Тема 7. Показательные уравнения и неравенства.

Показательные уравнения.

Показательным называется уравнение, в котором переменная входит в показатели степеней, при заданном основании.

1. *Простейшие показательные уравнения* - это уравнения вида:
$a^{f(x)} = b$, $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, $a > 0, a \neq 1$.

Так как множество значений показательной функции - множество положительных чисел, то при $b \leq 0$ уравнение решений не имеет. Теперь рассмотрим случай $b > 0$.

Пример 1. Решите уравнение $13^x = \sqrt[5]{169}$.

Решение:

$$13^x = \sqrt[5]{169};$$

$$13^x = 169^{\frac{1}{5}};$$

$$13^x = 13^{\frac{2}{5}};$$

$$x = 0{,}4.$$

Ответ: $x = 0{,}4$.

Пример 2. Решите уравнение $0{,}6^x \cdot 0{,}6^3 = \frac{0{,}6^{2x}}{0{,}6^5}$.

Решение:

$$0{,}6^x \cdot 0{,}6^3 = \frac{0{,}6^{2x}}{0{,}6^5};$$

$$0{,}6^{x+3} = 0{,}6^{2x+5};$$

$$x + 3 = 2x + 5;$$

$$x - 2x = 5 - 3;$$

$$-x = 2;$$

$$x = -2.$$

Ответ: $x = -2$.

Пример 3. Решите уравнение $0{,}5^{\frac{1}{x}} = 4^{\frac{1}{x+1}}$.

Решение:

$$0{,}5^{\frac{1}{x}} = 4^{\frac{1}{x+1}};$$

$$2^{\frac{-1}{x}} = 2^{\frac{2}{x+1}};$$

$$\frac{-1}{x} = \frac{2}{x+1};$$

$$-(x+1) = 2x;$$

$$-x-1 = 2x;$$

$$-x-2x = 1;$$

$$-3x = 1;$$

$$x = -\frac{1}{3}.$$

Ответ: $x = -\frac{1}{3}$.

2. Рассмотрим *показательные уравнения* вида:

$$\alpha \cdot a^{f(x)+a} + \beta \cdot a^{f(x)+b} + \cdots + \gamma \cdot a^{f(x)+n} = b.$$

Для решения таких уравнений левую часть преобразуют следующим образом: выносят за скобку степень $a^{f(x)+a}$ (часто, чтобы избежать дробных коэффициентов, выносят степень с наименьшим показателем).

Пример 4. Решите уравнение $3^{2x-1} + 3^{2x} = 108$.

Решение:

$$3^{2x-1} + 3^{2x} = 108;$$

$$3^{2x-1} \cdot (1+3) = 108;$$

$$3^{2x-1} \cdot 4 = 108;$$

$$3^{2x-1} = 27;$$

$$3^{2x-1} = 3^3;$$

$$2x-1 = 3;$$

$$2x = 4;$$

$$x = 2.$$

Ответ: $x = 2$.

Пример 5. Решите уравнение $3^{x+3} + 3^x = 7^{x+1} + 5 \cdot 7^x$.

Решение:

$$3^{x+3} + 3^x = 7^{x+1} + 5 \cdot 7^x;$$

$$3^x \cdot (27 + 1) = 7^x \cdot (7 + 5);$$

$$3^x \cdot 28 = 7^x \cdot 12;$$

$$\left(\frac{3}{7}\right)^x = \frac{12}{28};$$

$$\left(\frac{3}{7}\right)^x = \frac{3}{7};$$

$$x = 1.$$

Ответ: $x = 1$.

Пример 6. Решите уравнение $20^x - 64 \cdot 5^x - 4^x + 64 = 0$.

Решение:

$$20^x - 64 \cdot 5^x - 4^x + 64 = 0;$$

$$(20^x - 64 \cdot 5^x) - (4^x - 64) = 0;$$

$$5^x \cdot (4^x - 64) - (4^x - 64) = 0;$$

$$(4^x - 64) \cdot (5^x - 1) = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} (4^x - 64) = 0 \\ (5^x - 1) = 0 \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} 4^x = 64 \\ 5^x = 1 \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} 4^x = 4^3 \\ 5^x = 5^0 \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 0 \end{array}\right..$$

Ответ: $x = 0$, $x = 3$.

3. Еще один вид показательных уравнений – уравнения, сводящиеся к рациональным с помощью введения новой переменной. После решения уравнения с новой переменной получим простейшие показательные уравнения.

Пример 7. Решите уравнение $16^x - 5 \cdot 4^x + 4 = 0$.

Решение:

$$16^x - 5 \cdot 4^x + 4 = 0;$$

$$4^{2x} - 5 \cdot 4^x + 4 = 0;$$

Введем новую переменную: $4^x = t,\ t > 0$.

Решим вспомогательное уравнение:

$$t^2 - 5t + 4 = 0;$$

$$D = b^2 - 4ac = 25 - 16 = 9;$$

$$t_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 \mp 3}{2};$$

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = 1 \\ t_2 = 4 \end{array}\right.$$

Вернемся к переменной *x*:

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = 1 \\ t_2 = 4 \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} 4^x = 1 \\ 4^x = 4 \end{array}\right.; \left[\begin{array}{l} 4^x = 4^0 \\ 4^x = 4^1 \end{array}\right.; \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right..$$

Ответ: $x = 0$, $x = 1$.

Пример 8. Решите уравнение $13^{2x+1} - 13^x - 12 = 0$.

Решение:

$$13^{2x+1} - 13^x - 12 = 0;$$

$$13^1 \cdot 13^{2x} - 13^x - 12 = 0;$$

Введем новую переменную: $13^x = t,\ t > 0$.

Решим вспомогательное уравнение:

$$13^1 \cdot t^2 - t - 12 = 0;$$

$$D = b^2 - 4ac = 1 + 4 \cdot 12 \cdot 13 = 1 + 624 = 625;$$

$$t_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 \mp 25}{26};$$

$$\left[\begin{array}{c} t_1 = 1 \\ t_2 = -\frac{-24}{26} < 0 - \text{посторонний корень} \end{array}\right..$$

Вернемся к переменной x:

$$t = 1;$$

$$13^x = 1;$$

$$x = 0.$$

Ответ: $x = 0$.

Пример 9. Решите уравнение $9^{x-\frac{1}{2}} - 8 \cdot 3^{x-1} + 5 = 0$.

Решение:

$$9^{x-\frac{1}{2}} - 8 \cdot 3^{x-1} + 5 = 0;$$

$$9^x \cdot 9^{-\frac{1}{2}} - 8 \cdot 3^x \cdot 3^{-1} + 5 = 0;$$

$$\frac{3^{2x}}{3} - 8 \cdot \frac{3^x}{3} + 5 = 0;$$

$$3^{2x} - 8 \cdot 3^x + 15 = 0;$$

Введем новую переменную: $3^x = t,\ t > 0$.

Решим вспомогательное уравнение:

$$t^2 - 8 \cdot t + 15 = 0;$$

$$D = b^2 - 4ac = 64 - 4 \cdot 1 \cdot 15 = 64 - 60 = 4;$$

$$t_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{D}}{2a} = \frac{8 \mp 2}{2};$$

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = 5 \\ t_2 = 3 \end{array}\right.$$

Вернемся к переменной x:

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = 5 \\ t_2 = 3 \end{array}\right.;\ \left[\begin{array}{l} 3^x = 5 \\ 3^x = 3 \end{array}\right.;\ \left[\begin{array}{l} 3^x = 5 \\ 3^x = 3^1 \end{array}\right.;\ \left[\begin{array}{l} x = \log_3 5 \\ x = 1 \end{array}\right..$$

Ответ: $x = \log_3 5$, $x = 1$.

4. Однородные показательные уравнения называется уравнение вида:

$$\alpha \cdot a^{2x} + \beta \cdot a^x \cdot b^x + \gamma \cdot b^{2x} = 0.$$

Данные показательные уравнения решаются делением на любую показательную функцию, а затем введение новой переменной.

Пример 10. Решите уравнение $4 \cdot 9^x - 13 \cdot 6^x + 9 \cdot 4^x = 0$.

Решение:

$$4 \cdot 9^x - 13 \cdot 6^x + 9 \cdot 4^x = 0;$$

$$4 \cdot 3^{2x} - 13 \cdot 2^x \cdot 3^x + 9 \cdot 2^{2x} = 0;$$

Делим каждое слагаемое на $2^{2x} > 0$.

$$4 \cdot \frac{3^{2x}}{2^{2x}} - 13 \cdot \frac{2^x \cdot 3^x}{2^{2x}} + 9 \cdot \frac{2^{2x}}{2^{2x}} = 0;$$

$$4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 13 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x + 9 = 0;$$

Введем новую переменную: $\left(\frac{3}{2}\right)^x = t,\ t > 0$.

Решим вспомогательное уравнение:

$$4t^2 - 13t + 9 = 0;$$

$$D = b^2 - 4ac = 169 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 169 - 144 = 25;$$

$$t_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{D}}{2a} = \frac{13 \mp 5}{8};$$

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = 1 \\ t_2 = \frac{9}{4} \end{array}\right.$$

Вернемся к переменной x:

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = 1 \\ t_2 = \frac{9}{4} \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} \left(\frac{3}{2}\right)^x = 1 \\ \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{9}{4} \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} \left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^0 \\ \left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \end{array}\right.; \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

Ответ: $x = 0$, $x = 2$.

Показательные неравенства.

Показательным называется неравенство, в котором переменная входит только в показатели степеней, при постоянном основании.

1. *Простейшие показательные неравенства* - это неравенства вида $a^{f(x)} > b$, $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, $a > 0, a \neq 1$. Очевидно, что знак неравенства может быть любым (<, >, ≤, ≥).

Рассмотрим неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$.

Если основание *a* > 1, то при переходе от исходного неравенства к неравенству с показателями знак неравенства не изменяется, так как показательная функция при *a* > 1 является *возрастающей*, то есть:

$a^{f(x)} > a^{g(x)}$, если *a* > 1, то $y = a^x$ - возрастающая функция, $f(x) > g(x)$.

Если *0 < a < 1*, то при переходе от исходного неравенства к неравенству с показателями знак неравенства изменяется на противоположный, так как показательная функция при *0 < a < 1* является *убывающей*. то есть:

$a^{f(x)} > a^{g(x)}$, если *0 < a < 1*, то $y = a^x$ - убывающая функция, $f(x) < g(x)$.

Пример 11. Решите неравенство $5^x > \sqrt[7]{125}$.

Решение.

$$5^x > \sqrt[7]{125};$$

$$5^x > 5^{\frac{3}{7}};$$

a = 5 > 1, то $y = 5^x$ - возрастающая функция

$$x > \frac{3}{7};$$

$$x \epsilon (3; +\infty).$$

Ответ: $x \epsilon (3; +\infty)$.

Пример 12. Решите неравенство $(0{,}4)^{x^2-2x} \leq \frac{8}{125}$.

Решение.

$$(0{,}4)^{x^2-2x} \leq \frac{8}{125};$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{x^2-2x} \leq \left(\frac{2}{5}\right)^3;$$

a = 0,4 < 1, то $y = \left(\frac{2}{5}\right)^x$ - убывающая функция

$$x^2 - 2x \geq 3;$$

$$x^2 - 2x - 3 \geq 0.$$

Решим квадратное неравенство:

$$y = x^2 - 2x - 3;$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0;$$

$$D = b^2 - 4ac = 4 + 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4 + 12 = 16;$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 \pm 4}{2};$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 \end{array}\right.;$$

$$(x-3)(x+1) \geq 0.$$

$$x \epsilon (-\infty; -1) \cup (3; +\infty).$$

Ответ: $x \epsilon (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

2. Рассмотрим *показательные неравенства* вида:

$$\alpha \cdot a^{f(x)+a} + \beta \cdot a^{f(x)+b} + \cdots + \gamma \cdot a^{f(x)+n} > b.$$

Для решения таких уравнений левую часть преобразуют следующим образом: выносят за скобку степень $a^{f(x)+a}$ (часто, чтобы избежать дробных коэффициентов, выносят степень с наименьшим показателем), а затем решают простейшее показательное неравенство.

Пример 13. Решите неравенство $3^{x+2} + 3^{x-1} < 28$.

Решение:

$$3^{x+2} + 3^{x-1} < 28;$$

$$3^{x-1} \cdot (3^3 + 1) < 28;$$

$$3^{x-1} \cdot 28 < 28;$$

$$3^{x-1} < 1;$$

$$3^{x-1} < 3^0;$$

если *a = 3* > 1, то $y = 3^x$ - возрастающая функция

$$x - 1 < 0;$$

$$x < 1.$$

Ответ: $x \epsilon (-\infty; 1)$.

Пример 14. Решите неравенство $5^{3x+1} - 5^{3x-3} \geq 624$.

Решение:

$$5^{3x-3} \cdot (5^4 - 1) \geq 624;$$

$$5^{3x-3} \cdot 624 \geq 624;$$

$$5^{3x-3} \geq 1;$$

$$5^{3x-3} \geq 5^0;$$

если *a = 5* > 1, то $y = 5^x$ - возрастающая функция

$$3x - 3 \geq 0;$$

$$3x \geq 3;$$

$$x \geq 1.$$

Ответ: $x \epsilon [1; +\infty)$.

3. Еще один вид показательных неравенств – неравенства, сводящиеся к рациональным с помощью введения новой переменной. После решения неравенства с новой переменной получим простейшие показательные неравенства.

Пример 15. Решите неравенство $9^x - 3^{x+4} \leq 82$.

Решение:

$$9^x - 3^{x+4} \leq 82;$$

$$3^{2x} - 3^4 \cdot 3^x - 82 \leq 0.$$

Введем новую переменную $3^x = t,\ t > 0.$

Решим вспомогательное неравенство:

$$t^2 - 81t - 82 \leq 0;$$

$$y = t^2 - 81t - 82;$$

$$t^2 - 81t - 82 = 0;$$

$$D = b^2 - 4ac = 81^2 + 4 \cdot 1 \cdot 82 = 6561 + 324 = 6889;$$

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{81 \pm 83}{2};$$

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = 82 \\ t_2 = -1 \end{array}\right.;$$

$$(t - 82)(t + 1) \leq 0;$$

$$\begin{cases} \begin{cases} t \leq 82 \\ t \geq -1 \end{cases} \\ t > 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} t > 0 \\ t \leq 82 \end{cases}; \quad t \leq 82.$$

Вернемся к исходной переменной *x*: $t \leq 82; \quad 3^x \leq 82;$

если *a = 3* > 1, то $y = 3^x$ - возрастающая функция

$$x \leq \log_3 82.$$

Ответ: $x \epsilon (-\infty; \log_3 82)$.

Пример 16. Решите неравенство $11^{x+1} + 3 \cdot 11^{-x} \geq 34.$

Решение: $$11^{x+1} + 3 \cdot 11^{-x} \geq 34;$$

$$11 \cdot 11^x + 3 \cdot \frac{1}{11^x} \geq 34.$$

Введем новую переменную $11^x = t,\ t > 0.$

Решим вспомогательное неравенство: $11t + 3 \cdot \frac{1}{t} - 34 \geq 0;$

$\frac{11t^2 - 34t + 3}{t} \geq 0;$ так как $t > 0$, то $11t^2 - 34t + 3 \geq 0;$

$$y = 11t^2 - 34t + 3; \quad 11t^2 - 34t + 3 = 0;$$

$$D = b^2 - 4ac = 34^2 - 4 \cdot 11 \cdot 3 = 1156 - 132 = 1024;$$

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{34 \pm 32}{22};$$

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = 3 \\ t_2 = \frac{1}{11} \end{array}\right.; \quad (t - 3)\left(t - \frac{1}{11}\right) \geq 0;$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l} t \geq 3 \\ t \leq \frac{1}{11} \end{array}\right. \\ t > 0 \end{cases}; \quad \left[\begin{array}{c} t \geq 3 \\ 0 \leq t \leq \frac{1}{11} \end{array}\right.$$

Вернемся к исходной переменной *x*:

$$\left[\begin{array}{c} t \geq 3 \\ 0 \leq t \leq \frac{1}{11} \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{c} 11^x \geq 3 \\ 0 \leq 11^x \leq \frac{1}{11} \end{array}\right.; \left[\begin{array}{c} 11^x \geq 3 \\ 11^x \leq 11^{-1} \end{array}\right.; \left[\begin{array}{c} x \geq \log_{11} 3 \\ x \leq -1 \end{array}\right.$$

Ответ: $x\epsilon(-\infty; -1] \cup [\log_{11} 3\,; +\infty)$.

Пример 17. Решите неравенство $\frac{5^x}{5^x-4} + \frac{5^x+5}{5^x-5} + \frac{22}{5^{2x}-9\cdot5^x+20} \leq 0$.

Решение:

$$\frac{5^x}{5^x-4} + \frac{5^x+5}{5^x-5} + \frac{22}{5^{2x}-9\cdot5^x+20} \leq 0$$

Введем новую переменную $5^x = t,\ t > 0$.

Решим вспомогательное неравенство: $\frac{t}{t-4} + \frac{t+5}{t-5} + \frac{22}{t^2-9t+20} \leq 0$

$$\frac{t\cdot(t-5)+(t+5)\cdot(t-4)+22}{(t-4)\cdot(t-5)} \leq 0$$

$$\frac{t^2-5t+t^2-4t+5t-20+22}{(t-4)\cdot(t-5)} \leq 0$$

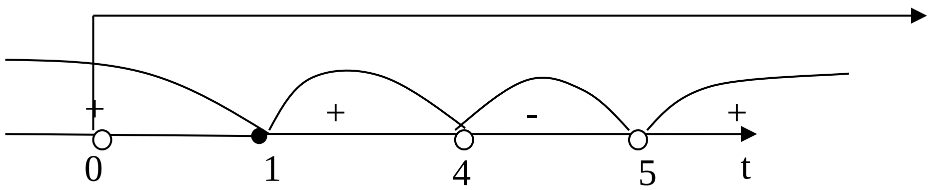
$$\frac{2t^2-4t+2}{(t-4)\cdot(t-5)} \leq 0$$

Решим неравенство методом интервалов:

$$y = \frac{2t^2-4t+2}{(t-4)\cdot(t-5)}$$

$$\left[\begin{array}{c} 2t^2-4t+2=0 \\ (t-4)\cdot(t-5) \neq 0 \end{array}\right.; \left[\begin{array}{c} t^2-2t+1=0 \\ (t-4)\cdot(t-5) \neq 0 \end{array}\right.; \left[\begin{array}{c} (t-1)^2=0 \\ (t-4)\cdot(t-5) \neq 0 \end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{c} t_{1,2}=0 \\ t \neq 4 \\ t \neq 5 \end{array}\right. \quad \frac{(t-1)^2}{(t-4)\cdot(t-5)} \leq 0$$



$$\left[\begin{array}{l} t = 1 \\ \begin{cases} t > 4 \\ t < 5 \end{cases} \end{array}\right.$$

Вернемся к исходной переменной *x*:

$$\left[\begin{array}{l} t = 1 \\ \begin{cases} t > 4 \\ t < 5 \end{cases} \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} 5^x = 1 \\ \begin{cases} 5^x > 4 \\ 5^x < 5 \end{cases} \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} 5^x = 5^0 \\ \begin{cases} 5^x > 4 \\ 5^x < 5^1 \end{cases} \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ \begin{cases} x > \log_5 4 \\ x < 1 \end{cases} \end{array}\right..$$

Ответ: $x\epsilon\{0\} \cup (\log_5 4; 1)$.

4. Однородные показательные неравенства - это неравенства вида:

$\alpha \cdot a^{2x} + \beta \cdot a^x \cdot b^x + \gamma \cdot b^{2x} > 0$ (знак может быть любой).

Данные показательные неравенства решаются делением на любую показательную функцию, а затем введение новой переменной.

Пример 18. Решите неравенство $2 \cdot 81^{x+1} - 36^{x+1} - 3 \cdot 16^{x+1} < 0$

Решение: $2 \cdot 81^{x+1} - 36^{x+1} - 3 \cdot 16^{x+1} < 0;$

$$2 \cdot 81^x \cdot 81^1 - 36^x \cdot 36 - 3 \cdot 16^x \cdot 16 < 0;$$

$$162 \cdot 9^{2x} - 36 \cdot 4^x \cdot 9^x - 48 \cdot 4^{2x} < 0;$$

Разделим каждое слагаемое на $4^{2x} > 0$.

$$162 \cdot \frac{9^{2x}}{4^{2x}} - \frac{36 \cdot 4^x \cdot 9^x}{4^{2x}} - 48 \cdot \frac{4^{2x}}{4^{2x}} < 0;$$

$$162 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^{2x} - 36 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^{2x} - 48 < 0;$$

Разделим каждое слагаемое на 6:

$$27 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^{2x} - 6 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^{x} - 8 < 0;$$

Введем новую переменную $\left(\frac{9}{4}\right)^x = t,\ t > 0.$

Решим вспомогательное неравенство: $27t^2 - 6t - 8 < 0;$

$$y = 27t^2 - 6t - 8; \quad 27t^2 - 6t - 8 = 0;$$

$$D = b^2 - 4ac = 6^2 + 4 \cdot 27 \cdot 8 = 36 + 864 = 900;$$

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{6 \pm 30}{54}; \quad \left[\begin{array}{l} t_1 = \frac{2}{3} \\ t_2 = -\frac{1}{2} \end{array}\right.; \quad \left(t - \frac{2}{3}\right)\left(t + \frac{1}{2}\right) < 0;$$

$$\begin{cases}\begin{cases} t > -\frac{1}{2} \\ t < \frac{2}{3} \end{cases}; \\ t > 0 \end{cases} \qquad 0 < t < \frac{2}{3}; \qquad 0 < \left(\frac{9}{4}\right)^{x} < \frac{2}{3};$$

$$\left(\frac{9}{4}\right)^{x} < \frac{2}{3}; \qquad \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} < \left(\frac{3}{2}\right)^{-1};$$

если *a = 1,5* > 1, то $y = \left(\frac{3}{2}\right)^{x}$ - возрастающая функция

$2x < -1; \quad x < -0{,}5.$ Ответ: $x \epsilon (-\infty; -0{,}5).$