Тема 11. Треугольник, четырехугольник, n-угольники. Окружность и круг.

Треугольник. Четырехугольник. Площади фигур.

Представим *основные теоремы*, используемые при решении задач по данной теме.

«**Теорема 1** (*о замечательных точках и линиях треугольника*):

– три медианы треугольника пересекаются в одной точке (эта точка называется *центроидом треугольника*) и делятся этой точкой в отношении 2:1, считая от вершины; три высоты треугольника пересекаются в одной точке (эта точка называется *ортоцентром треугольника*); три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке (эта точка является *центром окружности, вписанной в данный треугольник*); три серединных перпендикуляра к сторонам треугольника пересекаются в одной точке (эта точка является *центром окружности, описанной около данного треугольника*);

– ортоцентр H треугольника, его центроид M и центр O описанной окружности лежат на одной прямой (она называется *прямой Эйлера*), причем OM : MH = 1: 2 (рисунок 11.1);

– основания высот треугольника, середины его сторон и середины отрезков, соединяющих ортоцентр треугольника с его вершинами, лежат на одной окружности (она называется *окружностью Эйлера* или *окружностью девяти точек*) (рисунок 11.2): центр этой окружности совпадает с серединой отрезка, соединяющего ортоцентр и центр описанной окружности; радиус ее равен половине радиуса описанной окружности» [18].

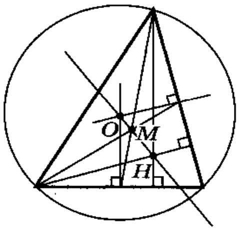


Рисунок 11.1

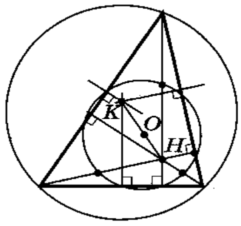


Рисунок 11.2

«**Теорема 2** (*теорема Менелая*). Пусть A_1, B_1, C_1 - три точки, лежащие на сторонах соответственно BC, CA, AB треугольника ABC, или на их продолжениях (рисунок 11.3). Точки A_1, B_1, C_1 тогда и только тогда лежат на одной прямой, если: $\left|\frac{AC_1}{C_1B}\right| \cdot \left|\frac{BA_1}{A_1C}\right| \cdot \left|\frac{CB_1}{B_1A}\right| = 1$.

Теорема 3 (*теорема Чевы*). Пусть A_1, B_1, C_1 - три точки, лежащие на сторонах соответственно BC, CA, AB треугольника ABC, или на их продолжениях (рисунок 11.4, а, б). Для того, чтобы прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекались в одной точке, необходимо и достаточно чтобы: $\left|\frac{AC_1}{C_1B}\right| \cdot \left|\frac{BA_1}{A_1C}\right| \cdot \left|\frac{CB_1}{B_1A}\right| = 1$» [24].

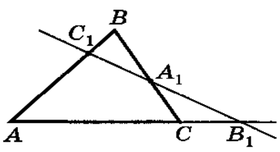
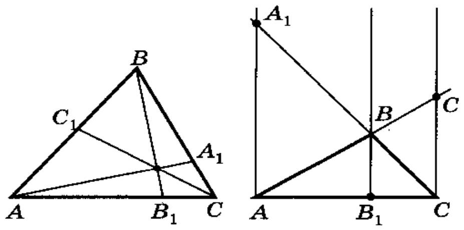


Рисунок 11.3



а) б)

Рисунок 11.4

«**Теорема 4.** Биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные сторонам этого треугольника, заключающих данный угол: BD:DC = AB:BC (рисунок 11.5).

Теорема 5. Средние линии треугольника делят его на четыре равных треугольника (рисунок 11.6).

Теорема 6. Середины сторон выпуклого четырехугольника являются вершинами параллелограмма (рисунок 11.7).

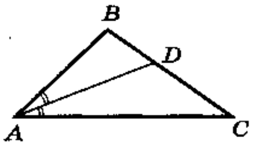


Рисунок 11.5

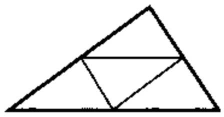


Рисунок 11.6

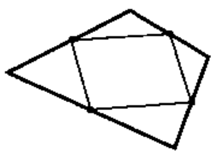


Рисунок 11.7

Теорема 7 (*признак прямоугольного треугольника*). Если в треугольнике одна из медиан равна половине стороны, к которой она проведена, то этот треугольник прямоугольный» [18].

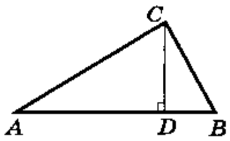


Рисунок 11.8

«**Теорема 8**. В прямоугольном треугольнике (рисунок 11.8): а) высота, проведенная из вершины прямого угла на гипотенузу, является средней пропорциональной величиной между проекциями катетов на гипотенузу: $CD^2 = AD \cdot BD$; б) каждый катет является средней пропорциональной величиной между гипотенузой и проекцией этого катета на гипотенузу: $AC^2 = AB \cdot AD$; $BC^2 = AB \cdot BD$.

Теорема 9. Если R и r - радиусы соответственно описанной и вписанной окружностей прямоугольного треугольника, катеты которого равны *a* и *b*, а гипотенуза - *c*, то $r = \frac{a+b-c}{2}$, $R + r = \frac{a+b}{2}$ » [24].

«**Теорема 10.** Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

Теорема 11. (*теорема синусов*). Во всяком треугольнике ABC со сторонами BC = *a*, CA = *b*, AB = *c* выполняется соотношение: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$, где R - радиус описанной окружности.

Теорема 12. (*теорема косинусов*). Во всяком треугольнике ABC со сторонами BC = *a*, CA = *b*, AB = *c* выполняется соотношение:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$» [18].

«**Теорема 13** (*о площади треугольника*):

- площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту (рисунок 11.9): $S = \frac{1}{2} a \cdot h$;

- площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними (рисунок 11.10): $S = \frac{1}{2} ab \sin C$;

- площадь треугольника равна половине произведения периметра треугольника на радиус вписанной в него окружности (рисунок 11.11): S = $\frac{1}{2}(a+b+c)\cdot r$;

- площадь треугольника со сторонами a, b и c вычисляется по формуле (формуле Герона): S = $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p=\frac{a+b+c}{2}$;

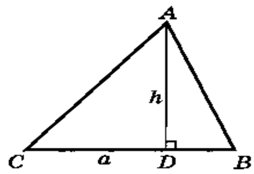


Рисунок 11.9

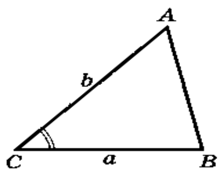


Рисунок 11.10

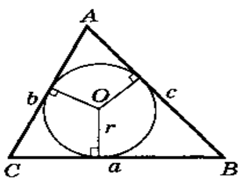


Рисунок 11.11

- площадь треугольника со сторонами a, b и c вычисляется по формуле: S = $\frac{abc}{4R}$, где R - радиус описанной окружности;

- отношение площадей двух подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия этих треугольников;

- отношение площадей двух треугольников, имеющих общее основание (рисунок 11.12), равно отношению высот этих треугольников: $S_{\Delta ABC}:S_{\Delta ABD}$ = CE:DK;

- отношение площадей двух треугольников, имеющих равные высоты (рисунок 11.13), равно отношению оснований этих треугольников: $S_{\Delta AEC}:S_{\Delta BEC}$ = AE:BE;

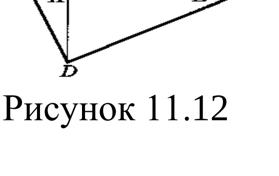


Рисунок 11.12

Рисунок 11.13

- отношение площадей двух треугольников, имеющих равный угол, равно отношению произведений длин сторон этих треугольников, заключающих этот угол: $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta MPK}} = \frac{AB \cdot AC}{MP \cdot MK}$, ($\angle BAC = \angle PMK$)» [24].

«**Теорема 14** (*о площади четырехугольника*):

- площадь *выпуклого четырехугольника* равна половине произведения длин его диагоналей на синус угла между ними (рисунок 11.14): S = $\frac{1}{2} mn \sin\varphi$;

- площадь *выпуклого четырехугольника* равна половине произведения его периметра на радиус вписанного круга (рисунок 11.15): S = $\frac{1}{2}(a+b+c+d) \cdot r$;

- площадь *трапеции* равна произведению полусуммы ее оснований на высоту (произведению средней линии на высоту);

- площадь *параллелограмма* равна произведению длин двух его сторон на синус угла между ними (рисунок 11.16);

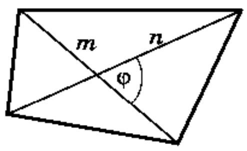


Рисунок 11.14

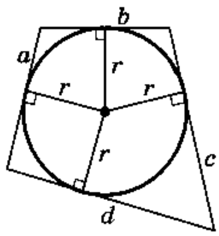


Рисунок 11.15

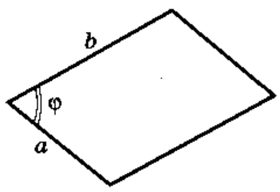


Рисунок 11.16

- площадь *ромба* равна половине произведения его диагоналей» [18].

Приведем примеры решения задач.

Задача 1. «Две медианы треугольника, равные 9 и 12, взаимно перпендикулярны. Найдите длину третьей медианы этого треугольника.

Решение. Построение данного треугольника начинаем с проведения двух взаимно перпендикулярных прямых. Пусть О - точка их пересечения (рисунок 11.17). На одной из этих прямых выбираем точку А и строим точку Р (по разные стороны от точки О) так, чтобы выполнялось АО:ОР = 2:1. Аналогично, на другой прямой выбираем точку В и строим точку Н так, чтобы ВО:ОН = 2:1. Точки А и В принимаем за вершины заданного треугольника и получаем третью вершину $C = AH \cap BP$.

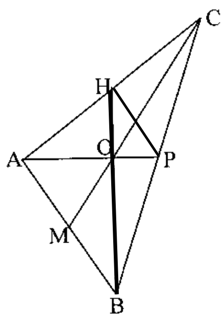


Рисунок 11.17

Докажем, что ВН и АР - медианы треугольника АВС. Из соотношений АО:ОР = ВО:ОН = 2:1 следует подобие треугольников АОВ и РОН с равными вертикальными углами при вершине О. Поэтому $HP \parallel AB$ и НР = 0,5АВ. Это означает, что точки Н и Р - середины сторон соответственно АС и ВС треугольника АВС, то есть, АР и ВН - его медианы. Теперь приступаем к *«вычислительному» этапу решения этой задачи*. Пусть АР = 9 и ВН = 12 - медианы в ΔАВС. Найдем длину медианы СМ. По свойству медиан треугольника имеем: АО:ОР = ВО:ОН = 2:1 $\Rightarrow$ АО = $\frac{2}{3}$ АР = $\frac{2}{3} \cdot 9 = 6$; ВО = $\frac{2}{3}$ ВН = $\frac{2}{3} \cdot 12 = 8$. Тогда по теореме Пифагора в прямоугольном ΔАОВ: АВ = $\sqrt{AO^2 + BO^2}$ = $\sqrt{6^2 + 8^2}$ =10. Так как ОМ - медиана этого треугольника, проведенная из вершины прямого угла, то ОМ = $\frac{1}{2}$ АВ = $\frac{1}{2} \cdot 10 = 5$. Имеем: МО:ОС = 1:2, значит: СМ = 3МО = $3 \cdot 5 = 15$» [17]. Ответ: 15.

Задача 2. Найдите площадь треугольника АВС, если АВ = 26 см, АС = 30 см и длина медианы АМ равна 14 см.

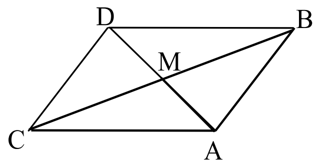


Рисунок 11.18

Решение. Достроим треугольник ABC до параллелограмма ABDC (рисунок 11.18), в котором M - середина AD. Тогда AD = 28, и по формуле Герона находим $S_{ABD} = \sqrt{42 \cdot 16 \cdot 12 \cdot 14}$ = 336, что составляет половину площади параллелограмма ABDC, которая, в свою очередь, равна удвоенной площади треугольника ABC. Значит, $S_{\Delta ABC}$ = 336 (см^2). Ответ: 336 см^2.

Задача 3. В выпуклом четырехугольнике ABCD длины диагоналей равны 7 и 18. Найдите площадь четырехугольника, зная, что длины отрезков, соединяющих середины его противоположных сторон, равны.

Решение. Пусть MK и PH - отрезки, соединяющие середины противоположных сторон выпуклого четырехугольника ABCD (рисунок 11.19),

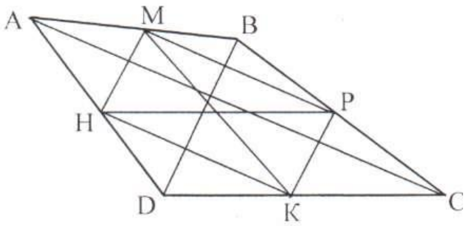


Рисунок 11.19

причем MK = PH, AC =18, BD = 7. Имеем: MP $\parallel$ AC, MP = $\frac{1}{2}AC$ (как средняя линия ΔABC); HK $\parallel$ AC,HK = $\frac{1}{2}AC$ (как средняя линия ΔADC) $\Rightarrow$ MP $\parallel$ HK, MP = HK $\Rightarrow$ MPKH - параллелограмм. А так как MK = PH,
то четырехугольник MPKH - прямоугольник, стороны которого параллельны диагоналям AC и BD данного четырехугольника ABCD, поэтому $AC \perp BD$. Это означает, что $S_{ABCD} = \frac{1}{2}$ AC·BD = $\frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 7$ = 63 (кв.ед.). Ответ: 63 кв.ед.

Треугольник, четырехугольник и окружность

Для решения задач на комбинации треугольника, многоугольника с окружностью применяются следующие теоремы:

«**Теорема 15** (*об измерении углов, связанных с окружностью*).

– центральный угол измеряется дугой, на которую он опирается (рисунок 11.20);

– вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается (рисунок 11.20);

– угол с вершиной внутри круга (рисунок 11.21) измеряется полусуммой дуг, заключенных между его сторонами и их продолжениями за вершину угла;

– угол с вершиной вне круга (рисунок 11.22) измеряется полуразностью дуг, заключенных между его сторонами (предполагается, что каждая из сторон угла пересекается с окружностью данного круга);

– угол между касательной и хордой (рисунок 11.23) измеряется половиной дуги, заключенной между ними» [18].

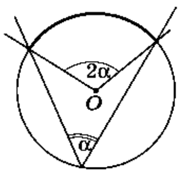


Рисунок 11.20

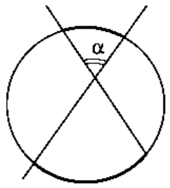


Рисунок 11.21

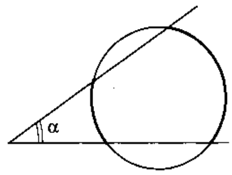


Рисунок 11.22

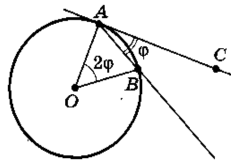


Рисунок 11.23

«**Теорема 16** (*о свойствах касательных, секущих и хорд окружности*):

– радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной (рисунок 11.24);

– если из точки проведены две касательные к окружности, то длины отрезков касательных от этой точки до точек касания равны и центр окружности лежит на биссектрисе угла между ними (рисунок 11.25);

– если из точки A проведена касательная AB и секущая AC, то AC·AD = AB2 (рисунок 11.26);

– если хорды AB и CD пересекаются в точке M (рисунок 11.27), то MA · MB = MC · MD;

– если из точки M проведены к окружности две секущие MAB и MCD (рисунок 11.28), то MA · MB = MC · MD» [23].

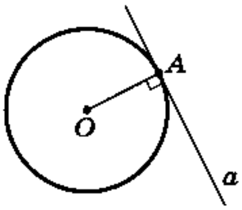


Рисунок 11.24

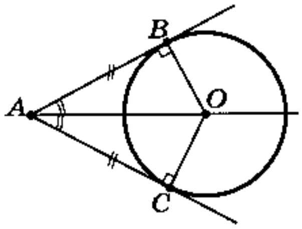


Рисунок 11.25

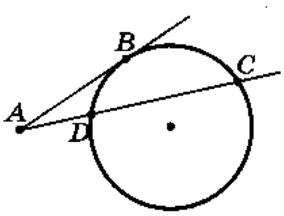


Рисунок 11.26

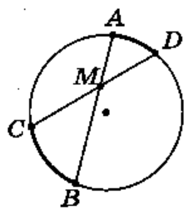


Рисунок 11.27

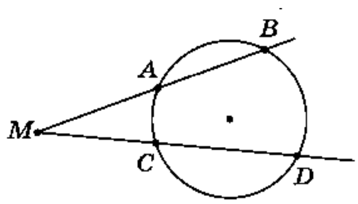


Рисунок 11.28

«**Теорема 17** (*о центре вписанной и описанной окружности треугольника*):

– три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке (эта точка является центром окружности, вписанной в данный треугольник);

– три серединных перпендикуляра к сторонам треугольника пересекаются в одной точке (эта точка является центром окружности, описанной около данного треугольника).

Теорема 18 (*об окружности и четырехугольнике*):

– около выпуклого четырехугольника ABCD можно описать окружность тогда и только тогда, когда сумма величин его противоположных углов равна 180º: $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$;

– в выпуклый четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда равны суммы длин его противоположных сторон: $a + c = b + d$;

– из всех параллелограммов только около прямоугольника можно описать окружность;

– около трапеции можно описать окружность тогда и только тогда, когда она равнобедренная;

– если для четырех точек А, В, М и К плоскости выполняется одно из следующих условий:

а) $\angle$ АМВ = $\angle$ АКВ и точки М и К расположены по одну сторону от прямой АВ;

б) $\angle$ АМВ + $\angle$ АКВ = 180º и точки М и К расположены по разные стороны от прямой АВ, то точки А, В, М и К лежат на одной окружности» [18].

Таким образом, при решении задач по теме «Треугольник, четырехугольник, n-угольники. Окружность и круг» рекомендуется использовать таблицы 11.1 - 11.4 [24].

Таблица 11.1 - Треугольник. Окружность

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Периметр (P)	$P = a + b + c$; $p = \frac{a+b+c}{2}$	a, b, c – длины сторон p – полупериметр
Сумма внутренних углов	$A + B + C = 180º$	A, B, C – величины углов
Теорема косинусов	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$; $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$; $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$; $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$	a, b, c – длины сторон A, B, C – величины углов R – радиус описанной окружности
Теорема синусов	$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$	
Радиус описанной окружности	$2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$	

Продолжение Таблицы 11.1

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)

Площадь (S) Формула Герона	$S = \frac{1}{2}\, a\, h_a = \frac{1}{2}\, b\, h_b =$ $= \frac{1}{2}\, c\, h_c;$ $S = \frac{1}{2}\, ab \sin C =$ $= \frac{1}{2}\, ac \sin B = \frac{1}{2}\, bc \sin A;$ $S = p\, r,$ $S = \frac{abc}{4R}$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$	a, b, c – длины сторон h_a, h_b, h_c – длины высот A, B, C – величины углов p – полупериметр r – радиус вписанной окружности R – радиус описанной окружности
Связь между медианой и сторонами	$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$	a, b, c – длины сторон m_a – длина медианы к стороне a m, n – длины отрезков, на которые биссектриса угла C делит сторону c h_a, h_b, h_c – длины высот r – радиус вписанной окружности
Свойство биссектрисы внутреннего угла	$\frac{m}{n} = \frac{a}{b}$	
Связь между высотами и радиусом вписанной окружности	$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$	

Таблица 11.2 - Прямоугольный треугольник. Окружность

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Сумма острых углов	$A + B = 90^\circ$	A, B – величины острых углов
Теорема Пифагора	$a^2 + b^2 = c^2$	a, b – длины катетов

Метрические соотношения	$h_c^2 = a_1 \cdot b_1$; $a^2 = c \cdot a_1$, $b^2 = c \cdot b_1$	c – длина гипотенузы h_c – длина высоты a_1, b_1 – длины проекций катетов на гипотенузу r – радиус вписанной окружности R – радиус описанной окружности
Зависимость между сторонами, радиусами вписанной и описанной окружностей	$R = \frac{c}{2}$; $r = \frac{a+b-c}{2}$; $r = \frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}{2}$; $R + r = \frac{1}{2}(a+b)$	
Площадь (S)	$S = \frac{1}{2}ab$	a, b – длины катетов

Таблица 11.3 - Правильный треугольник. Окружность

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Периметр (P)	$P = 3a$	a – длина стороны
Величина угла	$A = B = C = 60^o$	A, B, C – величины углов
Зависимость между высотой и стороной	$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$	h – длина высоты a – длина стороны R – радиус описанной окружности r – радиус вписанной окружности
Зависимость между стороной, радиусами вписанной и описанной окружностей	$a = R\sqrt{3}$; $R = 2r$, $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$; $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$	
Выражение площади (S) через: сторону, радиус описанной окружности, радиус вписанной окружности	$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $S = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$; $S = 3r^2\sqrt{3}$	a – длина стороны R – радиус описанной окружности r – радиус вписанной окружности

Таблица 11.4 - Окружность и круг

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Длина окружности (C)	$C = 2\pi R$	C – длина окружности; R – радиус окружности; n – градусная мера дуги; φ – градусная мера дуги; R – радиус круга; d – диаметр; a – длина стороны b – основание сегмента; h – высота сегмента.
Длина дуги (l)	$l = \frac{\pi R n}{180}$; $l = \varphi R$	
Площадь круга (S)	$S = \pi R^2$; $S = \frac{\pi d^2}{4}$	
Площадь сектора (S)	$S = \frac{\pi R^2 n}{360}$	
Площадь сегмента (S)	$S = \frac{\pi R^2 n}{360} \pm S_\Delta$; $S = \frac{2}{3}bh$	

Приведем примеры решения задач.

Задача 4. В прямоугольный треугольник, периметр которого равен 15, вписана окружность радиуса 1. Найдите стороны этого треугольника.

Решение. Пусть в прямоугольный ΔABC вписана окружность с центром O и радиусом r (рисунок 11.29). Обозначим: AB = c, BC = a, AC = b.

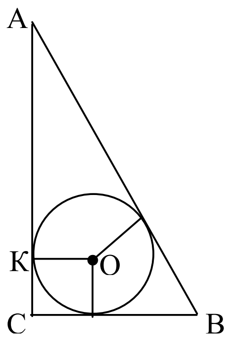


Рисунок 11.29

Так как $c = (a-1)+(b-1)$, то $a+b+c =$ $= a+b+(a-1)+(b-1) = 15 \Rightarrow$ $a+b = 8{,}5$. Имеем: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}a\cdot b = \frac{1}{2}(a+b+c)\cdot r = \frac{1}{2}\cdot 15\cdot 1$, откуда $a\cdot b = 15$. Таким образом, $a+b = 8{,}5$ и $a\cdot b = 15$, поэтому значения a и b являются корнями квадратного уравнения: $t^2 - 8{,}5t + 15 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - 17t + 30 = 0$. Находим: $t_1 = 2{,}5$, $t_2 = 6$. Значит, $a = 2{,}5$; $b = 6$. Тогда $c = 15 - (a+b) =$ $= 15 - 8{,}5 = 6{,}5$. Ответ: AB = 6,5; BC = 2,5; AC = 6.

Задача 5. В окружность радиуса 32,5 см вписан треугольник, две стороны которого равны 25 см и 39 см. Найдите третью сторону треугольника.

Решение. Пусть в ΔABC известно (рисунок 11.30): AB = 25 см, BC = 39 см. Найдем длину стороны AC. Вычислим сначала высоту BH: BH $= \frac{AB \cdot BC}{2R} = \frac{25 \cdot 39}{2 \cdot 32{,}5} = 15$. В ΔABH и ΔBCH: AH = $\sqrt{AB^2 - BH^2}$ = $\sqrt{25^2 - 15^2} = 20$; CH = $\sqrt{BC^2 - BH^2}$ = $\sqrt{39^2 - 15^2}$ = 36. Тогда: AC = = AH + HC = 20 + 36 = 56 (см). Ответ: 56 см.

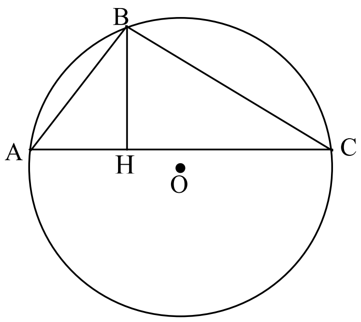


Рисунок 11.30

Задача 6. В прямоугольную трапецию с основаниями a и b вписана окружность. Найдите площадь этой трапеции.

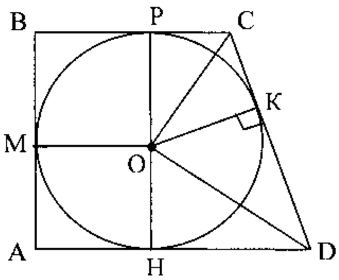


Рисунок 11.31

Решение. Пусть окружность с центром O и радиусом R, вписанная в прямоугольную трапецию ABCD, касается ее оснований AD = a и BC = b в точках H и P, а боковых сторон AB и CD - в точках M и K соответственно (рисунок 11.31). Тогда: O $\in$ PH; OM = BP = AH = R; PH = 2R, (O - середина высоты PH трапеции); PC = b - R, HD = a - R. Так как, центр окружности, вписанной в трапецию, - точка пересечения биссектрис углов трапеции; сумма внутренних односторонних углов трапеции при ее основаниях, равна 180°, тогда центр O окружности, вписанной в трапецию, - вершина прямого угла прямоугольного треугольника COD. Значит в этом треугольнике на основании свойства высоты, проведенной из вершины прямого угла на гипотенузу, имеем: $OK^2 = CK \cdot KD$ ($OK \perp CD$, как радиус, проведенный в точку касания). На основании свойства отрезков касательных, проведенных к окружности из данной точки, находим: CK = PC = b - R, KD = HD = a - R. Тогда: $R^2 = (b - R)\cdot(a - R) = ab - R(a + b) + R^2 \Rightarrow R = \frac{ab}{a+b}$. $S_{трап.} = 0{,}5(BC + AD) \cdot PH = 0{,}5(b + a)\cdot 2 \cdot \frac{ab}{a+b} = ab$ (кв.ед.). Ответ: ab кв.ед.

Задача 7. Основания равнобедренной трапеции, в которую можно вписать окружность, равны 1 и 3. Найдите радиус окружности, описанной около этой трапеции.

Решение. Пусть ABCD - данная трапеция (BC = 1, AD = 3), в которую вписана окружность ω и около которой описана окружность ω_1 с центром O и радиуса R (рисунок 11.32). Так как в данную трапецию вписана окружность, то BC + AD = 2 CD, откуда CD = $\frac{BC+AD}{2}$ = $\frac{1+3}{2}$ = 2. Кроме того, в равнобедренной трапеции выполняется: AH = = $\frac{BC+AD}{2}$ = $\frac{1+3}{2}$ = 2, значит, HD = AD - AH = = 3 – 2 = 1. Тогда в прямоугольном треугольнике CHD имеем: CD = 2HD $\Rightarrow \angle HCD$ = 30º, значит, $\angle CDH$ = 60º. В прямоугольных треугольниках CHD и ACH находим соответственно: $CH^2 = CD^2 - HD^2 =$ 4 – 1 = 3; AC = $\sqrt{AH^2+CH^2}$ = = $\sqrt{4+3}$ = $\sqrt{7}$. Трапеция ABCD - равнобедренная, поэтому окружность ω_1, описанная около этой трапеции, совпадает с окружностью, описанной около ΔACD. Значит искомый радиус R найдем по теореме синусов в ΔACD: R = $\frac{AC}{2\sin 60^\circ}$ = $\sqrt{7}$: (2$\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$) = $\frac{\sqrt{21}}{3}$. Ответ: $\frac{\sqrt{21}}{3}$.

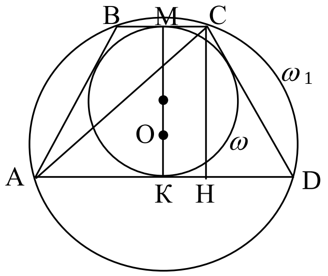


Рисунок 11.32