Тема 10. Тригонометрические неравенства.

Тригонометрические неравенства.

Неравенства вида $\sin x \vee a$ или $\cos x \vee a$

Напомним алгоритм решения простейших тригонометрических неравенств вида $\sin x \vee a$ или $\sin x \vee a$, $|a| \leq 1$, где символ $\vee$ заменяет один из знаков неравенств: $>$, $<$, $\geq$, $\leq$.

1. Отмечаем на линии синусов (косинусов) число *a* и все значения синуса (косинуса), которые больше (меньше) числа *a*.

2. Выделяем на числовой окружности дугу, на которой находятся точки, удовлетворяющие данному условию.

3. Если выделенная дуга прошла через 0, то для записи граничных точек выбирают разное направление (одно число положительное, другое – отрицательное). Если выделенная дуга не прошла через 0, то для записи граничных точек выбирают одно направление.

4. Записываем общее решение неравенства, добавляя к концам найденного промежутка число кратное периоду синуса или косинуса.

Пример 1. Решить неравенство: $\sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. 1. Отмечаем на линии синусов (рисунок 10.1) число $\frac{\sqrt{2}}{2}$ и все значения синуса, которые меньше этого числа.

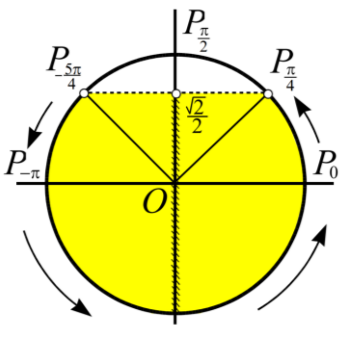

Рисунок 10.1

2. Выделяем на числовой окружности дугу, на которой находятся точки, ординаты которых меньше $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. Выделенная дуга проходит через нуль, поэтому при положительном обходе от нуля получаем первую граничную точку $P_{\frac{\pi}{4}}$, которая соответствует положительному числу $\frac{\pi}{4}$. Делаем обход по дуге от нуля

в отрицательном направлении до второй граничной точки $P_{\frac{5\pi}{4}}$, соответствующей отрицательному числу $-\frac{5\pi}{4}$. Числа из промежутка $\left(-\frac{5\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$ являются решения данного неравенства (рисунок 10.1). Все решения данного неравенства будут иметь вид $\left(-\frac{5\pi}{4} + 2\pi n; \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 2. Решить неравенство: $\cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение. 1. Отмечаем на линии косинусов (рисунок 10.2) число $\frac{\sqrt{3}}{2}$ и все значения косинуса, меньшие этого числа.

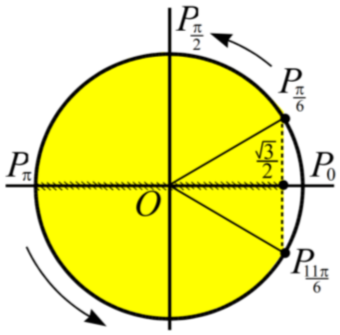

Рисунок 10.2

2. Выделяем на числовой окружности дугу, на которой находятся точки, абсциссы которых не больше $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Выделенная дуга не проходит через нуль, поэтому первая точка $P_{\frac{\pi}{6}}$, соответствует положительному числу $\frac{\pi}{6}$. Делаем обход по дуге от точки $P_{\frac{\pi}{6}}$ в положительном направлении до второй точки $P_{\frac{11\pi}{6}}$, соответствующей числу $\frac{11\pi}{6}$. Числа из промежутка $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right]$, являются решения данного неравенства (рисунок 10.2). Все решения данного неравенства будут иметь вид: $\left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{11\pi}{6} + 2\pi n\right], n \in \boldsymbol{Z}$.

Неравенства вида $\operatorname{tg} x \vee a$ или $\operatorname{ctg} x \vee a$

Для решения неравенств с тангенсом и котангенсом удобно использовать линии тангенсов и котангенсов, касающиеся тригонометрической окружности в точках (1; 0) и (0; 1) соответственно.

Напомним алгоритм решения простейших тригонометрических неравенств вида $\operatorname{tg} x \vee a$ или $\operatorname{ctg} x \vee a$, где символ $\vee$ заменяет один из знаков неравенств: $>$, $<$, $\geq$, $\leq$.

1. Отмечаем на линии тангенсов (котангенсов) число *a* и все значения тангенса (котангенса), которые больше (меньше) числа *a*.

2. Выделяем на числовой окружности дугу, на которой находятся точки, удовлетворяющие данному условию.

3. Записываем ответ для соответствующего неравенства:

а) для неравенства $\operatorname{tg} x < a$ решение имеет вид

$$-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \operatorname{arctg} a + \pi n, \qquad n \in \boldsymbol{Z};$$

б) для неравенства $\operatorname{tg} x > a$ решение имеет вид

$$\operatorname{arctg} a + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n, \qquad n \in \boldsymbol{Z};$$

в) для неравенства $\operatorname{ctg} x < a$ решение имеет вид

$$\operatorname{arcctg} a + \pi n < x < \pi + \pi n, \qquad n \in \boldsymbol{Z};$$

г) для неравенства $\operatorname{ctg} x > a$ решение имеет вид

$$\pi n < x < \operatorname{arcctg} a + \pi n, \qquad n \in \boldsymbol{Z}.$$

Пример 3. Решить неравенство:

$$\operatorname{tg} x > \sqrt{3}.$$

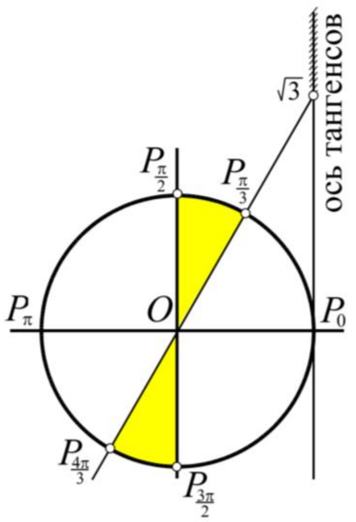

Рисунок 10.3

Решение. 1. Отмечаем на линии тангенсов (рисунок 10.3) число $\sqrt{3}$ и все значения тангенса, которые больше этого числа.

2. Выделяем на числовой окружности дугу, на которой находятся точки, удовлетворяющие данному условию.

3. Выделенная дуга имеет граничную точку $P_{\frac{\pi}{3}}$, соответствующую числу $\frac{\pi}{3}$. Делаем обход по дуге от точки $P_{\frac{\pi}{3}}$ в положительном направлении до второй точки $P_{\frac{\pi}{2}}$, соответствующей числу $\frac{\pi}{2}$.

Числа из промежутка $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$, являются решения данного неравенства. Все решения данного неравенства будут иметь вид: $\left(\frac{\pi}{3} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. На окружности (рисунок 10.3) выделены два интервала.

Пример 4. Решить неравенство:

$$\operatorname{ctg} x \leq -1.$$

Решение.

1. Отмечаем на линии котангенсов (рисунок 10.4) число -1 и все значения котангенса, меньшие этого числа.

2. Выделяем на числовой окружности дугу, на которой находятся точки, удовлетворяющие данному условию.

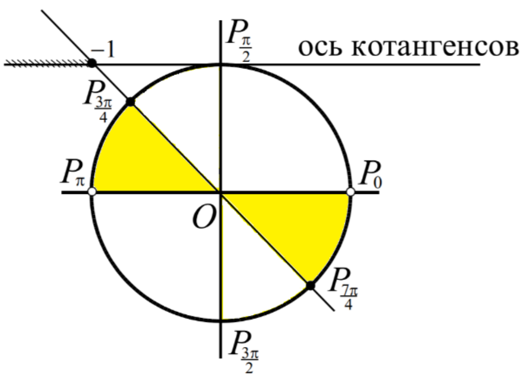

Рисунок 10.4

3. Выделенная дуга имеет граничную точку $P_{\frac{3\pi}{4}}$, соответствующую числу $\frac{3\pi}{4}$. Делаем обход по дуге от точки $P_{\frac{3\pi}{4}}$ в положительном направлении до второй точки P_{π}, соответствующей числу π.

Числа из промежутка $\left[\frac{3\pi}{4}; \pi\right)$ являются решения данного неравенства. Остальные решения получают добавлением слагаемого πn, $n \in \boldsymbol{Z}$ к концам полученного промежутка.

На окружности (рисунок 10.4) выделены два промежутка.

Все решения данного неравенства будут иметь вид: $\left[\frac{3\pi}{4} + \pi n; \pi + \pi n\right)$.