Росдистант

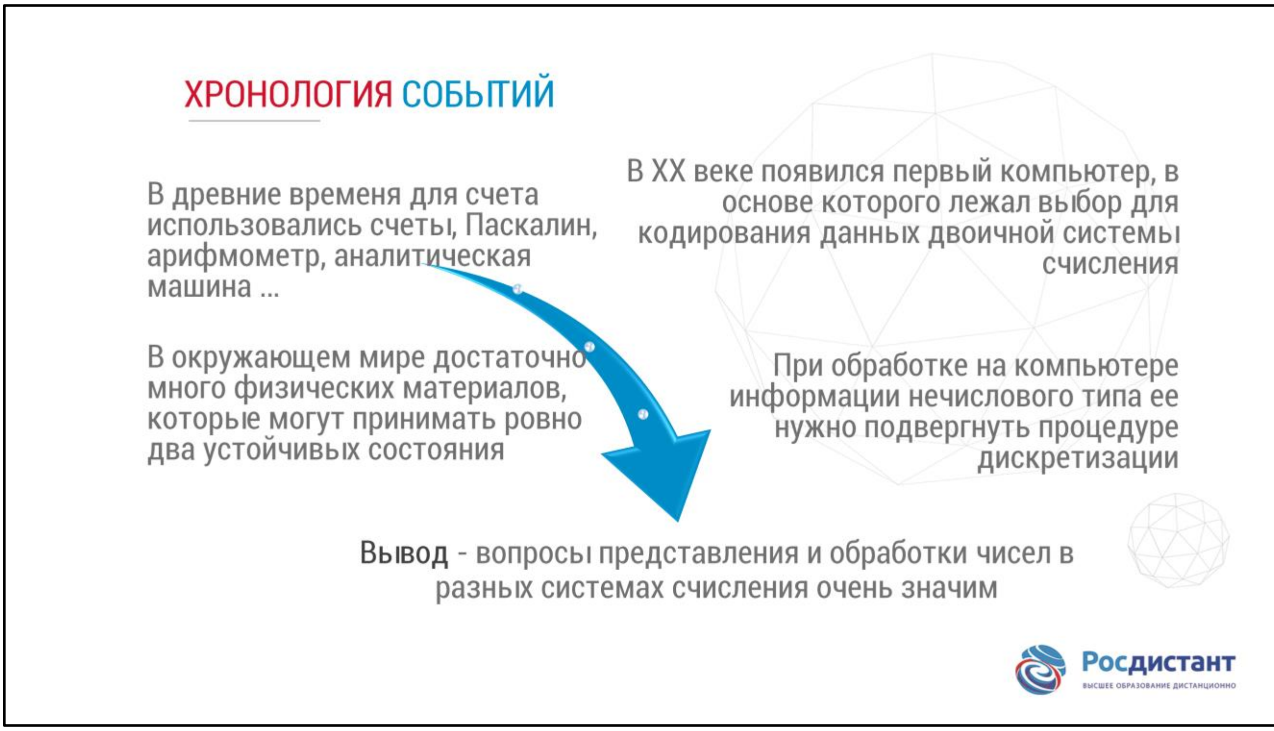
ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ ДИСТАНЦИОННО

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМ В ИНФОРМАТИКЕ

7 ЧАСТЬ

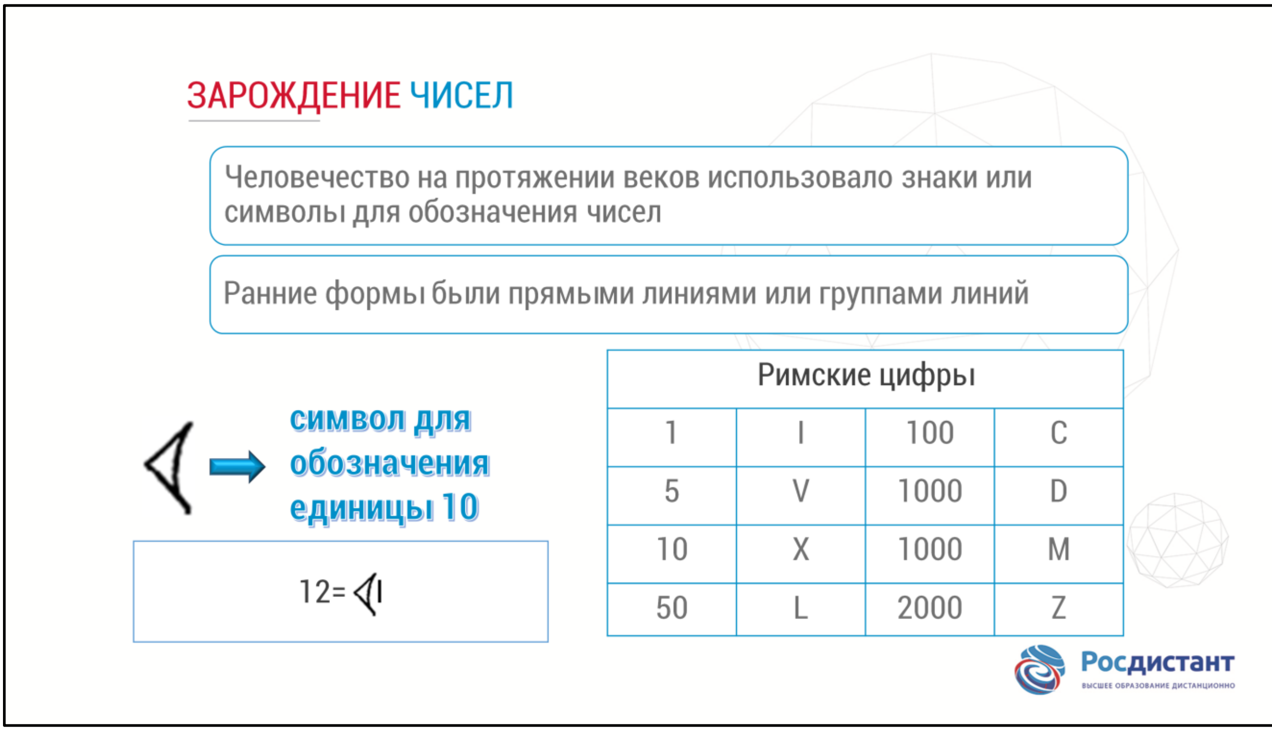
Системы счисления

В рамках данной темы будет рассмотрена история зарождения счета, представлена хронология разных форм записи чисел. Вы узнаете об основах систем счисления и почему в информатике применяются разные системы счисления. Мы рассмотрим разные способы записи чисел в позиционной и непозиционной системах счисления, а также познакомимся с распространенными и не очень распространенными основаниями систем счисления. Материал предполагает освоение правил перевода из десятичной системы счисления в другие, применяемые в компьютерах, и наоборот.



Обработка информации имеет давнюю историю. Со временем человечество пыталось облегчить вычислительные операции использованием различных устройств. Это были счеты, Паскалин, арифмометр, аналитическая машина и тому подобное.
Только в XX веке появился первый действующий компьютер. Он был основан на принципах, разработанных Джоном фон Нейманом, одним из которых является выбор для кодирования данных двоичной системы счисления, которая использует для записи чисел только две цифры – ноль и единицу.
Выбор этот основан на том факте, что в окружающем нас мире можно найти достаточно много физических материалов, которые могут принимать ровно два устойчивых состояния. Например, есть электрическое напряжение на некотором проводящем ток элементе или его нет, намагничен какой-то элемент или нет и так далее. Это свойство материалов используется для представления кодов чисел во внутренних устройствах компьютера.
Однако для реализации такого представления все числа должны быть переведены в двоичную систему счисления, что, естественно, выполняется не человеком, а устройствами ввода информации компьютера.
Компьютерная система понимает только двоичный номер системы. И поэтому нам нужно общаться с компьютером только при помощи двоичного кода, машинного языка. Все компьютерные программы сначала преобразуются в двоичный код, который может напрямую выполняться центральным процессором компьютера. Если говорить об обработке на компьютере

информации нечислового типа, например, графики или звука, то такая информация должна быть прежде подвергнута процедуре дискретизации, иначе называемой оцифровкой информации.
Из сказанного можно сделать вывод о значимости вопросов представления и обработки чисел в разных системах счисления. Рассмотрим эти вопросы более подробно.



Система счисления определяет набор значений, используемых для представления количества. Мы говорим о количестве людей, посещающих занятия, количестве модулей, взятых на одного студента, а также используем числа для обозначения оценок, полученных студентами в тестах.
Количественная оценка ценностей и предметов по отношению друг к другу помогает нам понять окружающую среду. Мы делаем это в раннем возрасте, пытаясь выяснить, сколько у нас игрушек, подарков, леденцов и так далее.
Изучение систем счисления не ограничивается компьютерами. Мы применяем числа каждый день, и знание того, как работают числа, дает нам представление о том, как компьютер манипулирует числами и хранит их.
Человечество на протяжении веков использовало знаки или символы для обозначения чисел. Ранние формы таких обозначений представляли собой прямые линии или группы линий, очень похожие на те, которыми в фильме «Робинзон Крузо» герой отмечает недели: шесть вертикальных линий с диагональной линией поперек.
Еще в 3400 г. до н. э. в Египте и 3000 г. до н. э. в Месопотамии разработали символ для обозначения единицы – 10. Это было большим достижением, поскольку уменьшило количество требуемых символов. Например, 12 можно записать как 10 и две единицы, то есть использовать три символа вместо 12, которые требовались ранее.
Римляне изобрели систему счисления, которая могла представлять все числа от 1 до 1 000 000, используя всего семь символов.

Сегодня наиболее распространенной системой счисления является арабская. Впервые она была разработана индусами и использовалась еще в III веке до нашей эры. Введение символа 0, используемого для обозначения позиционного значения цифр, было очень важным. В десятичной системе счисления есть набор значений в диапазоне от 0 до 9.

Все системы счисления начинались с простых подсчетных меток с использованием одиночных штрихов для представления каждой дополнительной единицы.

Наши предки в доисторическую эпоху имели общее представление о количестве и видели, конечно, разницу между одной, двумя или многими антилопами. Но интеллектуальный скачок от конкретной идеи о двух предметах к изобретению символа абстрактной идеи «два» занял много времени.

Математика и формальная система чисел начали развиваться, когда цивилизации обосновались и развили сельское хозяйство, для измерения участков земли, налогообложения отдельных лиц и так далее. Это впервые произошло в шумерской и вавилонской цивилизациях Месопотамии и в Древнем Египте.

Возраст палки, показанной на слайде, от 35 000 до 20 000 лет. Она, вероятно, является первым известным карманным калькулятором. Счеты на стикере представляют собой последовательность простых чисел и некоторые серии дублирования: 3–6, 4–8, 5–10 [три шесть четыре восемь пять десять] и так далее. Похоже, что для составления этих операционных таблиц использовалась двенадцатизначная система счисления вместо нашей десятичной. Доисторический владелец этой палки использовал ее как примитивный инструмент учета.

Открытие ноля и системы десятичных значений было изобретением, уникальным для индийской цивилизации. На рисунке показана запись первых 9

целых чисел средствами одного из древнейших разновидностей индийского слогового письма брахми.
Фактически восточные арабские цифры, называемые арабско-индийскими цифрами, представляют собой конкретные цифры. Эти цифры в настоящее время используются для обозначения индуистско-арабской системы счисления в сочетании с арабским алфавитом. Они популярны в странах арабского Востока, а их вариации – в другие странах.

Однако о первом западном использовании цифр без ноля сообщил в V веке римский писатель Беотиус. В одной из своих книг по геометрии Беотиус объясняет, как работать на счетах, используя отмеченные маленькие конусы вместо гальки. Эти конусы, на каждом из которых был нарисован символ одной из девяти индо-арабских цифр, назывались вершинами. Таким образом, первые изображения цифр в Европе назывались «вершинами». Каждая вершина также получила индивидуальное имя: Igin для 1, Andras для 2, Ormis для 3, Arbas для 4, Quimas или Quisnas для 5, Caltis или Calctis для 6, Zenis или Tenis для 7, Temenisa для 8 и Celentis или Scelentis для 9. Этимология этих имен остается неясной, хотя некоторые из них были явно заимствованы от названий арабских чисел. Фигуры, похожие на индо-арабские, о которых сообщает Беотиус, воспроизводились почти повсюду с величайшей фантазией!

Прежде чем принять индуистско-арабскую систему счисления, люди использовали вместо нее римские цифры, которые являются наследием этрусского периода. Римская нумерация основана на бинарной системе.

Для записи чисел римляне использовали:

- аддитивную систему в виде знаков в римской системе счисления, как показано на слайде, то есть 5 + 1 + 1 = 7 или 100 + 10 + 10 + 1 = 121;
- вычитательную систему: 9 записывается как десять, перед которой ставится единица и так далее, как представлено на слайде.

Латинские цифры использовались для исчисления до конца XVI века!

В прошлом использовались и другие оригинальные системы счисления. В начале XIII века архидьякон Иоанн Бейзингстокский ввел обозначение чисел от 1 до 99, основанное на вертикальном штрихе с придатком слева, представляющим единицы, и другим справа, представляющим десятки. Различные варианты системы встречаются в различных цистерцианских рукописях. Они использовались для различных целей наряду с римскими и индуистско-арабскими цифрами.

В 1533 году Агриппа фон Неттесгейм включил описание «вертикального» варианта шифров в свою *оккультную философию*.

С тех пор и до XIX века эти шифры назывались «халдейскими». В Германии начала XX века они превратились в рунические и арийские. Эта оригинальная система счисления позже вышла из употребления и была забыта.

Система числовой записи Агриппы под названием **Notae Elegantissimae** позволяет записывать числа от **1** до **9999.** Она использовалась для целей индексации, где ее компактность была большим преимуществом. Она также полезна в качестве мнемонической помощи. Например, символ **K** в приведенном ниже примере может означать 1414, где первые 4 цифры – цифры квадратного корня из 2.

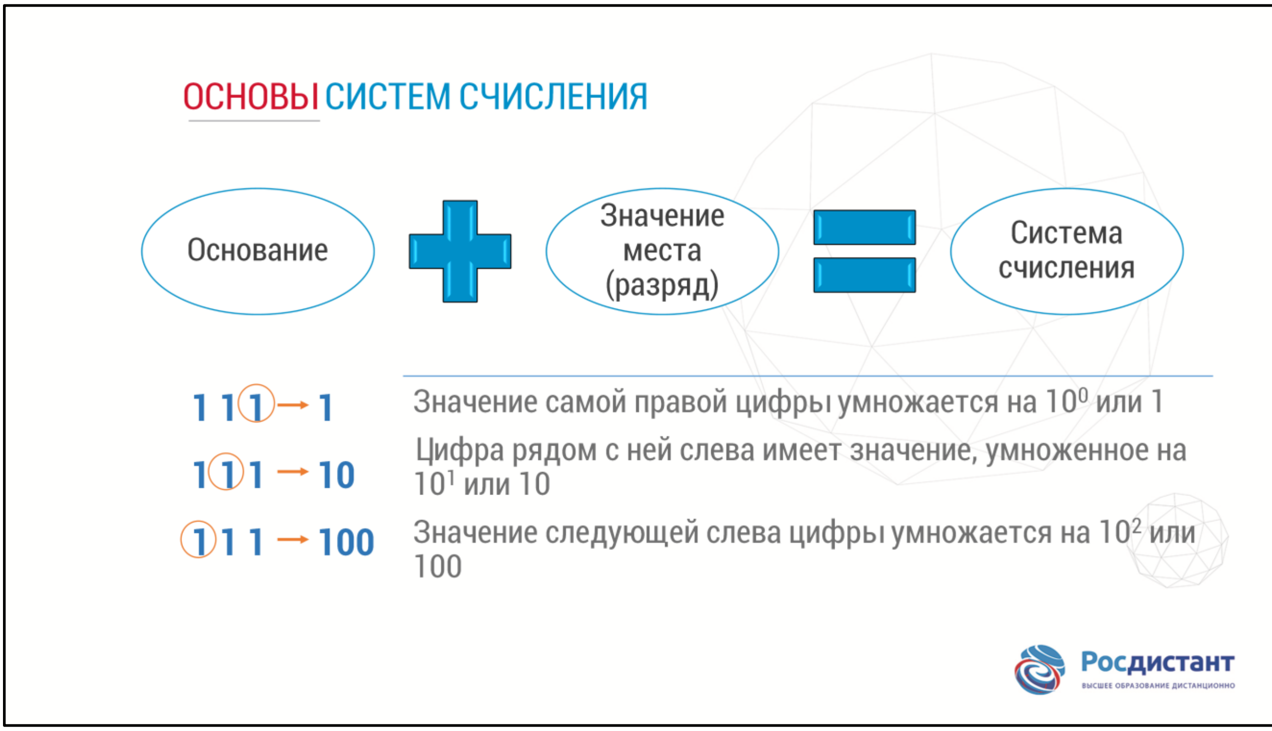
Системы счисления – это методы представления количеств. В качестве простого примера предположим, что у нас есть корзина апельсинов. Мы можем отслеживать количество апельсинов в корзине. Или продать апельсины кому-нибудь другому. Или просто присвоить корзине числовой код, по которому можно будет узнать, когда и откуда пришли апельсины. Чтобы выполнить любую из этих простых математических операций, придется начать с какой-то системы счисления.

Этот пример иллюстрирует три основные причины, по которым существуют системы счисления.

Во-первых, в ситуации, когда необходимо указать количество элементов, содержащихся в коллекции или наборе этих элементов. Для этого используется какой-то метод подсчета предметов. Общее количество элементов представлено числом, известным как кардинальное число. Если корзина содержала 30 апельсинов, то 30 было бы кардинальным числом, поскольку оно показывает, сколько всего предметов.

Во-вторых, числа могут использоваться для обозначения ранга, последовательности или порядка элементов. Например, отдельные апельсины в корзине можно пронумеровать в соответствии с последовательностью, в которой они были собраны. Апельсин № 1 будет выбран первым; оранжевый № 2 – второй выбранный; апельсин № 3 – третий выбран и так далее. Числа, используемые таким образом, называются порядковыми числами.

В-третьих, номера могут использоваться для идентификации. Необходимо разработать какой-то метод для хранения чековых и сберегательных счетов, счетов кредитных карт, водительских прав и других записей для разных людей отдельно друг от друга. Возможно, таким записям можно было бы дать имя, но количество вариантов с использованием слов недостаточно, чтобы заставить такую систему работать. Например, текущий счет Джона Т. Джонса в банке. Использование номера его счета 338-4498-1949 позволяет создавать неограниченное количество отдельных и индивидуализированных записей.



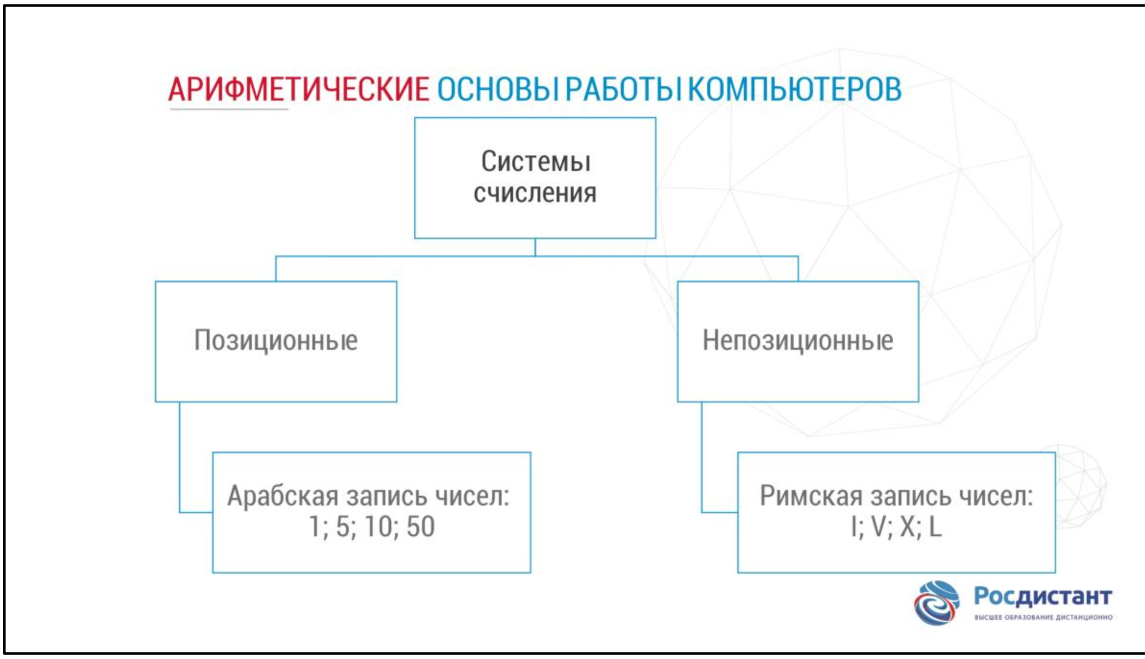
Каждая система счисления основана на каком-то числе. Основание системы можно представить как наивысшее число, до которого можно сосчитать, не повторяя любое предыдущее число. В десятичной системе, используемой сегодня в большинстве частей мира, база равна 10. При подсчете в десятичной системе используются десять различных цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9. Считая далее 9, мы используем те же цифры, но в разных комбинациях: 1 с 0, 1 с 1, 1 с 2, и так далее.

База, выбранная для системы счисления, часто отражает реальные методы подсчета, используемые людьми. Например, десятичная система могла появиться потому, что у большинства людей десять пальцев. Таким образом, простой способ составить числа – отсчитывать по одному пальцу за раз.

В большинстве систем счисления используется понятие, известное как значение места. Этот термин означает, что числовое значение цифры зависит от ее положения в числе. Например, число сто одиннадцать состоит из трех единиц. Тем не менее каждая из единиц в номере имеет разное значение из-за своего положения в числе. Первая единица означает 100, потому что она находится на третьей позиции справа, на месте сотни. Вторая единица означает десять, потому что она стоит на второй позиции справа, в разряде десятков. Третья единица означает единицу, потому что она стоит на первой позиции справа, на месте единиц.

Определить разряд можно по показателю степени основания. Каждая следующая по порядку цифра, начиная с правой стороны числа, имеет значение

на один показатель больше. Таким образом, значение самой первой справа цифры умножается на 10^0 или 1. Цифра рядом с ней слева имеет значение, умноженное на 10^1 или 10. Значение следующей слева цифры умножается на 10^2 или 100. И так далее.
Римская система счисления является примером системы без значения места. Каждый из I_s имеет точно такое же значение, независимо от того, где оно встречается в числе. Одним из недостатков римской системы является гораздо большая сложность выполнения математических операций – сложения, вычитания, умножения и деления.



Система счисления – это способ записи чисел знаками. Из всего разнообразия способов записи чисел наиболее известны арабская и римская системы, которые относятся к принципиально разным видам представления чисел. Различают позиционные и непозиционные системы счисления. Римская запись чисел относится к числу непозиционных систем счисления. Арабская запись является примером позиционной системы.

В позиционных системах счисления значение цифры в числе зависит от ее позиции. Место цифры внутри числа определяет ее, условно говоря, вес, равный единице, десятку, сотне и так далее. В непозиционных системах счисления значение цифры не зависит от её положения в числе.

Обобщим сказанное. В позиционной системе счисления:

- каждый символ представляет различное значение в зависимости от позиции, которую он занимает в числе;
- каждая позиция имеет значение, которое относится к числу, находящемуся рядом с ней. Общее значение позиционного числа – это сумма результирующего значения всех позиций. Пример: 12 может быть 1 × 10 + 2 × 1, 10 + 2 = 12.

В непозиционной системе счисления:

- каждый символ представляет одно и то же значение независимо от его положения;
- каждый символ представляет собой число со своим собственным разрядным значением. Пример: римская система счисления, где числа записываются

римскими буквами – латиницей.
На слайде показаны различия между этими двумя системами счисления, а также примеры записи одних и тех же чисел в арабской и римской системах счисления.

ПОЗИЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

Система счисления	Набор символов для записи чисел	Запись десятичных чисел 2 и 10	
Десятичная	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9	2	10
Двоичная	0 1	10	1010
Восьмеричная	0 1 2 3 4 5 6 7	2	12
Шестнадцатеричная	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A(10) B(11) C(12) D(13) E(14) F(15)	2	A

Непозиционные системы счисления в наше время не находят широкого применения, в отличие от позиционных. Среди позиционных систем счисления особое место занимает десятичная система, которая появилась примерно в шестом веке в Индии. В этой системе для записи чисел используют десять цифр – от ноля до девяти.

Любая позиционная система счисления характеризуется основанием.

Основание – это количество цифр, используемых для изображения чисел в данной системе.

За основание можно принять любое натуральное число – два, пять, семь, двенадцать. Таким образом, можно использовать неограниченное количество позиционных систем счисления. Наименование каждой системы соответствует ее основанию: десятичная, двоичная, семеричная системы.

На слайде представлены некоторые позиционные системы счисления.

Десятичная система счисления оказалась наиболее удобной для любых операций в повседневной жизни.

Компьютеры, как было сказано выше, работают в двоичной системе счисления, на которой основан их внутренний машинный язык обработки информации.

Для специалистов, работающих с различными языками программирования, машинный язык затрудняет анализ работы программы из-за громоздкости записи чисел в двоичной системе. Для того чтобы устранить этот недостаток, используются восьмеричная и шестнадцатеричная системы счисления, из которых числа очень просто преобразуются в двоичную систему.

Восьмеричная система счисления содержит восемь цифр, от ноля до семи. Шестнадцатеричная система счисления состоит из шестнадцати символов, включая все десять цифр от ноля до девяти и шесть символов латинского алфавита. Каждый символ в виде буквы латинского алфавита несёт числовое содержание. Символ *A* – это число десять, символ *B* – одиннадцать, символ *C* – двенадцать, *D* – тринадцать, *E* – четырнадцать. Символ *F* соответствует числу пятнадцать.

На слайде показаны записи чисел 2 и 10 в разных системах счисления.

ЗАПИСЬ ЧИСЛА В ПОЗИЦИОННОЙ СИСТЕМЕ СЧИСЛЕНИЯ

Любое целое число в позиционной системе можно записать в форме многочлена:

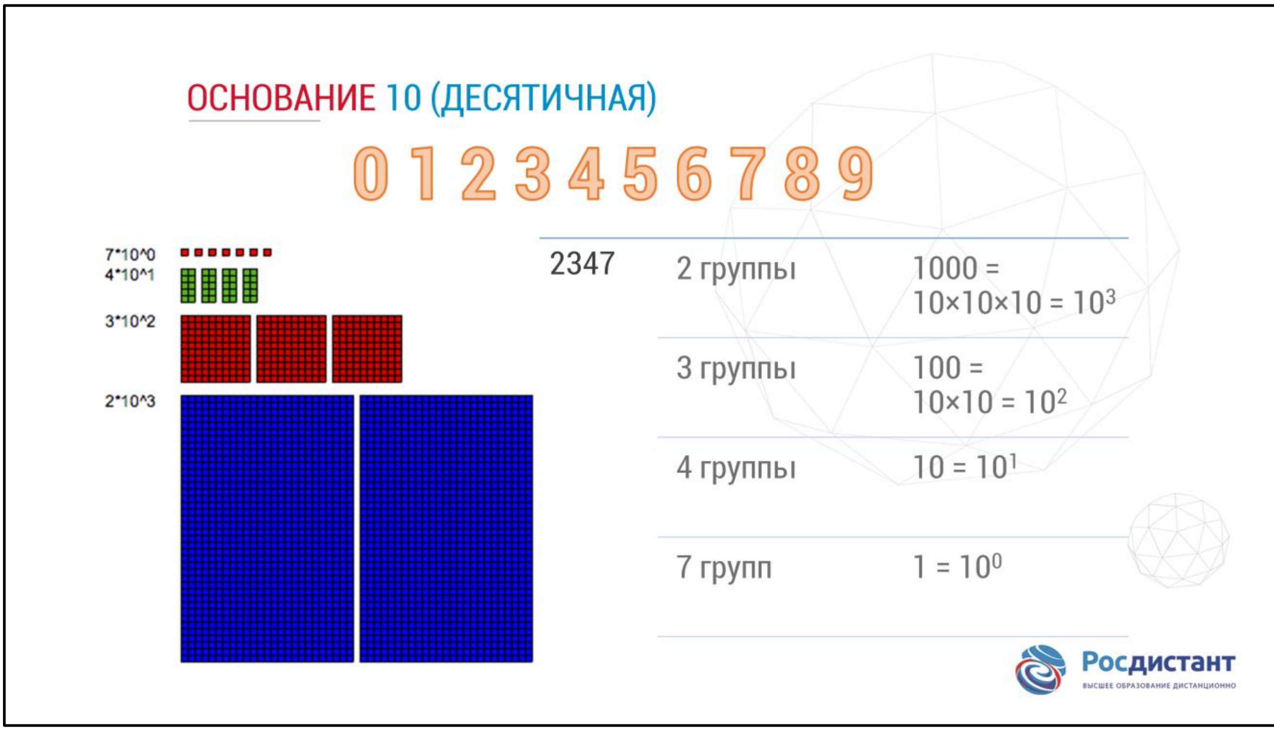
- $X_s = A_n \cdot S^{n-1} + A_{n-1} \cdot S^{n-2} + A_{n-2} \cdot S^{n-3} + \ldots + A_2 \cdot S^1 + A_1 \cdot S^0$
  - где S - основание системы счисления,
  - A – цифры числа, записанного в данной системе счисления,
  - n - количество разрядов числа

Так, например число 465 запишется в форме многочлена следующим образом:

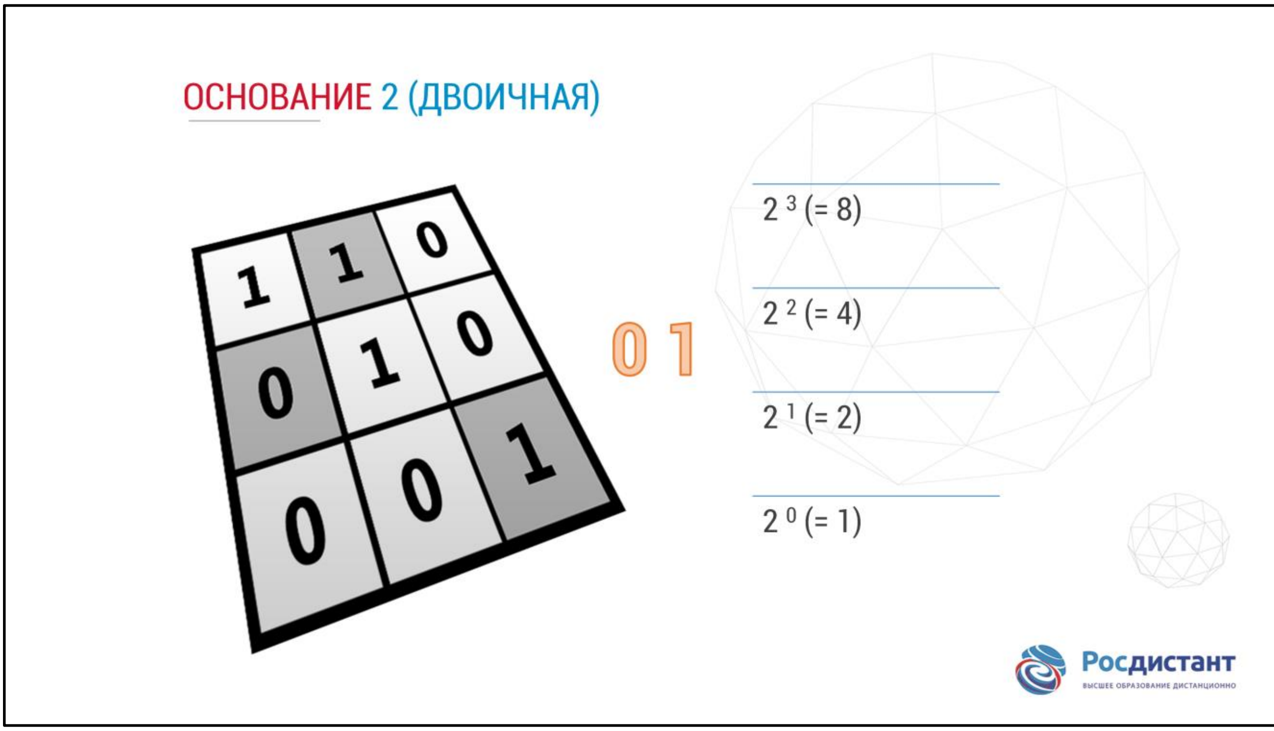
- по основанию 10 - $4*10^2+6*10^1+5*10^0$ (465_{10})
- по основанию 7 - $4*7^2+6*7^1+5*7^0$ $(465_7 = 243_{10})$

Росдистант
ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ ДИСТАНЦИОННО

Позиционные системы счисления работают с возведением в степень основания. Значение цифры – это цифра, умноженная на значение ее места. Значения разряда – это номер основания, возведенный в степень *n*, где *n* – количество других цифр между данной цифрой и точкой счисления. Если данная цифра находится слева от точки счисления, то есть ее значение является целым числом, то *n* положительно или равно нулю. Если цифра находится справа от точки счисления, то есть ее значение дробное, то *n* отрицательно.
В качестве примера используем число 465 в соответствующем основании *b*, которое должно быть не менее 7, поскольку его самая высокая цифра 6.
Если бы число было по основанию 10, то оно было бы равно 465_{10}.
Если бы число было по основанию 7, то оно было бы равным 243_{10}.
$10_b = b$ любого основания *b* [бэ], поскольку $10_b = 1 \times b^1 + 0 \times b^0$.
Например, $10_2 = 2$; $10_3 = 3$; $10_{16} = 16_{10}$. Обратите внимание, что последние «16» указываются по основанию 10. Основание не имеет значения для однозначных цифр.
Таким образом, одно и то же число в разных системах счисления будет иметь разные значения.



Основание 10, или десятичная система, распространилось по всему миру и является наиболее часто используемой системой счисления. Цифры слева и справа от десятичной точки именуются в соответствии с их расстоянием от десятичной точки. Первые десять чисел в порядке их удаления влево от десятичной точки: от 0 до 9. Эти числа продолжаются бесконечно. Справа от десятичной точки расположены одна десятая, одна сотая, одна тысячная, одна десятитысячная, стотысячная, одна миллионная и так далее.
Посмотрим, что происходит математически на примере числа 2347.
Есть 2 группы по тысяче. $1000 = 10 \times 10 \times 10$, что также можно записать как 10^3.
Есть 3 группы по сотне. $100 = 10 \times 10$ или 10^2.
Есть 4 группы по десять. $10 = 10^1$.
Наконец, есть 7 групп по одному. Любое число в степени 0 по определению равно 1. $1 = 10^0$.
Мы знаем, что такое число с основанием 10, потому что мы всегда используем десятичное число, и это для нас естественно. Но если мы поймем закономерности, лежащие в основе base-10, мы сможем лучше понять другие основы систем счисления.



На протяжении истории использовались системы счисления с множеством оснований. Помимо системы с основанием 10, с которой мы наиболее знакомы, наиболее распространены две системы: с основанием 2 и с основанием 60.
В системе счисления с основанием 2, или двоичной, используются только две цифры: 0 и 1. Подсчет в этой системе происходит следующим образом: 0; 1; 10; 11; 100; 101; 110 и так далее.
Чтобы понять десятичное значение этих чисел, представьте систему с основанием 2 в терминах показателей по основанию 2. Значение любого числа в двоичной системе зависит от его места, как показано на слайде:

- $2^3 = 8$;
- $2^2 = 4$;
- $2^1 = 2$;
- $2^0 = 1$.

Значение числа в двоичной системе можно определить так же, как и в десятичной системе.
Любой, кто был воспитан в десятичной системе, может задаться вопросом, в чем смысл использования двоичной системы. На первый взгляд это кажется чрезвычайно сложным. Одно из основных применений двоичной системы – это электрические и электронные системы, в которых переключатель может быть включен или выключен. Например, когда вы нажимаете кнопку на портативном калькуляторе, вы пропускаете электрический ток через микросхемы калькулятора. Ток включает некоторые переключатели, а некоторые выключает.

Если положение включения представлено числом 1, а положение выключения – числом 0, вычисления могут выполняться в двоичной системе.

Система с основанием 60 кажется очень странной. Мы давно привыкли к десятичной системе счисления. Можно понять системы счисления, основанные на двух, – у нас две руки, на пяти – пять пальцев, на десяти – пальцы на обеих руках. Однако шестидесятеричная система используется в системе измерения времени от 60 секунд до минуты и от 60 минут до часа. Она также используется при измерении углов и в навигационных системах, которые измеряют долготу и широту: 60 секунд равны одной угловой минуте, 60 минут равны одному градусу дуги, а 360 градусов дуги равны целому кругу.
Система с основанием 60 нашла применение у шумеров Месопотамии около 3000 лет до н. э. Некоторые ученые предполагают, что применение этой системы связано с двумя денежно-весовыми единицами – шекелем и миной, причём было установлено их соотношение 1 мина = 60 шекелей. Другие предполагают, что это результат наложения двух более древних систем нумерации – с основанием 6 и основанием 10. Рациональное объяснение использования числа 60 в качестве основы состоит в том, что 60 можно разделить на 2, 3, 4, 5, 6, 10, 15, 20 и 30, что упрощает многие вычисления.
В настоящее время шестидесятеричная система используется для измерения углов, географических координат, электронной навигации и времени.
Один час времени делится на 60 минут, а одна минута делится на 60 секунд. Таким образом, измерение времени, такое как 3:23:17, можно интерпретировать как целое шестидесятеричное число без шестидесятеричной точки, что означает: $3 \times 60^2 + 23 \times 60^1 + 17 \times 60^0$ секунд.

Однако каждая из трех шестидесятеричных цифр в этом числе 3, 23 и 17 записана в десятичной системе счисления.
Точно так же практическая единица угловой меры – градус, которых в круге 360. Есть 60 минут дуги в определенной степени и 60 угловых секунд в минуту.

ОСНОВАНИЕ 8 (ВОСЬМИРИЧНАЯ)

Единицы	Десятки	Сотни
1	10	100
2	20	200
3	30	300
4	40	400
5	50	500
6	60	600
7	70	700

1235		
	1 пятьсот двенадцать	512 = $8×8×8 = 8^3$
	2 шестьдесят четыре	64 = $8×8 = 8^2$
	3 восьмерки	$8 = 8^1$
	5 единиц	$1 = 5^0$

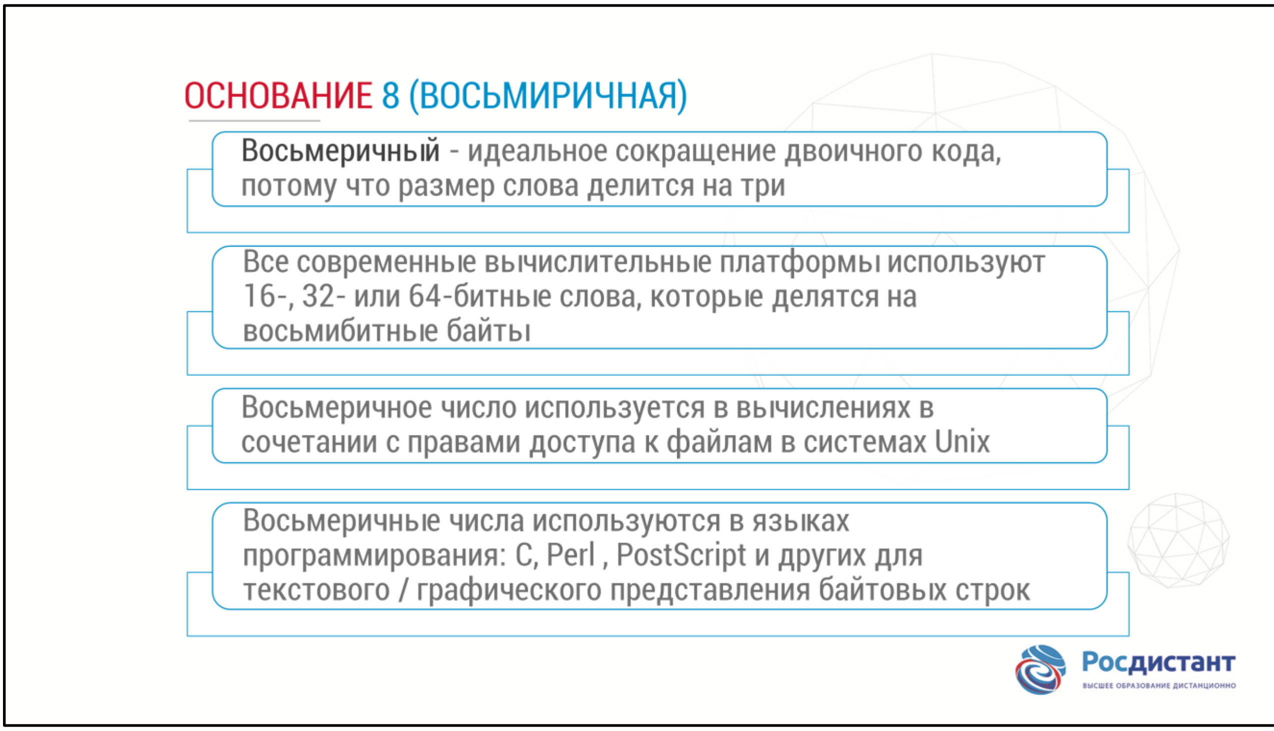
$$1 × 8^3 + 2 × 8^2 + 3 × 8^1 + 5 × 8^0$$

1 … 7 10 … 77 100 … 777

Росдистант
ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ ДИСТАНЦИОННО

Еще две системы счисления являются наиболее известными. Это восьмеричная и шестнадцатеричная системы счисления.
Система счисления по основанию 8 называется восьмеричной. Основание 8 означает, что система основана на числе восемь. В восьмеричной системе мы ограничены только восемью цифрами: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7.
Когда цифры заканчиваются, мы опускаемся до ноля и добавляем единицу слева: мы пишем «один-ноль». Это означает «число после семи» или то, что мы обычно называем «восьмеркой».
Эта система отлично работает, пока мы не дойдем до 77, а затем больше не сможем увеличивать левую цифру. Тогда мы снова перемещаемся влево и записываем один-ноль-ноль.
«Один-ноль-ноль» не означает то же, что мы обычно называем «сотня», поэтому лучше не называть это так. Лучше называть это число «один-ноль-ноль», и это поможет сохранить ясность.
Разберем восьмеричное число 1235.
Здесь 5 «единиц», 3 «восьмерки» как в обычно системе – десятки, 2 «шестьдесят четыре» и 1 «пятьсот двенадцать».
$5 × 1 + 3 × 8 + 2 × 64 + 1 × 512 = 669$
Каждый шаг влево включает умножение на восемь, потому что мы находимся в восьмерке. Если бы была еще одна цифра слева, она бы считалась «четыре тысячи девяносто шесть», поскольку это восемь раз «пятьсот двенадцать», и так далее.

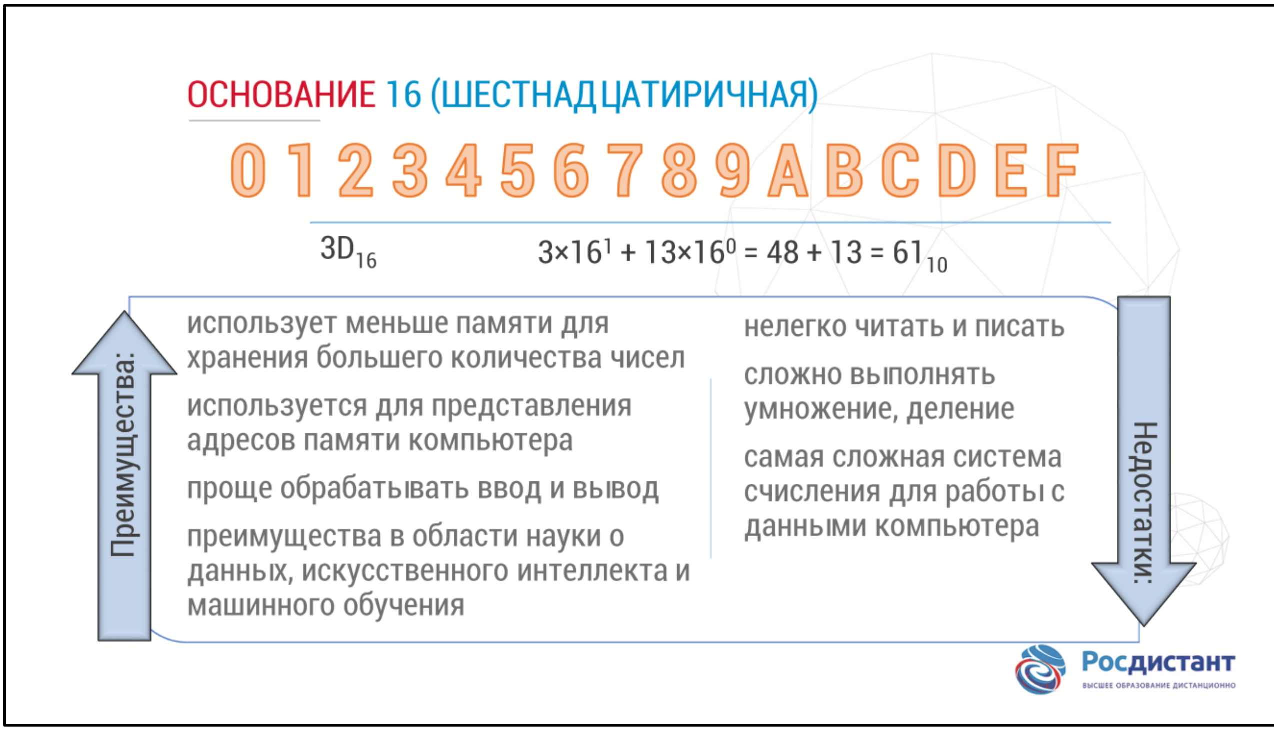
Для восьмеричной системы счисления характерны те же принципы, что и для десятичной.
Во-первых, наша обычная система счета основана на принципе, что каждое десятое число мы начинаем заново и «двигаемся» влево, потому что нам нужно работать только с десятью символами.
Во-вторых, мы понимаем, что в числе десять нет ничего священного. Основание восемь точно такое же, за исключением того, что оно начинается с каждого восьмого числа, потому что имеет восемь символов, с которыми можно работать.



Octal стал широко использоваться в вычислениях, когда такие системы, как UNIVAC 1050, PDP-8, ICL 1900 и мэйнфреймы IBM, использовали 6-битные, 12-битные, 24-битные или 36-битные слова. Восьмеричный код был идеальным сокращением двоичного кода для этих машин, потому что размер их слова делится на три. Каждая восьмеричная цифра представляет три двоичных цифры. Таким образом, две, четыре, восемь или двенадцать цифр могут кратко отображать целое машинное слово.

Все современные вычислительные платформы используют 16-, 32- или 64-битные слова, которые далее делятся на восьмибитные байты. В таких системах потребуется три восьмеричных цифры на байт, причем наиболее значимая восьмеричная цифра представляет две двоичные цифры. Восьмеричное представление 16-битного слова требует 6 цифр, но наиболее значимая восьмеричная цифра представляет только один бит 0 или 1. Это представление не дает возможности легко прочитать самый значимый байт, потому что он размазан по четырем восьмеричным цифрам. Таким образом, шестнадцатеричное число более широко используется в языках программирования сегодня, поскольку две шестнадцатеричные цифры точно определяют один байт.

Восьмеричное число иногда используется в вычислениях вместо шестнадцатеричного, возможно, чаще всего в наше время в сочетании с правами доступа к файлам в системах Unix. Его преимущество состоит в том, что оно не требует дополнительных символов в виде цифр. Шестнадцатеричная система имеет основание 16 и, следовательно, требует шести дополнительных символов помимо 0–9. Она также используется для цифровых дисплеев. Восьмеричные числа используются в некоторых языках программирования: C, Perl, PostScript и других – для текстового или графического представления байтовых строк. Восьмеричное представление может быть особенно удобно с байтами UTF-8, который кодирует группы из 6 бит и где любой начальный байт имеет восьмеричное значение.



Основание 16 также называется шестнадцатеричным. Поскольку мы работаем с основанием 16, у нас должно быть 16 цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и … Цифры закончились, но нам нужно еще шесть. Воспользуемся буквами английского алфавита: A – это десять в «обычных» числах, B – одиннадцать, C – двенадцать, D – тринадцать, E – четырнадцать и F – пятнадцать.

За исключением этих дополнительных цифр, шестнадцатеричное число ничем не отличается от любого другого основания. Конвертируем $3D_{16}$.

Мы имеем: $3D_{16} = 61_{10}$. В данном случае были произведены следующие манипуляции:

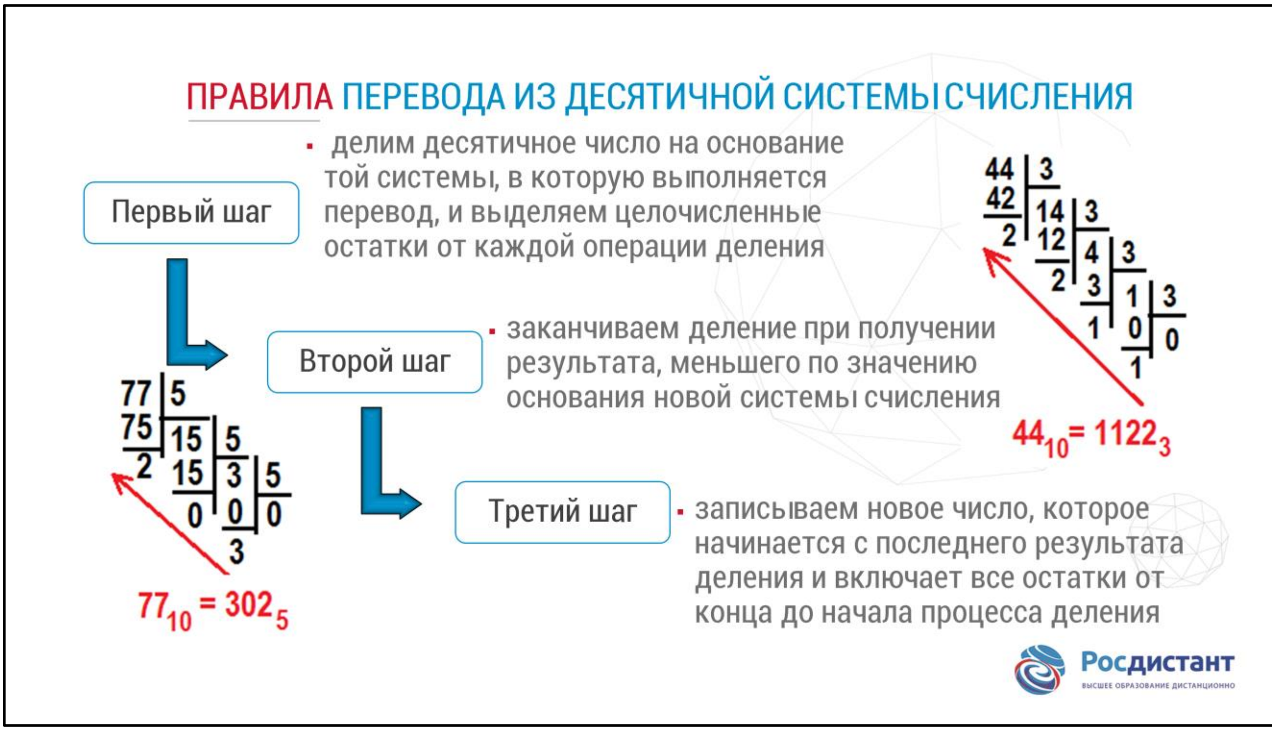
$3D_{16} = 3 \times 16^1 + 13 \times 16^0 = 48 + 13 = 61$.

Шестнадцатеричная система счисления обычно используется в компьютерном программировании и микропроцессорах. Также полезно описывать цвета на веб-страницах. Каждый из трех основных цветов: красный, зеленый и синий – представлен двумя шестнадцатеричными цифрами для создания 255 возможных значений, что дает более 16 миллионов возможных цветов.

Шестнадцатеричная система счисления используется для описания местоположений в памяти для каждого байта. Эти шестнадцатеричные числа компьютерным специалистам легче читать и записывать, чем двоичные или десятичные числа.

Основным преимуществом использования шестнадцатеричных чисел является то, что компьютер использует меньше памяти для хранения большего количества чисел.

Эта система счисления также используется для представления адресов памяти компьютера. Он использует только 4 бита для представления любой цифры в двоичном формате и легко преобразовывается из шестнадцатеричного в двоичный и наоборот. В шестнадцатеричной форме проще обрабатывать ввод и вывод.
Существует множество преимуществ в области науки о данных, искусственного интеллекта и машинного обучения.
Основным недостатком шестнадцатеричной системы счисления является то, что в ней нелегко читать и писать людям. Сложно также выполнять умножение, деление с использованием шестнадцатеричной системы счисления.
Шестнадцатеричные числа – самая сложная система счисления для работы с данными компьютера.



Рассмотрим правила перевода целых чисел из десятичной системы счисления в любую другую. Для простоты ограничимся только целыми числами.

Для перевода целых чисел из десятичной системы счисления в любую другую используется арифметическая операция деления данного числа на основание новой системы счисления.

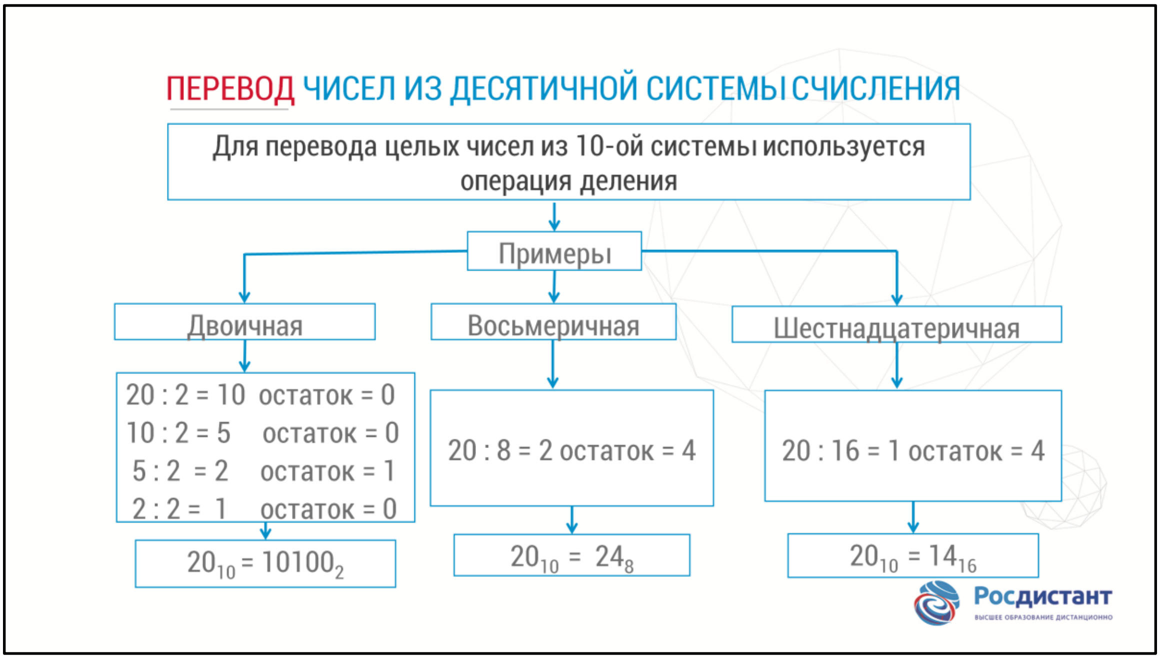
Алгоритм перевода целых чисел из десятичной системы счисления в любую другую включает следующую последовательность действий.

Первое – делим десятичное число на основание той системы, в которую выполняется перевод, и выделяем целочисленные остатки от каждой операции деления.

Второе – заканчиваем деление при получении результата, меньшего по значению основания новой системы счисления. Например, при переводе в восьмеричную систему счисления деление прекращается, когда будет получен остаток от деления, меньший восьми.

Третье – записываем новое число, которое начинается с последнего результата деления и включает все остатки от конца до начала процесса деления.

Применяя данный алгоритм, можно перевести числа из десятичной системы счисления в двоичную, восьмеричную, шестнадцатеричную, троичную и любую другую.



На слайде приведены примеры перевода числа 20 из десятичной системы счисления в двоичную, восьмеричную и шестнадцатеричную.

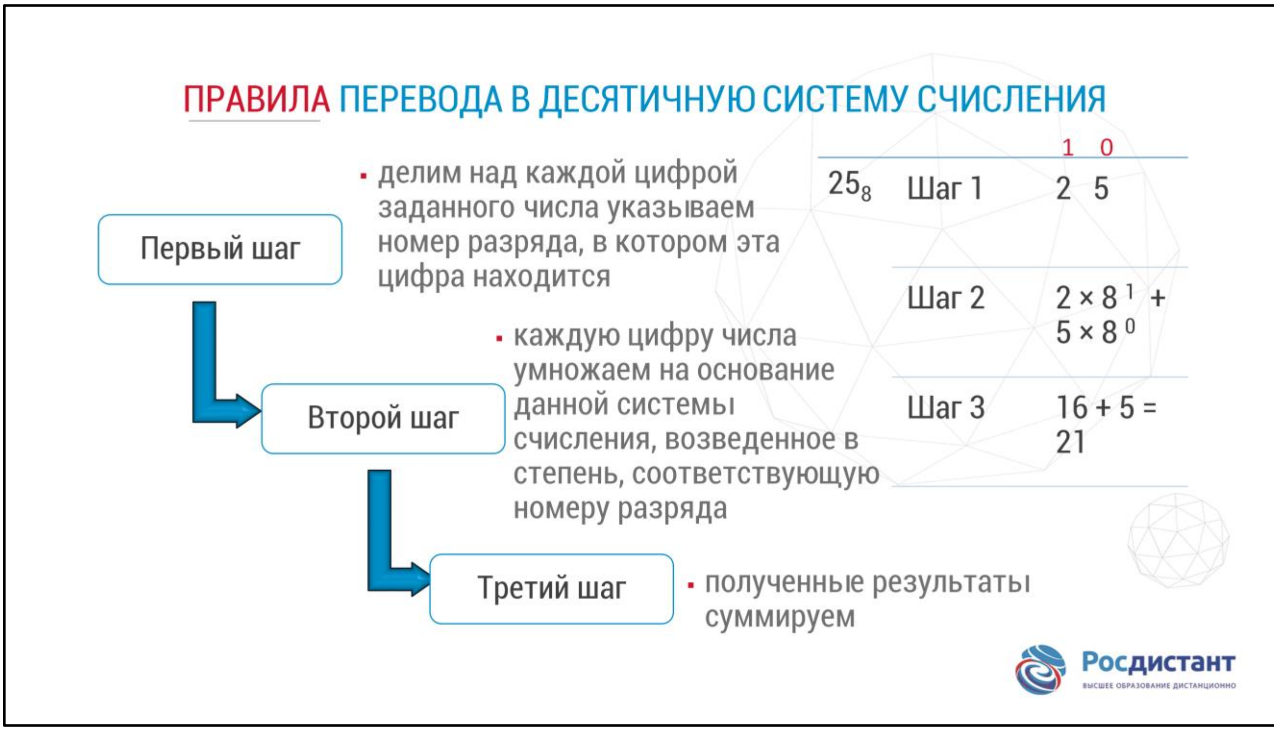
Например, перевод в двоичную систему счисления заканчивается, если последнее частное от деления равно единице. Поэтому запись числа в двоичной системе всегда начинается с единицы.

На слайде видно, что при делении числа 20 на основание, равное 2, было выполнено четыре операции деления, пока не было получено последнее частное, равное единице. Именно с этого последнего частного начинается запись числа в новой системе счисления. Это будет самый высокий разряд в новом числе. Затем записывается ноль, который получен в остатке последней строки. Далее переписываются остатки в других строках снизу вверх.

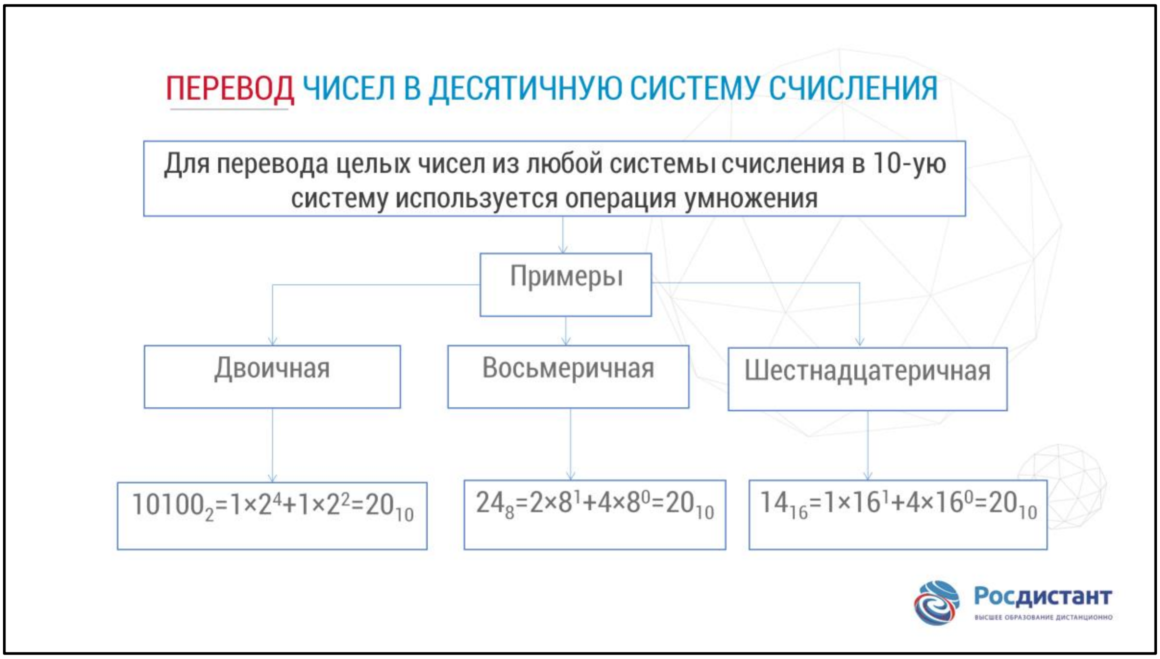
Всего одна операция деления была выполнена при переводе числа 20 в восьмеричную и шестнадцатеричную системы счисления.

На слайде можно увидеть, что с увеличением основания системы счисления запись полученного числа становится короче. В двоичной системе в числе пять цифр, в остальных – по две цифры. Это объясняется возрастанием «веса» одной цифры с увеличением основания системы счисления.

Приведенные примеры продемонстрировали технику перевода чисел из десятичной в другие системы счисления. Приведенная техника показала, что каждый раз мы делили исходное число на разряд основания той системы, в которую хотели перевести исходное число.



Теперь рассмотрим процедуру перевода целых чисел в десятичную систему счисления. Здесь будет использоваться операция умножения.
Учитывая число и его основание, преобразуем его в десятичное. Основание числа может быть любым от 0 до 9 и от A до Z.
Для решения этих задач используется следующий алгоритм.
Первое – над каждой цифрой заданного числа указываем номер разряда, в котором эта цифра находится. Нумерация разрядов числа начинается с ноля и выполняется справа налево. Самая правая цифра числа имеет нулевой разряд, далее справа налево номер разряда каждой цифры увеличивается на единицу.
Второе – каждую цифру числа умножаем на основание данной системы счисления, возведенное в степень, соответствующую номеру разряда.
Третье – полученные результаты суммируем. Сумма дает значение числа в десятичной системе счисления.
Например, рассмотрим число 25 в восьмеричной системе и попробуем перевести его в десятичную. Выполним последовательность шагов.
Шаг 1. Над каждой цифрой поставим номер разряда. Над 5 – разряд 0, над 2 разряд 1.
Шаг 2. Каждую цифру умножим на основание 8, возведенное в степень, обозначенную на шаге 1.
Шаг 3. Сложим последовательно полученные значения. Итог: восьмеричное число 25 равно десятичному числу 21.



Рассмотрим показанные на слайде примеры перевода целых чисел из двоичной, восьмеричной и шестнадцатеричной систем счисления в десятичную.
В примере перевода числа из двоичной системы счисления в десятичную каждая цифра числа умножается на число 2 в степени, соответствующей номеру разряда в числе. Согласно алгоритму перевода, вначале расставляются номера разрядов справа налево, начиная с ноля. В связи с тем, что при умножении на ноль любого числа получается ноль, при формировании итогового десятичного числа будем рассматривать только единицы. Разряды над этими цифрами – 0 и 4. На втором шаге производят умножение и сложение и получают итоговое число в десятичной системе.
При переводе числа из восьмеричной системы счисления в десятичную выполняется возведение в степень числа 8. Для шестнадцатеричной системы используется число 16.
Таким образом, независимо от начального основания системы счисления используется один и тот же алгоритм, который может перевести любое число в десятичное, наиболее привычное нам для счета.

ПЕРЕВОД ДВОИЧНЫХ ЧИСЕЛ В ВОСЬМЕРИЧНЫЕ

Из двоичной в восьмиричную: $10100101011_2 = \underbrace{010}_{2}\ \underbrace{100}_{4}\ \underbrace{101}_{5}\ \underbrace{011}_{3}{}_2 = 2453_8$

Разбиваем число на триады справа налево

Двоичная система счисления	Триады							
	000	001	010	011	100	101	110	111
Восьмеричная система счисления	0	1	2	3	4	5	6	7

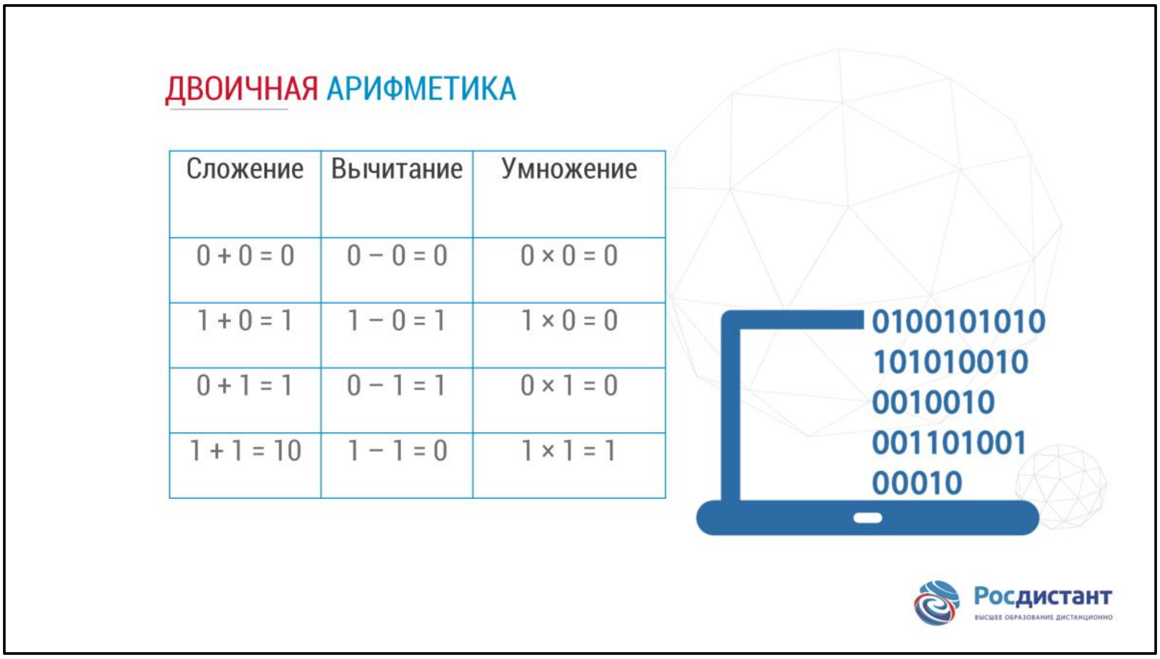
Из восьмиричной в двоичную: $531_8 = \overset{5}{101}\ \overset{3}{011}\ \overset{1}{001}{}_2 = 101011001_2$

Гораздо проще выполняется перевод чисел из двоичной системы счисления в восьмеричную или шестнадцатеричную и обратно.
Основание шестнадцатеричной системы равно двум в степени четыре. Для восьмеричной основание равно двум в степени три. В двоичной оно равно двум в степени один.
В примере, показанном на слайде, приводится перевод числа из двоичной системы счисления в восьмеричную. Для перевода выполним следующую последовательность шагов.
Шаг 1. Двоичное число делится на триады, то есть тройки двоичных разрядов числа, справа налево. Если количество цифр в числе не кратно трём, то самое левое получившееся число дополняется слева нолями до трёх разрядов.
Шаг 2. Каждая триада заменяется восьмеричной цифрой, взятой из таблицы, которая также приведена на слайде.
Шаг 3. Переписываем последовательно полученные восьмеричные значения. Получается новое число в восьмеричной системе счисления.
Аналогично можно выполнить обратный перевод из восьмеричной системы счисления в двоичную, заменив каждую восьмеричную цифру триадой двоичных разрядов из таблицы.
Для перевода восьмеричного числа в двоичное число необходимо каждую его цифру заменить эквивалентной ей двоичной триадой.
Пример. Число 531_8 перевести в двоичную систему счисления, а затем воспользоваться таблицей соответствия значений в различных системах

счисления.
$531_8 = 101011001_2$.

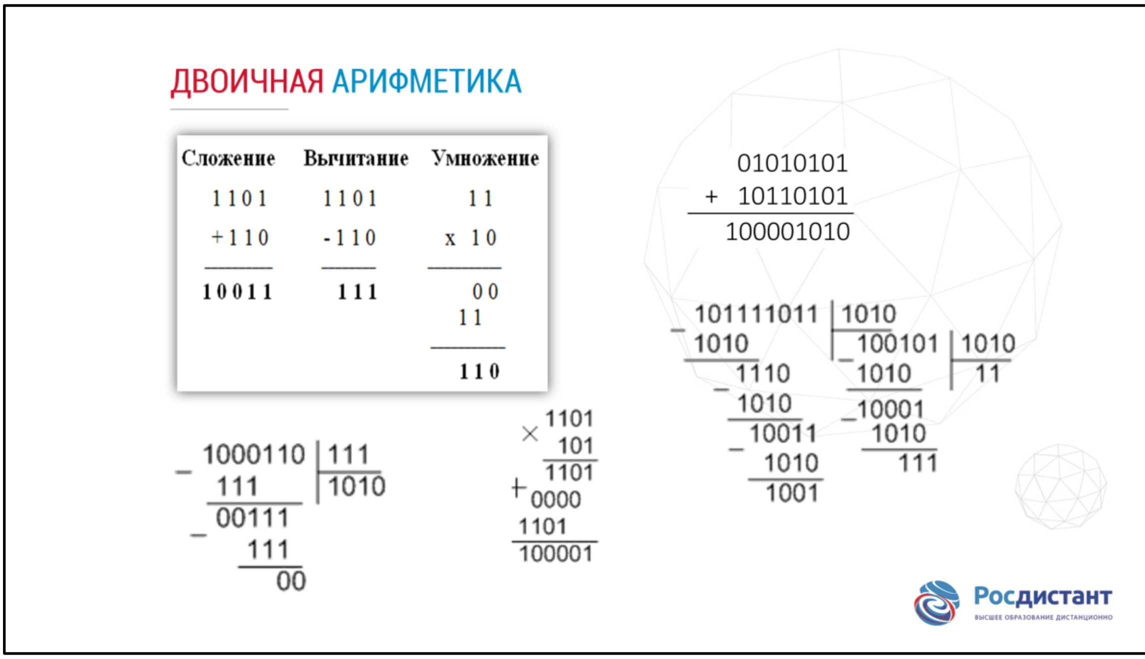
Двоичная система счисления	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111
Шестнадцатеричная система счисления	0	1	2	3	4	5	6	7
Двоичная система счисления	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111
Шестнадцатеричная система счисления	8	9	A(10)	B(11)	C(12)	D(13)	E(14)	F(15)

Далее рассмотрим перевод чисел из двоичной системы счисления в шестнадцатеричную и обратно.
Алгоритм перевода аналогичен описанному выше для восьмеричной системы. Отличие в том, что вместо трёх берутся четыре цифры, называемые тетрадами. Выполняется разбивка числа на тетрады справа налево.
Алгоритм перевода будет выглядеть следующим образом.
Шаг 1. Двоичное число делится на тетрады, то есть четверки двоичных разрядов числа, справа налево. Если количество цифр в числе не кратно четырем, то самое левое получившееся число дополняется слева нолями до четырех разрядов.
Шаг 2. Каждая тетрада заменяется шестнадцатеричной цифрой, взятой из таблицы, которая также приведена на слайде.
Шаг 3. Переписываем последовательно полученные шестнадцатеричные значения. Получается новое число в шестнадцатеричной системе счисления.
Пример перевода двоичного числа в шестнадцатеричное, запись шестнадцатеричных цифр в форме тетрад двоичных разрядов показаны на слайде.
Обратный перевод из шестнадцатеричной системы счисления в двоичную выполняется заменой каждой шестнадцатеричной цифры тетрадой двоичных разрядов.
Пример перевода наглядно показывает процесс выполнения перевода из шестнадцатеричной системы счисления в двоичную.



Сложение	Вычитание	Умножение
0 + 0 = 0	0 − 0 = 0	0 × 0 = 0
1 + 0 = 1	1 − 0 = 1	1 × 0 = 0
0 + 1 = 1	0 − 1 = 1	0 × 1 = 0
1 + 1 = 10	1 − 1 = 0	1 × 1 = 1

Особый интерес с точки зрения организации обработки данных на компьютере представляет выполнение арифметических операций над двоичными числами. Интерес этот вызван тем фактом, что данные в компьютере представляются в двоичном коде. Преобразование данных реализуется посредством арифметических и логических операций над двоичными кодами.
Арифметические операции в двоичной системе счисления похожи на арифметические операции в десятичной системе. Однако необходимо учитывать особенности двоичной системы счисления.
На слайде в таблице представлены операции сложения, вычитания и умножения в двоичной системе счисления.
Если анализировать по таблице операцию сложения, то первые три строки полностью совпадают с правилами сложения в десятичной системе счисления. В четвёртой строке видны отличия. При сложении двух чисел, равных единице, в текущем разряде получается 2. Число 2 в двоичной системе – это аналог числа 10 в десятичной системе. Как и в случае с десятичной системой счисления, в текущем разряде записывается 0, а 1 переносится в соседний слева старший разряд.
Сложение чисел в двоичной системе счисления выполняется справа налево, как и в десятичной системе счисления.



Рассмотрим показанный на слайде пример сложения двоичных чисел.
В нулевом разряде складываются единица и ноль. По таблице находим результат, он равен единице. В этом разряде записывается единица.
Левее, в первом разряде, складываются ноль и единица. Результат также равен единице.
Ещё левее, во втором разряде, складываются две единицы. Две единицы в этом разряде дают ноль, а единица переходит в соседний слева старший разряд. В результате этого в третьем разряде также складываются две единицы. В итоге в третьем разряде записывается ноль, и единица переходит в старший четвёртый разряд.
При выполнении операции вычитания в двоичной системе счисления следует учитывать, что для вычитания из ноля единицы необходимо перенести, иначе говоря, занять, в этот разряд единицу из ближайшего слева разряда, отличного от ноля. При этом занятая единица даёт две единицы в текущем разряде и по единице во всех промежуточных разрядах, через которые осуществляется перенос.
Рассмотрим пример вычитания, приведенный на слайде.
В нулевом разряде из единицы вычитается ноль. Результат равен единице.
В первом разряде из ноля вычитается единица. Из старшего ближайшего разряда, в данном случае из второго, занимается единица, которая в первом разряде даёт две единицы. После вычитания единицы из числа 2 получаем единицу.

Во втором разряде остался ноль. Чтобы вычесть из ноля единицу, занимаем единицу из третьего разряда, которая во втором разряде даёт две единицы. Результат также равен единице.
Операция умножения в двоичной системе счисления похожа на операцию умножения в столбик в десятичной системе счисления. При сложении результатов поразрядного умножения следует соблюдать правила сложения двоичных чисел.
Заметим, что основной арифметической операцией при обработке данных компьютером является сложение. Операция умножения может быть сведена к операциям сложения и сдвига двоичных чисел. Операция вычитания может быть рассмотрена как операция сложения положительного и отрицательного чисел.