Тема 5. Тригонометрические функции произвольного угла, их свойства и элементарные тригонометрические тождества.

Приведем основные тригонометрические формулы, известные вам из курса алгебры и начал математического анализа (5.1 – 5.36).

1. Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента (основные тригонометрические тождества (5.1 - 5.6))

$$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \qquad (5.1)$$

$$tg\ \alpha = \frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha} \qquad (5.2)$$

$$ctg\ \alpha = \frac{cos\,\alpha}{sin\,\alpha} \qquad (5.3)$$

$$tg\ \alpha \cdot ctg\ \alpha = 1 \qquad (5.4)$$

$$1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{sin^2\alpha} \qquad (5.5)$$

$$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{cos^2\alpha} \qquad (5.6)$$

2. Формулы сложения:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \qquad (5.7)$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \qquad (5.8)$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \qquad (5.9)$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \qquad (5.10)$$

$$tg\ (\alpha+\beta) = \frac{tg\ \alpha + tg\ \beta}{1 - tg\ \alpha\ tg\ \beta} \qquad (5.11)$$

$$tg\ (\alpha-\beta) = \frac{tg\ \alpha - tg\ \beta}{1 + tg\ \alpha\ tg\ \beta} \qquad (5.12)$$

3. Формулы кратных аргументов:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \qquad (5.13)$$

$$\cos 2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha = 2cos^2\alpha - 1 = 1 - 2sin^2\alpha \qquad (5.14)$$

$$tg\ 2\alpha = \frac{2\ tg\ \alpha}{1 - tg^2\alpha} \qquad (5.15)$$

$$\sin 3a = 3\sin a - 4\,sin^3 a \quad (5.16)$$

$$\cos 3a = 4\,cos^3 a - 3\cos a \quad (5.17)$$

4. Формулы преобразования сумм или разностей в произведения:

$$\sin a + \sin\beta = 2\sin\frac{a+\beta}{2}\cos\frac{a-\beta}{2} \quad (5.18)$$

$$\sin a - \sin\beta = 2\sin\frac{a-\beta}{2}\cos\frac{a+\beta}{2} \quad (5.19)$$

$$\cos a + \cos\beta = 2\cos\frac{a+\beta}{2}\cos\frac{a-\beta}{2} \quad (5.20)$$

$$\cos a - \cos\beta = -2\sin\frac{a+\beta}{2}\sin\frac{a-\beta}{2} \quad (5.21)$$

$$tg\,\alpha + tg\,\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} \quad (5.22)$$

$$tg\,\alpha - tg\,\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} \quad (5.23)$$

5. Формулы преобразования произведений в суммы или разности:

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)) \quad (5.24)$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)) \quad (5.25)$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)) \quad (5.26)$$

6. Формулы понижения степени:

$$cos^2 a = \frac{1 + cos\,2a}{2} \quad (5.27)$$

$$sin^2 a = \frac{1 - cos\,2a}{2} \quad (5.28)$$

$$cos^3 a = \frac{3\,cos\,\alpha + cos\,3a}{4} \quad (5.29)$$

$$sin^3 a = \frac{3\,sin\,\alpha - sin\,3a}{4} \quad (5.30)$$

7. Формулы половинного аргумента:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \mp\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}} \tag{5.31}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \mp\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}} \tag{5.32}$$

$$tg\,\frac{\alpha}{2} = \mp\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}} \tag{5.33}$$

8. Формулы выражения тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента:

$$\sin\alpha = \frac{2tg\,\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}} \tag{5.34}$$

$$\cos\alpha = \frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}} \tag{5.35}$$

$$tg\;\alpha = \frac{2tg\,\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}} \tag{5.36}$$

9. Формулы приведения:

	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$	$2\pi+\alpha$
$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
$tg\,\alpha$	$ctg\,\alpha$	$-ctg\,\alpha$	$-tg\,\alpha$	$tg\,\alpha$	$ctg\,\alpha$	$-ctg\,\alpha$	$-tg\,\alpha$	$tg\,\alpha$
$ctg\,\alpha$	$tg\,\alpha$	$-tg\,\alpha$	$-ctg\,\alpha$	$ctg\,\alpha$	$tg\,\alpha$	$-tg\,\alpha$	$-ctg\,\alpha$	$ctg\,\alpha$

Четность и нечетность тригонометрических функций:

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha,\ \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

$$tg(-\alpha) = -tg\,\alpha,\qquad ctg(-\alpha) = -ctg\,\alpha$$

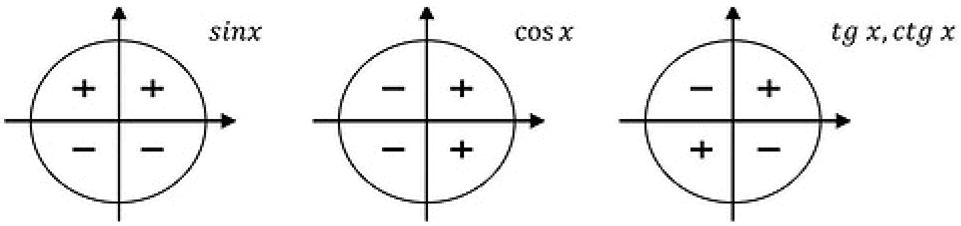

Рисунок 5.1 - Знаки тригонометрических функций

10. Значения тригонометрических функций основных углов:

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	- 1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	- 1	0	1
$tg\ \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-	0
$ctg\ \alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-	0	-

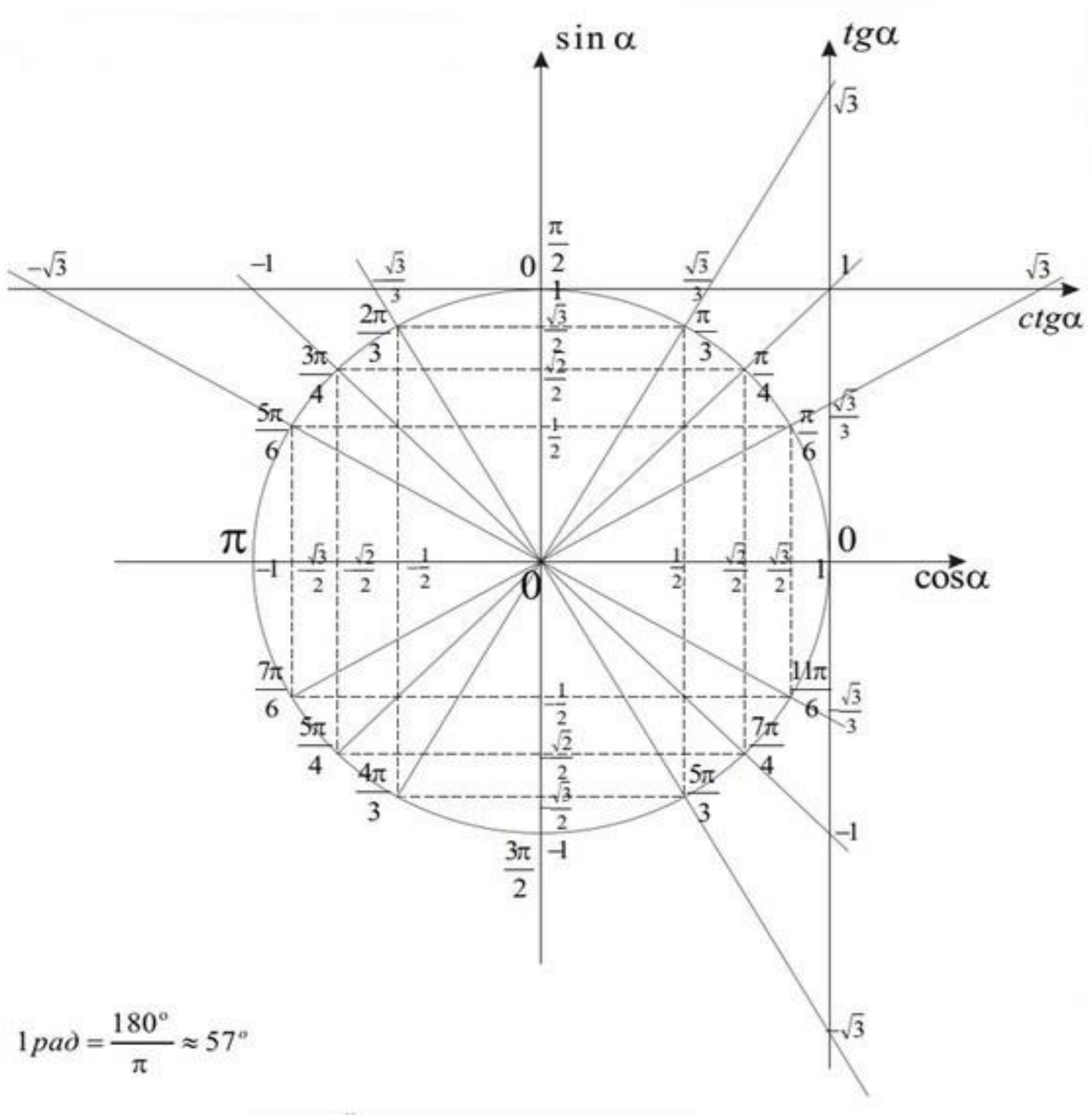

Рисунок 5.2 – Числовая окружность на координатной плоскости

Напомним, что в ходе изучения тригонометрических функций в школьном курсе математики используется понятие *числовой окружности* (рисунок 5.2) – «единичной окружности с установленным соответствием (между действительными числами и точками окружности)» [16], представленной выше.

Пример 1. Вычислить: а) $\sin 75^0 + \cos 75^0$; б) $\cos\frac{11\pi}{12} - \cos\frac{5\pi}{12}$.

Решение: а) применим формулу приведения (п. 9) и формулу (5.18):

$$\sin 75^0 + \cos 75^0 = \sin 75^0 + \cos\left(90^0 - 15^0\right) = \sin 75^0 + \sin 15^0 = 2\sin\frac{75^0 + 15^0}{2} \cdot$$

$$\cdot\cos\frac{75^0-15^0}{2}=2\sin\frac{75^0+15^0}{2}\cos\frac{75^0-15^0}{2}=2\sin 45^0\cos 30^0=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

б) воспользуемся формулой (5.21), получим: $\cos\frac{11\pi}{12}-\cos\frac{5\pi}{12}=$

$$=-2\sin\frac{\frac{11\pi}{12}+\frac{5\pi}{12}}{2}\sin\frac{\frac{11\pi}{12}-\frac{5\pi}{12}}{2}=-2\sin\frac{2\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=-2\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{\pi}{4}=$$

$=-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{6}}{2}$. Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{2};-\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Пример 2. Докажите тождество: а) $\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}=\cos^4\alpha-\sin^4\alpha$;

б) $\cos^2\alpha=(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)$; в) $\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}=\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Доказательство: а) преобразуем левую часть равенства, получим: $\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}=\frac{1-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$. Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством, тогда: $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\cdot(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=\cos^4\alpha-\sin^4\alpha$;

б) преобразуем правую часть равенства: $(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)==1-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha$;

в) найдем разность левой и правой частей равенства, которая должна быть равна нулю: $\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}-\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\cos^2\alpha-(1-\sin^2\alpha)}{\cos\alpha(1-\sin\alpha)}=\frac{\cos^2\alpha-\cos^2\alpha}{\cos\alpha(1-\sin\alpha)}=0$.

Пример 3. Упростите выражение: а) $\left(\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\alpha}\right)\cdot\frac{1-\cos 4\alpha}{\cos(\pi-\beta+\alpha)}$;

б) $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)$; в) $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$.

Решение: а) $\left(\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\alpha}\right)\cdot\frac{1-\cos 4\alpha}{\cos(\pi-\beta+\alpha)}=\frac{\cos\beta\cos\alpha+\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\alpha}\cdot$

$$\cdot\frac{1-\left(\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha\right)}{\cos(\pi-(\beta-\alpha))}=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\cos\alpha}\cdot\frac{1-\left(1-\sin^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha\right)}{-\cos(\beta-\alpha)}=\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}\cdot\frac{2\sin^2 2\alpha}{-1}=$$

$$=\frac{2\sin^2 2\alpha}{-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{2\sin^2 2\alpha}{-\frac{1}{2}\sin 2\alpha}=-4\sin 2\alpha;$$

б) $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)=-2\sin\frac{\frac{\pi}{4}-\beta+\frac{\pi}{4}+\beta}{2}\sin\frac{\frac{\pi}{4}-\beta-\frac{\pi}{4}-\beta}{2}=$

$$=2\sin\frac{\pi}{4}\sin\beta=\sqrt{2}\sin\beta;$$

в) $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right)\cdot$

$$\cdot\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right)=\left(2\sin\frac{\frac{\pi}{4}+\alpha-\frac{\pi}{4}+\alpha}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{4}+\alpha+\frac{\pi}{4}-\alpha}{2}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(2\sin\frac{\frac{\pi}{4}+\alpha+\frac{\pi}{4}-\alpha}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{4}+\alpha-\frac{\pi}{4}+\alpha}{2}\right)=2\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}\cdot 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha=2\sin\alpha\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2\cdot$$

$$\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha.$$

Ответ: а) $-4\sin 2\alpha$; б) $\sqrt{2}\sin\beta$; в) $\sin 2\alpha$.

Пример 4. Разложить выражение на множители:

а) $1-2\sin\alpha$; б) $1+\sin\alpha$; в) $2\sin\alpha+\sqrt{3}$; г) $1-\cos\alpha+\sin\alpha$.

Решение: а) применим формулу (5.19): $1-2\sin\alpha=2\left(\frac{1}{2}-\sin\alpha\right)=$

$$=2\left(\sin 30^0-\sin\alpha\right)=2\cdot 2\cdot\sin\frac{30^0-\alpha}{2}\cos\frac{30^0+\alpha}{2}=4\sin\frac{30^0-\alpha}{2}\cos\frac{30^0+\alpha}{2}.$$

б) с помощью формулы (5.18) получим: $1+\sin\alpha = \sin\frac{\pi}{2}+\sin\alpha =$

$$= 2\sin\frac{\frac{\pi}{2}+\alpha}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{2} = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right);$$

в) применим формулу (5.18): $2\sin\alpha+\sqrt{3} = 2\left(\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$

$$= 2\left(\sin\alpha+\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\cdot 2\sin\frac{\alpha+\frac{\pi}{3}}{2}\cos\frac{\alpha-\frac{\pi}{3}}{2} = 4\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right).$$

г) $1-\cos\alpha+\sin\alpha = \cos 0^0-\cos\alpha+\sin\alpha = -2\sin\frac{0+\alpha}{2}\sin\frac{0-\alpha}{2}+\sin\alpha =$

$$= -2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(-\frac{\alpha}{2}\right)+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right).$$

Ответ: а) $4\sin\frac{30^0-\alpha}{2}\cos\frac{30^0+\alpha}{2}$; б) $2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$;

в) $4\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$; г) $2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)$.

Пример 5. Вычислить: $\left(\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)\right)\cdot\sin\frac{\pi}{12}$.

Решение: *Первый способ*. Воспользуемся формулой сложения (5.7), получим: $\left(\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)\right)\cdot\sin\frac{\pi}{12} =$

$$= \left(\sin\alpha\cos\frac{\pi}{12}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{12}+\sin\alpha\cos\frac{\pi}{12}-\cos\alpha\sin\frac{\pi}{12}\right)\cdot\sin\frac{\pi}{12} =$$

$$= 2\sin\alpha\cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12} = \sin\alpha\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\sin\alpha.$$

Второй способ. Применим формулу (5.18): $\left(\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)\right)\cdot\sin\frac{\pi}{12} =$

$$= 2\sin\frac{\alpha+\frac{\pi}{12}+\alpha-\frac{\pi}{12}}{2}\cos\frac{\alpha+\frac{\pi}{12}-\alpha+\frac{\pi}{12}}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{12} = 2\sin\alpha\cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\sin\alpha.$$

Ответ: $\frac{1}{2}\sin\alpha.$

Пример 6. Доказать тождество: $\frac{\sin\alpha+\sin 3\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha}=tg 2\alpha.$

Доказательство: преобразуем левую часть равенства, получим:

$$\frac{2\sin\frac{\alpha+3\alpha}{2}\cos\frac{\alpha-3\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha+3\alpha}{2}\cos\frac{\alpha-3\alpha}{2}}=\frac{2\sin 2\alpha\cos(-\alpha)}{2\cos 2\alpha\cos(-\alpha)}=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=tg 2\alpha.$$

Пример 7. Доказать тождество: $tg\alpha+tg\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$ и на основе его вычислить $tg 267^0+tg 93^0$.

Доказательство: преобразуем левую часть равенства: $tg\alpha+tg\beta=$

$=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$. Так как $tg\alpha+tg\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$, то $tg 267^0+tg 93^0=\frac{\sin 360^0}{\cos 267^0\cos 93^0}=0.$ Ответ: 0.

Пример 8. Вычислить $tg\ \alpha$, если $sin\ \alpha=(-0{,}6)$ и $\alpha\in(\pi;\ \frac{3\pi}{2})$.

Решение. С помощью основного тригонометрического тождества $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ найдем $\cos\alpha$: $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-(-0{,}6)^2}=$ $=-\sqrt{1-0{,}36}=-0{,}8$, так как $\alpha\in(\pi;\ \frac{3\pi}{2})$ – 3 четверти и $\cos\alpha<0$. Тогда: $tg\ \alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{-0{,}6}{-0{,}8}=\frac{3}{4}=0{,}75.$ Ответ: $tg\ \alpha=\ 0{,}75.$