.

Сказанному можно дать простое физическое толкование. Поперечное сечение тонкостенного стержня характеризуется, в отличие от сплошного, еще и толщиной. Каждая полка двутаврового сечения (рис. 36) нагружена внецентренно приложенной силой $P/2$. Если бы стенка профиля отсутствовала, то полки изгибались бы независимо, и действие каждого момента на полку распространялось бы на всю ее длину. Равномерного распределения напряжений по сечению в этом случае не возникло бы. Вопрос заключается в том, сколь жесткой является связь между полками. Для сплошного сечения эта связь очень жесткая, и неравномерность распределения напряжений в поперечном сечении ограничена узкой областью. Для тонкостенного стержня жесткость связи мала и эта неравномерность проникает неизмеримо дальше. Чем меньше толщина стенки, тем заметнее указанный эффект.

В рассмотренном примере глубина проникновения краевого эффекта определяется жесткостью стенки на изгиб и

кручение. При других видах нагружения, например, в случае двух моментов, приложенных к одной полке (рис. 37), картина распределения напряжений в сечении определяется жесткостью на сдвиг и растяжение стенки в ее плоскости. Эта жесткость существенно больше, чем жесткость на изгиб или кручение. Поэтому в случае, показанном на рис. 37, влияние краевого эффекта распространяется на значительно меньшую глубину.

Следовательно, степень затухания краевых особенностей определяется «демпфирующим» действием дополнительных связей, органически присутствующих в системе.

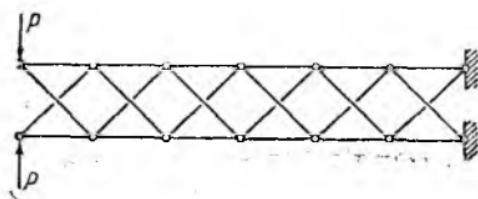


Рис. 38.

Эту мысль можно пояснить на примере фермы, показанной на рис. 38. На первый взгляд кажется, что действие самоуравновешенной системы двух сил P , P распространяется лишь на часть близко расположенных стержней, а на достаточном удалении от точек приложения сил стержни останутся практически ненагруженными. Однако это не так.

Система — статически определима, и передача усилий через стержни дополнительными связями не ограничивается. Отрезая ячейку фермы, состоящую из

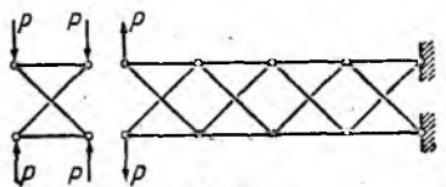


Рис. 39.

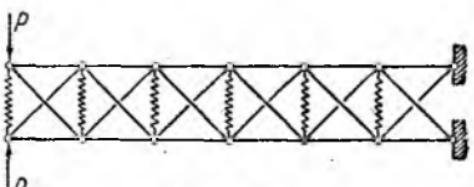


Рис. 40.

четырех стержней (рис. 39), получим для укороченной фермы опять те же две силы, но другого знака. Продолжая этот процесс, видим, что системе свойственна периодичность изменения сил, не сопровождающаяся затуханием.

Если ввести в ферму дополнительные связи в виде пружин (рис. 40), то получим затухание. Предоставляя читателю возможность решить эту простую задачу самостоятельно, укажем только, что

$$N_n = \pm N_1 C^{n-1},$$

где N_n и N_1 — усилия в соответствующих стержнях n -й и первой ячеек, а C — постоянная, меньшая единицы и зависящая от соотношения жесткостей пружин и стержней. Чем больше жесткость пружины, тем меньше C .

Таким образом, характер приложения внешних сил в сочетании с конструктивными особенностями системы предопределяет в каждом конкретном случае возможность или невозможность обращения к принципу Сен-Венана. Существенную роль играет и анизотропия материала. Так, например, при растяжении деревянного бруска вдоль

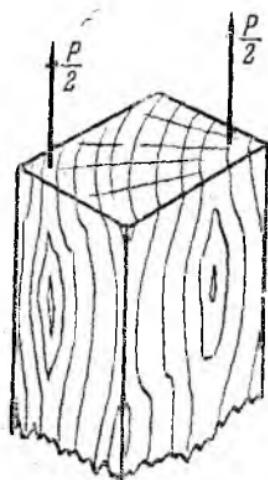


Рис. 41.

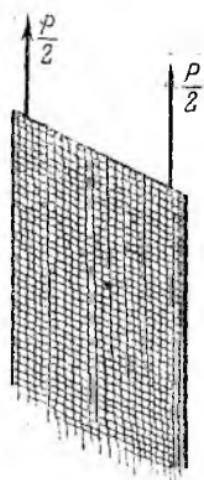


Рис. 42.

волокон (рис. 41) следует ожидать более медленного выравнивания напряжений, чем в случае изотропного материала. Это определяется, очевидно, заметным различием между жесткостью слоев дерева на растяжение и жесткостью межслойного вещества на сдвиг.

Аналогичную роль может играть и конструктивная анизотропия. В частности, для ткани при растяжении вдоль нитей (рис. 42) выравнивание напряжений по сечению возможно только на очень больших расстояниях от места приложения сил. Та же картина может иметь место и в слоистых конструкциях, когда один из слоев образован податливым наполнителем.

Итак, при достаточно больших расстояниях от мест приложения сил напряженное состояние во всех случаях определяется равнодействующими приложенных сил. Для обычных систем местные особенности приложения сил

теряют свое значение на малых расстояниях, для некоторых систем — на больших и, наконец, в исключительных случаях — на очень больших расстояниях. Таким образом, вопрос о том, можно или нельзя пользоваться принципом Сен-Венана, решается путем сравнения глубины проникновения краевых особенностей и общих размеров тела. Вернемся, например, к растянутому стержню, показанному на рис. 3б. Если тонкостенный стержень настолько длинен, что зона неравномерного распределения напряжений занимает только небольшую часть общей длины, то принципом Сен-Венана воспользоваться можно. Если же стержень имеет длину одного порядка с размерами зоны неравномерности, то сделать этого нельзя.

Подобного рода заключения имеют относительный характер, и в рассмотренном примере это очень хорошо видно. В самом деле, в качестве основного параметра, характеризующего внешние силы, была принята их равнодействующая. Можно охарактеризовать эти силы более точно и ввести в рассмотрение, кроме равнодействующих, еще и бимомент. Тогда, пользуясь теорией тонкостенных стержней, мы сможем определить законы распределения напряжений по длине стержня и по контуру его сечения. Конечно, равнодействующая и бимомент вместе так же не определяют закона распределения сил на торце, как ранее не определяла одна равнодействующая. Однако два параметра более точно характеризуют внешние силы и снижают степень неопределенности в различных способах приложения этих сил. Это и дает возможность уточнить закон распределения напряжения.

Таким образом, на большом расстоянии от торца напряжения определяются только равнодействующей внешних сил, на меньшем расстоянии — равнодействующей и бимоментом. Все прочие более тонкие особенности приложения сил сказываются на законах распределения напряжений в еще более узкой области, примыкающей к торцу. Если в дополнение к равнодействующей и бимоменту ввести новые параметры, характеризующие внешние силы, то можно рассчитывать на дальнейшее сужение зоны распространения неучтенных местных напряжений.

В результате напрашивается некоторая расширенная трактовка принципа Сен-Венана. Суть ее сводится к тому, что влияние неучтенного остатка в последовательном описании характера приложения внешних сил сказывается

в зоне, имеющей относительно меньшие размеры. Чем выше степень отражения индивидуальных особенностей внешних сил, тем уже область влияния неучтенного «остатка».

Рассмотренные в настоящей главе правила — принципы положены в основу не только курса сопротивления материалов, но и других разделов механики деформируемого тела (теория упругости, строительная механика и др.). Понятно, что широкое и повседневное применение указанных правил не освобождает нас от необходимости внимательно следить за их применимостью в каждом конкретном случае.

О температурных напряжениях

Повседневные наблюдения показывают, что конструкция, находящаяся в условиях температурного воздействия, ведет себя во многом подобно тому как если бы она была нагружена внешними силами. При резкой неравномерности распределения температур в теле могут образовываться трещины. Тонкие листы в результате температурного воздействия коробятся и принимают новую форму.

Такого рода явления принято объяснять наличием температурных напряжений. Эти напряжения являются эквивалентом, при помощи которого можно сравнивать степень силового и температурного воздействия.

Температурные напряжения возникают как следствие температурных деформаций тела. Их величина зависит от температуры и законов ее распределения, от условий закрепления тела и от свойств материала. В простейшем случае, когда материал деформируется упруго, температурные напряжения пропорциональны модулю упругости E , коэффициенту линейного расширения α и изменению температуры Δt . Силовое и температурное воздействия подчиняются в этом случае принципу суперпозиции. Поэтому при нагреве конструкции и одновременном нагружении ее внешними силами температурные напряжения определяются как часть суммарных напряжений, приходящаяся на долю теплового воздействия.

С практической точки зрения большой интерес представляют такие случаи, когда в материале при нагреве возникают заметные пластические деформации. Это происходит, как правило, при высоких температурных градиентах и сравнительно высоких температурах. Вследствие возрастания температуры меняются механические харак-

теристики материала и вообще меняется вид диаграммы испытания. Таким образом, при неоднородном распределении температуры неоднородными становятся и свойства материала. При высокой температуре заметно усиливается эффект ползучести: напряжения и деформации с течением времени меняются. Во многих конструкциях анализ напряжений существенно усложняется еще и тем, что температурное состояние не является стационарным.

Если конструкция одновременно с нагревом подвергается еще и силовому воздействию, то в этом случае отдельить температурные напряжения от силовых уже не удается. Те и другие объединены в единый комплекс напряженного состояния и вследствие нелинейных соотношений принципу суперпозиции не подчиняются.

Из сказанного видно, что температурные напряжения определяют собой, по существу, только одну небольшую сторону сложных явлений, связанную с температурным воздействием. Тем не менее эти напряжения часто рассматриваются как решающий фактор в оценке прочности конструкции. Существует и другая крайняя точка зрения, утверждающая, что температурные напряжения не определяют прочности конструкции и что влияние температуры должны при расчетах учитываться только путем внесения соответствующих поправок в механические характеристики материала.

В главе III уже говорилось, что напряжения, взятые в отрыве от природы их возникновения, не могут рассматриваться как исчерпывающая характеристика состояния материала и, тем более, надежности конструкции. Это положение иллюстрировалось именно примерами, связанными с нагревом элементов конструкции.

Основной особенностью температурных напряжений является то, что они возникают как следствие температурных деформаций, однозначно связанных с температурой. Разность между полной деформацией ϵ_p и температурной деформацией ϵ_t образует силовую деформацию $\epsilon_s = \epsilon_p - \epsilon_t$, по которой из диаграммы растяжения и определяется напряжение σ . Если деформация тела ограничена, то деформация ϵ_p практически может быть равной нулю, и тогда силовая деформация по абсолютной величине равна температурной.

Естественным является вопрос, в каком соотношении находятся возможные температурные деформации, возни-

кающие в теле, и деформации, соответствующие характерным точкам диаграммы растяжения — сжатия. Так, если температурная деформация может иметь величину порядка деформации, соответствующей пределу упругости, то в нагретом теле при определенных условиях можно ожидать возникновения пластических деформаций. Если температурная деформация близка к удлинению при разрыве, то возможно образование трещин.

В частности, упругие удлинения стекла при напряжении, близком к пределу прочности, составляют величину порядка $0,06\% - 0,15\%$. Коэффициент линейного расширения стекла $\alpha \approx 8 \cdot 10^{-6} \text{ } 1/\text{град}$. При температуре 100° С температурная деформация равна $\epsilon_t = 0,08\%$. Если полная деформация ограничена, то примерно такую же величину (по модулю) будет иметь и силовая деформация ϵ_s . Так как эта величина лежит в интервале предельных удлинений, то ясно, что при резком нагреве или охлаждении на 100° С в стекле возможно образование трещин. Плавленый кварц имеет коэффициент линейного расширения примерно в $10 - 15$ раз меньший. Поэтому кварцевая посуда неизмеримо более стойка к резким изменениям температуры.

Конструктивные свойства углеродистой стали сохраняются примерно до 600° С . Температурное удлинение при этом будет $\epsilon_t = \alpha \Delta t = 12 \cdot 10^{-6} \cdot 600 \approx 0,7\%$. Эта величина заметно превышает деформацию, соответствующую пределу упругости. Следовательно, в стали при высоких температурах возможно возникновение пластических деформаций. Вместе с тем удлинение порядка $0,7\%$ существенно меньше удлинения при разрыве. Поэтому трудно представить себе разрушение стальной детали вследствие температурного воздействия.

Все сказанное можно сформулировать простым практическим правилом. Для пластичных материалов температурные напряжения сами по себе не опасны и при расчетах конструкции на прочность могут во внимание не приниматься. Влияние температуры при этом следует учитывать лишь постольку, поскольку меняются механические характеристики материала. Для хрупких материалов температурные напряжения представляют существенную опасность и при расчетах на прочность должны учитываться наравне с обычными напряжениями.

Высказанное правило является достаточно универсальным и на практике в основном подтверждается. Вместе с

Тем оно не может рассматриваться как исчерпывающее и допускает целый ряд исключений. Эти исключения обусловлены разными причинами.

Прежде всего, пластичные и хрупкие свойства для одного и того же материала могут проявляться в разной степени в зависимости от условий, в которые этот материал поставлен. Хорошо известно, в частности, что при напряженном состоянии, близком к всестороннему сжатию, пластичность материала повышается. При напряженном состоянии всестороннего растяжения, наоборот, преобладающим становится свойство хрупкости. В соответствии с этим меняется и восприимчивость материала к температурным напряжениям.

Сказанное можно проиллюстрировать примером, показанным на рис. 43. Стальной цилиндрический резервуар заполнен органическим веществом, имеющим в твердом состоянии умеренную пластичность и обладающим высоким температурным расширением. По контактной поверхности имеет место прочное сцепление вещества со стальной стенкой. В процессе хранения температура системы может изменяться. При охлаждении в массиве содержимого вещества образуется напряженное состояние всестороннего растяжения. Поэтому, несмотря на наличие достаточно высоких пластических свойств, возможен либо отрыв вещества от стенки либо образование трещин в самом веществе.

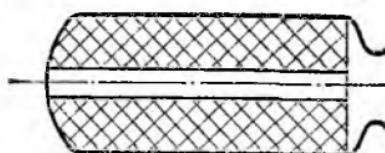


Рис. 43.

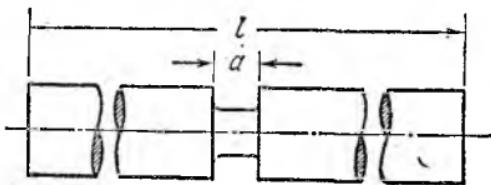


Рис. 44.

Иногда вследствие конструктивных особенностей возникает концентрация деформаций, при которой возможно разрушение узла. Так, например, на рис. 44 показан стержень, имеющий выточку. Материал стержня — пластичный. Несмотря на это, стержень при растяжении разрушится, очевидно, без заметного изменения длины l . Если стержень закрепить по концам, а затем охладить, то также возможен его разрыв. Но в этом случае основную роль играет уже не особенность напряженного состояния в

выточке, а величина отношения l/a . При большом отношении l/a происходит концентрация деформации на небольшом участке длины.

Совершенно аналогичная картина имеет место и для двуслойной конической оболочки, показанной на рис. 45.

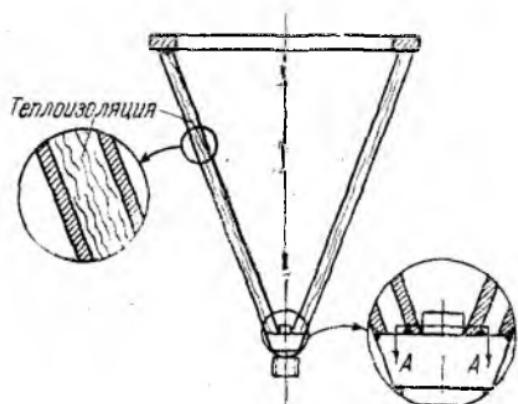


Рис. 45.

лочек осуществить на некотором удалении от вершины.

Часто можно наблюдать температурное разрушение конструкции в зоне сварных швов. Это явление объясняется в одних случаях снижением пластических свойств

материала в результате сварки, а в других — особенностями напряженного состояния, образующегося в зоне шва. На рис. 46 показан тонкий цилиндрический сосуд, подкрепленный изнутри профильными шлангоутами. Соединение шлангоута со стенкой производится точечной сваркой. При заливке в сосуд сжиженного газа охлаждение шлангоута происходит

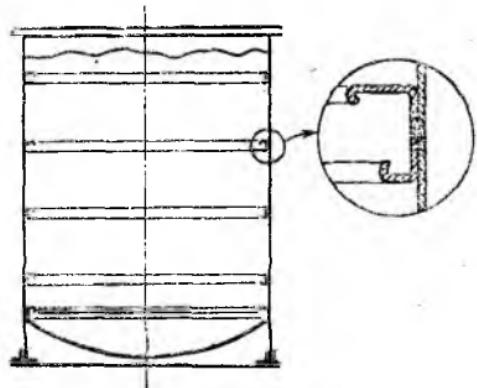


Рис. 46.

дит быстрее, чем оболочки. Сварные точки в этот момент работают на отрыв. Разрушение в зоне контакта происходит без заметных деформаций. Температурная деформация в этих условиях не компенсируется пластической. Следовательно, несмотря на то, что материалы оболочки и

шпангоута — пластичные, температурные напряжения, точнее, температурные усилия в сварных точках, являются определяющим фактором рабочего состояния конструкции.

Таким образом, значительная часть отступлений от сформулированного выше правила связана с тем, что в определенных условиях разрушение пластичного материала происходит без заметных пластических деформаций.

Отступления второго типа обусловлены циклическим нагревом и длительностью температурного воздействия. Достаточно очевидно, что температурные напряжения, не опасные для конструкции одноразового действия, могут оказаться решающими для оценки надежности конструкции при многократном нагреве. Следовательно, температурные напряжения должны приниматься во внимание для пластичного материала в том случае, если речь идет о ресурсе (сроке службы) теплонапряженных элементов.

Температурная циклическая прочность существенно отличается от силовой. Это различие обусловлено рядом обстоятельств.

Прежде всего, для температурного усталостного разрушения характерны режимы со сравнительно небольшим числом циклов и при сравнительно больших напряжениях. Так, если при решении обычных задач усталостной прочности мы оперируем с миллионами циклов, то в случае циклического температурного воздействия приходится иметь дело с десятками, сотнями, самое большое с тысячами циклов. Это не означает, конечно, что эффекты, связанные с циклическим температурным воздействием, не могут проявиться при малых напряжениях и соответственно большом числе циклов. Просто для суждения по этому поводу не имеется объективных данных. Любая конструкция, как правило, обладает большой тепловой инерцией, и цикл температурных напряжений имеет сравнительно большую длительность. Если принять, например, что один цикл длится всего пять минут, то для миллиона циклов потребуется около десяти лет.

Длительность температурного воздействия обуславливает для ряда металлов возможность структурных изменений — повышение хрупкости и снижение прочности. Даже при небольшом времени, но при достаточно высокой температуре в материале проявляется эффект ползучести

и релаксации, что необычайно усложняет общую картину явления.

В настоящее время температурная усталость исследуется в упрощенной постановке без учета указанных факторов. То обстоятельство, что образование пластических деформаций за температурный цикл происходит не в микро, а в макрообъемах, позволяет подойти к этому вопросу с позиций схемы сплошной среды. Принимается следующая предпосылка: если после нескольких температурных циклов устанавливается циклический режим чисто упругих деформаций, то температурного усталостного разрушения при малом числе циклов не возникнет. Если же в условиях установившегося цикла регулярно образуются пластические деформации, то это значит, что после некоторого числа циклов наступит разрушение.

Этот подход может быть пояснен следующим простым примером. Предположим, что имеется защемленный по концам стержень, который регулярно нагревается, а затем охлаждается до исходной температуры. Пусть диаграмма растяжения — сжатия имеет вид кривой, показанной на рис. 47. Полная деформация стержня постоянно равна нулю. Следовательно, силовая деформация равна температурной, взятой с обратным знаком:

$$\epsilon_n = \epsilon_s + \epsilon_t = 0; \quad \epsilon_t = -\epsilon_s.$$

Примем, что стержень нагрет настолько, что силовая деформация изображается отрезком OB (рис. 47, а). В стержне возникает при этом напряжение сжатия. При охлаждении температурная и силовая деформации падают до нуля. Это изображается на диаграмме участком кривой AC . Для простоты принято, что пределы текучести на растяжение σ_{tr} и на сжатие σ_{tc} от цикла к циклу не меняются (эффект Баушингера не учитывается).

При повторном нагреве получаем участок кривой CD . На последующих циклах образуется стабилизированная замкнутая кривая, свидетельствующая о возникновении в каждом цикле переменной пластической деформации. Следовательно, в соответствии с принятой предпосылкой, должен быть сделан вывод, что стержень после некоторого числа циклов разрушится.

При меньшей температурной деформации стабилизировавшаяся диаграмма нагрузки и разгрузки изображается прямой (рис. 47, б). Пластическая деформация цикла здесь

остается постоянной. Переменной будет только упругая составляющая. В этом случае циклическое изменение температуры, если и приведет к разрушению, то только после значительно большего числа циклов.

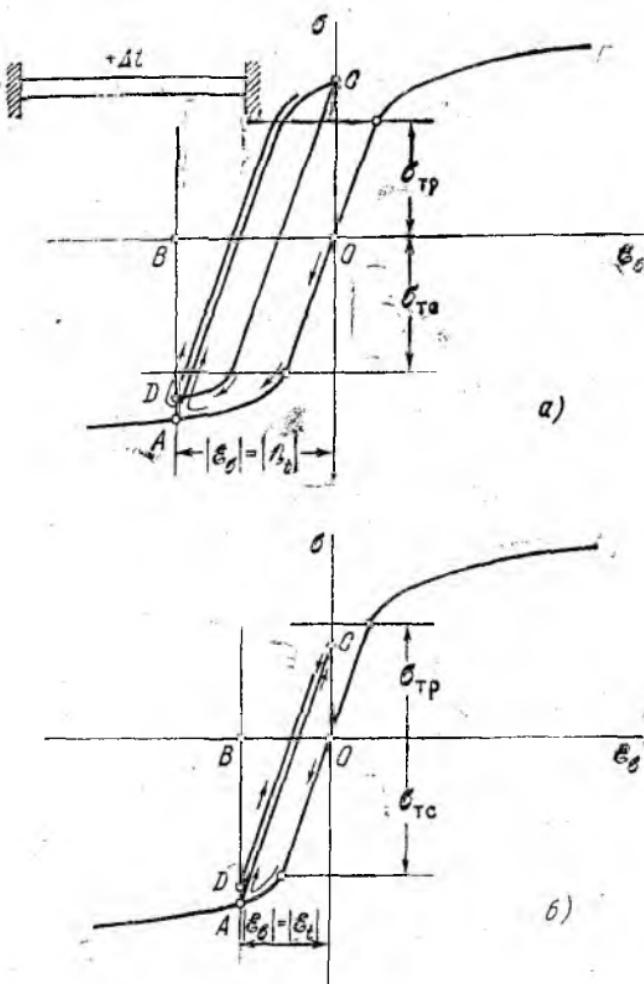


Рис. 47.

Свойство системы сохранять постоянство пластической деформации в установившемся режиме циклического изменения температуры называется приспособляемостью. К малым амплитудам изменения температуры система может «приспособиться», а к большим — нет.

Все сказанное выше заставляет считать, что та основная концепция, по которой температурные напряжения

не считаются опасными для пластичного материала, должна приниматься с оговорками. В каждом конкретном случае требуется предварительный анализ особенностей конструкции. В большинстве случаев теплонапряженные узлы подвергаются не только тепловому, но одновременно и силовому воздействию. При пластических деформациях поведение системы зависит от истории нагружения и от истории нагрева.

Основные трудности, которые возникают при анализе подобных систем, связаны прежде всего с недостаточностью наших представлений об основных зависимостях между параметрами, определяющими состояние материала.

Таких параметров четыре. Это — напряжение, деформация, время и температура. При неизменной температуре, в частности, зависимость между тремя первыми параметрами характеризует свойства ползучести. Как видим, даже частный случай тех необходимых зависимостей, при помощи которых можно было бы анализировать поведение теплонапряженных конструкций, представляет собой довольно сложную самостоятельную проблему.

В случае не очень высоких температур и сравнительно небольшой продолжительности действия сил можно, по-видимому, пренебречь влиянием фактора времени и рассматривать зависимость σ от ε при параметре t° как совокупность диаграмм растяжения, найденных путем испытания материала при

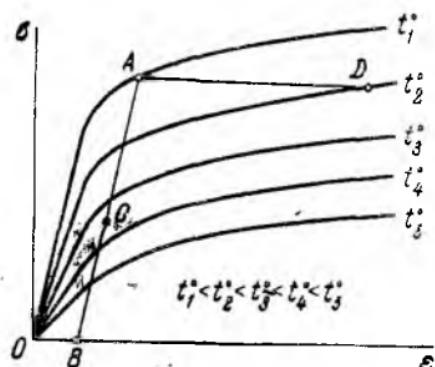


Рис. 48.

различных температурах (рис. 48). Правда, даже в этом простейшем случае возникают вопросы, которые требуют введения гипотез и постановки особых экспериментов.

Рассмотрим, например, две диаграммы, построенные при постоянных температурах t_1 и $t_2 > t_1$ (рис. 48). Пусть состояние материала определяется точкой A . Если уменьшить напряжение σ при постоянной температуре t_1 , то новое состояние будет характеризоваться точкой, расположенной на прямой AB , например точкой C . Если оставить постоянным напряжение и повысить температуру до

t_1 , то мы придем к точке D . Но не известно, каково будет состояние материала, если одновременно уменьшить σ и повысить t .

Сказанное имеет целью обратить внимание читателя на сравнительную неразработанность основ механики деформируемого твердого тела в условиях температурного воздействия и на зыбкость исходных данных, необходимых для расчета. Сделать это необходимо в связи с тем, что при решении подобных задач зачастую проявляется увлеченность формальными вычислительными действиями в ущерб более полному анализу исходных данных.

При инженерных расчетах теплонапряженных конструкций иногда недооценивается не только входная, но и выходная сторона расчета, а именно — выбор критерия надежности конструкции, в зависимости от которого существенно может меняться и расчетная схема и метод анализа. Сама по себе величина температурных напряжений для большей части конструкций, как видим, не является определяющей. Важен характер изменения напряжений, важна величина возникающих деформаций и перемещений. При расчете теплонапряженной конструкции необходимо, как нигде, обращать внимание на специфику ее работы с тем, чтобы искомый результат отражал существа дела.

В результате температурного воздействия возможна потеря устойчивости. Очевидно, что это явление может быть исследовано при помощи тех же приемов, что и потеря устойчивости, вызванная внешними силами. За эквивалент внешнего воздействия в этом случае, как и при расчетах на прочность, принимается напряжение. Считается, что потеря устойчивости происходит при одних и тех же напряжениях, независимо от природы их возникновения.

В закритической области система ведет себя по-разному, смотря по тому, подвергается ли она силовому или температурному воздействию. Причина этого заключается, естественно, в том, что изменение температуры связано с изменением деформаций, а изменение статической нагрузки — с величиной напряжений. Например, стержень, закрепленный по концам (рис. 49, a), при нагреве теряет устойчивость, когда нормальная сила в сечениях достигнет эйлеровой. При дальнейшем нагреве относительно малому изменению температуры соответствует небольшой прогиб

стержня. При нагружении стержня статической нагрузкой (рис. 49, б) малому изменению силы соответствуют большие перемещения. Говоря иными словами, при равных величинах



прогибы в первом виде нагружения будут неизмеримо меньшими, чем во втором.

Это ясно видно из графика, показанного на рис. 50. По оси ординат откладывается сжимающая сила, а по оси абсцисс — сближение концов стержня. При нагреве закрепленного по концам стержня за смещение λ надо принимать, очевидно, температурное изменение длины. Если температура увеличится, скажем, на 10% сверх критической, то на столько же увеличится и величина λ , что и показано на рис. 50. Увеличение силы P на 10% приведет к резкому увеличению прогибов, причем, как правило, с последующим разрушением стержня.

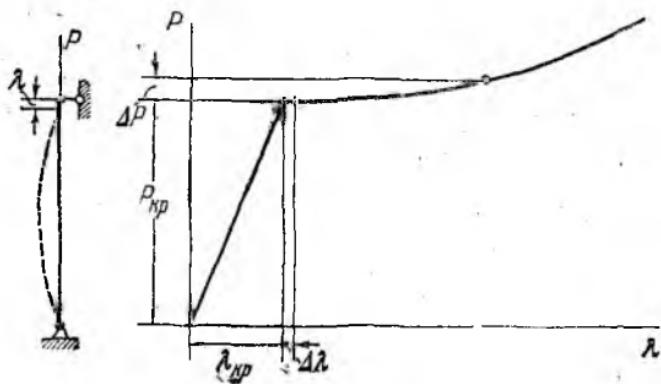


Рис. 50.

Из рассмотренного примера вытекает, что потеря устойчивости в ряде случаев оказывается для конструкции не опасной. В качестве примера на рис. 51 показан цилиндрический резервуар, частично заполненный жидкостью. При

внешнем обогреве температура стенки меняется, но неравномерно. В верхней части, не соприкасающейся с жидкостью, температура будет выше, чем в нижней, где происходит теплоотвод в жидкость. В результате возникают заметные меридиональные напряжения, и оболочка в зоне сжатия может потерять устойчивость. На оболочке в этом случае появятся местные неглубокие вмятины. Такого рода потеря устойчивости сама по себе для конструкции, как правило, не страшна. Возникшие вмятины не получают развития, и оболочка как резервуар полностью удовлетворяет своему назначению.

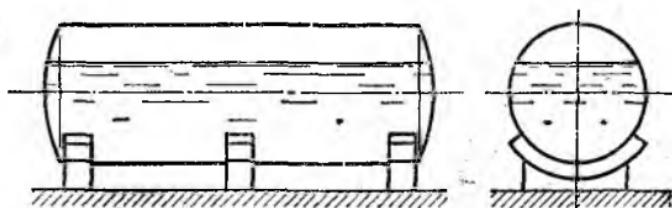


Рис. 51.

Картина существенно изменится в том случае, если та же оболочка выполняет не только функции резервуара, но включена в некоторую конструкцию как силовой элемент. Например, можно представить себе, что цилиндрическая оболочка является несущим отсеком фюзеляжа скоростного самолета. В результате воздействия воздушного потока оболочка будет нагреваться. Поскольку возникают изгибающие моменты, то одновременно с температурным оболочка будет испытывать и силовое воздействие. Ясно, что в этом случае температурная потеря устойчивости может повлечь за собой серьезные последствия даже в том случае, если напряжения изгиба в фюзеляже, взятые отдельно от температурных, далеко не достигают критических.

Разбор аналогичных примеров можно было бы продолжить. Однако очевидно, что в зависимости от конкретных условий, температурная потеря устойчивости, так же как и температурные напряжения, может быть и опасной, и неопасной.

Для обозначения резкого температурного воздействия в технике иногда употребляется выражение «тепловой удар». Это понятие связывается с быстрым поверхностным

нагревом, в результате которого образуется высокий градиент напряжений. Типичным примером подобного теплового воздействия является быстрый нагрев горячими газами графитовых рулей при запуске ракетного двигателя (рис. 52). Температура газов вблизи передней кромки газоструйного руля близка к температуре полного торможения потока и составляет величину порядка трех-четырех

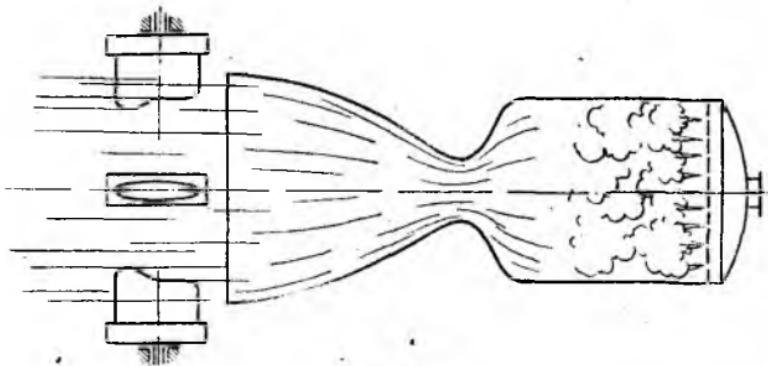


Рис. 52.

тысяч градусов. Если запуск двигателя производится без предварительной ступени, то поверхностный слой графита сильно прогревается, в то время как близлежащий подслой остается холодным. Это приводит к возникновению напряжений сжатия в поверхностном слое и растягивающих напряжений на поверхности раздела между холодным и нагретым слоями (рис. 53). При высокой хрупкости

графита может произойти поверхностное выкрашивание. Этому способствует и наличие силового воздействия со стороны потока.

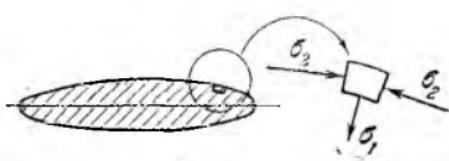


Рис. 53.

Температурные напряжения не являются единственными в своем роде. Очевидно, что всякие напряжения, происхождение которых связано с заданной телу деформацией, должны расцениваться аналогично температурным.

К числу таких напряжений относятся в первую очередь монтажные напряжения. Они возникают в конструкции при сборке узлов из неточно выполненных элементов, де-

формацией которых компенсируются невязки в размерах. Несомненно, что монтажные напряжения представляют в основном опасность для хрупких материалов и не опасны для пластичных. Из этого правила, однако, имеются исключения такого же рода, как и рассмотренные выше.

В указанном плане можно говорить не только о монтажных, но и о местных напряжениях. Для большей части систем можно принять, что местные напряжения являются следствием общих деформаций, возникающих в основной части нагруженного массива. Например, защемленная на торце цилиндрическая оболочка (рис. 54) под действием внутреннего давления испытывает заметные местные напряжения в зоне заделки. Эти напряжения являются следствием того, что заделка ограничивает расширение оболочки в радиальном направлении. Местные напряжения, следовательно, определяются величиной общих деформаций оболочки. Если бы оболочка имела неограниченно большую жесткость на растяжение, то изгибные напряжения в заделке не возникали бы. В условиях нормальной работы конструкции окружные деформации цилиндра малы. Малы, следовательно, и изгибные деформации в зоне заделки. Поэтому местные напряжения в заделке, как правило, опасны только для хрупких материалов и не опасны для пластичных.

Аналогия с рассмотренными ранее примерами еще более подчеркивается, если цилиндрическую оболочку подкрепить шпангоутами (рис. 55). Как и при температурном воздействии, изгибные напряжения в зоне шпангоута для пластичного материала будут не опасными. Вместе с тем заметную опасность представляет отрыв шпангоута по сварным точкам.

Как следствие заданных деформаций, могут рассматриваться и некоторые виды потери устойчивости, подобные температурной. Пусть, например, тонкостенная цилиндрическая оболочка, подкрепленная силовым набором,

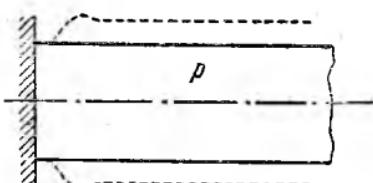


Рис. 54.

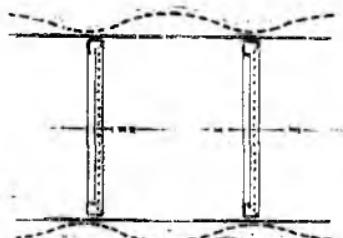


Рис. 55.

нагружена осевыми силами (рис. 56). Поскольку жесткость обшивки мала, осевая нагрузка почти полностью воспринимается продольными подкрепляющими элементами (стрипгерами). В той мере, в какой деформируется стрингер, деформируется в осевом направлении и обшивка. При некотором значении сил происходит потеря устойчивости панелей. Однако влияния на работу каркаса это практически не оказывает и конструкция в целом почти полностью сохраняет свою несущую способность.

Наконец, и циклическое воздействие с заданными деформациями является аналогом циклического нагрева. На рис. 57 показаны две схемы усталостных испытаний. В первом случае (рис. 57, а) испытание ведется по заданным нагрузкам. Во втором

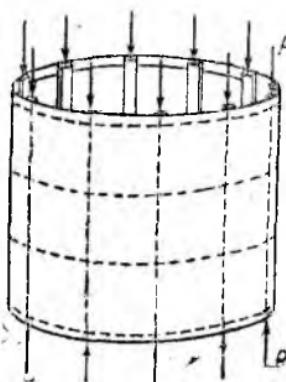


Рис. 56.

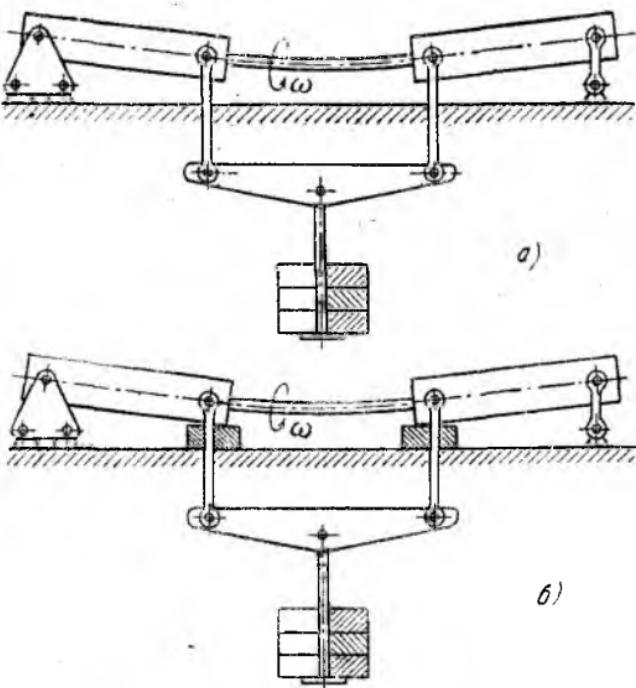


Рис. 57.

случае (рис. 57, б) подшипники цанговых захватов посажены на упоры, и образцу заданы определенные

перемещения, т. е., как и при температурном цикле, задана деформация. В этом случае, очевидно, усталостные микротрецины будут развиваться медленнее, чем в испытаниях, поставленных по первой схеме.

Таким образом, наблюдается общая аналогия между температурным воздействием и прессовым нагружением. Однако эта аналогия сохраняется лишь в той мере, в какой имеется возможность отбросить эффекты, связанные с температурным изменением механических характеристик материала.

VI

О предельных состояниях

В зависимости от условий нагружения материал может находиться в различных механических состояниях. При небольших внешних силах и, соответственно, при небольших напряжениях материал находится в упругом состоянии. При больших силах обнаружаются заметные остаточные деформации, и материал находится в упруго-пластическом состоянии. При еще больших напряжениях происходит образование местных трещин и наступает состояние разрушения.

В сопротивлении материалов предполагается, что механические состояния полностью определяются напряжениями, возникающими в материале. Те напряженные состояния, при которых происходит переход из одного механического состояния в другое, носят название предельных. Соответственно этому часто называют предельными и сами механические состояния, если свойства материала лежат на границе его качественных изменений.

Механическое состояние материала определяется не только величиной напряжений, но и другими факторами.

Прежде всего оно зависит от истории нагружения. Если в образце вызвать пластические деформации, то в процессе разгрузки материал проявляет упругие свойства. При последующем нагружении эти свойства также сохраняются, если только силы повторной нагрузки не превышают сил предварительного нагружения. Эта зависимость четко устанавливается из опыта и хорошо известна.

Механическое состояние материала меняется в зависимости от температуры и времени воздействия сил. В одном и том же напряженном состоянии при быстром изменении нагрузки механическое состояние материала может рассматриваться как упругое, а при медленном — как упруго-

пластическое. Особенно заметен этот эффект при высоких температурах. В некоторых случаях большое влияние может оказывать также скорость изменения температуры.

Указанные зависимости являются чрезвычайно сложными и трудно поддаются анализу. Поэтому область исследования приходится сужать и рассматривать механические состояния в пределах сравнительно небольших интервалов изменения температур и скоростей нагружения. Это позволяет считать, что переход из одного механического состояния в другое определяется только характером напряженного состояния и зависит от структурных особенностей материала.

Методы физики твердого тела пока не дают возможности вникнуть в микромеханизм образования пластической деформации и разрушения в той мере, в какой это требуется для ведения практических расчетов. Поэтому механика деформируемого тела строится на результатах испытания материала при основных видах напряженных состояний.

В итоге задача может быть поставлена в следующем виде. Дан материал. С ним может быть произведено ограниченное число испытаний. Требуется предсказать условия перехода из одного механического состояния в другое при всех видах напряженных состояний. Теория, позволяющая решить эту задачу, носит название теории предельных состояний.

Теория предельных состояний связана с изучением свойств материала. Зная состояние материала для различных точек напряженного тела, можно вынести в дальнейшем определенные суждения и о свойствах конструкции. Для того чтобы сделать достаточно эффективным практическое применение теории предельных состояний, вводится еще одно важное упрощающее предположение, а именно, принимается, что механическое состояние в каждой точке тела определяется напряженным состоянием только в этой точке. Такой подход освобождает от необходимости учитывать поведение материала в соседних областях. Напряженное состояние всего тела анализируется только в той мере, в какой это необходимо для отыскания наиболее опасной точки.

При расчете конструкций в подавляющем числе случаев мы имеем дело с неоднородными напряженными состояниями, многообразие которых весьма велико. Поэтому естественно, что принятие гипотезы об «ответственности»

напряженного состояния в точке за механическое состояние в той же точке является пока единственным выходом из непреодолимых трудностей, которые возникли бы при попытке создать теории предельных состояний, учитывающие все особенности неравномерного распределения напряжений.

Однако то, что является предельным для материала, не является предельным для конструкции. Выше уже говорилось, что появление пластических деформаций в небольшом объеме детали не нарушает существенно несущей способности конструкции. Мало того, даже возникновение местных трещин далеко не всегда приводит к разрушению конструкции. Примером тому могут служить железобетонные конструкции, в которых образование местных трещин не вызывает, как правило, опасений за все сооружение в целом.

Об этом обстоятельстве обычно забывают. Считается как-то само собой разумеющимся, что для оценки состояния материала в точке достаточно рассмотреть напряженное состояние в этой же точке. Между тем такая предпосылка может привести к противоречию с принятой ранее схемой сплошной среды. Особеню это может оказаться заметным при большой неоднородности напряженного состояния.

Получается так, что, с одной стороны, необходимо рассматривать достаточно малый объем для того, чтобы в его пределах напряжение не менялись существенным образом. С другой стороны, рассматриваемый объем должен быть достаточно большим для того, чтобы он заключал в себе достаточно большое количество кристаллических зерен металла, так как только в этом случае в пределах рассматриваемого объема смогут в достаточной полноте проявиться статистические закономерности, свойственные данному механическому состоянию.

На стадии предварительного испытания образцов необходимо соблюдать условие однородности напряженного состояния, т. е. необходимо обеспечить постоянство напряженного состояния для всех точек испытуемого образца. Это условие соблюдается, например, при растяжении, частично при сжатии короткого образца и при кручении тонкостенной трубы. Изменение свойств материала в этих испытаниях происходит одновременно во всем объеме образца и легко поддается количественной

оценке. При кручении сплошных образцов и при испытании на изгиб напряженное состояние является неоднородным. Качественные изменения свойств материала в отдельных точках не влекут за собой заметных изменений в поведении образца. Процессы, происходящие в материале, проявляются только в среднем объеме образца, и результаты испытаний требуют дополнительной расшифровки, при которой теряется степень объективности.

Особенности структуры проявляются различно в зависимости от того, происходит ли переход от упругого состояния в пластичное или от пластичного к состоянию разрушения. Механизм образования пластических деформаций связан с необратимыми сдвигами в кристаллической решетке, начало разрушения — с образованием трещин, проходящих либо внутри зерен, либо в межкристаллическом слое.

Таким образом, физико-механические процессы, происходящие в структуре материала при возникновении пластических деформаций и при начале разрушения, различны. Очевидно, что различным должен быть и подход к анализу предельных состояний.

Как это ни странно, но только сравнительно недавно был осознан тот простой факт, что необходимо четкое разграничение вопросов возникновения пластических деформаций и начала разрушения (теории прочности). Часто еще и теперь критерий начала образования пластических деформаций без всякого к тому основания используется в качестве критерия прочности, а критерий прочности в качестве критерия образования пластических деформаций. Такое произвольное использование критериев часто является причиной ошибок и недоразумений в расчетной практике.

Эти недоразумения происходят в какой-то мере из названия «теории прочности», которое с давнего времени укрепилось за теориями предельных состояний. Если взять, например, теорию максимальных касательных напряжений или теорию энергии формоизменения, то для пластичных материалов эти теории определяют только условия перехода из упругого состояния в пластическое. Что же касается ожидаемых, судя по названию, условий прочности, то их эти теории не дают.

С целью устраниТЬ возникшую терминологическую невязку, пытаются иногда теории, трактующие действи-

тельно вопросы прочности, называть теориями разрушения, сохранив за прочими установленное старое название. Так, в частности, теория наибольших нормальных напряжений, отражающая в некоторой мере условия прочности для очень хрупких материалов, могла бы называться теорией разрушения. Термины «теория разрушения» и «критерий разрушения» используются часто для того, чтобы подчеркнуть принадлежность того или иного исследования к вопросам прочности в правильном понимании этого слова, в отличие от неверно установленного.

В последние годы сложилось уже достаточно определенное мнение о том, чтобы отказаться от термина «теории прочности» как от обобщающего, и заменить его другим. Наиболее подходящим для этой цели оказался термин «теории предельных состояний», которого мы здесь и придерживаемся.

В настоящее время создано много теорий предельных состояний, частично удовлетворяющих запросы практики, частично не удовлетворяющих. История поисков наиболее общих, наиболее правильных и практически приемлемых теорий предельных состояний продолжается, и предстоит, очевидно, сделать еще очень многое, чтобы решить эту основную проблему прочности. Однако некоторые итоги подвести уже можно.

Все предложения, связанные с созданием теорий предельных состояний, можно разбить на две группы.

Первая группа это — критериальные гипотезы. Высказывается предположительно некоторый критерий предельного состояния. Принимается, например, что переход из одного механического состояния в другое определяется наибольшими главными деформациями, или наибольшими касательными напряжениями, или касательными напряжениями в октаэдрических площадках, или энергией формоизменения, или, наконец, какими-то комбинированными признаками, образованными из перечисленных. Перечень таких предположений может быть продолжен.

В дальнейшем принятая гипотеза должна быть проверена экспериментально. Если для большого числа случаев опыт подтверждает гипотезу и если полученные расчетные формулы обладают достаточной простотой, гипотеза внедряется в расчетную практику и рассматривается уже как теория. Так, например, возникли теория максимальных касательных напряжений и теория энергии фор-

моизменения, трактующие условия перехода материала из упругого состояния в пластичное.

Ко второй группе относятся теории, основанные на систематизации результатов испытания. Методически они являются более предпочтительными и в большей степени соответствуют общему духу построения науки о сопротивлении материалов.

Действительно, для сопротивления материалов характерным является то, что свойства материалов вводятся в расчет путем систематизации испытаний. Это начинается прежде всего с закона Гука. Закон Гука в сопротивлении материалов воспринимается как экспериментально установленный факт. Этот закон представляет собой определенное внешнее проявление сложных процессов, происходящих при деформировании структурных элементов материала. Изучение причин, порождающих зависимость

$$\sigma = E\varepsilon,$$

выходит за рамки сопротивления материалов.

Точно так же возникновение пластических деформаций при одноосном напряженном состоянии рассматривается в сопротивлении материалов как наблюдаемый факт, получающий свою количественную оценку в диаграмме испытания материала. Анализ природы этого явления опять-таки выходит за рамки сопротивления материалов и включается в сферу физики твердого тела. Все сказанное можно повторить и по поводу целого ряда других характеристик, используемых в практических расчетах.

В свете сказанного логично сохранить этот подход и решать вопрос о предельных напряженных состояниях на основе наблюдавших явлений, т. е. также путем систематизации найденных характеристик.

Если уже принято, что определяющим фактором в рассматриваемом вопросе является напряженное состояние в точке, то для изотропного материала мы имеем три параметра, в зависимости от которых и должно исследоваться явление перехода материала к новому состоянию. В качестве этих параметров могут быть взяты либо три главных напряжения, либо три инварианта напряженного состояния. Остается проследить, как меняется состояние материала в зависимости от этих трех величин.

С методической точки зрения задача выглядит как будто довольно просто. Проводя серию испытаний, откладываем

по осям x , y , z (рис. 58) значения каждого из параметров. В результате получаем поверхность, разделяющую области двух состояний. Если нас интересует переход из упругого состояния в пластическое, то это будет одна поверхность. Если интересует состояние разрушения, то получим вторую поверхность.

Практически, однако, такое решение не может быть реализовано, и к этому имеется несколько причин.

Прежде всего ограничения налагаются требованием однородности. Как уже говорилось, испытания должны про-

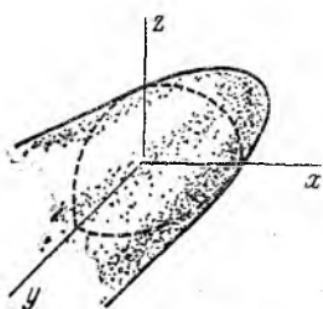


Рис. 58.

водиться в условиях однородного напряженного состояния. Только в этом случае можно с достаточной достоверностью подметить в образце изменения, соответствующие качественным изменениям свойств самого материала. Однако мы не располагаем средствами для создания в испытуемых образцах той гаммы однородных напряженных состояний, которая необходима для построения предельных поверхностей.

В частности, до сих пор не удается реализовать однородное напряженное состояние с положительными главными напряжениями

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 > 0.$$

Сравнительно просто реализуются однородные двухосные напряженные состояния путем испытания хотя бы трубчатых цилиндрических образцов на внутреннее давление и осевое растяжение. Добавочное кручение образца в части расширения класса напряженных состояний ничего не меняет.

Трехосные напряженные состояния сжатия, естественно, создаются путем наложения на испытуемый образец всестороннего гидростатического давления. Исследование этого класса напряженных состояний дает наиболее интересные результаты в области высоких давлений, при которых возможны качественные изменения в характеристиках материала.

На основе перечисленных классов напряженных состояний построить предельные поверхности довольно затруд-

нительно. Это относится в первую очередь к области положительных значений σ_1 , σ_2 , σ_3 .

Особые трудности возникают при построении поверхности, соответствующей состоянию разрушения, так как может проявиться влияние истории нагружения. Разрушение может произойти раньше или позже в зависимости от того, в какой последовательности и в какой пропорции возрастали параметры напряженного состояния, в частности, главные напряжения σ_1 , σ_2 и σ_3 . Получается так, что эта поверхность не определяется однозначно величинами трех параметров.

Наконец, есть еще одна причина, по которой изложенный подход не получает практической реализации. Эта причина заключается в том, что даже если предельные поверхности для какого-то материала и построены, то пользоваться ими в практических расчетах весьма затруднительно. Они должны быть тем или иным способом переложены на плоские графики, или представлены в виде простых аппроксимирующих функций.

Таким образом, при описанном подходе дело сводится к отысканию метода, позволяющего произвести систематизацию экспериментальных данных и уложить их в стройную систему.

Наиболее простой и в настоящее время общепризнанной оказалась система, предложенная О. Мором. Основное упрощение, принятое в теории Мора, заключается в том, что предельное состояние считается не зависящим от промежуточного главного напряжения и определяется только наибольшими и наименьшими. Это резко упрощает анализ и переводит его из области пространственных построений на плоскость. Вместо предельной поверхности получается предельная огибающая кругов Мора, которая и рассматривается как характеристика материала. Последующее представление этой огибающей в виде прямой, касательной к предельным кругам растяжения и сжатия, позволяет вывести элементарную формулу Мора, прочно вошедшую в расчетную практику.

Главное достоинство теории Мора заключается, понятно, в подходе к вопросу. К сожалению, на эту сторону делеко не всегда обращается внимание, и часто теория Мора ставится в один ряд с общизвестными критериальными гипотезами, а то обстоятельство, что в частных случаях расчетная формула Мора совпадает с расчетной формулой

теории касательных напряжений, усиливает впечатление о равнозначности этих подходов.

Между тем подход Мора, давая основы для расчета, не «закрывает» проблему. Если обнаруживаются погрешности, то всегда имеется принципиальная возможность внести в теорию дополнительные уточнения. Так, если в дальнейшем удастся провести испытания образцов в области положительных значений σ_1 и σ_3 , то можно будет аппроксимировать предельную огибающую Мора уже не прямой, а некоторой кривой. В расчетную формулу в этом случае войдут не только характеристики материала при растяжении и сжатии, но и некоторые новые показатели, найденные в результате дополнительных испытаний.

Особое значение в последнее время такой подход приобретает в связи с широким применением в технике новых материалов. Такие материалы как стеклопластики, стеклоткани и вообще материалы, имеющие волокнистую структуру, часто работают в условиях сложного напряженного состояния. При анализе конструкций из таких материалов уже не приходится рассчитывать ни на одну из существующих теорий предельных состояний. Необходимо создавать какие-то новые теории.

Понятно, что при переходе к анизотропным материалам задача создания теории предельных состояний усложняется. Здесь трудно надеяться на удачную гипотезу, например, типа гипотезы максимальных касательных напряжений, и несомненно быстрее приводят к цели рассуждения, построенные наподобие теории Мора. В этих случаях удается найти решение для какого-то узкого класса напряженных состояний в пределах определенной ориентации осей анизотропии.

Все сказанное о предпочтительности описательного подхода к вопросам предельного состояния не зачеркивает практического значения некоторых гипотез. Такие, как гипотеза максимальных касательных напряжений или энергии формоизменения прочно вошли в расчетную практику и представляют большие удобства при решении многих задач.

Гипотеза энергии формоизменения приобрела особое значение в связи с созданием и развитием теории пластичности. В теории пластичности, как и в теории упругости, основополагающей является зависимость между компонентами напряженного и деформированного состояний. Раз-

ница только в том, что в теории упругости эта зависимость записывается в элементарной форме закона Гука, а в теории пластичности она носит сравнительно сложный характер и устанавливается на основе правдоподобных гипотез аналогично тому, как это делается при создании теории предельных состояний. Эта аналогия не является формальной. Она полностью отражает существо дела. Теория пластичности является развитием теории предельных состояний. Пластическая зона сопрягается с упругой. Та граница перехода, которая существует между применимостью закона Гука и вступлением в действие законов пластического деформирования, определяется теорией предельных состояний. Условия сопряжения являются одновременно условиями перехода из упругого состояния в пластическое.

Исторически исследование вопроса складывалось так, что создание теории предельных состояний предшествовало теории пластичности. Теория пластичности явилась, по существу, развитием полученных ранее предельных соотношений в область пластичности.

Это развитие (продолжение), может быть, вообще говоря, проведено различными путями. Наиболее удобной и распространенной в настоящее время является логическая схема, построенная на основе соотношений, вытекающих из гипотезы энергии формоизменения. Сущность этого подхода сводится к следующему: величина

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 6(\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2)}$$

согласно теории энергии формоизменения определяет переход из упругого состояния в пластическое. В пределах упругой зоны в соответствии с законом Гука имеем

$$\sigma_i = E \epsilon_i, \quad (1)$$

где

$$\epsilon_i =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\epsilon_y - \epsilon_z)^2 + (\epsilon_z - \epsilon_x)^2 + (\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2 + \gamma_{xy}^2)},$$

а коэффициент Пуассона принят равным 0,5. Величина σ_i называется интенсивностью напряжений, а ϵ_i — интенсивностью деформаций.

За пределами упругости соотношение (1) можно написать в виде

$$\sigma_i = E' \varepsilon_i, \quad (2)$$

где E' — переменный модуль, зависящий от напряжений и деформаций.

Основное предположение деформационной теории пластичности сводится к тому, что зависимость (2) является единой для всех напряженных состояний. Это достаточно хорошо подтверждается опытом. На основе такого предположения определяется модуль

$$E' = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i},$$

а далее формальной подстановкой E' вместо E получаются взамен закона Гука новые соотношения между компонентами напряженного и деформированного состояний для пластической зоны:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E'} \left[\sigma_x - \frac{1}{2} (\sigma_y + \sigma_z) \right], \quad \gamma_{yz} = \frac{3}{E'} \tau_{yz};$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E'} \left[\sigma_y - \frac{1}{2} (\sigma_z + \sigma_x) \right], \quad \gamma_{zx} = \frac{3}{E'} \tau_{zx};$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E'} \left[\sigma_z - \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) \right], \quad \gamma_{xy} = \frac{3}{E'} \tau_{xy}.$$

Аналогичным образом можно было бы построить теорию пластичности, приняв за основу гипотезу максимальных касательных напряжений. Назвав величину $\sigma_1 - \sigma_3$ интенсивностью напряжений, а величину $\frac{2}{3}(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)$ — интенсивностью деформаций, получим аналогично предыдущему

$$\sigma_i = \sigma_1 - \sigma_3; \quad \varepsilon_i = \frac{2}{3} (\varepsilon_1 - \varepsilon_3);$$

$$\sigma_i = E \varepsilon_i.$$

Для пластической зоны

$$\sigma_i = E' \varepsilon_i. \quad (3)$$

Далее формально будет определена зависимость между компонентами напряженного и деформированного состояний.

Нет оснований сомневаться в том, что для зависимости (3) может быть, так же как и для зависимости (2), найден класс напряженных состояний, в пределах которого на-

писанные соотношения могут рассматриваться как универсальные.

Другое дело, что для практического применения теория, построенная на основе гипотезы максимальных касательных напряжений, часто менее удобна, чем теория, основанная на гипотезе энергии формоизменения. Эти неудобства связаны с разрывным изменением ориентации плоскости максимальных касательных напряжений в зависимости от сравнительной величины трех главных напряжений. Если в некоторой области пространства промежуточное главное напряжение σ_2 стало больше максимального σ_1 или меньше минимального σ_3 , то одновременно со сменой индексов главных напряжений меняется и ориентация плоскости максимальных касательных напряжений. Пространство, таким образом, делится на зоны, различие между которыми определяется только ориентацией наибольшего и наименьшего из главных напряжений. При анализе пластических деформаций, возникающих в теле, необходимо постоянно следить за расположением этих зон, что, естественно, усложняет решение.

Теория пластичности, базирующаяся на гипотезе энергии формоизменения, свободна от указанного недостатка, поскольку в выражении σ_i и ε_i все компоненты напряженного и деформированного состояний входят как равноправные.

Возвращаясь к принципам построения теории пластичности, следует еще раз подчеркнуть, что здесь возможны самые различные и в то же время практически равнозначные подходы. Основная задача в теории пластичности заключается в том, чтобы из этих подходов выбрать наиболее универсальные, подкрепленные широко поставленными экспериментами.

Все то, что говорилось выше о теории предельных состояний и теории пластичности, имеет довольно длительную историю, и, анализируя то, что уже утверждилось в расчетной практике, мы не должны обходить молчанием развивающиеся направления.

Хочется отметить, что за последние годы методы механики частично внедряются в те области, которые традиционно относились к физике твердого тела. Это прежде всего теория развития трещин, на основе которой представляется возможным в дальнейшем, если не решить проблему

в целом, то во всяком случае уточнить наши представления о хрупком разрушении. Казалось бы, что всякая попытка подойти к этому вопросу с помощью средств механики деформируемого тела заранее обречена на неудачу. Контуровая зона трещины представляется нам в виде весьма узкой щели, ширина которой соизмерима не только с размерами кристаллических зерен, но и с межатомными расстояниями.

Поэтому схема сплошной среды, лежащая в основе аналитического аппарата, при столь тонких геометрических особенностях явно не применима, а формальное ее использование приводит к результатам, не имеющим физического смысла.

Тем не менее, допустим следующий подход. Представим себе, что трещина уже развила настолько, что охватила

несколько десятков кристаллических зерен, укладывающихся на длине l (рис. 59). Выделим краевые участки длины a и будем считать, что на этих участках еще в какой-то мере сохраняются неизвестные нам силы межатомного сцепления. Картина получается такой же, как и при оттирании ленты лейкопластыря (рис. 60).

На участке a сохраняется некоторое взаимодействие между лентой и основанием благодаря не полностью разорвавшимся частицам клей-
кого вещества. После того как введены силы сцепления, принципиальные трудности снимаются. Структурные особенности материала учитываются некоторой интегральной характеристикой сил сцепления, а напряженное состояние вблизи края трещины уже не имеет тех неустранимых особенностей, которые мы неизбежно получаем для области, имеющей острый входящий угол.

Естественно, что для различных материалов область распространения этих сил и их величина будут различными.

Связь их с уже известными характеристиками материала остается пока не ясной. Поэтому требуется введение новой константы, а может быть, и нескольких, характеризующих поведение материала вблизи края трещин. Анализ развития трещин в простейших, воспроизводимых на опыте случаях подсказывает методы экспериментального определения этих констант.

В настоящее время при помощи описанного подхода удается получить условия развития или стабилизации одной трещины, расположенной в массиве однородного тела. Если бы удалось решить ту же задачу в условиях существования большого числа трещин со статистическим учетом их взаимного влияния, то это в сочетании с многочисленными экспериментальными исследованиями по кинетике хрупкого разрушения помогло бы сформулировать новые, более точные принципы теории предельных состояний.

Будущее покажет, насколько оправданы поиски в этом направлении.

Что касается анализа пластических деформаций, то и в этом направлении за последние годы механика сплошной среды, внедряясь в сферу структурных особенностей поликристаллического вещества, достигла определенных успехов. При некоторых упрощающих предположениях уже можно по характеристикам отдельного кристалла предсказать вид диаграммы растяжения образца. Однако сделать это пока удается только для определенных материалов, но при этом с такими вычислительными трудностями, при которых построение каждой диаграммы выливается фактически в серьезную научную работу. Если дальнейшее развитие этого направления позволит уверенно анализировать поведение материалов в общем случае напряженного состояния, то тем самым будет дана новая трактовка не только теории предельных состояний, но и теории пластичности.

VII

Об усталостной прочности

Теория усталостной прочности обладает несомненными особенностями, отличающими ее от других разделов инженерной механики. Эти особенности вытекают из приближенности и недостаточной достоверности существующих представлений о процессах усталостного разрушения. В результате большое значение приобретают рекомендации полуэмпирического характера, а для числовых расчетов вводится ряд поправок, основанных на результатах эксперимента.

На пути перехода от теории усталостного разрушения к расчету конструкции лежат препятствия более существенные чем те, о которых говорилось в предыдущих главах.

Созданные к настоящему времени методы позволяют рассчитывать по предельному числу циклов относительно простые детали машин: вал, шатун, плунжер — элементы, сходные по форме со стандартными образцами. Что же касается расчета сложных конструкций, типа самолетных, когда требуется обеспечить работоспособность не по предельному числу циклов, а по определенному ресурсу, то эти задачи находятся в таком разрыве с теорией, излагаемой в курсе сопротивления материалов, что образуют вполне самостоятельную науку.

Остановимся сначала на общих вопросах усталостной прочности.

На первый взгляд теория усталостной прочности выглядит как довольно простая, не требующая глубокой подготовки и доступная исследователю даже на самых первых шагах научной деятельности. Для начинающего исследователя заманчиво бывает перестроить, например, диаграмму усталостной прочности в новой системе координат,

ввести взамен аппроксимирующей прямой какую-либо более совершенную кривую или предложить новый, по мнению автора, более удобный метод подсчета коэффициента запаса. Сопоставление результатов расчета и эксперимента приводит здесь довольно часто к введению соответствующего поправочного коэффициента, который, как обнаруживается в дальнейшем, сам зависит от параметров, исправлять которые он предназначен.

Работ, выполненных в этом направлении, имеется очень много. Ценность их довольно относительна. Наибольшее значение имеют конечно результаты эксперимента, особенно в том случае, если удается четко указать границы применимости найденных зависимостей.

Совершенно естественным является развитие теории усталостной прочности на основе описательного подхода, оправдавшего себя, как мы знаем, при создании теории предельных состояний и теории пластичности. Здесь, однако, задача оказывается неизмеримо более сложной.

Основная трудность заключается в выработке критерия, характеризующего усталостную прочность. Возникает основной вопрос, как разделить (и можно ли разделить) свойства материала и свойства детали? Какими показателями свойств материала необходимо располагать, чтобы предсказать поведение детали в условиях циклического нагружения? Какие опыты необходимо поставить, чтобы найти эти показатели?

Уместно привести несколько аналогий.

Предположим, что решается задача теории упругости. Для некоторой детали требуется определить напряжения, деформации и перемещения. Свойства материала в этом случае вводятся в расчет через упругие константы. Для изотропного материала таких констант будет две — модуль упругости E и коэффициент Пуассона μ . Эти показатели легко определяются из опыта и не зависят ни от формы детали, ни от ее абсолютных размеров. Таким образом, свойства среды и свойства детали разделяются. Удаётся выделить параметры материала и вести расчет детали в общем виде, независимо от того, из какого материала она изготовлена. Выделение параметров материала в самостоятельную категорию позволяет в данном случае необычайно просто решать задачу подобия.

При сложной конфигурации, когда деталь не поддается расчету, целесообразно провести испытание геометри-

чески подобной модели, изготовленной из другого материала. Для получения одинаковых деформаций модели и натуры нагрузка должна быть взята пропорционально абсолютным размерам детали и модулю упругости E . В некоторых случаях это условие бывает необходимо усложнить в связи с учетом величины μ .

Наибольшее развитие принципы подобия получили, как известно, при решении задач аэродинамики и теплопередачи. Например, воспроизведение процесса обтекания на модели в том случае, когда учитываются только силы трения и силы инерции, требуется соблюдение постоянства безразмерного параметра — числа Рейнольдса $Re = Vd/v$, где V есть скорость потока, d — характерный размер обтекаемого тела, а v — кинематический коэффициент вязкости жидкости или газа. Владея критериями подобия, удается существенно упростить исследование процесса обтекания, применяя модели уменьшенных размеров.

В предыдущей главе особое внимание было уделено вопросу, определяется ли механическое состояние материала в точке напряженным состоянием в той же точке. Именно это предположение позволяет при анализе предельных состояний как бы «развязать» свойства материала и свойства детали. Для оценки перехода из упругого состояния в пластическое оно полностью себя оправдывает. Что же касается вопросов местного разрушения, то здесь такое предположение следует принять в общем только с оговорками. Еще более сложным является вопрос циклической прочности.

В настоящее время за критерий усталостного разрушения принимается опять же максимальное напряжение, которое сопоставляется с пределом выносливости и считается ответственным уже не только за местное механическое состояние, но и за общую прочность детали. Совершенно естественно, что такой подход не обладает той степенью полноценности, которая нужна для ведения практических расчетов. Возникает необходимость введения целого ряда поправок.

Ситуация создается примерно такая же, как если бы мы определяли рост человека по отпечаткам следов, оставшихся на песке. Чем больше длина ступни и длина шага, тем, вероятно, выше человек. Можно установить примерные коэффициенты пропорциональности. Однако эти коэффициенты не будут оставаться постоянными.

Коэффициенты будут меняться в зависимости от признаков пола, расы, возраста и многих других. На все эти обстоятельства следовало бы, очевидно, вводить какую-то систему поправок.

Оно и понятно. Рост человека определяется не только длиной шага. Точно так же и максимальное расчетное напряжение не является критерием усталостной прочности, а предел выносливости не есть характеристика материала. Он зависит еще и от геометрии образца и от метода испытания.

Хорошо известно, что предел выносливости, полученный при знакопеременном изгибе, отличается от предела выносливости, полученного при растяжении — сжатии. Предел выносливости для полированного образца выше, чем для грубо обработанного, что является выражением влияния микрогометрии на усталостную прочность. Наконец, имеет место масштабный фактор, влияние которого учитывается соответствующим коэффициентом. Следовательно, в теории усталостной прочности свойства материала и свойства детали если и разделены, то только частично и не настолько четко, чтобы это могло удовлетворить требованиям практического расчета, о чем и свидетельствует необходимость введения упомянутых поправок.

Природа усталостного разрушения достаточно сложна. Она обусловлена особенностями молекулярного и кристаллического строения вещества. Образование усталостных трещин и их дальнейшее развитие происходит в объемах тела, соизмеримых с размерами кристаллических зерен, а характер разрушения тесно связан со структурой материала. Поэтому схема сплошной среды, с успехом используемая при решении всех задач механики деформируемого тела, в данном случае может иметь лишь ограниченное применение.

Таким образом, именно те самые структурные неоднородности и местные неравномерности в распределении внутренних сил, которые мы осредняем и влиянием которых обычно пренебрегаем, здесь являются очень важными, если даже не решающими.

Принято различать внутренние силы и, соответственно, напряжения, по характерным объемам зон распространения. Напряжения, уравновешивающиеся в объемах, значительно превышающих объемы кристаллических зерен, называются напряжениями первого рода. Это те напря-

жения, определение которых производится методами теории упругости или сопротивления материалов на основе схемы сплошной среды. Напряжения, величина которых существенно меняется в пределах объемов, соизмеримых с объемами кристаллических зерен, носят названия напряжений второго рода.

Наконец, принято выделять еще один тип напряжений, так называемые напряжения третьего рода, возникающие в результате нарушения регулярности межатомных связей в кристаллической решетке. Величина этих напряжений существенно меняется в пределах объемов, много меньших объемов кристаллических зерен. Конечно, слово «напряжения» здесь не следует понимать буквально, поскольку мы вторгаемся в объемы, не допускающие использования схемы сплошной среды и перехода к бесконечно малым площадкам. Но терминология установилась и менять ее нецелесообразно.

Напряжения второго и третьего рода не могут быть найдены расчетным путем, но обнаруживаются экспериментально в среднестатистическом. Поэтому лучше говорить не о величине напряжений второго и третьего рода, а об их уровне, подобно уровню шумов при передаче информации.

Наибольшей сравнительной наглядностью в оценке напряжений первого, второго и третьего рода обладает рентгеновский метод. Он основан на замере расстояния между атомами в кристаллической решетке. В ненапряженном состоянии это расстояние известно. Сопоставляя его с замеренным и вводя поправку на температуру, можно определить и напряжение.

Рентгеновский луч обладает определенной избирательностью по отношению к кристаллографическим плоскостям. Он способен отразиться только от такой плоскости и только под таким углом, при которых соблюдается так называемое условие Брегга

$$2d \sin \vartheta = n\lambda,$$

где d — расстояние между отражающей плоскостью и соседней, ей параллельной, ϑ — угол между плоскостью и падающим лучом, λ — длина волны рентгеновского излучения, n — некоторое целое число.

На очищенную и пропарченную поверхность металла для определения напряжений направляется пучек рентгено-

новского монохроматического излучения (рис. 61). Как показывает опыт, на небольшом освещенном круге диаметром $1,5 \div 2$ мм всегда имеется достаточное количество таким образом ориентированных кристалликов, что определенные их плоскости связаны с параметрами падающего луча соотношением Брегга. Отраженные лучи образуют коническую поверхность с углом при вершине, равным $360^\circ - 4\vartheta$ (рис. 61). Если на их пути расположить фотографическую пленку, то на ней получится круг радиуса h . Измеряя размеры a и h , можно определить угол ϑ . Далее из соотношения Брегга определяется величина d , поскольку n и λ известны.

Эту величину следует сопоставить с размером d_0 ненапряженной решетки и по разности $d - d_0$ найти напряжение.

При наличии напряжений первого рода все кристаллы деформируются примерно одинаково. При этом изменяется угол ϑ . Наличие напряжений второго рода проявляется на разных кристаллах по-разному. Следовательно, угол ϑ для соседних кристаллов будет различным. Это сказывается на том, что затемненная полоса на пленке расширяется. На рис. 62 показано изменение плотности выделившегося на пленке серебра. Кривой 1 соответствует меньший, а кривой 2 — больший уровень напряжений второго рода. Численную оценку этим напряжениям можно дать на основе микрофотометрирования полученной на пленке затемненной полосы.

При наличии напряжений третьего рода нарушается регулярность расположения атомов в кристаллической решетке. Кристаллы частично теряют способность отражать рентгеновские лучи. Следовательно, напряжения

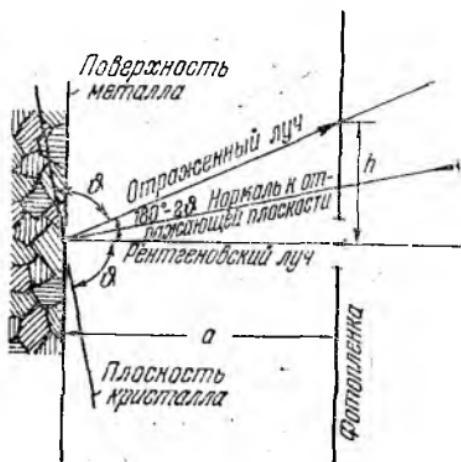


Рис. 61.

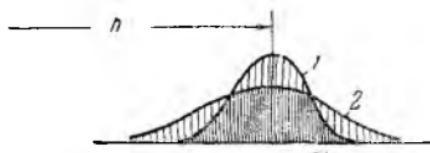


Рис. 62.

третьего рода обнаружаются по ослаблению отраженного пучка.

Напряжения второго и третьего рода являются чисто структурными и зависят от предварительной механической и термической обработки металла. По своей абсолютной величине они могут быть весьма существенными и поэтому уже при приложении сравнительно небольших внешних сил в образце возможно возникновение не только местных пластических деформаций, но и образование отдельных микротрещин. Последние, впрочем, могут присутствовать, как некоторая структурная особенность, и помимо приложения внешних сил.

Образование местных пластических деформаций на начальной стадии нагружения обнаружить при помощи тензометров, естественно, нельзя. Оно фиксируется средствами тонкого физического эксперимента, основанного на замере изменения электрических потенциалов. Процесс имеет несомненную аналогию с возникновением необратимых сдвигов в земной коре, которые не обнаруживаются геодезическими замерами, но фиксируются сейсмическими приборами.

С ростом внешних нагрузок число очагов пластической деформации и микротрещин возрастает, и в предельном состоянии этот процесс приобретает лавинный характер.

Для циклического нагружения образование пластических деформаций во всем объеме образца не является характерным. Возникает только местная пластическая деформация. При малых амплитудах напряжений она стабилизируется; при достаточно больших — происходит накопление пластических деформаций, нарушение межкристаллических связей и разрушение кристаллов, что является предпосылкой к образованию макротрещин.

Структурные процессы, протекающие при циклическом нагружении в металле, находят свое отражение в так называемом внутреннем трении. В процессе колебаний в упругом теле имеет место рассеяние энергии, которое определяется по величине затухания.

Можно предположить, что рассеяние энергии при колебаниях и усталостное разрушение являются следствием одних и тех же структурных пластических деформаций. В связи с этим возникло предложение использовать рассеяние энергии за один цикл как показатель усталостной прочности.

Такое предложение является весьма заманчивым. Если бы удалось установить однозначное соответствие между рассеянием энергии и пределом усталости, можно было бы в ряде случаев избежать громоздких испытаний, связанных с определением усталостных характеристик. Показатель рассеяния энергии использовался бы в этом случае как показатель выносливости, подобно пробе по Роквеллу, которая используется на производстве в качестве показателя прочности.

В течение длительного времени это предложение имело много последователей. В качестве показателя рассеяния предлагалось взять ширину петли гистерезиса в диаграмме «нагрузка — разгрузка». Показатель этот получил даже специальное название «циклической вязкости».

Такой подход, однако, не оправдывается ни простыми соображениями, ни прямыми экспериментами. Рассеяние энергии за один цикл определяется средним уровнем локальных пластических деформаций или, вообще говоря, структурных особенностей во всем объеме образца. Образование же усталостной трещины обусловлено не средним, а максимальным значением местных деформаций и только при неблагоприятном сочетании структурных дефектов.

Таким образом, показатель циклической вязкости не обладает преимуществами по сравнению с оценкой по напряжениям первого рода. И напряжения первого рода, и рассеяние энергии являются лишь показателями среднего состояния. Они являются характеристикой того общего фона, на котором с большей или меньшей вероятностью возможно образование усталостной трещины.

Но дело не только в этом. Можно поставить прямые эксперименты по определению рассеянной за один цикл энергии, а по ней определить ширину петли гистерезиса. Постановка таких опытов связана с созданием специальных установок и является достаточно сложной. Но работ в этом направлении уже проведено много. И вот что выяснилось.

Ширина петли гистерезиса с увеличением амплитуды цикла возрастает. Эта зависимость является монотонной и в области амплитуд напряжений, близких к пределу усталости, никаких особенностей не имеет. Следовательно, для каждого материала циклическая вязкость, соответствующая пределу усталости, может быть установлена лишь после того как найден сам предел усталости. Но тогда не

видно побудительных мотивов к тому, чтобы вводить новую характеристику.

Мало того. Ширина петли гистерезиса и амплитуда цикла не имеют однозначного соответствия. На первых циклах рассеяние энергии сравнительно большое. Затем оно постепенно уменьшается. Происходит, как говорят, тренировка образца. Это явление хорошо известно и используется для улучшения характеристики упругих элементов измерительных приборов. Для этого упругий элемент подвергается операции искусственного старения, т. е. длительному воздействию периодически изменяющейся нагрузки.

Понятно, что эффект старения не только создает трудности в определении циклической вязкости. В конечном итоге он указывает на то, что гистерезис и усталостное разрушение не могут рассматриваться как следствие одних и тех же структурных особенностей материала. Естественно, что циклическая вязкость не напла применена ни в практических расчетах, ни в вопросах теории.

Направление дальнейших поисков в области усталости не ясно. Здесь легче подвергнуть критике любое направление, чем внести новые предложения, сулящие заметное продвижение вперед. Однако заслуживает внимания еще одна концепция.

Усталостное разрушение представляет собой процесс, состоящий из двух фаз. Это — образование заметной макротрецины, а затем ее дальнейшее развитие до полного разрушения образца. Протекание первой фазы связано со структурными особенностями материала, состоянием поверхности и амплитудой цикла. Во второй фазе сохраняется влияние структурных особенностей и амплитуды цикла, но вступают в силу новые факторы, такие, как размеры и форма образца и законы распределения напряжений по его объему. Естественно, возникает мысль, не следует ли изучать эти процессы раздельно и тем самым, хотя бы частично, освободиться от наложения влияний многих факторов и провести более точную границу между свойствами материала и свойствами образца.

Для этого прежде всего нужно во время испытания фиксировать момент образования макротреции. В принципе это возможно. Одним из способов является испытание образца в условиях резонансного режима. Возникновение заметной трещины обнаруживается по изменению частоты собственных колебаний.

В целом такой подход надо считать правильным, по возникают трудности в связи с необходимостью большей перестройки лабораторной техники. Речь идет не только о создании и отладке достаточного числа новых испытательных машин. Необходимы изменения организационно-производственного характера, поднимающие технику испытаний на более высокую ступень. Процесс этот сложный и длительный, и на большие достижения в ближайшем будущем рассчитывать не приходится. А главное, по-прежнему остается неясной степень правомерности перехода от испытания образцов к расчету сложной конструкции. Поэтому для оперативного решения ответственных практических задач необходимы иные пути. И здесь мы вплотную подходим к натурным испытаниям.

Сейчас в авиации, в двигателестроении, а в последнее время и в судостроении именно так вопрос и ставится.

Решение идет по нескольким направлениям. Первое — это выявление особенностей циклических нагрузок; замер, систематизация, статистическая обработка и определение основных показателей, характеризующих их уровень. Второе — вопросы ресурса. В зависимости от назначения машины устанавливается необходимый срок ее надежной службы, позволяющий определить число циклов, на которое должны рассчитываться наиболее ответственные узлы. Следовательно, при натурных испытаниях нет прямой необходимости оперировать с таким понятием, как предел выносливости, хотя в ряде случаев для общей ориентировки он и сохраняет свое значение. Наконец, — третья сторона вопроса. Это — разработка испытательных установок, имитирующих рабочие условия; создание техники обнаружения первых признаков образования макротрещин, автоматизация процесса испытаний и автоматизация обработки полученных результатов.

Натурные испытания на усталостную прочность дают в настоящее время наиболее достоверные сведения о работоспособности конструкции. И хочется обратить внимание читателя на то, что традиционно излагаемые в курсе сопротивления материалов первоначальные сведения по усталостной прочности представляют собой лишь элементы той комплексной и высоко оснащенной области экспериментальных исследований, которая характерна для современной техники.

VIII

Об устойчивости

Устойчивость конструкции — это ее способность сохранять свое состояние. Состояние конструкции, обладающей этим свойством, называется устойчивым. Если конструкция этим свойством не обладает, то ее состояние считается неустойчивым. Для устойчивого состояния характерны малые следствия, а для неустойчивого — большие следствия при небольших начальных возмущениях.

И причины, и следствия не имеют общей меры и оцениваются в зависимости от обстоятельств. Например, не возникает опасений за устойчивость многоэтажного строительного сооружения, воздвигнутого в Москве, поскольку в этом районе практически отсутствуют сейсмические явления. Однако то же самое сооружение считалось бы неустойчивым в районах Камчатки, Ашхабада, в Японии. Вместе с тем если при строительстве сооружения были допущены отклонения от нормы, то и для сейсмически безопасного района могут возникать опасения в части устойчивости, причем одному человеку сооружение может казаться устойчивым, а другому — неустойчивым.

Для количественного анализа такая оценка устойчивости, естественно, не может быть принята. Она нуждается в точном определении для того, чтобы явление могло быть переложено на язык математического анализа, на язык теории устойчивости.

Прежде всего возникает вопрос, что при анализе устойчивости можно не принимать во внимание и что необходимо учитывать? Короче говоря, как выбрать расчетную схему?

При исследовании устойчивости форм равновесия упругих систем первые шаги были сделаны Эйлером. В дальнейшем его подход был развит Лагранжем. По Эйлеру — Лаг-

ранжу решение задачи сводится к определению возможных форм равновесия при следующих предпосылках:

Геометрическая и силовая схемы должны быть доведены до такой степени идеализации, чтобы условия равновесия описывались системой однородных уравнений. В частности, если рассматривается сжатый стержень, то предполагается, что он имеет совершенно прямолинейную форму, материал однороден и сжимающая сила приложена строго центрально. Если рассматривается сжатое кольцо, то считается, что оно имеет идеальную круговую форму, а нагрузка распределена по кругу равномерно. Короче говоря, принимается, что влияние начальных отклонений от номинала несущественно. Возмущения, которые налагаются на систему, являются сколь угодно малыми, и по отношению к этим малым возмущениям и рассматривается поведение системы. Перемещения предполагаются происходящими настолько медленно, что инерционные эффекты, связанные с наличием масс, являются несущественными.

Потеря устойчивости отождествляется с выполнением условий существования новых форм равновесия, сколь угодно близких к исходной. Нагрузки, при которых эти условия выполняются, называются, как известно, критическими. При расчете инженерных конструкций критическая нагрузка принимается за предельную, по которой и назначается запас устойчивости.

Рассмотренная классическая схема не является универсальной. От нее в ряде случаев не только возможны, но и необходимы некоторые отступления. Об этом будет сказано в следующей главе. Тем не менее, в подавляющем числе случаев классическая расчетная схема достаточно полно отражает существо явления, а практическая значимость и четкость математического подхода обеспечили ей доминирующее положение в анализе устойчивости деформируемых систем.

Рассмотрим сначала некоторые вопросы определения критических нагрузок в сфере классического подхода. Здесь, несомненно, существует много тонких особенностей, которые далеко не всем известны и часто остаются незамеченными.

Начнем с того, что при решении задач устойчивости нагрузку необходимо задавать со степенью детализации более высокой, чем при решении обычных задач сопротивления материалов. Недостаточно показать величину и

направление действующих сил. Необходимо указать также характер их поведения в процессе отклонения системы от исходного положения равновесия. Когда, например, задана система, показанная на рис. 63, молчаливо предполагается, что сила P сохраняет вертикальное направление независимо от прогибов. Но сила P , как и вообще всякая сила, представляет собой меру взаимодействия объекта с окружающими телами, исключенными из рассматриваемой схемы. Характер взаимодействия может быть различным в зависимости от особенностей наложенных связей. Поэтому будет различным, вообще говоря, и поведение силы P .

На рис. 64 показаны возможные примеры передачи усилия на стержень. В случае $a)$ усилие передается через жесткий шатун, в случае $b)$ — через трос, в случае $c)$ — через плиту и сферический наконечник. В случае $d)$ — через ролик и плоский диск. Наконец в случае ∂) сила создается пороховым

Рис. 63.

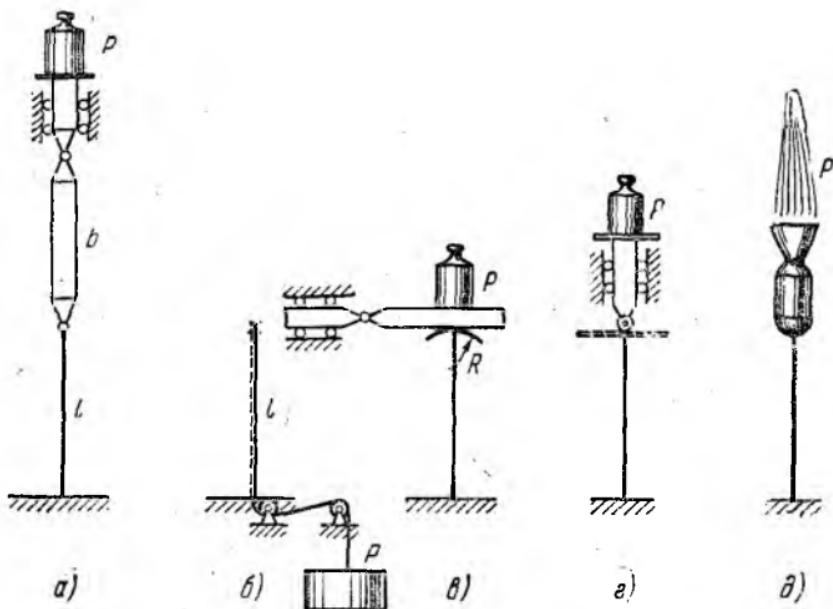


Рис. 64.

ракетным двигателем, закрепленным на конце стержня. Пока стержень остается прямым, каждый из пяти случаев вписывается, как будто, в схему, представленную на

рис. 63. Различие обнаруживается только при рассмотрении систем в новых положениях равновесия (рис. 65). В результате различного поведения сил получаются и различные значения критических нагрузок.

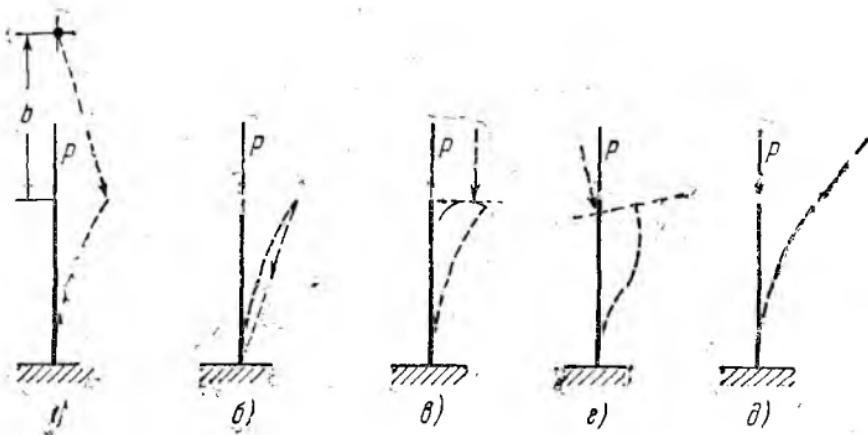


Рис. 65.

В случае а) (рис. 66) дифференциальное уравнение упругой линии стержня будет

$$EJy'' = P(f - y) + P \frac{f}{b}(l - x),$$

откуда

$$y = A \sin kx + B \cos kx + f \left(1 + \frac{l}{b} - \frac{x}{b} \right),$$

где, как обычно,

$$k^2 = \frac{P}{EJ}.$$

Постоянны A , B и f должны быть выбраны так, чтобы удовлетворялись следующие граничные условия:

$$\text{при } x = 0: \quad y = 0 \quad \text{и} \quad y' = 0; \quad \text{при } x = b: \quad y = f.$$

Тогда

$$B + f \left(1 + \frac{l}{b} \right) = 0,$$

$$Ak - \frac{f}{b} = 0,$$

$$A \sin kl + B \cos kl = 0.$$



Рис. 66.

Приравнивая нулю определитель, получаем трансцендентное уравнение

$$\operatorname{tg} kl = kl \left(1 + \frac{b}{l} \right).$$

В случае бесконечно длинного шатуна, т. е. при $b/l = \infty$, критическая сила совпадает с обычным значением

$$P_{kp} = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2}$$

для зажемленного одним концом стержня. По мере уменьшения b/l критическая сила уменьшается.

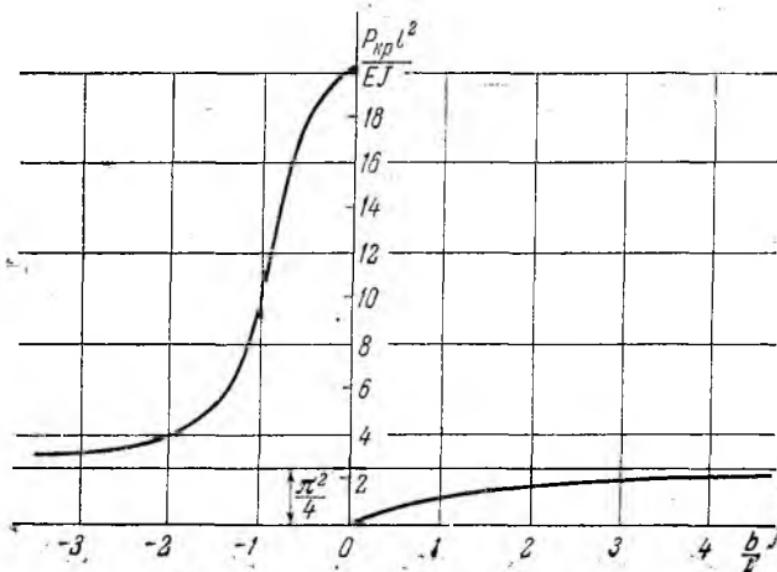


Рис. 67.

Интересен график зависимости критической силы от длины шатуна (рис. 67). Здесь отрицательным значением b/l соответствует перевернутое положение шатуна. В точке $b/l=0$ имеет место разрыв функции. При подходе к этой точке справа критическая сила падает до нуля. При подходе слева она принимает значение, соответствующее критической нагрузке для стержня, имеющего свободную опору на одном конце и зажемление на другом, а именно:

$$P_{kp} = \frac{20,2 EJ}{l^2}.$$

При $b/l = -1$

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E J}{l^2}.$$

Этот случай соответствует передаче усилия на стержень через растянутый шатун, имеющий длину, равную длине стержня. Условия нагружения оказываются такими же, как при нагружении через трос (рис. 64, б и 65, б). Здесь сила следит за основанием стержня, и изгибающий момент в заделке постоянно равен нулю, что соответствует случаю шарнирно закрепленного по концам стержня.

В примере, показанном на рис. 64, в критическая сила зависит от радиуса поверхности, по которой осуществляется контакт с плитой. Здесь (рис. 68) имеем

$$EJy'' = P(f - R\varphi - y),$$

откуда

$$y = A \sin kx + B \cos kx + f - R\varphi.$$

Рис. 68.

Постоянные A, B, f и φ определяются из граничных условий:

$$\text{при } x=0 \quad y=0 \quad \text{и} \quad y'=0;$$

$$\text{при } x=l \quad y=f \quad \text{и} \quad y'=\varphi,$$

которые приводят к четырем уравнениям:

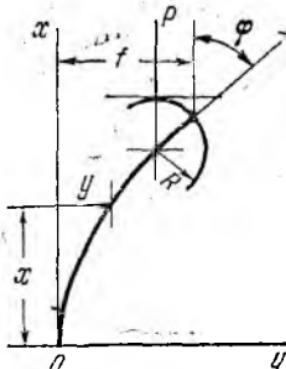
$$\begin{aligned} B + f - R\varphi &= 0; \quad A = 0; \\ B \cos kl - R\varphi &= 0; \quad -Bk \sin kl = \varphi. \end{aligned}$$

Приравнивая нуль определитель системы, приходим снова к трансцендентному уравнению

$$kl \operatorname{tg} kl = -\frac{l}{R}.$$

При $R=0$ получаем, как обычно, критическую силу для защемленного стержня:

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E J}{4l^2}.$$



При $R = \infty$ имеем

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E J}{l^2}.$$

Этот случай соответствует условию $\varphi = 0$. При других

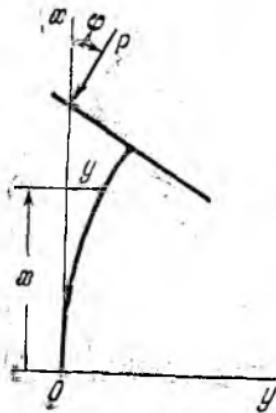


Рис. 69.

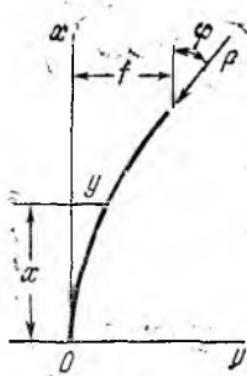


Рис. 70.

значениях R критическая сила лежит в интервале между двумя указанными значениями. В частности, если $R = l$, то

$$P_{\text{кр}} = \frac{7,84 E J}{l^2}.$$

На рисунках 64, 65, 69 и 70 показан пример передачи усилия на стержень через ролик и плоский диск. В этом случае (рис. 69)

$$E J y'' = -P y - P \varphi (l - x).$$

Далее получаем

$$y = A \sin kx + B \cos kx - \varphi (l - x)$$

и затем путем обычных операций приходим к уравнению

$$k l \operatorname{tg} k l = -1,$$

откуда $k l \approx 2,8$, и

$$P_{\text{кр}} = \frac{7,84 E J}{l^2}.$$

Перейдем, наконец, к последнему из примеров: к нагружению защемленного стержня силой P , создаваемой ракетным двигателем. Эта сила при изгибе стержня будет,

очевидно, следить за нормалью к торцевому сечению. Дифференциальное уравнение упругой линии будет (рис. 70)

$$EJy'' = P(f - y) - P\varphi(l - x),$$

откуда

$$y = A \sin kx + B \cos kx + f - \varphi(l - x).$$

Для определения констант A , B , f и φ имеем следующие граничные условия:

$$\text{при } x=0 \quad y=0 \quad \text{и} \quad y'=0,$$

$$\text{при } x=l \quad y=f, \quad y'=\varphi.$$

Для выполнения этих условий получаем четыре уравнения:

$$B + f - \varphi l = 0; \quad Ak + \varphi = 0;$$

$$A \sin kl + B \cos kl = 0; \quad Ak \cos kl - Bk \sin kl = 0.$$

Определитель этой системы при ненулевых значениях k и, соответственно, при ненулевых значениях P в нуль не обращается. Следовательно, стержень не имеет форм равновесия, отличных от прямолинейной. По Эйлеру — Лагранжу это означает, что система устойчива при любых значениях силы P . Однако более углубленный анализ показывает, что начиная с некоторого значения силы P существует движение стержня с нарастающей амплитудой колебаний. Таким образом, происходит переход не к новой форме равновесия, а к некоторой форме движения, а величина критической силы оказывается зависящей не только от длины стержня и его жесткости, но и от закона распределения масс.

Естественно, что исследование возможных форм движения выходит за рамки расчетной схемы Эйлера — Лагранжа. Это самостоятельная теория устойчивости движения, основные положения которой тесно связаны с именем А. М. Ляпунова. К этому вопросу мы еще вернемся в дальнейшем.

Примеры, иллюстрирующие различное поведение системы в зависимости от характера поведения внешних сил, можно продолжить. Очень интересной в этом смысле является задача об устойчивости кольца, сжатого радиальными силами (рис. 71). Во всех руководствах и справочниках приводится следующее значение критической нагрузки:

$$q_{kp} = \frac{3EJ}{R^3}.$$

Однако далеко не всем известно, что это выражение справедливо лишь для случая нагружения кольца «следящим» давлением, т. е. силами, постоянно направленными по нормали к изогнутой линии кольца. При ином поведении сил критическая нагрузка будет иной.

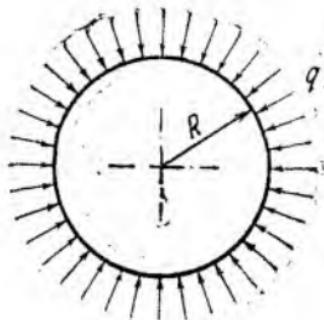


Рис. 71.

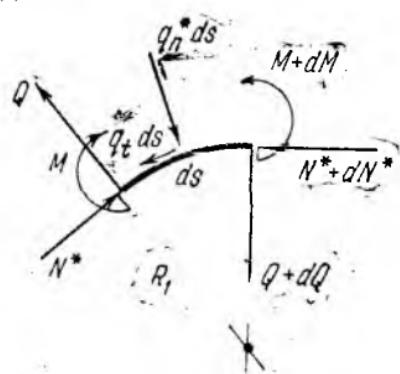


Рис. 72.

Рассмотрим эту задачу более подробно. Обозначим через w радиальное перемещение точек, принадлежащих кольцевому контуру. Изменение кривизны кольца будет

$$\kappa = \frac{d^2 w}{ds^2} + \frac{w}{R^2}.$$

Эта величина пропорциональна изгибающему моменту M , т. е.

$$M = EJ\kappa.$$

Для элемента кольца (рис. 72) легко составить уравнения равновесия:

$$Q = \frac{dM}{ds}, \quad q_n^* + \frac{dQ}{ds} - \frac{N^*}{R_1} = 0, \quad \frac{dN^*}{ds} + q_t + \frac{Q}{R_1} = 0,$$

где q_n^* и q_t — нормальная и касательная составляющие нагрузки, а R_1 есть местный радиус кривизны деформированного кольца, определяемый из соотношения

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R} - \kappa,$$

В докритическом состоянии $q_t = 0$, $q_n^* = q$. Нормальная сила в докритическом состоянии $N^* = qR$. Что касается M

и Q , то эти величины в докритическом состоянии равны нулю.

Введем обозначения

$$N^* = qR + N; \quad q_n^* = q + q_n.$$

Дополнительные слагаемые N и q_n являются малыми, поскольку малы перемещения и малы все изменения, связанные с переходом к новому состоянию равновесия. Подставляя выражения N^* , q_n^* и R_1 в уравнения равновесия и удерживая лишь первые степени κ , N , Q и M , получаем

$$Q = \frac{dM}{ds}; \quad q_n + \frac{dQ}{ds} - \frac{N}{R} + qR\kappa = 0; \quad \frac{dN}{ds} + q_t + \frac{Q}{R} = 0.$$

Исключаем N , M и Q :

$$EJ \frac{d^3\kappa}{ds^3} + \left(qR + \frac{EJ}{R^2} \right) \frac{d\kappa}{ds} + \frac{dq_n}{ds} + \frac{1}{R} q_t = 0. \quad (1)$$

Поведение внешних сил при изгибе кольца учитывается двумя последними слагаемыми.

Предположим, что кольцо нагружено давлением, следящим за нормалью к поверхности. Тогда

$$q_n = q_t = 0$$

и

$$EJ \frac{d^3\kappa}{ds^3} + \left(qR + \frac{EJ}{R^2} \right) \frac{d\kappa}{ds} = 0.$$

Полагая

$$\kappa = A \sin \frac{ns}{R},$$

находим

$$- EJ \frac{n^3}{R^3} + \left(qR + \frac{EJ}{R^2} \right) \frac{n}{R} = 0,$$

откуда

$$q = \frac{(n^2 - 1) EJ}{R^3}.$$

Наименьшее ненулевое значение величина q принимает при $n=2$. В результате получаем приведенное ранее значение критической нагрузки

$$q_{kp} = \frac{3EJ}{R^3}.$$

Рассмотрим теперь другой способ создания нагрузки q . Пусть кольцо нагружено радиальными усилиями, создаваемыми при помощи множества упругих резиновых тросов, собранных в центре в узел (рис. 73). В этом случае

нагрузка q следит за центром кольца. При повороте элемента дуги ds образуется составляющая касательной нагрузки

$$q_t = q \frac{dw}{ds}.$$

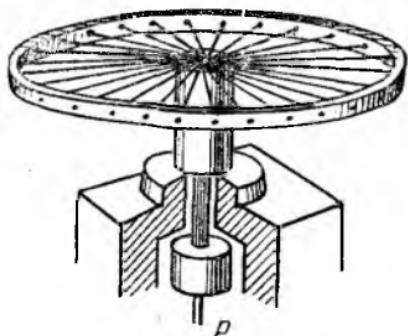


Рис. 73.

Если нити достаточно податливы или если каждая из них натягивается самостоятельно, то при возникновении перемещений w нормальная

составляющая внешних сил меняться не будет, следовательно, $q_n = 0$.

Уравнение (1) принимает вид

$$EJ \frac{d^3}{ds^3} \left(\frac{d^2 w}{ds^2} + \frac{w}{R^2} \right) + \left(qR + \frac{EJ}{R^3} \right) \frac{d}{ds} \left(\frac{d^2 w}{ds^2} + \frac{w}{R^2} \right) + \frac{1}{R} q \frac{dw}{ds} = 0.$$

Полагая

$$w = A \sin \frac{ns}{R},$$

получаем

$$q = \frac{(n^2 - 1)^2 EJ}{(n^2 - 2) R^3}.$$

При $n=2$

$$q_{kp} = \frac{9EJ}{2R^3},$$

т. е. теперь критическая нагрузка в 1,5 раза выше, чем при гидростатическом нагружении.

Если нити натягиваются общим грузом, то при изгибе кольца происходит перераспределение усилий. В области положительных w нити дополнительно растягиваются, а в области отрицательных — укорачиваются. Возникает изменение нормальной составляющей q_n . Тогда в уравнение (1) войдет дополнительный член

$$q_n = Kw,$$

где K — коэффициент жесткости нитей,

В результате получим

$$q_{kp} = \frac{EJ}{R^3} \frac{(n^2 - 1)^2 + \frac{KR^4}{EJ}}{(n^2 - 2)}.$$

Таким образом, увеличение жесткости нитей K приводит к повышению критической нагрузки. Это и понятно. Образующиеся дополнительные усилия направлены так, что восстанавливают круговую форму кольца. Низшее критическое значение q достигается, вообще говоря, уже не при $n=2$, а при некотором другом целочисленном n , зависящем от величины K .

Интересен случай нагружения кольца усилиями, передаваемыми через охватывающую нить (рис. 74). В этом случае на поверхность кольца действует распределенная нагрузка, интенсивность которой в каждой точке пропорциональна местной кривизне. Поэтому

$$q_n^* = \frac{P}{R_1} = P \left(\frac{1}{R} - \kappa \right).$$

Но так как $\frac{P}{R} = q$, то

$$q_n^* = q - qR\kappa,$$

следовательно,

$$q_n = -qR\kappa.$$

Уравнение (1) принимает вид

$$\frac{d^3\kappa}{ds^3} + \frac{1}{R^2} \frac{d\kappa}{ds} = 0.$$

Параметры нагрузки в него не входят. Следовательно, заданная система сил не может рассматриваться как причина возникновения новых форм равновесия. Уравнение имеет тот же вид, что и в случае полного отсутствия распределенных по поверхности сил. Оно выражает форму равновесия отрезка упругой линии кольца при заданных силовых и геометрических условиях на концах. Для замкнутого кольца новых форм равновесия не обнаруживается.

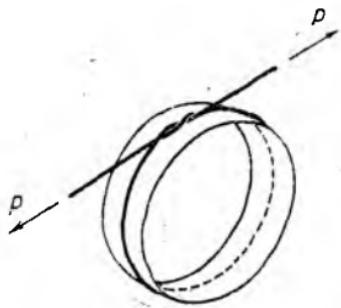


Рис. 74.

Таким образом, из расчетной схемы Эйлера — Лагранжа вытекает, что кольцо устойчиво при любых значениях сил P . Мы снова сталкиваемся со случаем, физическое содержание которого не вписывается в классическую схему. Дело здесь уже не в динамике. Камнем преткновения оказалось предположение о малости возмущений, налагаемых на систему.

Действительно, устойчивость или неустойчивость состояния равновесия определяется «методической» пробой. Системе сообщается не только малое, но сколь угодно малое отклонение от положения равновесия, и суждение об устойчивости выносится в зависимости от последующего поведения системы. Если система возвращается к исходному состоянию, то равновесие считается устойчивым. Однако система, способная восстановить исходное состояние при сколь угодно малом отклонении, может не проявить этого свойства, если ее отклонить сильнее, т. е. если сообщить ей не сколь угодно малое отклонение, а малое, но большее некоторой наперед заданной величины.

Хорошей механической аналогией, иллюстрирующей сказанное, является следующая: карандаш поставлен на стол острием вверх. Площадь опоры мала, а карандаш длинный. Устойчива система или неустойчива?

Для ответа на этот вопрос нелишне вернуться к исходному определению. Под устойчивостью понимается свойство конструкции сохранять свое состояние при реально существующих внешних воздействиях.

Отвлекаясь на время от расчетных схем и теоретических концепций, можно с позиций «здравого смысла» сразу дать ответ, что система неустойчива, и лучшим подтверждением этому является то, что карандаши на письменных столах в столь причудливом состоянии не хранятся.

Теперь перейдем к расчетной схеме.

Правильной расчетной схемой будет такая, которая, описывая качественную сторону явления, дает основу для количественной оценки устойчивости. Классический подход в данном случае этим условиям не удовлетворяет. Действительно, сообщая карандашу сколь угодно малое отклонение от вертикали, мы убеждаемся в том, что он восстанавливает свое исходное состояние. Следовательно, его положение равновесия устойчиво. Мало того, оставаясь на позициях сохранения сколь угодно малых отклонений, мы должны признать, что равновесие будет всегда устой-

чивым, независимо от того, сколь длинным будет карандаш и сколь малой будет опорная площадка. Классический подход, как видим, не дает верного описания явления.

Вывод о том, устойчива система или не устойчива, будет совершенно иным, если на сообщаемые возмущения установить некоторую норму. При небольших возмущениях система сохраняет свое состояние, при больших — не сохраняет. В одних условиях она может рассматриваться как устойчивая, а в других — как неустойчивая.

Например, сооружение из трех поставленных друг на друга табуреток можно считать устойчивым, если сверху ставится модель в классе для рисования. Это же сооружение будет рассматриваться как неустойчивое, если при его помощи необходимо сменить в люстре перегоревшую лампочку.

На основе высказанных соображений возникает мысль несколько расширить возможности классического подхода и, отказавшись от наложения сколь угодно малых перемещений, производить «методическую» пробу, сообщая системе малые, но конечные возмущения.

Так появился критерий устойчивости «в большом», получивший такое название в отличие от обычного определения устойчивости «в малом». Подробнее на этом вопросе мы остановимся в следующей главе, а сейчас вернемся к последней задаче об устойчивости кольца.

При передаче усилия через натянутую нить кольцо оказывается в условиях, совершенно аналогичных условиям равновесия карандаша, стоящего на незаточенном конце. Если кольцу сообщить малое отклонение от круговой формы, то нагрузка изменится таким образом, что кольцо восстановит эту форму. Вместе с тем, если кольцу сообщить возмущение малое, но большее некоторой наперед заданной величины, то произойдет переход к новой форме равновесия (рис. 75).

Чем больше сила P , тем меньше возмущение, необходимое для перехода к новому состоянию. Но во всех случаях это возмущение должно быть больше некоторой величины, зависящей от силы P . Если сравнивать

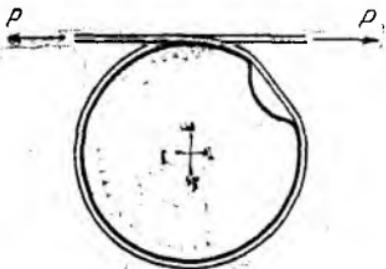


Рис. 75.

равновесие кольца с равновесием карандаша, то можно сказать, что возрастание силы P в первой задаче аналогично уменьшению опорной площадки во второй.

Мы рассмотрели несколько примеров различного поведения внешних сил при изменении формы нагруженного объекта. Как видим, в зависимости от этого поведения критическая сила меняется очень существенно, и в ряде случаев оказывается, что там, где можно ожидать потери устойчивости, ее на самом деле не возникает.

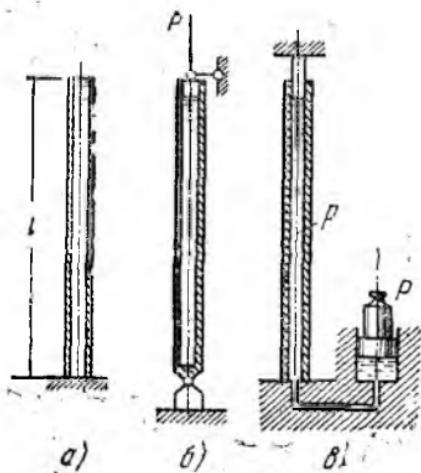


Рис. 76.

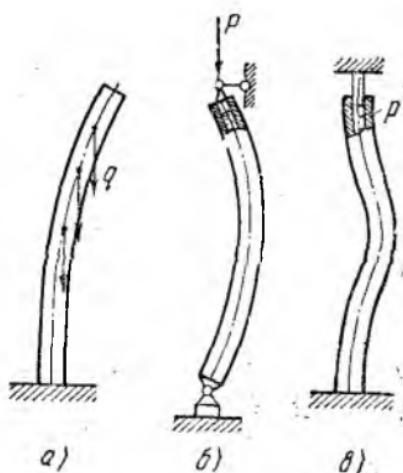


Рис. 77.

Существуют и обратные примеры. Бывает, что силы на первый взгляд носят безобидный характер, а иногда даже и вовсе «отсутствуют», и, тем не менее, при определенных условиях исходная форма равновесия становится неустойчивой.

Наиболее показательными в этом смысле являются примеры передачи усилий на стержень через жидкость или газ. На рис. 76 представлены три случая нагружения трубки-стержня внутренним давлением. Во всех случаях сам стержень от действия осевой силы освобожден. Однако при отклонении от вертикали в его сечениях возникают моменты, пропорциональные прогибу, как это имеет место и при обычном нагружении.

В случае $a)$ внутренняя полость трубы заполнена тяжелой жидкостью. Естественно, что критическое состояние здесь наступает в тех же условиях, что и для стержня, находящегося под действием собственного веса, равного

сумме весов стержня и жидкости. В этом легко убедиться, рассматривая стержень в отклоненном положении (рис. 77, а).

В случае, показанном на рис. 77, б, уравнение упругой линии изогнутого стержня составляется так же, как и при обычном нагружении осевой силой, и мы получаем:

$$EJy'' = -Py.$$

Поэтому, как обычно,

$$P_{kp} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2},$$

Дифференциальное уравнение упругой линии может быть составлено и иначе. Силы давления, действующие во внутренней полости изогнутого стержня, создают распределенную нагрузку, направленную в сторону выпуклости (рис. 78). На участке длиной dx эта сила будет равна

$$pF^*d\varphi,$$

где F^* — площадь сечения трубы «в свету». Погонная нагрузка равна

$$q = pF^* \frac{d\varphi}{dx} = pF^*y''.$$

Тогда дифференциальное уравнение упругой линии будет

$$EJy''' = -pF^*y''. \quad (2)$$

Следует заметить, что это уравнение верно лишь в том случае, если в сечении стержня отсутствует нормальная сила. Это как раз и имеет место в примерах, показанных на рис. 76, б и 76, в.

Решая уравнение (2), получаем

$$y = A \sin kx + B \cos kx + Cx + D,$$

где

$$k^2 = \frac{pF^*}{EJ}.$$

В примере, показанном на рис. 77, в, имеем граничные условия: при $x=0$ $y=0$ и $y'=0$. Те же условия

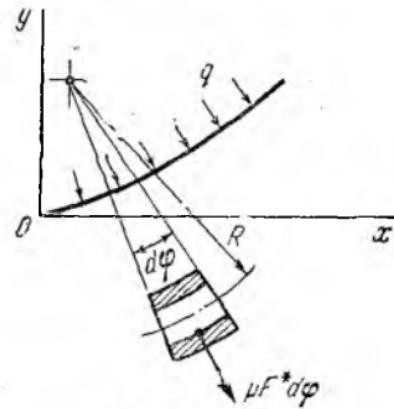


Рис. 78.

сохраняются и для второго конца стержня. В результате для определения постоянных A , B , C , D получаем четыре уравнения:

$$B + D = 0, \quad Ak + C = 0,$$

$$A \sin kl + B \cos kl + Cl + D = 0,$$

$$Ak \cos kl - Bk \sin kl + C = 0.$$

Приравнивая нулю определитель этой системы, находим
 $kl \sin kl = 2(1 - \cos kl).$

Наименьший, не равный нулю корень, будет

$$kl = 2\pi,$$

откуда

$$p_{kp} F^* = \frac{4\pi^2 EJ}{l^2},$$

т. е. потеря устойчивости происходит при той же силе, приходящейся на поршень, что и при обычном сжатии стержня осевой силой.

Последний пример хорошо объясняется и с энергетических позиций. Если стержень изогнулся (см. рис. 77, в), то при его сползании с верхнего поршня объем внутренней полости увеличивается. Груз, сжимающий жидкость, при этом опускается. Совершается работа, равная дополнительной энергии изгиба стержня.



Рис. 79.

В дополнение к рассмотренным, остановимся еще на одном примере, где стержень (трубка) не нагружен внешними силами, а находится под воздействием потока жидкости (рис. 79).

Пусть через трубопровод протекает в секунду масса жидкости m . Тогда на длине трубопровода dx в каждый момент времени находится масса $m dx/v$, где v — скорость потока. Если трубопровод искривился, то возникает инерционная сила, направленная в сторону выпуклости и равная

$$\frac{m}{v} dx v^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = q dx,$$

Уравнение упругой линии примет вид

$$EJy^{IV} = -mv'',$$

или

$$y^{IV} + k^2 y'' = 0,$$

где $k^2 = mv/EJ$. Тогда решение этого уравнения имеет вид

$$y = A \sin kx + B \cos kx + Cx + D. \quad (3)$$

Если трубопровод шарнирно закреплен по концам, то при $x = 0$ и при $x = l$ перемещение y и изгибающий момент EJy'' равны нулю.

В результате приходим к условию для определения критического параметра:

$$\sin kl = 0,$$

и

$$(mv)_{kp} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2},$$

Любопытное обстоятельство. Величина mv имеет раз мерность силы. Это — сила отдачи, действующая даже не на трубопровод, а на агрегат, подающий жидкость. Следовательно, прямолинейная форма равновесия стержня становится неустойчивой, когда сила отдачи становится равной эйлеровой силе.

Для стержня, защемленного одним концом, картина получается иной. В этом случае имеем следующие граничные условия:

$$\text{при } x = 0 \quad y = 0 \quad \text{и} \quad y' = 0,$$

$$\text{при } x = l \quad y'' = 0 \quad \text{и} \quad y'' = \frac{Q}{EJ} = 0,$$

которые приводят к системе уравнений:

$$B + D = 0; \quad Ak + C = 0,$$

$$A \sin kl + B \cos kl = 0; \quad -A \cos kl + B \sin kl = 0.$$

Приравнивая нуль определитель, получаем невыполнимое условие

$$\sin^2 kl + \cos^2 kl = 0.$$

Это означает, что стержень не имеет форм равновесия, отличных от прямолинейной.

Дальнейшее изучение вопроса показывает, что при определенных условиях защемленный одним концом стержень

совершает по некоторой форме колебательное движение с нарастающей амплитудой (рис. 80). Это явление можно наблюдать на примере поведения гибкого шланга, лежащего на мокром льду.

Итак, мы рассмотрели особенности поведения упругих систем в некоторых специфических условиях нагружения. Здесь наиболее важными являются два обстоятельства.

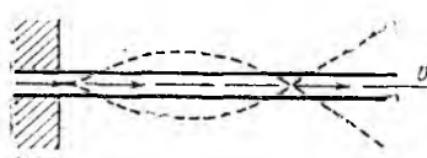


Рис. 80.

Первое — это то, что исследование устойчивости должно проводиться с обязательным учетом поведения сил в процессе деформирования системы. Второе обстоятельство сводится к следующему: существуют условия, в которых либо одно, либо другое из основных положений классического подхода оказывается не приемлемым, т. е. нельзя рассматривать подход Эйлера — Лагранжа как абсолютный. Иногда он оказывается бессильным.

Вопрос о том, что делать в подобных случаях, представляет собой одну из наиболее актуальных проблем современной теории устойчивости. Некоторые замечания по этому поводу излагаются ниже.

IX

Еще об устойчивости

Мы уже убедились в том, что существуют системы, для которых задача об устойчивости по Эйлеру — Лагранжу не может быть решена. Таких примеров к настоящему времени накопилось достаточно много, и имеется возможность произвести некоторую систематизацию вопроса.

Можно сказать, что существуют два основных положения, с которыми связана «необычность» поведения некоторых систем.

Первое — это содержащееся в классическом подходе отождествление двух понятий: «потеря устойчивости» и «существование сколь угодно близких форм равновесия».

Второе — это необходимая для классического подхода идеализация реальной системы до уровня, обеспечивающего сведение задачи к решению однородных уравнений и отысканию собственных значений.

Начнем с первого. Вернемся к примеру стержня, нагруженного следящей силой (рис. 81). Уже было установлено, что при любых значениях силы P стержень не имеет форм равновесия, отличных от прямолинейной. Поэтому рассмотрим более общую задачу о движении стержня.

Уравнение движения будет следующим:

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0,$$

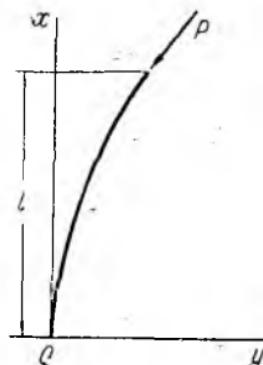


Рис. 81.

где m — масса стержня, приходящаяся на единицу длины. Примем ее величиной постоянной. Положим далее, что

$$y = X e^{i \Omega t},$$

где функция X зависит только от координаты x .

При вещественных значениях Ω движение носит характер гармонических колебаний. Если Ω будет комплексным, т. е.

$$\Omega = a \pm bi,$$

то

$$y = X e^{(\mp b + ia)t} = X e^{\mp bt} (\cos at + i \sin at). \quad (1)$$

Следовательно, движение будет происходить либо с затухающей, либо с возрастающей амплитудой, в зависимости от знака b .

Подставим выражение y в уравнение движения и введем безразмерные параметры

$$2\beta = \frac{Pl^2}{EJ}; \quad \omega = \Omega l^2 \sqrt{\frac{m}{EJ}}, \quad \zeta = \frac{x}{l}.$$

Тогда получим

$$\frac{d^4 X}{d\zeta^4} + 2\beta \frac{d^2 X}{d\zeta^2} - \omega^2 X = 0.$$

Решение этого уравнения будет

$$X = C_1 \sin k_1 \zeta + C_2 \cos k_1 \zeta + C_3 \operatorname{sh} k_2 \zeta + C_4 \operatorname{ch} k_2 \zeta,$$

где

$$k_1^2 = \beta + \sqrt{\beta^2 + \omega^2}, \quad k_2^2 = -\beta + \sqrt{\beta^2 + \omega^2}.$$

В заделке, независимо от условий нагружения, имеем $X = 0$ и $dX/d\zeta = 0$. Следовательно,

$$C_2 + C_4 = 0 \quad \text{и} \quad k_1 C_1 + k_2 C_3 = 0.$$

На свободном конце изгибающий момент равен нулю. В случае следящей силы обращается в нуль и поперечная сила. Поэтому при $x = l$ (или при $\zeta = 1$)

$$X'' = 0 \quad \text{и} \quad X''' = 0,$$

что дает еще два уравнения:

$$\begin{aligned} -C_1 k_1^2 \sin k_1 - C_2 k_1^2 \cos k_1 + C_3 k_2^2 \operatorname{sh} k_2 + C_4 k_2^2 \operatorname{ch} k_2 &= 0, \\ -C_1 k_1^3 \cos k_1 + C_2 k_1^3 \sin k_1 + C_3 k_2^3 \operatorname{ch} k_2 + C_4 k_2^3 \operatorname{sh} k_2 &= 0. \end{aligned}$$

Приравняв нулю определитель четырех полученных уравнений, получим

$$k_1^4 + k_2^4 + k_1 k_2 (k_1^2 - k_2^2) \sin k_1 \operatorname{sh} k_2 + 2k_1^2 k_2^2 \cos k_1 \operatorname{ch} k_2 = 0,$$

или

$$2\beta^2 + \omega^2 + \omega \beta \sin k_1 \operatorname{sh} k_2 + \omega^2 \cos k_1 \operatorname{ch} k_2 = 0. \quad (2)$$

Для определения критического значения силы P необходимо найти такое наименьшее β , при котором имеет место кратность корней ω уравнения (2). Это означает, что при дальнейшем увеличении β корни становятся комплексными сопряженными и существует корень с отрицательной мнимой частью, т. е. $\Omega = a - bi$. Согласно выражению (1) это соответствует появлению формы колебаний с нарастающей амплитудой.

Проведя числовой поиск, определяем *)

$$\beta = 10,025 \quad (\omega = 11,016).$$

Следовательно,

$$P_{kp} = 20,05 \frac{EJ}{l^2}.$$

Величина критической следящей силы зависит от распределения масс по длине стержня.

Чтобы обойти вычислительные трудности, рассмотрим упрощенную стержневую систему, показанную на рис. 82. Два стержня, имеющих массы m_1 и m_2 , связаны между собой пружиной жесткости C . Такая же пружина связывает нижний стержень с шарнирной опорой. Линия действия силы P постоянно совпадает с направлением верхнего стержня. За обобщенные координаты примем углы поворота стержней φ_1 и φ_2 . Тогда перемещения центра масс каждого стержня будут

$$x_1 = l\varphi_1, \quad x_2 = 2l\varphi_1 + l\varphi_2,$$

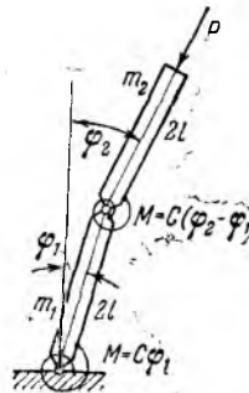


Рис. 82.

*) Коэффициент 20,05 был найден Бекком (Ztschr. angew. Math. Phys. 3 (1952), № 3. Позже К. С. Дейнеко и М. Я. Леоновым (ПММ 19, 1955, № 6) было получено значение $2,0028\pi^2 = 19,77$. В связи с обнаруженным расхождением решение было повторено. Действительное значение коэффициента оказалось равным 20,051. Значение $\omega = 11,016$.

где $2l$ — длина каждого стержня. Моменты инерции стержней относительно центральных поперечных осей будут

$$J_1 = \frac{m_1 l^2}{3}, \quad J_2 = \frac{m_2 l^2}{3}.$$

Введя силы взаимодействия в шарнире (рис. 83), составим уравнения движения. Получим для верхнего стержня

$$Y = P; \quad X = P\varphi_2 + m_2 \ddot{x}_2;$$

$$J_2 \ddot{\varphi}_2 + m_2 \ddot{x}_2 l + C(\varphi_2 - \varphi_1) = 0, \quad (3)$$

а для нижнего

$$C\varphi_1 + J_1 \ddot{\varphi}_1 - C(\varphi_2 - \varphi_1) + X \cdot 2l + m_1 \dot{x}_1 l - Y 2l \varphi_1 = 0. \quad (4)$$

Исключив x_1 , x_2 , X и Y и выразив моменты инерции через массы, получим

$$\frac{4}{3} m_2 l^2 \ddot{\varphi}_2 + 2m_2 l^2 \ddot{\varphi}_1 + C(\varphi_2 - \varphi_1) = 0;$$

$$\left(4m_2 l^2 + \frac{4}{3} m_1 l^2\right) \ddot{\varphi}_1 + 2m_2 l^2 \ddot{\varphi}_2 + (2C - 2Pl) \varphi_1 + (2Pl - C) \varphi_2 = 0. \quad (5)$$

Рис. 83.

Положим, что

$$\varphi_1 = A_1 e^{kt}; \quad \varphi_2 = A_2 e^{kt}. \quad (6)$$

После подстановки φ_1 и φ_2 в уравнения (5) получаем два уравнения относительно A_1 и A_2 :

$$A_1 (2m_2 l^2 k^2 - C) + A_2 \left(\frac{4}{3} m_2 l^2 k^2 + C \right) = 0;$$

$$A_1 \left(4m_2 l^2 k^2 + \frac{4}{3} m_1 l^2 k^2 + 2C - 2Pl \right) + A_2 (2m_2 l^2 k^2 + 2Pl - C) = 0.$$

Для определения условия существования ненулевых решений приравняем нулю определитель. Это дает следующее квадратное уравнение относительно k^2 :

$$\left(\frac{m_2 k^2 l^2}{C} \right)^2 (3 + 4\mu) + \frac{m_2 k^2 l^2}{C} 3 \left(8 + \mu - 5 \frac{Pl}{C} \right) + \frac{9}{4} = 0, \quad (7)$$

где

$$\mu = \frac{m_1}{m_2}.$$

Свободный член уравнения (7) не зависит от силы P . Это означает, что не существует такой нагрузки, при которой k обращалось бы в нуль, поэтому из выражений (6) вытекает, что φ_1 и φ_2 не могут быть постоянными. Система не имеет форм равновесия, кроме исходной, при которой φ_1 и φ_2 равны нулю. Рассматриваемая стержневая система обладает тем же свойством, что и защемленный стержень, нагруженный следящей силой.

Из уравнения (7) нетрудно также установить, что величина k^2 при любой силе P остается меньше нуля. Это означает, что k не имеет вещественных значений, и условия для апериодического движения отсутствуют.

Примем, что

$$kl \sqrt{\frac{m_2}{C}} = \varepsilon + l\omega,$$

и найдем условие, при котором ε будет величиной положительной. Это соответствует условиям возникновения колебательного движения с возрастающей амплитудой.

Разделяя в уравнении (7) вещественную и мнимую части, получим

$$[(\varepsilon^2 - \omega^2)^2 - 4\varepsilon^2\omega^2](3 + 4\mu) + \\ + 3(\varepsilon^2 - \omega^2)\left(8 + \mu - 5\frac{Pl}{C}\right) + \frac{9}{4} = 0,$$
$$4\varepsilon\omega(\varepsilon^2 - \omega^2)(3 + 4\mu) + 2\varepsilon\omega \cdot 3\left(8 + \mu - 5\frac{Pl}{C}\right) = 0.$$

Исключив ω , получим

$$\varepsilon^4 4(3 + 4\mu) + \varepsilon^2 6\left(8 + \mu - 5\frac{Pl}{C}\right) + \frac{9}{4} \frac{\left(8 + \mu - 5\frac{Pl}{C}\right)^2}{3 + 4\mu} - \frac{9}{4} = 0,$$

откуда

$$\varepsilon^2 = \frac{3}{4} \frac{5\frac{Pl}{C} - 8 - \mu \pm \sqrt{3 + 4\mu}}{3 + 4\mu}.$$

Наименьшее значение P , при котором ε^2 (а следовательно, и ε) принимает положительное значение, будет

$$P_{kp} = \frac{C}{5l}(8 + \mu - \sqrt{3 + 4\mu}).$$

Если $m_1 = m_2$, то $\mu = 1$. Тогда

$$P_{kp} = \frac{C}{5l} (9 - \sqrt{7}).$$

Если масса первого стержня мала по сравнению с массой второго, то $\mu = 0$, и

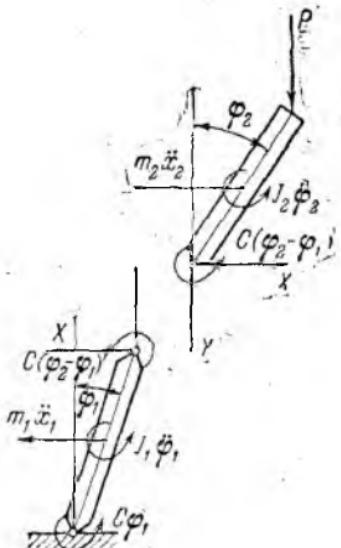


Рис. 84.

нагружения силой, (рис. 84).

В этом случае взамен уравнений (3) получаем

$$Y = P; \quad X = m_2 \ddot{x}_2, \quad J_2 \ddot{\varphi}_2 + m_2 \ddot{x}_2 l + C(\varphi_2 - \varphi_1) - P 2l \varphi_2 = 0.$$

Уравнение (4) остается неизменным. Взамен уравнений (5) будем иметь

$$\frac{4}{3} m_2 l^2 \ddot{\varphi}_2 + 2m_2 l^2 \ddot{\varphi}_1 + C(\varphi_2 - \varphi_1) - 2Pl \varphi_2 = 0,$$

$$\left(4m_2 l^2 + \frac{4}{3} m_1 l^2\right) \ddot{\varphi}_1 + 2m_2 l^2 \ddot{\varphi}_2 + (2C - 2Pl) \varphi_1 - C \varphi_2 = 0,$$

а взамен уравнения (7) получим

$$\begin{aligned} \left(\frac{m_2 k^2 l^2}{C}\right)^2 (3 + 4\mu) + \frac{m_2 k^2 l^2}{C} 3 \left[8 + \mu - \frac{Pl}{C}(8 + 2\mu)\right] + \\ + \frac{9}{4} \left[1 - \frac{6Pl}{C} + 4 \left(\frac{Pl}{C}\right)^2\right] = 0. \quad (8) \end{aligned}$$

Теперь свободный член этого уравнения зависит от силы и при

$$P = \frac{C}{4l} (3 \pm \sqrt{5})$$

обращается в нуль. Следовательно, для k возможно существование нулевых значений, и существует форма равновесия, отличная от исходной. Для критической силы получим выражение

$$P_{kp} = \frac{C}{4l} (3 - \sqrt{5}).$$

Таким образом, величина критической силы от соотношения масс стержней не зависит, так как параметр μ в свободный член уравнений (7) или (8) не входит и не может войти.

Два рассмотренных варианта одной и той же задачи создают впечатление, что характерным признаком применимости или неприменимости критерия Эйлера — Лагранжа является сохранение или несохранение силами заданного направления.

В действительности дело обстоит сложнее. В предыдущей главе был рассмотрен ряд примеров, в которых изменение направления приложенных сил в процессе искривления стержня не влекло за собой необходимости перехода

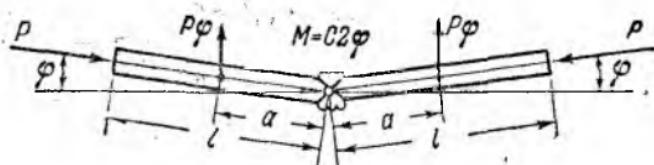


Рис. 85.

к динамическому критерию. Мало того, имеется много примеров, по внешнему виду почти не отличающихся от рассмотренного случая со следящей силой. Тем не менее, возможность применения статического подхода в этих задачах полностью сохраняется.

На рис. 85 показана стержневая система, нагруженная двумя следящими силами. Если каждый стержень повернулся на угол ϕ , происходит движение с ускорением. Равнодействующие инерционных сил будут приложены в центрах масс и имеют величину $P\phi$.

Приравнивая нулю сумму моментов сил, действующих на один стержень, относительно шарнира, получаем

$$P\varphi a = C \cdot 2\varphi,$$

откуда

$$P_{kp} = \frac{2C}{a}.$$

Таким образом, имеем форму равновесия в связанный системе координат. Любопытно, что критическая сила при

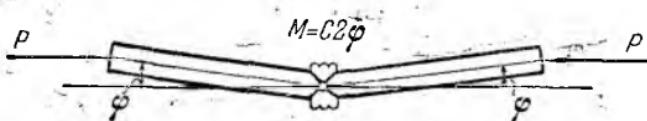


Рис. 86.

в этом зависит не от длины стержней, а от места расположения центра масс стержней, т. е. от величины a .

При силах, сохраняющих свое направление (рис. 86), расположение центра масс не имело бы значения. В этом случае, очевидно,

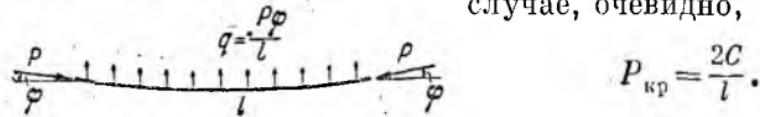


Рис. 87.

Очень интересен пример, предложенный Л. И. Балабухом. Однородный стержень нагружен двумя следящими силами (рис. 87). Как и для системы, показанной на рис. 85, имеем равноускоренное поступательное движение, в результате которого возникает инерционная равномерно распределенная нагрузка

$$q = \frac{P\varphi}{l}.$$

В результате получаем дифференциальное уравнение

$$EJy^{IV} + Py'' = \frac{P\varphi}{l}. \quad (9)$$

со следующими граничными условиями:

$$\text{при } x = 0 \quad y'' = 0 \quad \text{и} \quad y''' = 0,$$

$$\text{при } x = l \quad y'' = 0 \quad \text{и} \quad y''' = 0.$$

Дифференцируя два раза уравнение (9) по x и обозначая y'' через z , получим уравнение

$$EJz^{IV} + Pz'' = 0$$

с граничными условиями:

$$\begin{array}{lll} \text{при } x=0 & z=0 & \text{и } z'=0, \\ \text{при } x=l & z=0 & \text{и } z'=0. \end{array}$$

Следовательно, критическая сила будет такой же, как и для стержня, защемленного по концам (рис. 88). Для рассмотренной симметричной

формы

$$P_{kp} = \frac{4\pi^2 EJ}{l^2}.$$

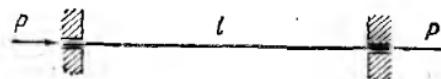


Рис. 88.

Понятно, что этот результат верен лишь в случае, если правая часть уравнения (9) будет либо константой, либо линейной функцией x , т. е. если масса стержня распределена по его длине равномерно или же по линейному закону.

Несколько более сложной является задача об устойчивости свободного стержня, находящегося под действием тяги ракетного двигателя (рис. 89). Здесь при равномерном распределении масс не существует форм равновесия в связанный системе координат. При силе

$$P = \frac{109,7 EJ}{l^2}$$

возникают колебания с нарастающей амплитудой. Вывод этого выражения достаточно сложен и здесь мы его не приводим.

При неравномерном распределении масс, например, при массах, сосредоточенных по концам стержня (рис. 90, a), имеет место иная картина. Здесь задача сводится к обычной статической. Уравновешиваем силу P двумя силами $P/2$, приложенными к каждой массе, и вводим еще пару инерционных сил $Pf/2l$, возникающих при равноН

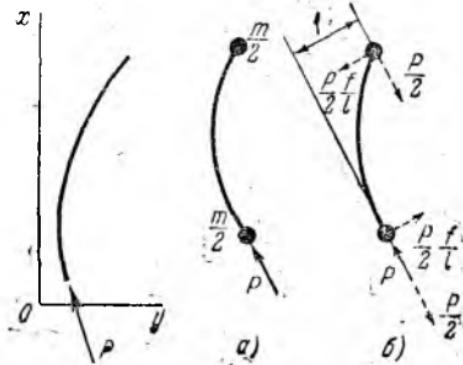


Рис. 89.

Рис. 90.

ускоренном вращательном движении. В результате получаем систему сил, удовлетворяющую условиям равновесия (рис. 90, б). Далее легко определяется условие возникновения криволинейной формы равновесия стержня в связанной системе координат. Очевидно, это будет при

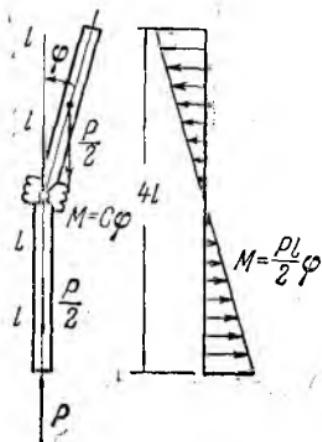


Рис. 91.

Аналогичная картина имеет место и для модели, состоящей из двух однородных стержней, соединенных пружиной (рис. 91). Здесь момент сил $\frac{P}{2} l\varphi$ уравновешивается моментом сил, распределенных по треугольнику. Далее, приравнивая сумму моментов сил, действующих на один стержень, моменту пружины, получаем

$$P_{kp} = \frac{4C}{l}.$$

Таким образом, и при следящих силах задача об устойчивости в целом ряде случаев сводится к обычному анализу форм равновесия.

Очень интересны в этом смысле случаи нагружения упругих систем моментами. Так, например, устойчивость

плоской формы изгиба защемленной одним концом полосы (рис. 92) при внешнем моменте, сохраняющем плоскость своего действия, а также и для следящего, требует динамического подхода. Форм равновесия, отличных от исходной, полоса не имеет.

Стержень (рис. 93), имеющий одинаковые жесткости на

изгиб в плоскостях xy и xz и загруженный на конце силой P и моментом M , соответственно сохраняющими направление и плоскость действия, не имеет форм равновесия, отличных от прямолинейной. То же самое будет и для случая следящего момента (рис. 94). Лишь при усло-

вии $M=0$ обнаруживается существование форм равновесия стержня с изогнутой осью.

Если же жесткости стержня на изгиб в плоскостях xy и xz различны, то в зависимости от величин момента M и силы P возможен переход либо к новой форме равновесия, либо к некоторой форме движения периодического характера с нарастающей амплитудой.

Задача определения условий движения, естественно, много сложнее, чем задача отыскания форм равновесия. Возникает вопрос, всегда ли для того, чтобы избежать ошибок, необходимо прибегать к громоздкому динамическому критерию? Нельзя ли найти признаки, которые позволили бы еще до решения задачи уверенно ориентироваться в особенностях системы?

Здесь известно пока одно. Режим колебаний с нарастающей амплитудой может развиваться лишь в результате того, что работа внешних сил за один цикл не равна нулю. Это означает, что она зависит от пути, а сами силы не имеют потенциала. Такие силы называются неконсервативными. Так, в частности, если переход стержня (рис. 95) из положения $a)$ в положение $b)$ произведен простым поворотом торца, следящая сила совершил одну работу. Если же стержень перевести в положение $b)$ последовательно через положения $a')$ и $a'')$, то работа будет другой. Поэтому, если мы уверены, что силы консервативны, то при анализе устойчивости в вопросы динамики системы можно не углубляться. Если же силы не консервативны, то использование статического критерия может привести как к правильным,

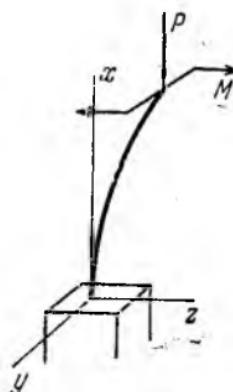


Рис. 93.

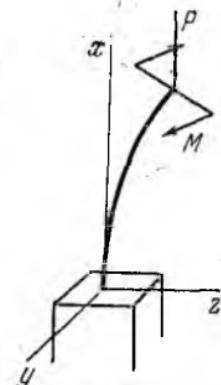


Рис. 94.

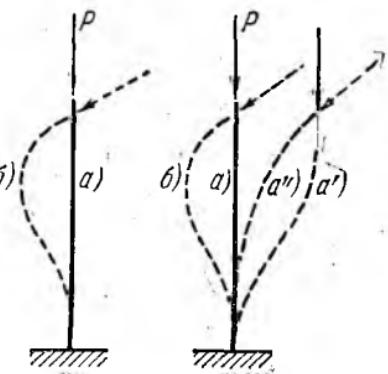


Рис. 95.

так и к неправильным результатам. Следовательно, дело не только в самих силах, но и в условиях их приложения.

Системы, показанные на рис. 89 и 90, отличаются только законами распределения масс. В первом случае масса стержня равномерно распределена по его длине, во втором — сосредоточена по концам. В первом случае статический метод не дает возможности определить критическую силу, во втором — дает.

Для систем, показанных на рис. 93 и 94, при различных жесткостях на изгиб в плоскостях xy и xz применение

статического метода дает возможность определить критическую нагрузку, но это не значит, что будет найдено **нижнее значение критических параметров**.



Рис. 96.

Ну, а если сила может перемещаться только по линии своего действия? Консервативна она или нет? Почему система, показанная на рис. 96, где сила сохраняет и линию своего действия и направление, не имеет форм равновесия, отличных от исходной, в то же время как для ранее рассмотренного стержня (см. рис. 65, г), когда сила была направлена постоянно по нормали к жесткому диску, задача благополучно решается по Эйлеру? И в том, и в другом случае, кстати говоря, работа сил при одинаковых перемещениях получается одинаковой, поскольку силы по горизонтали не смещаются.

Казалось бы естественным говорить не о консервативности сил, а о консервативности системы. В этом случае на систему, кроме условия консервативности сил, налагаются условия стационарности связей и неявной зависимости энергии от времени. Но как это установить?

Вспоминается милая шутка из далекого детства:

- Папа, как поймать птичку?
- А ты насыпь ей соли на хвост!

Обычно сомнения в консервативности системы зарождаются у исследователя лишь после того как задача решена и обнаружено, что статический подход оказался неприменим. Не так просто догадаться, например, что системы с фиксированной плоскостью момента и со следящим моментом (см. рис. 81 и 82) неконсервативны, а вот если момент при повороте в одной плоскости будет следящим, а в другой — не следящим, то система превращается в консервативную. Такие обстоятельства мало кому известны и пока

простым способом не объясняются. Поэтому признак неконсервативности и нестационарности не имеет в данном случае реальной ценности. Для того, например, и созданы признаки делимости, чтобы необходимые суждения можно было вынести, не производя самого деления. А здесь получается наоборот.

Таким образом, перед исследователями в настоящее время стоит задача сформулировать признак, по которому можно было бы, не решая задачи, сразу сказать, приведет или не приведет к необходимому результату статический подход в анализе устойчивости данной системы.

Не исключено, что необходимая информация о поведении сил, достаточная для решения задачи, может оказаться недостаточной для формулировки общего принципа. В таком случае необходимо обращаться к физическим обстоятельствам возникновения данных сил. Так, более или менее уверенно можно сказать, что статический анализ устойчивости всегда возможен, если силы, приложенные к упругой системе, возникают как следствие сил веса, передаваемых через любые механизмы. Например, в случае, представленном на рис. 65, g , сила, передаваемая на стержень, является силой веса. Силу P , показанную на рис. 96, представить как результат воздействия сил веса не удается. В первом случае статический метод проходит, во втором — не проходит. Моменты, показанные на рис. 93 и 94, при помощи системы грузов не создаются. Если приложить силы веса так, как это показано на рис. 97, то момент при повороте коромысла в плоскости xy является следящим, а при повороте в плоскости xz — не следящим. В этом случае задача решается на основе статического подхода.

Примеров, противоречащих такой оценке, пока не встречалось.

Итак, все, что говорилось выше, имело отношение к первой категории задач, не поддающихся решению с классических позиций Эйлера — Лагранжа. Эти задачи возникли

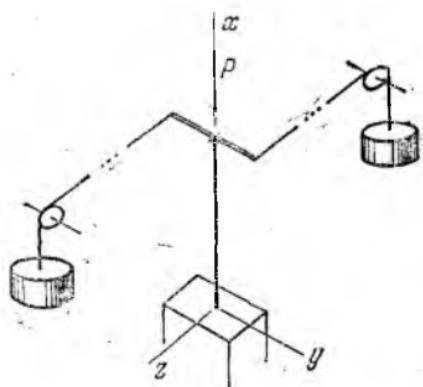


Рис. 97.

как следствие неполной тождественности двух понятий: «потеря устойчивости» и «существование сколь угодно близких форм равновесия».

Перейдем ко второй категории задач, решение которых также требует отхода от классического метода. Это — системы, для правильного анализа которых недопустима обязательная для классического метода степень идеализации реальной конструкции.

То, чем всегда можно было пренебречь при расчете на прочность, может приобрести в вопросах устойчивости существенное значение. Это в первую очередь начальная погибь, вследствие которой форма стержня или оболочки отличается от номинальной, наличие поля остаточных напряжений, неоднородность упругих характеристик материала и некоторые другие факторы. Все эти факторы объединяются общим понятием начальных несовершенств. Они присущи любой конструкции. Вопрос заключается только в том, в какой степени и какие из этих факторов могут помешать нам воспользоваться классической схемой расчета на устойчивость.

Уже слышу возражения: какая же это устойчивость. Как можно говорить об устойчивости сжатого, но несколько изогнутого стержня? По отношению к каким возмущениям?

Прежде всего необходимо выяснить, что такое устойчивость. На этот вопрос, в зависимости от обстоятельств, можно получить различные ответы.

Прежде чем их обсуждать, рассмотрим лексический аналог. Что такое деформация? Собеседник, знакомый с русским языком, ответит, что это — всякое изменение формы, и наглядно пояснит это на любом, находящемся под руками предмете. И будет прав. Деформация в этом понимании есть качественный показатель поведения тела при воздействии внешних факторов.

Собеседник, искушенный в вопросах механики, даст деформации другое определение, а именно то, которое известно читателям из курса сопротивления материалов. Развивая это определение, он пояснит, что деформация бывает линейной и угловой, что существует понятие деформированного состояния в точке и т. д. Он, естественно, тоже прав. Деформация в таком понимании — это не качественный показатель свойств тела, а количественная характеристика состояния в точке непрерывной среды.

Беседа, ведущаяся без разграничения смысловых значений понятия деформации, неизбежно приведет к недоразумениям.

Примерно так же обстоит дело с понятием устойчивости. С одной стороны, как уже говорилось, устойчивость — это свойство конструкции сохранять свое состояние при относительно малых внешних непредусмотренных воздействиях.

Но есть другое понимание устойчивости. В широких кругах ученых под устойчивостью понимается определенный раздел механики — совокупность приемов, позволяющих анализировать поведение идеальной системы при малых возмущениях. Этот раздел механики правильнее было бы называть не устойчивостью, а теорией устойчивости. Но слово «теория», как правило, опускается. Устойчивость стала символом, обозначающим определенную сферу научной деятельности, связанную с разработкой особенностей классической расчетной схемы.

Эта двойственность понятия устойчивости порождает своеобразную коллизию. С одной стороны, имеется свойство устойчивости, многолико проявляющееся в окружающей нас действительности, с другой,— классическая схема и аппарат теории устойчивости, отражающие это свойство, но не исчерпывающие его полностью.

Естественные предпринимаемые время от времени попытки уточнить расчетную схему и ввести в рассмотрение не учитывающиеся до этого факторы. Иногда это делается без должного внимания к достижениям теории, что справедливо воспринимается как вульгаризация науки и вызывает понятный протест.

Возьмем, например, утверждение: система в неустойчивом положении долго находиться не может.

С позиций человека, понимающего под устойчивостью свойство реальной конструкции, это совершенно естественное и, по существу, правильное выражение. Если же эту фразу услышит ученый, посвятивший свою деятельность разработке теории устойчивости в классическом понимании, то она будет воспринята им, в лучшем случае как нелепость, а скорее,— как проявление элементарного невежества.

Подобных примеров можно привести много. Поэтому, обсуждая вопросы устойчивости конструкций, приходится быть очень осторожным в выборе выражений и в то же

время проявлять достаточную терпимость к тем высказываниям, которые на первых порах представляются явно выходящими за рамки твердо установленных представлений.

На такую терпимость к последующим рассуждениям мы и рассчитываем.

Итак, вернемся к начальным несовершенствам.

Имеется большое число примеров, когда влияние начальных несовершенств не столь велико. Сюда относится прежде всего задача об устойчивости сжатого стержня.

На рис. 98 показана зависимость прогиба стержня f от осевой силы P для нескольких значений стрелы начального прогиба f_0 . Случаю идеального стержня соответствует

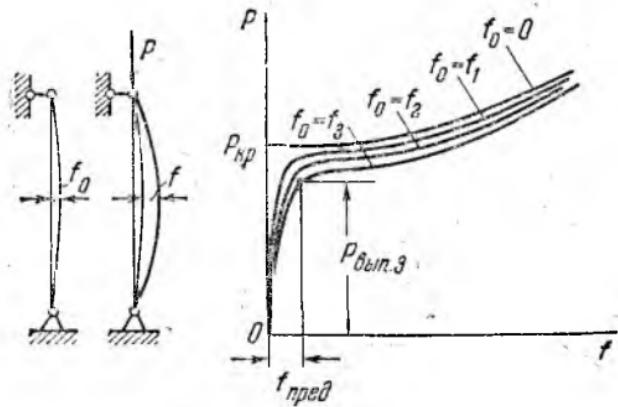


Рис. 98.

кривая $f_0 = 0$. При $f_0 \neq 0$ понятие критической силы теряет смысл. Это понятие свойственно только идеальной схеме. Для практических расчетов необходимо, очевидно, установить величину предельно допустимого прогиба $f_{\text{пр}}$ (рис. 98). Соответственно этому прогибу для каждого f_0 может быть указано определенное значение силы $P_{\text{вып.з}}$. Назовем эту силу силой выпучивания. Понятно, что сила выпучивания представляет собой условное понятие, характеризующее такое состояние системы, при котором начинается быстрое нарастание перемещений.

Практически расчет по силе выпучивания наталкивается на большие трудности в связи с тем, что начальный прогиб f_0 неизвестен и относится к категории более или менее случайных величин. При этом правильнее даже говорить не о самом прогибе f_0 , а вообще о каком-то среднем уровне начальных несовершенств.

Для сжатых стержней учитывать эти несовершенства не обязательно, поскольку в пределах практически встречающихся отступлений от расчетной схемы сила выпучивания сравнительно мало отличается от критической силы. По величине последней без особых погрешностей и может быть произведен расчет.

Однако можно привести много примеров, когда нормально допустимые в производстве отклонения от nominalных размеров приводят к существенному снижению сил выпучивания по сравнению с критическими нагрузками, найденными в пределах классического подхода. К числу

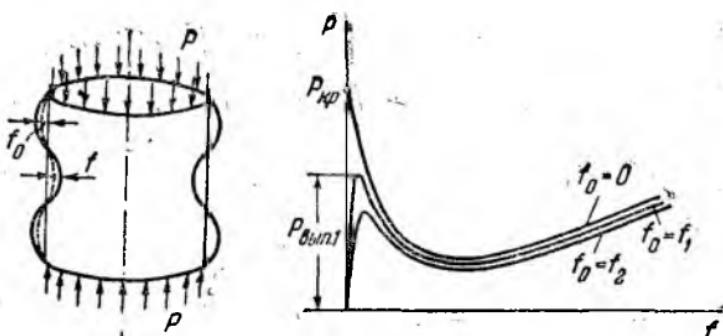


Рис. 99.

таких задач относятся в первую очередь задачи об устойчивости сферической оболочки, находящейся под действием внешнего давления и цилиндрической оболочки, сжатой в осевом направлении.

Зависимость между осевой силой P и прогибом оболочки (безразлично какой — сферической или цилиндрической) для нескольких значений начальной величины отклонения имеет вид кривых, показанных на рис. 99. В отличие от аналогичных кривых, построенных для сжатого стержня, величина усилия выпучивания $P_{вып}$ резко зависит от f_0 и оказывается существенно меньшей, чем P_{kp} . Как для сферической, так и для цилиндрической оболочки классическая теория дает

$$\sigma_{kp} = 0,606 E \frac{h}{R},$$

где h — толщина, а R — радиус оболочки.

Многократно проведенные опыты показали, что осевое напряжение, соответствующее началу выпучивания, имеет

величину, в 3—4 раза меньшую критического напряжения. Так, для цилиндрической оболочки

$$\sigma_{\text{вып}} = (0,15 \div 0,25) E \frac{h}{R}, \quad (10)$$

а для сферической —

$$\sigma_{\text{вып}} = (0,12 \div 0,16) E \frac{h}{R}. \quad (11)$$

Возникающие расхождения слишком велики и слишком систематичны, чтобы их можно было объяснить случайными причинами. Довольно скоро стало ясно, что устранить эту невязку в рамках классического подхода невозможно. За последние десятилетия по мере расширения практических задач постепенно стали накапливаться и другие примеры аналогичных систем.

Но, конечно, две упомянутые задачи являются не только типичными в этом смысле, но вместе с тем и наиболее важными с практической точки зрения.

Возникает вопрос, как подойти к решению подобных задач. Необходимо, очевидно, менять сам подход и сформулировать какой-то новый критерий устойчивости.

Можно сохранить основное положение классической постановки и рассматривать систему как совершенную, но принять, что возмущения, налагаемые на систему, являются не бесконечно малыми, а малыми, но конечными.

В классической постановке определяются условия, при которых существуют формы равновесия, бесконечно близкие к исходной. При этом остается открытым вопрос о том, что будет, если системе сообщить большее отклонение. Может быть, существуют и другие формы равновесия, тоже близкие к исходной, но уже не сколь угодно близкие. Анализ этого вопроса стали называть, как уже говорилось, анализом устойчивости в большом.

Поскольку в этом подходе мы отказываемся от учета случайных отклонений от идеальной схемы, задача резко упрощается. В то же время она остается существенно более сложной, чем в классической постановке, так как теперь необходимо рассматривать большие перемещения, и уравнения равновесия получаются нелинейными. Взамен семейства кривых, показанных на рис. 98 и 99, мы получаем одну кривую, соответствующую значению $f_0=0$ (рис. 100).

Для сжатого стержня постановка в большом приводит, очевидно, к тем же результатам, что и классическая. Здесь

при $P < P_{kp}$ существует единственная форма равновесия стержня с прямой неискривленной осью.

Для цилиндрической и сферической оболочек дело обстоит иначе. При некотором усилии $P > P_{kp2}$ возможно существование трех форм равновесия. Первая из них — это исходная форма без дополнительных прогибов (точка *a* на прямой *OA*, рис. 100, *b*). В классическом понимании эта форма остается устойчивой до значений $P = P_{kp1}$. Далее, имеется неустойчивая в том же классическом понимании форма (точка *b* на кривой *AB*). Наконец, точка *c* дает еще одну устойчивую форму равновесия.

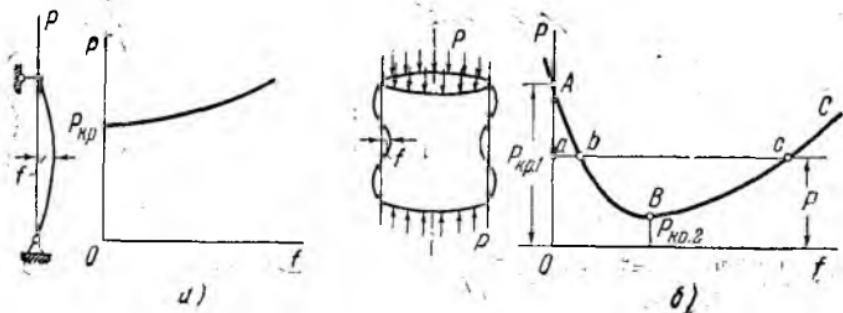


Рис. 100.

В интервале $P_{kp2} < P < P_{kp1}$ оболочка устойчива в классической постановке (в малом), но неустойчива в большом. Если системе сообщить достаточно малые возмущения, то она, будучи в дальнейшем предоставленной сама себе, вернется к исходной форме равновесия. Если же системе сообщить большее отклонение, то при достаточной величине возмущений она перейдет к новой устойчивой форме равновесия (точка *c*), расположенной за потенциальным барьером.

Таким образом, в результате анализа устойчивости в большом устанавливается интервал значений нагрузок, внутри которого, в зависимости от величины возмущений, возможен переход к новому состоянию, т. е. потеря устойчивости. При практических расчетах по этому критерию не остается ничего иного, как ориентироваться на нижнюю границу интервала нагрузок, в частности, для цилиндрической и сферической оболочек — на величину P_{kp2} . Эта величина носит название нижнего критического усилия.

В качестве примера можно привести целый ряд систем, которые не поддаются анализу с классических позиций,

но поведение которых успешно может быть объяснено на основе критерия устойчивости в большом. Сюда относится задача об устойчивости сжатого между двумя плитами стержня, имеющего плоские торцы (рис. 101). Переход к формам равновесия I и II должен анализироваться в большом, а переход к форме III можно анализировать в малом. Стержень, прижатый к жесткому основанию распределенными силами интенсивности q и сжимаемый продольной силой P , всегда устойчив в малом, но при достаточно большой силе P — неустойчив в большом (рис. 102).

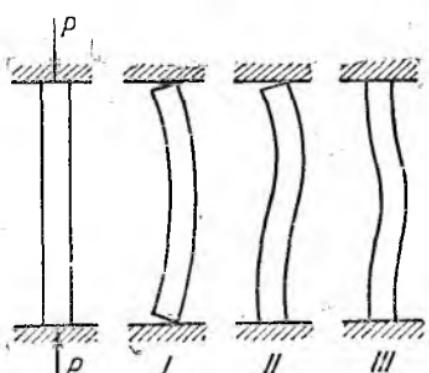


Рис. 101.

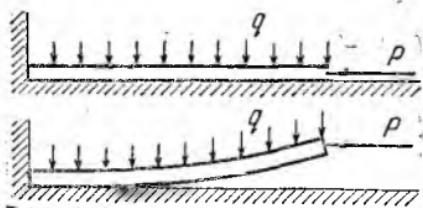


Рис. 102.

Рассмотренное ранее тонкое кольцо, стянутое по внешней поверхности гибким тросом (см. рис. 74), всегда устойчиво в малом. Однако начиная с некоторого значения силы P оно становится неустойчивым в большом.

Первые шаги в области нелинейной устойчивости были весьма многообещающими. В частности, для цилиндрической и сферической оболочек нижняя критическая нагрузка при первых же расчетах оказалась близко совпадающей с теми значениями предельных нагрузок, которые определяются из опыта. Это вначале дало повод думать, что в реальных условиях начальные несовершенства и случайные возмущения таковы, что переход к новым найденным формам равновесия практически реализуется уже тогда, когда нагрузка достигает нижнего критического значения.

В дальнейшем, однако, обнаружилось, что это совсем не так. Чем глубже проникали исследователи в сущность этих задач и чем точнее проводилось решение, тем ниже опускалось расчетное значение нижней критической нагрузки.

Например, для сферической оболочки значение нижнего критического давления, найденное интегрированием

на электронно-цифровой машине уравнений пологой оболочки в пределах осесимметричных форм равновесия, оказалось в 10 раз меньшим верхнего критического давления. Совершенно очевидным является существование осесимметричных форм равновесия при отрицательном давлении. Мы имеем в виду форму равновесия, соответствующую вывернутой наизнанку сферической оболочке. Эта форма, естественно, может быть описана только уравнениями непологой оболочки. Более заметное снижение низких критических нагрузок дадут, по-видимому, несимметричные формы равновесия.

При выполнении практических расчетов в этих условиях ориентация на нижнюю критическую нагрузку теряет всякий смысл. Интервал между верхним и нижним значениями критических нагрузок в ряде случаев настолько широк, что даже в самом первом приближении никого не может удовлетворить.

Таким образом, несмотря на то, что постановка устойчивости в большом сильно расширяет наши представления и многое объясняет, ее нельзя признать исчерпывающей. А в ряде случаев для практических расчетов она оказывается также неприемлемой, как и классическая постановка.

Проводя расчет по классической схеме, мы можем получить критические нагрузки, существенно превышающие истинные нагрузки выпучивания. С другой стороны, если ориентироваться на низшую критическую нагрузку, подсчитанную в большом, то можно получить столь же большую ошибку, но другого знака. Поэтому на практике в подобных случаях предпочитают ориентироваться в основном на результаты эксперимента. Так, в частности, обстоит дело с цилиндрической и сферической оболочками.

В конечном итоге все упирается в один и тот же вопрос: сколь существенным погрешностям приводит пренебрежение реально существующими начальными несовершенствами? Если же эти несовершенства учитывать, то за этим незамедлительно следует ломка основных концепций, обеспечивающих современной теории устойчивости математическую строгость и определенность количественных оценок. Вот почему так трудно решается этот вопрос в настоящее время. Но дело, конечно, не только в этом. Ведь начальные несовершенства нам неизвестны. Они меняются в пределах некоторых допусков, установленных на

основные технологические операции, и проследить за ними весьма не просто.

Как и в вопросах прочности, не новой является попытка направить исследования устойчивости в русло вероятностного подхода. Можно поставить задачу в пределах пренебрежимости начальными несовершенствами и рассматривать как вероятные только возмущения, сопутствующие процессу нагружения.

Возможности такого подхода весьма ограничены. Имеется аналогия. Вода, выпитая в области водораздела, потечет в ту или иную сторону в зависимости от начальных условий водостока, а не последующих возмущений. Таким образом, решающую роль в этом вопросе играют все-таки начальные отклонения от номинала.

Попытки учесть начальные несовершенства статистически также имеют пока мало шансов на успех. Об этом достаточно было сказано в главе III, где обсуждался вопрос о вероятностном подходе к вопросам прочности. Основания к такому прогнозу, по существу, те же самые.

Об этом приходится напоминать в связи с тем, что значение вероятностного подхода часто переоценивается, и существует совершенно реальная угроза того, что труд, затраченный на спешное создание математических средств предсказания потери устойчивости как вероятного события, окажется напрасным, поскольку необходимые для расчета функции распределения начальных несовершенств остаются неизвестными даже в тех немногих случаях, когда их можно отнести к категории случайных параметров. Инженер-практик затратам на изучение скоротечных функций распределения безусловно предпочтет в сомнительных случаях более жесткий контроль за качеством изготовления, а то и попросту изменение конструкции.

Что же делать? По-видимому, для ряда наиболее ответственных задач развитие практических расчетов конструкций на устойчивость связано с необходимостью частичного учета основных начальных несовершенств в пределах допуска. Рассуждения могут быть построены по схеме «внешний» — «внутренний» параметры (см. гл. III).

Положим, например, сжимается осевыми силами короткий шарнирно закрепленный стержень. График зависимости между силой P и сближением торцов λ имеет вид кривой с быстро нарастающими прогибами, если стержень нагружается мертвым грузом, или кривой, име-

ющей максимум силы, если нагружение прессовое, т. е. если фиксируется сближение торцов. В зависимости от обстоятельств предельное состояние может быть определено либо по условию быстрого нарастания прогибов, либо по условию максимума силы P . Естественно, нас не может смущать то обстоятельство, что понятие предельного состояния остается при этом не сформулированным. Исследователь волен выбрать на диаграмме характерную точку по своему усмотрению в зависимости от обстоятельств дела. Величина силы в этой точке будет в такой же мере характерна для системы, как предел текучести или предел прочности характерны для диаграммы испытания материалов. И в соответствии с точностью исходных предпосылок, и в соответствии с общим духом построения науки о прочности конструкций такой подход к вопросу является совершенно естественным.

Вопрос о том, вписывается ли такой подход в цикл вопросов устойчивости или не вписывается, не так уж и важен. Тот, кто рассматривает устойчивость как свойство системы, считает, что имеет дело с задачей устойчивости. Тот, кто рассматривает устойчивость в духе классического подхода, выносит обычно такую постановку за пределы привычных представлений об устойчивости.

Величина нагрузки, принятой в качестве предельной, зависит от начальной погиби. Если стержень предварительно изогнут по одной полуволне, то эта зависимость, как показывают расчеты, оказывается существенно более заметной, чем в том случае, когда стержень изогнут по двум или трем полуволнам. Система, таким образом, обладает избирательностью по отношению к формам начальных несовершенств. Можно с достаточной уверенностью утверждать, что подобная избирательность свойственна вообще всем системам. По-видимому, наибольшее влияние оказывают формы начальной погиби, наиболее близкие к формам потери устойчивости в классическом понимании.

Свойство избирательности существенно упрощает дело. Прежде всего имеется возможность выразить начальную погибь не системой функций, а всего одним или двумя геометрическими параметрами, которые могут быть в дальнейшем взяты под контроль. В некоторых случаях это и делается. Например, назначается допуск на величину начальной погиби стержней, которым в конструкции предстоит работать на сжатие.

В более сложных случаях необходимо, очевидно, провести анализ системы с целью выяснения видов несовершенств, влияющих решающим образом на несущую способность, и установить параметры, характеризующие эти несовершенства. Далее должен быть найден метод производственного контроля и установлен допуск на параметры несовершенств при этой системе контроля. При известном допуске расчетным путем может быть предсказана и величина предельных нагрузок.

Современная электронно-цифровая вычислительная техника позволяет в полной мере реализовать указанный подход. Наиболее подходящим для этого является сведение системы к конечному числу степеней свободы с последующим интегрированием по времени или по параметру нагрузки шаг за шагом. Потеря устойчивости рассматривается уже не как результат совокупного существования форм равновесия, а как процесс, протекающий во времени. Более подробно об этом будет сказано в следующей главе.

Очень ценно то, что при таком подходе результат определяется в прямой зависимости от истории нагружения. Это особенно важно для случая комбинированного нагружения, а также для пластически деформируемых систем, где важна не только последовательность нагружения, но и последовательность налагаемых возмущений.

На этом вопросе следует остановиться подробнее, так как задача устойчивости конструкций, работающих за пределами упругости, находится в настоящее время в столь же неподготовленном для практических расчетов состояний, как и задачи об устойчивости сферической и цилиндрической оболочек.

До сих пор задачи устойчивости, связанные с возникновением пластических деформаций, решаются на основе традиционного подхода, выработанного для упругих систем. Решение сводится обычно к определению приведенной жесткости стержня или оболочки на изгиб или кручение, после чего система рассматривается как упругая.

Только сравнительно недавно был осознан тот факт, что устойчивость системы при наличии пластических деформаций подчиняется другим принципам. Наибольшая нагрузка, которую способна выдержать конструкция, колеблется в довольно широких пределах в зависимости от истории нагружения и последовательности производи-

мых проб. Если отказаться от учета начальных несовершенств и характерных возмущений, то мы можем найти только интервал значений предельной нагрузки, подобно тому как это получается при оценке устойчивости в большом сферической и цилиндрической оболочек.

Следовательно, для решения задачи необходимо ввести в пределах допуска начальные несовершенства и рассмотреть нагружение системы как процесс. Задача, таким образом, полностью согласуется с возможностями машинного метода. В условиях ползучести и при динамическом нагружении применение машинного (шагового) метода является само собой разумеющимся.

Однако не следует придерживаться той точки зрения, что метод анализа по шагам следует применять во всех случаях. Этот метод возник в результате необходимости рассчитывать системы с учетом нелинейности и начальных несовершенств. Понятно, что многие задачи, легко поддающиеся анализу с позиций классического подхода, решались и будут по-прежнему решаться на основе критерия Эйлера — Лагранжа. Те задачи, где необходимо рассматривать не формы равновесия, а формы движения, будут, очевидно, решаться на основе динамического критерия.

Что же касается задач, решение которых связано с учетом роли начальных несовершенств, то здесь будущее, по-видимому, принадлежит машинному методу.

X

Расчет конструкций и электронно-цифровые машины

Прежде чем освоить дифференциальное и интегральное исчисление, прежде чем создать теорию комплексных чисел и установить правила алгебраических преобразований, человек учился арифметике и осваивал те операции над числами, которые мы называем элементарными.

Естественно, что арифметика, как средство для проникновения в сущность явлений, не обладает теми возможностями, которые открывают перед человеком методы математического анализа. С течением времени при решении все более и более сложных задач арифметика отошла на второй план, уступив главное место многим другим разделам математики.

Значимость результатов, полученных при помощи новых, более совершенных средств, меняла и отношение к оценке степени важности различных математических дисциплин. И хотя никто и никогда не отрицал желательности доведения результатов исследования до числа, тем не менее операциям с числами стало отводиться подчиненное место. Эти операции стали рассматриваться как заключительные, наиболее тривиальные. От них в ряде случаев можно было отказаться. Их всегда можно было поручить менее квалифицированным работникам. Конечно, если ученый умел сам производить сложные вычисления, это оценивалось как положительный, но далеко не обязательный фактор.

Внедрение в жизнь электронно-цифровой вычислительной техники совершило переворот в средствах анализа, в методах изучения явлений природы, во взглядах на трудность и простоту задач, в оценке характера самой научной работы. Глубина совершенного переворота до сих пор

далеко не всеми осознана. Еще и сейчас многие обращаются к машине только тогда, когда в процессе решения задачи обнаруживается большой объем вычислительной работы. Машина рассматривается при этом не более как техническое средство, родственное логарифмической линейке и арифмометру, но с несравненно более высокими характеристиками.

Этот взгляд рожден силой привычки видеть решение задач механики в аналитической форме, когда операции с числами являются заключительными. Отсюда вытекает и стремление многих ученых не вникать в процесс программирования и перепоручать его инженерам-вычислителям и аспирантам. Мы слишком привыкли к тому, что связь между величинами, характеризующими причины и следствия, лучше всего выражать при помощи формул, вывод которых представляет собой одну из форм научного поиска. В связи с этим особенно ценится искусство ученого, умеющего найти надлежащую подстановку, понизить порядок уравнения или свести решение к табулированным функциям.

Но если взглянуть на вопрос с более общих позиций, то так ли уже много значит выносливость и искусство исследователя-землемера, умеющего находить незаметные таежные тропы, после того как на вооружение экспедиций взят вертолет? Понятно, что все положительные качества искателя в новых условиях технического прогресса сохраняются, но место им отводится уже другое.

Электронно-цифровая машина обладает столь высокой степенью быстродействия, что количество уже переходит в качество. Машина становится средством изучения явлений и возникает новая отрасль математики — машинный анализ. Естественно, что аналитический метод и метод машинного анализа не могут и не должны противопоставляться один другому. Они являются взаимопроникающими и дополняющими друг друга. Тем не менее при решении практических задач механики и проектирования конструкций дальнейшее развитие цифровых машин уже в ближайшем будущем, несомненно, обеспечит машинному анализу доминирующее положение.

Внедрение электронно-цифровых машин заставляет произвести переоценку многих привычных понятий.

Всегда, например, считалось большой удачей, если решение уравнений сведено к табулированным функциям.

Но машина в таблицах не нуждается, и это — большой шаг вперед.

Действительно, сколь далеко находится предел целесообразного табулирования?

Мы имеем прежде всего тригонометрические, показательные и гиперболические функции. Это — функции, к которым мы обращаемся повседневно. Далее идут также широко применяемые в механике функции Бесселя и их различные модификации: $ber x$, $bei x$, $ker x$, $kei x$ и др. При решении некоторых задач приходится иметь дело с таблицами эллиптических интегралов, таблицами эллиптических функций, сферических функций, с таблицами интегрального синуса и т. д.

Естественно, что с расширением круга решаемых задач возрастают число исследованных и табулированных функций. Создается положение, при котором уже трудно не только знать сами функции, но трудно удержать в памяти или искать в обобщающих справочниках, какие из этих функций табулированы и притом — при каких значениях параметров.

Электронно-цифровая машина освобождает нас от этого бремени. Для определения тригонометрических и показательных функций машина каждый раз напово производит вычисления по стандартной, заранее составленной программе. Что же касается уравнений, заведомо сводящихся к другим знакомым табулированным функциям, например, бесселевым, то обычно бывает проще запрограммировать решение по заданным начальным или граничным условиям, чем подбирать подстановку и вырабатывать алгоритм для вычисления соответствующей бесселевой функции.

Еще недавно бывало так, что если ученый не заметил подходящей подстановки и не свел уравнение к табулированным функциям, то задача оставалась нерешенной. Теперь можно получить широкое обобщающее решение, даже не зная того, что совсем рядом находились изученные функции, носящие чье-то имя, кем-то кропотливо табулировавшиеся. Все это, образно говоря, остается в нижнем археологическом слое.

Соответственно меняется и отношение к искусству выбора подстановки, поскольку цели ее становятся другими. Очень важно, например, свести уравнения к виду, имеющему наименьшее число параметров, чему предшествует обязательный переход к безразмерной форме. Важна не

простота написания уравнения и не легкость его визуального восприятия, а методическая простота составляемого алгоритма. Для этого вовсе не обязательно, а в ряде случаев и не нужно исключать в системе неизвестные и сводить решение задачи к одному уравнению. Напротив, обычно более удобно бывает сохранить последовательность уравнений с несколькими неизвестными и возложить на машину операции подстановки от уравнения к уравнению.

Машинные методы и, особенно, приемы программирования для человека со сложившимися научными взглядами образуют некоторый психологический барьер, для преодоления которого требуются определенные усилия. Поэтому темпы внедрения машинных методов в сферу задач упругости и пластичности повсеместно отстают от тех возможностей, которые представляет нам современный уровень развития машинной техники. Часто приходится наблюдать неосновательную приверженность к аналитическим методам, в то время как быстрее, а главное, с большей полнотой можно получить решение при помощи машины.

Для оправдания этой приверженности наиболее распространенной является ссылка на то, что машина дает только численное решение для фиксированных значений

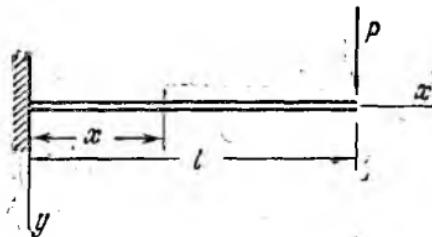


Рис. 103.

входных параметров, не вскрывая их взаимосвязи, а аналитические методы, напротив, дают решение в замкнутой форме.

Вот по этому поводу и хочется сделать некоторые замечания.

Общность или не общность, о которой здесь идет речь, характеризуется возможностью или невозможностью проводить решение вне предположения о числовых характеристиках рассматриваемой конструкции. Так, если определяется прогиб консоли (рис. 103) под действием

силы P , то, независимо от числовых значений E , l и J , получаем

$$f = \frac{Pl^3}{3EJ}.$$

Ну, а машина? Ее решение точно так же не зависит от числовых значений E , l и J , если только разумно ею пользоваться.

Приведем дифференциальное уравнение упругой линии балки

$$EJy'' = P(l - x)$$

к безразмерной форме, положив для этого

$$y = \frac{Pl^3}{EJ} \eta, \quad x = l\zeta.$$

Тогда

$$\frac{d^2\eta}{d\zeta^2} = 1 - \zeta.$$

После интегрирования получим результат

$$\eta_{\zeta=1} = \frac{1}{3},$$

обладающий той же степенью общности, что и аналитическое решение.

Конечно, такой пример слишком прост. Рассмотрим другой. Определим период собственных колебаний маятника при больших амплитудах (рис. 104).

Решение этой задачи сводится к дифференциальному уравнению

$$l \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -g \sin \varphi, \quad (1)$$

из которого определяется «в замкнутой форме» значение периода собственных колебаний

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}, \quad (2)$$

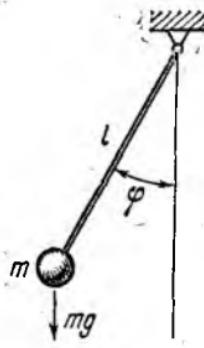


Рис. 104.

где θ — аргумент эллиптического интеграла, а k — его модуль, связанный с амплитудой колебаний. Для эллиптических интегралов существуют таблицы, составленные в зависимости от верхнего предела интеграла и модуля k .

Если обратиться к численному машинному решению, то вместо аргумента t следует ввести безразмерное время

$$\tau = \sqrt{\frac{g}{l}} t,$$

и тогда, взамен уравнения (1), получим

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} = -\sin\varphi.$$

Полагая, что в начальный момент времени скорость $d\varphi/dt$ равна нулю, а угол φ равен заданной амплитуде, проводим на машине численное интегрирование до первой переменны знака скорости. Тем самым определяется величина полупериода. Повторяя вычисления, получаем зависимость периода от амплитуды в виде таблицы. Найденная зависимость не только ни в чем не уступает выражению (2) в общности, но и превосходит его своей непосредственностью.

Таким образом, понятие общности и замкнутости являются условными. В то же время, выбор метода выходит за рамки вкусов и привычек и должен быть отнесен к сфере принципиальных вопросов. Надо помнить, что в настоящее время все труднее среди новых задач найти такие, которые могли бы быть решены без применения машин, хотя, конечно, такие находки вполне возможны. Но не в поиске отдельных «жемчужин», а в создании более или менее универсальных методов мы видим задачу современной механики. И здесь, как нам представляется, решающее слово принадлежит машинной технике.

Если машина включается в процесс исследования как составная часть логического аппарата, то естественно, что методы анализа должны меняться. Те тропы, по которым прежде ходили с выюками, для машины, конечно, оказываются не удобными. Быстрее к цели приводят общеизвестные спиральные, может быть, более длинные с виду, но более короткие по существу.

То, что прежде считалось сложным, оказывается простым. То, что представлялось совершенно незыблемым и необходимым, оказывается необязательным, а в ряде случаев, и просто лишним. Возникают другие признаки и другие оценки.

Так, например, всегда считалось, что нелинейность является характерным признаком, по которому можно

судить о сложности задачи. Сейчас можно сказать, что нелинейные задачи не столь уже страшны. Во всяком случае, та нелинейность, с которой приходится встречаться при решении практических вопросов, связанных с расчетом конструкций, не порождает непреодолимых трудностей.

Анализ динамического процесса в деформируемых системах представляется, как правило, более сложным, чем анализ форм равновесия. Применение электронно-цифровых машин стирает эту грань и в некоторых случаях оценка сложности может оказаться противоположной.

Но достаточно! Все, что можно было сказать о «комфортабельности» машины, по-видимому, сказано. А какова ее «проходимость»? Таким ли уже гладким и беспрепятственным будет путь на машине? Освобождает ли нас машина от необходимости владеть аналитическим аппаратом? И, наконец, всегда ли обращение к машине символизирует нечто передовое и прогрессивное?

Конечно же, нет! Одно дело — говорить о пользе машины и не знать, с какой стороны подойти к пульту, и совсем другое — трезво и органически связать свой научный поиск с возможностями существующих машин.

Часто, к сожалению, наиболее общие суждения о машинной технике, о ее месте в науке и вообще в жизни человеческого общества высказываются людьми весьма поверхностно знакомыми с машинной техникой, с жизнью вычислительных центров и с атмосферой творческого поиска. Именно в этих кругах в свое время были созданы предпосылки для непонимания кибернетики. Сейчас, к счастью, от тех времен сохранилась толькоrudиментарная формула: «машина — это, конечно, хорошо, но человек был и всегда остается умнее ее».

Не следует здесь говорить о том, какие функции человеческого мозга можно будет возложить на машину в дальнейшем. Важнее сейчас не возлагать на нее того, что ей пока не свойственно.

Есть много действительно серьезных, по-настоящему захватывающих проблем, над которыми работают сейчас тысячи ученых. Это — и проблема распознавания образа, и обработка информации, лингвистические проблемы и многие другие.

Наша задача скромнее. Посмотрим, какие трудности возникают перед машиной в сфере механики деформируемых систем. А таких трудностей достаточно. Машина не

все может. Возникают ситуации, когда машину приходится проводить «на руках», а порой просто отказываться от ее

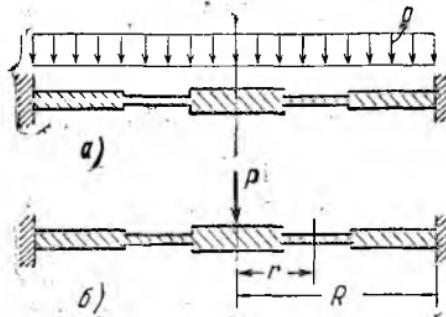


Рис. 105.

помощи. Связано это прежде всего с существованием особых точек.

Рассмотрим простейшие примеры.

На рис. 105 показана осесимметричная защемленная пластина. Для того чтобы задача выглядела посложнее, толщина пластины h предполагается кусочно-постоянной. В случае $a)$ пластина нагружена равномерно распределенной нагрузкой p , а в случае $b)$ — сосредоточенной силой P , приложенной в центре. Требуется определить форму упругой поверхности.

Дифференциальное уравнение пластины в обоих случаях нагружения имеет вид

$$\frac{d^2\vartheta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\vartheta}{dr} - \frac{\vartheta}{r^2} = -\frac{Q}{D}. \quad (3)$$

Здесь ϑ — угол поворота нормали, определяемый производной $\vartheta = dw/dr$, где w — перемещение вдоль оси; далее,

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$$

(D есть жесткость на изгиб, а Q — поперечная сила). В первом случае нагружения

$$Q = \frac{pr}{2},$$

а во втором

$$Q = \frac{P}{2\pi r}.$$

Уравнение (3) численно интегрируется на машине. Для того, чтобы не отвлекаться от существа поставленного вопроса, не будем приводить уравнения к безразмерной форме, что вообще всегда желательно, если не необходимо. Не будем также прибегать к наиболее удобному для машины методу интегрирования по Рунге — Кутта, а обратимся к простейшему интегрированию по Эйлеру. Для этого обозначим

$$\frac{d\vartheta}{dr} = z$$

и представим уравнение (3) в виде двух уравнений, написанных в конечно-разностной форме:

$$\Delta z = \left(-\frac{Q}{D} - \frac{1}{r} z + \frac{\vartheta}{r^2} \right) \Delta r, \quad (4)$$

$$\Delta \vartheta = z \Delta r. \quad (5)$$

Процедура решения этих уравнений представляется очевидной. Разбивая отрезок R на достаточно большое число участков, выбираем величину Δr . При $r=0$ угол $\vartheta=0$, а величина $z=z_0$ остается неопределенной. Зададимся этой величиной. Затем, подставляя z и ϑ , полученные на предыдущем шаге, в выражения (4) и (5), находим новые Δz и $\Delta \vartheta$. Когда величина r достигнет значения R , мы должны получить $\vartheta=0$. При произвольном значении выбранного z_0 этого, естественно, не произойдет. Придется подбирать новое z_0 до тех пор, пока условие на контуре не будет выполнено.

Казалось бы, все ясно. А как быть с особой точкой $r=0$?

На первом шаге выражение (4) принимает вид

$$\Delta z_1 = \left(-\frac{Q_0}{D} - \frac{1}{r_0} z_0 + \frac{\vartheta_0}{r_0^2} \right) \Delta r.$$

Но r_0 и ϑ_0 равны нулю. Рассмотрим отношение ϑ/r и, переходя к пределу, получим $\vartheta_0/r_0 = z_0$. Следовательно,

$$\Delta z_1 = -\frac{Q_0}{D} \Delta r. \quad (6)$$

В первом случае нагружения $Q_0=0$ и $\Delta z_1=0$. Можно интегрировать дальше. Особенность в точке устранена, и машина из затруднительного положения выведена.

Во втором случае нагружения

$$Q = \frac{P}{2\pi r}$$

и при r , стремящемся к нулю, Q обращается в бесконечность. Величина Δz_1 [формула (6)] становится неопределенной, и в начальной точке сохраняется неустранимая особенность.

Помочь машине в этом случае тоже можно, но сделать это надо на более ранней стадии, а именно при выборе расчетной схемы. Сосредоточенная сила представляет

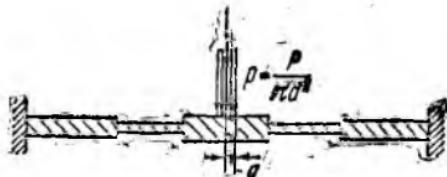


Рис. 106.

собой понятие, свойственное только расчетной схеме. Если мы пользуемся методами математического анализа, то введение сосредоточенной силы, как правило, упрощает задачу. Для машины, по крайней мере в данном случае, это оказалось плохой услугой.

Распределим равномерно силу P на маленьком участке радиуса a вблизи центра пластины. В результате получаем измененную расчетную схему (рис. 106). Теперь интегрирование уравнений на машине не встречает никаких принципиальных трудностей.

Можно сказать, что это — уже другая задача. Правильно. Но что понимать под задачей? Расчет конструкции или анализ заданной расчетной схемы? В данном случае имеется в виду расчет конструкции, о чём и ведется разговор.

При определении перемещений схема, показанная на рис. 105, б, и схема, показанная на рис. 106, совершенно равнозначны. Что касается закона распределения напряжений вблизи центра пластины, то ни та, ни другая схема не отражают свойства реальной конструкции, если только специально не установлен местный закон распределения внешних сил.

Обход трудностей, связанных с наличием особых точек, далеко не всегда выглядит так просто, как в рассмотренном

примере. И рекомендовать здесь какие-либо универсальные приемы очень трудно. Решение в таких случаях должно строиться на умелом сочетании аналитических методов и машинного счета.

Использование машины, как видим, заранее предопределяет необходимость изменений расчетной схемы, а в ряде случаев заставляет иначе интерпретировать и вопрос о надежности конструкции. И в этом нетрудно убедиться.

Всем, например, хорошо известен метод сил, используемый при раскрытии статической неопределенности. Трудности этой задачи возрастают с увеличением числа неизвестных. Применение быстродействующих машин резко расширяет возможности расчета. Сейчас не представляет труда определить усилия и моменты в узлах 200—300 раз статически неопределенной системы. Для этого выработаны приемы быстрого подсчета коэффициентов канонических уравнений и составлены удобные алгоритмы для определения неизвестных. Между тем следовало бы задуматься над тем, что здесь количество может перейти в качество.

Действительно, считается как-то само собой разумеющимся, что раскрытие статической неопределенности производится прежде всего для выявления наиболее опасных узлов, о состоянии которых можно судить по величине возникающих напряжений. Но предположим, что напряжения в каком-то элементе n раз статически неопределенной рамы достигают предела текучести. Это означает, что снижается жесткость внутренней связи. Одно дело, если n равно двум или трем. Тогда достижение предела текучести в одном из элементов можно рассматривать как ощутимый фактор в общей оценке надежности конструкции. Другое дело, если пластические деформации возникли в одном из элементов 200 или 300 раз статически неопределенной системы. Ту часть нагрузки, которую не сможет взять на себя этот элемент, воспримут многие соседние. И не исключено, что можно терпимо отнестись к такому событию, как образование пластических деформаций в объеме одного из элементов или, тем более, в отдельных его точках.

Эту же мысль можно высказать и другими словами. Напряжения в каждом отдельно взятом элементе при многократной статической неопределенности должны рассмат-

риваться уже не как общие, а как местные по отношению к конструкции в целом. Отсюда вытекает и соответствующее к ним отношение. Найденные таким способом напряжения, конечно, могут быть как-то использованы. Но в ряде случаев представляется более правомерным рассматривать систему, если это возможно, скорее как континуум (как сплошную среду) с введением условных осредненных напряжений.

Как бы там ни было, но из сказанного ясно, что резкое расширение вычислительных возможностей и подходы к оценке надежности конструкции связаны между собой.

Всегда было известно, что для численного решения краевая задача представляет большие трудности, чем задача Коши. Но с широким внедрением электронно-цифровых машин граница между особенностями решений этих

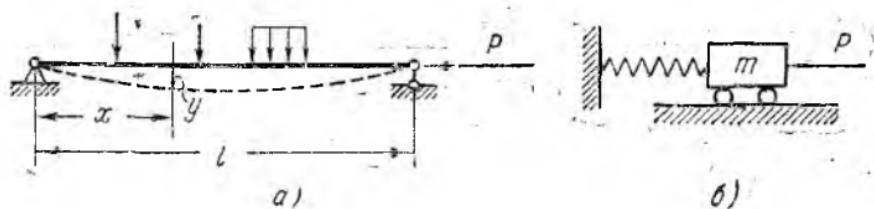


Рис. 107.

задач обозначилась особенно резко. Покажем это на примере двух простейших задач.

Первая задача. Определить форму упругой линии однородного стержня при продольно-поперечном изгибе (рис. 107, а).

Вторая задача. Определить закон движения присоединенной к пружине массы m под действием некоторой внешней силы P (рис. 107, б).

Решение обеих задач сводится к одному и тому же уравнению

$$y'' + k^2 y = f(x), \quad (7)$$

но с различным смысловым содержанием входящих в него величин.

Для первой задачи y — перемещение балки в произвольном сечении, $f(x)$ — функция, отражающая закон

изменения изгибающего момента от поперечной нагрузки, а

$$k^2 = \frac{P}{EJ},$$

где EJ — жесткость на изгиб.

Для второй задачи y — перемещение массы в момент времени x ; $f(x)$ — функция времени, характеризующая закон изменения внешней силы P и, наконец,

$$k^2 = \frac{C}{m},$$

где C — жесткость пружины.

Как и в рассмотренном ранее примере с круглой пластиной, введем новое неизвестное

$$z = y'$$

и заменим уравнение (7) двумя конечно-разностными уравнениями

$$\begin{aligned} \Delta z &= [f(x) - k^2 y] \Delta x, \\ \Delta y &= z \Delta x. \end{aligned} \quad (8)$$

При численном интегрировании этой системы сразу обнаруживается существенное различие между обеими задачами.

Первая задача — краевая. Функция y должна удовлетворять условиям

$$y_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad y_{x=l} = 0.$$

Вторая задача является задачей Коши. Здесь задаются начальные условия. Например, в начальный момент времени, т. е. при $x=0$ $y=0$ и $y'=z=0$.

Проводя процедуру интегрирования системы (8), полагаем и для той и для другой задачи

$$y_{x=0} = 0.$$

Что же касается величины z_0 , то в первом случае она должна быть подобрана так, чтобы при $x=l$ перемещение y обратилось в нуль. Достигается это путем нескольких проб.

Во второй задаче величина z при $x=0$ задана, и функция $y(x)$ определяется уже после первого интегрирования.

Таким образом, для машины краевая задача оказывается сложнее, чем задача Коши. Конечно, в данном конкрет-

ном случае эту сложность не следует принимать всерьез. Рассмотренные примеры являются всего-навсего моделью, иллюстрирующей различие между двумя типами задач. Но факт остается фактом. Краевые задачи, характерные для механики деформируемых систем, действительно создают трудности для машины. И чем выше порядок уравнения, тем сложнее решить краевую задачу. Например, для уравнения четвертого порядка нам пришлось бы производить подбор уже не одного, а двух начальных параметров для того, чтобы добиться соблюдения двух граничных условий на конце участка интегрирования.

Конечно, в большинстве случаев эти трудности преодолимы. Можно построить программу, содержащую блок

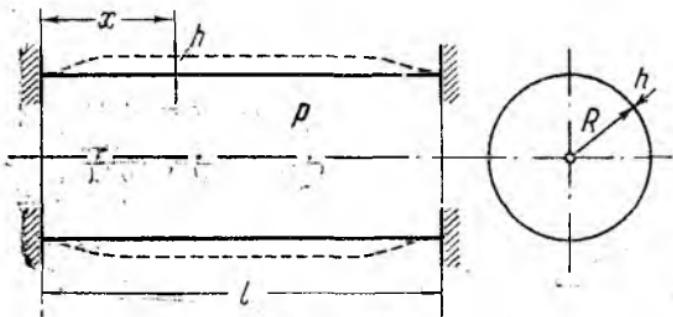


Рис. 108.

линейной интерполяции по двум, трем и даже четырем параметрам, и получить искомое решение. Однако, не всегда.

Рассмотрим в качестве примера цилиндрическую оболочку, защемленную по торцам и нагруженную внутренним давлением p (рис. 108). Дифференциальное уравнение упругой линии образующей имеет вид

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4k^4 w = \frac{p}{D}, \quad (9)$$

где w — радиальное перемещение,

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}, \quad 4k^4 = \frac{12(1-\mu^2)}{R^2 h^2}.$$

Попробуем решить это хорошо известное уравнение численным методом и обратимся к описанной выше элементарной процедуре. Для этого введем обозначения:

$$\frac{dw}{dx} = w_1, \quad \frac{d^2w}{dx^2} = w_2, \quad \frac{d^3w}{dx^3} = w_3.$$

Тогда получим четыре конечно-разностных уравнения:

$$\Delta w_3 = \left(\frac{p}{D} - 4k^4 w \right) \Delta x,$$

$$-\Delta w_2 = w_3 \Delta x,$$

$$\Delta w_1 = w_2 \Delta x,$$

$$\Delta w = w_1 \Delta x.$$

При $x=0$ величина w и w_1 равны нулю. Что же касается w_2 и w_3 , то они должны быть определены подбором с таким расчетом, чтобы при $x=l$ величины w и w_1 , т. е. перемещение и угол поворота обратились в нуль.

Казалось бы, все ясно. Но беда заключается именно в этом подборе двух начальных параметров. Оказывается, для достаточно длинной оболочки они должны быть вычислены со столь высокой степенью точности, что ни одна из существующих машин с этой задачей справиться не может. Объясняется это следующим обстоятельством.

Аналитическое решение уравнения (9) имеет вид

$$w = e^{-kx} (C_1 \sin kx + C_2 \cos kx) + \\ + e^{+kx} (C_3 \sin kx + C_4 \cos kx) + \frac{p}{4k^4 D}.$$

В этом решении содержится две характерные функции: одна быстро затухающая и другая — столь же быстро возрастающая. Для того чтобы при $x=l$ функция w обратилась в нуль, необходимо очевидно, чтобы константы C_3 и C_4 имели величину порядка

$$\frac{p}{4k^4 D} e^{-kl},$$

которая при большом l столь мала, что лежит за пределами возможной точности вычислений. При аналитическом же решении мы просто полагаем, что $C_3=C_4=0$, и получаем решение для области, расположенной вблизи левого торца. Аналогичным образом получается решение и для окрестности второго края оболочки.

Машине способностью к такому разделению возрастающей и убывающей функций не обладает, и поэтому описанная вычислительная процедура практически не может быть реализована. Следовательно, численное решение уравнения (9) следует строить по иному принципу.

В настоящее время для линейных уравнений такие приемы детально разработаны. Это — метод прогонки, метод деления участка интегрирования на укороченные интервалы и различные их модификации. Подробное изложение этих приемов имеется в многочисленных руководствах по численным методам.

Примеры трудностей, возникающих при решении краевых задач, можно было бы продолжить. С ними приходится встречаться довольно часто. Поэтому, готовясь к выходу на машину, очень важно во-время разглядеть возможные препятствия и обойти их либо на стадии выбора расчетной схемы, либо при построении алгоритма (процедуры вычисления) или, наконец, на стадии программирования.

Таким образом, мы видим, что машина, освобождая нас от многих ранее упомянутых обязанностей, не освобождает во всяком случае от двух: от необходимости владеть математическим аппаратом и творчески мыслить.

Мы рассмотрели довольно простые примеры, когда решение задач сводится к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Ну, а если нужно решить уравнение в частных производных?

Для линейных уравнений в частных производных одним из очевидных приемов является применение метода сеток. Тогда уравнение в частных производных заменяется системой линейных алгебраических уравнений с числом неизвестных, зависящим от числа взятых точек. Основным препятствием здесь является недостаточный объем памяти существующих машин. Для нелинейных уравнений в частных производных применение метода сеток приводит, как правило, к непреодолимым трудностям.

Поэтому в тех случаях, когда имеют в виду в дальнейшем использовать электронно-цифровую машину, предварительно стремятся свести уравнение в частных производных к одному или нескольким обыкновенным дифференциальным уравнениям. Так, например, если уравнение составлено относительно неизвестной функции w от двух независимых переменных x и y , то можно попытаться представить w в виде

$$w(x,y) = f_1(x)\varphi_1(y) + f_2(x)\varphi_2(y) + \dots + f_n(x)\varphi_n(y) \quad (10)$$

Система функций $f_k(x)$ подбирается заранее с таким расчетом, чтобы, с одной стороны, наиболее полно были отражены особенности ожидаемого решения, а с другой,—

удовлетворены условия на границах интервала изменения x . После подстановки w в дифференциальное уравнение последнее тем или иным способом разделяется на n обыкновенных уравнений относительно функций $\varphi_k(y)$. Для их определения используется машина. Далее, найденные функции подставляются в выражение (10) для w и теперь в качестве неизвестных рассматриваются функции $f_k(x)$. Процедура повторяется несколько раз, пока в решении не будет достигнута определенная степень правдоподобия.

Такой подход в некоторых случаях может оказаться очень полезным, но имеет ограниченную область применения и представляет технические трудности опять в связи с необходимостью хранить в памяти машины для построения следующего приближения довольно большой объем информации.

Более совершенным, а главное, универсальным, является способ перехода от краевой задачи к задаче Коши. На этом методе стоит специально остановиться в связи с тем, что он перекликается с общей концепцией расчета на прочность, изложенной в главе III. Сущность этого метода сводится к следующему.

Перемещения u , v , w в деформируемой области аппроксимируются системой функций, содержащих некоторое число неопределенных параметров, причем безразлично, будут ли эти перемещения функциями одного, двух или трех переменных, важно лишь, чтобы при аппроксимации наиболее полно были отражены особенности ожидаемого решения и удовлетворены условия на границах области. Из соображений полноты решения выбирается и число неопределенных параметров. Возможностями машины это число, как правило, не лимитируется. Обычно для практически необходимой точности достаточно бывает 5–10 параметров (5–10 степеней свободы).

В результате, например, получаем

$$\left. \begin{array}{l} u = A_1 f_1(x, y, z) + A_2 f_2(x, y, z) + A_3 f_3(x, y, z), \\ v = A_4 f_4(x, y, z) + A_5 f_5(x, y, z) + A_6 f_6(x, y, z), \\ w = A_7 f_7(x, y, z) + A_8 f_8(x, y, z) + A_9 f_9(x, y, z), \end{array} \right\} \quad (11)$$

где A_k — неопределенные параметры, а f_k — аппроксирующие функции. Далее, по перемещениям определяются компоненты деформаций в любой точке области:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x(A_1, A_2, \dots, x, y, z), \quad \varepsilon_y = \varepsilon_y(A_1, A_2, \dots, x, y, z), \dots \quad (12)$$

Связь между деформациями и напряжениями задается соотношениями упругости или пластичности. Поэтому можно найти напряжения:

$$\sigma_x = \sigma_x(A_1, A_2, \dots, x, y, z), \quad \sigma_y = \sigma_y(A_1, A_2, \dots, x, y, z), \dots \quad (13)$$

Остается использовать условия равновесия. И вот здесь делается неожиданный, но решающий для дальнейшего шага. Составляются не уравнения равновесия, а уравнения движения, следовательно, вводится время t . Тогда получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0, \end{aligned}$$

где ρ — плотность материала.

Используя процедуру Галеркина, умножаем первое уравнение последовательно на f_1, f_2 и f_3 , второе — на f_4, f_5 и f_6 , а третье — на f_7, f_8 и f_9 , и интегрируем эти произведения по x, y и z в пределах объема деформируемой области. В результате получаем систему девяти уравнений:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}\ddot{A}_1 + a_{12}\ddot{A}_2 + \dots + a_{19}\ddot{A}_9 &= L_1(A_1, A_2, \dots), \\ a_{21}\ddot{A}_1 + a_{22}\ddot{A}_2 + \dots + a_{29}\ddot{A}_9 &= L_2(A_1, A_2, \dots), \\ \vdots &\quad \vdots \\ a_{91}\ddot{A}_1 + a_{92}\ddot{A}_2 + \dots + a_{99}\ddot{A}_9 &= L_9(A_1, A_2, \dots), \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

где a_{km} — некоторые коэффициенты, а $L_k(A_1, A_2, \dots)$ — величины, зависящие от параметров A_1, A_2, \dots и от заданных нагрузок.

Система (14) интегрируется по шагам на электронно-цифровой машине. Величины L_k определяются при этом по значениям A_k предыдущего шага также при помощи матрицы последовательным переходом от выражений (11) к (12), (13), (14). Еще удобнее обратиться к стандартной программе интегрирования по Рунге — Кутта, а вычисление величин L_k расположить в блоке определения правых частей.

В результате интегрирования получаем зависимость напряжений и перемещений от времени. Что касается сил,

то их зависимость от времени считается заданной. В частности, в случае статического нагружения можно принять, что силы меняются пропорционально времени. Коэффициент пропорциональности при этом должен быть взят достаточно малым.

Что же дает описанный подход и в чем его преимущества?

С позиций постановки расчета конструкции характерно то, что здесь определяется «биография» системы, начиная с исходного ненагруженного состояния и до исчерпания ее работоспособности. При помощи машины создается как бы кинофильм о «жизни» конструкции взамен обычной фотографии, фиксирующей определенное состояние равновесия. В результате конструктор получает возможность гибко оценивать работоспособность конструкции и назначать рабочий режим по тем параметрам, которые оказываются решающими по существу. Иначе говоря, реализуется расчет на прочность по зависимости «внутренний — внешний параметры», т. е. именно то, о чем говорилось в главе III.

Очень существенным является то, что в описанном подходе удается полностью избежать трудностей, связанных с нелинейностью. И дело заключается как раз в том, что нагружение системы рассматривается как процесс, протекающий во времени.

В самом деле, если мы не будем вводить время t и перейдем к обычному анализу форм равновесия, то тогда уравнения (14) примут вид

$$L_1(A_1, A_2, \dots) = 0, \quad L_2(A_1, A_2, \dots) = 0, \dots \quad (15)$$

Мы получаем, таким образом, систему уравнений, которая должна быть решена относительно варьируемых параметров A_k , что при нелинейных соотношениях и, тем более, при большом числе неизвестных практически неосуществимо. В предложенном же методе мы не ищем корни системы (15), а просто в правые части системы (14) подставляем на каждом шаге значения предыдущего шага, что всегда легко выполняется. Мало того, решение задачи по шагам освобождает нас от необходимости анализировать многозначность форм равновесия. Она исключается однозначностью истории нагружения.

Таким образом, при использовании подхода, который мы называем шаговым, практически не чувствуется разли-

чия между линейными и пелинейными системами, большими и малыми перемещениями, между статикой и динамикой. Открывается естественная возможность решения задач ползучести как процесса, протекающего во времени. Шаговая концепция является специфически машинной. В ней в настоящее время наиболее полно используются положительные стороны машины и относительно безболезненно обходятся «краевые препятствия».

Технические трудности решения задач шаговым методом относительно невелики. Они сводятся в основном к программированию. Однако имеются и некоторые специфические особенности.

Во-первых, отсутствие первых производных \dot{A}_k в системе (14) приводит в некоторых случаях к возникновению колебательных возмущений, налагающихся на закон изменения параметров A_k . Поэтому иногда бывает целесообразно искусственно ввести в уравнения движения линейное затухание, коэффициенты которого выбираются не настолько большими, чтобы исказить процесс, но достаточными, чтобы погасить возмущения, связанные с начальным этапом нагружения.

Во-вторых, при шаговом методе система с распределенными массами, как мы видели, сводится к некоторой новой системе, обладающей конечным числом степеней свободы, равным числу варьируемых параметров. Естественно, что при интегрировании по времени шаг должен быть взят существенно меньшим периода собственных колебаний, соответствующего высшей парциальной частоте. С увеличением числа варьируемых параметров эта частота возрастает.

Следовательно, увеличение числа параметров увеличивает не только время счета в пределах одного шага, но также и число шагов на участке интегрирования. Необходимое машинное время при этом может оказаться чрезмерно большим, а решение — практически неосуществимым. Так, в частности, бывает в задачах, связанных с деформацией оболочки, если в уравнениях наряду с нормальными перемещениями w сохранить в явной форме перемещения u и v , парциальные частоты для которых существенно выше, чем для w .

В подобных случаях можно, конечно, выйти из затруднительного положения, перестроив тем или иным способом систему уравнений. Но если задача не является динами-

ческой по существу, то проще вместо времени t взять некоторый новый «календарный» параметр, характеризующий процесс деформирования, например, нагрузку или характерное перемещение. Это будет дальнейшим развитием и обобщением шагового метода.

Вместо процедуры Галеркина при составлении уравнений удобно бывает воспользоваться потенциальной функцией. В частности, это возможно, если в пластически деформируемом теле не возникает зон разгрузки или если они имеют несущественное влияние.

Напишем выражение полной потенциальной энергии для некоторой системы:

$$U = \int_V \left(\int_0^{e_i} \sigma_i d\epsilon_i \right) dV - P\lambda, \quad (16)$$

где σ_i и ϵ_i — интенсивность напряженного и деформированного состояний, V — объем деформируемой области, P — обобщенная сила, а λ — соответствующее обобщенное перемещение. В дополнение к этому имеем соотношения, связывающие деформации с перемещениями u , v и w , а также соотношения упругости или пластичности. По-прежнему представляем перемещения u , v и w в форме (11). Из условий минимума потенциальной энергии найдем

$$F_k = \frac{\partial U}{\partial A_k} = \int_V \sigma_i \frac{\partial \epsilon_i}{\partial A_k} dV - P \frac{\partial \lambda}{\partial A_k} = 0. \quad (17)$$

Таким образом получаем систему нелинейных уравнений относительно неизвестных A_1, A_2, \dots :

$$\begin{cases} F_1(A_1, A_2, \dots) = 0, \\ F_2(A_1, A_2, \dots) = 0. \end{cases} \quad (18)$$

Эта система для сложных нелинейных систем практически неразрешима.

Переходим к шаговому методу. Параметры A_k считаем зависящими от обобщенного «времени». Пусть это будет сила P . Уравнения (18) должны выполняться в любой момент «времени». Поэтому

$$\frac{dF_k}{dP} = 0.$$

Тогда получаем

$$\frac{\partial F_1}{\partial A_1} \frac{dA_1}{dP} + \frac{\partial F_1}{\partial A_2} \frac{dA_2}{dP} + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial A_9} \frac{dA_9}{dP} + \frac{\partial F_1}{\partial P} = 0,$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial A_1} \frac{dA_1}{dP} + \frac{\partial F_2}{\partial A_2} \frac{dA_2}{dP} + \dots + \frac{\partial F_2}{\partial A_9} \frac{dA_9}{dP} + \frac{\partial F_2}{\partial P} = 0,$$

Но так как согласно (17)

$$\frac{\partial F_k}{\partial P} = - \frac{\partial \lambda}{\partial A_k},$$

то в итоге получаем систему конечно-разностных уравнений:

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}\Delta A_1 + a_{12}\Delta A_2 + \dots + a_{1g}\Delta A_g = a_{1p}\Delta P, \\ a_{21}\Delta A_1 + a_{22}\Delta A_2 + \dots + a_{2g}\Delta A_g = a_{2p}\Delta P, \\ \vdots \quad \vdots \\ a_{g1}\Delta A_1 + a_{g2}\Delta A_2 + \dots + a_{gg}\Delta A_g = a_{gp}\Delta P, \end{array} \right\} \quad (19)$$

где

$$\alpha_{mk} = \frac{\partial F_m}{\partial A_b}, \quad \alpha_{kp} = \frac{\partial \lambda}{\partial A_b}.$$

Система (19) решается по шагам. Коэффициенты a_{mk} и a_{kp} вычисляются по значениям A_k предыдущего шага. В программах, реализующих подобное решение, наиболее громоздким является вычисление коэффициентов системы (19). При нелинейной зависимости σ_i от e_i , т. е. если задача решается в области пластических деформаций, величину $\partial e_i / \partial A_k$ в выражениях вида (17) лучше определять численно, давая A_k малые приращения. То же самое следует делать и при определении коэффициентов a_{mk} системы (19). Это достигается составлением программы по принципу «цикл в цикле». При линейной зависимости подынтегральная функция в выражениях (17) может быть выражена, как правило, аналитически. Тогда логическая часть программы упрощается.

На основе описанного подхода могут решаться многие задачи, совершенно не поддающиеся анализу другими методами. Примеры таких задач приведены в главе III.

Понятно, что шаговый метод не является единственным методом применения машин к расчету конструкций. Могут

быть предложены и многие другие. Шаговый метод наиболее эффективен в области задач с явно выраженной нелинейностью. Вместе с тем его трудно применить к расчету элементов сложной геометрической формы, где не удается подобрать аппроксимирующие функции простого вида.

Заканчивая эту главу, хочется указать, что в настоящее время электронно-цифровые машины стали таким же обыденным средством познания, как автомашины — средством передвижения. И подобно тому как рождение автомашины перестало быть привилегией людей определенной профессии, так и работу с электронно-цифровой машиной не следует рассматривать как сферу деятельности одних только программистов и операторов. Машина вошла в жизнь научных центров как повседневное средство поиска, а преодоление перечисленных выше и многих других трудностей машинного анализа представляет собой благодарную область приложения ума, выдумки, энергии и изобретательности для молодого ученого.

Оглавление

Предисловие	8
I. Сопротивление материалов, теория упругости и прочее	5
II. От реальной конструкции к расчетной схеме	12
III. От расчетной схемы к реальной конструкции	32
IV. Основные правила и принципы в сопротивлении материалов	52
V. О температурных напряжениях	66
VI. О предельных состояниях	82
VII. Об усталостной прочности	96
VIII. Об устойчивости	106
IX. Еще об устойчивости	125
X. Расчет конструкций и электронно-цифровые машины	150