Тема 12. Основные понятия и формулы для вычисления площадей и объемов многогранников и тел вращения.

При решении задач по данной теме рекомендуется использовать таблицы 12.1 - 12.2 [20].

Таблица 12.1 - Многогранники. Вычисление площадей и объемов многогранников.

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Площадь поверхности куба (S)	$S = 6\,a^2$	a – длина ребра куба
Площадь боковой поверхности прямой призмы ($S_{бок}$)	$S_{бок} = P \cdot h$	P – периметр основания h – высота (длина бокового ребра)
Площадь боковой поверхности наклонной призмы ($S_{бок}$)	$S_{бок} = P \cdot l$	P – периметр перпендикулярного сечения l – длина бокового ребра
Площадь боковой поверхности прямого параллелепипеда ($S_{бок}$)	$S_{бок} = P \cdot l$	P – периметр основания l – длина бокового ребра
Площадь боковой поверхности правильной пирамиды ($S_{бок}$)	$S_{бок} = \frac{1}{2} P \cdot a$ $S_{бок} = \frac{Q}{cos\varphi}$	P – периметр основания a – апофема Q – площадь основания φ – величина двугранного угла при стороне основания
Площадь боковой поверхности	$S_{бок} = \frac{P + P_1}{2} \cdot h$	P, P_1 – периметры оснований

правильной усеченной пирамиды ($S_{бок}$)		h – апофема
Объем куба (V)	$V = a^3$	a – длина ребра куба
Объем прямоугольного параллелепипеда (V)	$V = a\,b\,c$	a, b, c – измерения параллелепипеда
Объем призмы (параллелепипеда) (V)	$V = S_{осн} \cdot h$, $V = Q \cdot l$	$S_{осн}$ – площадь основания h – высота Q – площадь перпендикулярного сечения l – длина бокового ребра

Продолжение Таблицы 12.1

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Объем пирамиды (V)	$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h$	$S_{осн}$ – площадь основания h – высота
Объем усеченной пирамиды (V)	$V = \frac{1}{3} h\,(Q_1 + \sqrt{Q_1 Q_2} + Q_2)$	Q_1, Q_2 – площади оснований h – высота
Отношение объемов тетраэдров $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, имеющих равные трехгранные углы с вершинами A и A_1	$\frac{V_{ABCD}}{V_{A_1B_1C_1D_1}} =$ $= \frac{AB \cdot AC \cdot AD}{A_1B_1 \cdot A_1C_1 \cdot A_1D_1} =$	V_{ABCD} и $V_{A_1B_1C_1D_1}$ - объемы тетраэдров $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$

Таблицы 12.2 - Фигуры вращения

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Площадь боковой поверхности цилиндра ($S_{бок}$)	$S_{бок} = 2\pi R \cdot h$	R – радиус основания h – высота
Площадь полной поверхности цилиндра ($S_{полн}$)	$S_{полн} = 2\pi R(h + R)$	R – радиус основания h – высота
Площадь боковой поверхности конуса ($S_{бок}$)	$S_{бок} = \pi R l$	R – радиус основания l – длина образующей
Площадь полной поверхности конуса ($S_{полн}$)	$S_{полн} = \pi R(l + R)$	R – радиус основания l – длина образующей
Площадь боковой поверхности усеченного конуса ($S_{бок}$)	$S_{бок} = \pi l(R + r)$	R, r – радиусы оснований l – длина образующей
Площадь сферы (S)	$S = 4\pi R^2$	R – радиус сферы
Площадь сегментной поверхности (S)	$S = 2\pi R \cdot H$	R – радиус сферы H – высота сегментной поверхности
Площадь шарового пояса (S)	$S = 2\pi R \cdot H$	R – радиус шара H – высота шарового пояса

Продолжение Таблицы 12.2

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)

Площадь поверхности шарового сектора (S)	$S = \pi R \cdot (2h + \sqrt{2Rh - h^2})$	R – радиус шара h – высота шарового сегмента
Объем цилиндра (V)	$V = \pi R^2 \cdot H$	R – радиус основания H – высота
Объем конуса (V)	$V = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot H$	R – радиус основания H – высота
Объем усеченного конуса (V)	$V = \frac{1}{3} \pi H (r^2 + R r + R^2)$	R, r – радиусы оснований H – высота
Объем шара (V)	$V = \frac{4}{3} \pi R^3$; $V = \frac{1}{6} \pi d^3$	R – радиус шара d – диаметр шара
Объем шарового слоя (V)	$V = \frac{\pi H}{6} (3r_1^2 +$ $+ 3r_2^2 + H^2)$	r_1, r_2 – радиусы оснований шарового слоя H – высота
Объем шарового сегмента (V)	$V = \pi H^2 (R - \frac{H}{3})$ $V = \frac{\pi H}{6} (3r^2 + H^2)$	R – радиус шара H – высота r – радиус основания шарового сегмента
Объем шарового сектора (V)	$V = \frac{2}{3} \pi R^2 \cdot H$	R – радиус шара H – высота

Далее подробнее рассмотрим основные понятия и формулы по теме «Фигуры вращения. Вычисление площадей и объемов тел вращения», которая вызывает наибольшие затруднения у школьников.

Цилиндр и его свойства.

Определение. «Тело, которое образуется при вращении прямоугольника вокруг прямой, содержащей его сторону, называется цилиндром.

Напомним, что *любое сечение цилиндра*, перпендикулярное его оси, есть *круг*, а такое же *сечение боковой поверхности цилиндра – окружность*; центры этих окружностей и кругов – точки пересечения секущих плоскостей и оси цилиндра. *Осевым сечением цилиндра* вращения является прямоугольник, стороны которого равны диаметру основания и образующей цилиндра. Цилиндр, осевое сечение которого – квадрат, называют *равносторонним цилиндром*.

Для построения изображения *правильной призмы, вписанной в цилиндр* следует: 1) построить изображение цилиндра; 2) построить изображение правильного многоугольника, вписанного в верхнее основание цилиндра; 3) через вершины построенного многоугольника провести образующие цилиндра; 4) в нижнем основании цилиндра последовательно соединить штриховыми линиями концы этих образующих; 5) выделить видимые и невидимые линии (отрезки) изображаемых фигур» [23].

Площади боковой и полной поверхностей цилиндра вычисляются по формулам: $S_{бок} = 2\pi Rh$, $S_{полн} = 2\pi R(R + h)$; *объем цилиндра* - $V_{цил.} = \pi \cdot R^2 \cdot h$.

Приведем *понятие призмы, вписанной в цилиндр,* и рассмотрим решение соответствующей задачи.

Определение. «Призма называется *вписанной в цилиндр*, если основания призмы вписаны в основания цилиндра. Отметим, что цилиндр в этом случае называют *описанным около призмы*.

Боковые ребра призмы соединяют соответственные вершины ее оснований, вписанных в основания цилиндра. Эти вершины лежат на окружностях оснований цилиндра. Образующие цилиндра соединяют соответственные точки окружностей его оснований и параллельны боковым ребрам призмы. Следовательно, *боковые ребра вписанной в цилиндр призмы – образующие цилиндра»* [26].

Задача 1. «Около правильной четырехугольной пирамиды, каждое ребро которой равно 10, описан цилиндр так, что все вершины пирамиды находятся на окружностях оснований цилиндра. Найдите *объем и площадь боковой поверхности цилиндра*.

Решение. Пусть вершина P данной пирамиды PABCD лежит на окружности нижнего основания описанного около этой пирамиды цилиндра, центрами оснований которого служат точки O и O_1 (рисунок 12.1).

Так как каждое ребро пирамиды равно 10, то в правильном ΔABP находим PH = $\frac{10\sqrt{3}}{2}$ = $5\sqrt{3}$, тогда: OH= $\frac{1}{3}$ PH = $\frac{5\sqrt{3}}{3}$; OP = $\frac{2}{3}$ PH = $\frac{10\sqrt{3}}{3}$. Радиус R основания цилиндра равен OP, т.е. R = $\frac{10\sqrt{3}}{3}$.

Если точки H и M – середины противоположных сторон соответственно AB и CD квадрата ABCD (основания данной пирамиды), то MH = 10, причем середина *K* отрезка HM является серединой высоты OO_1 цилиндра. Так как плоскость MPH перпендикулярна плоскости основания цилиндра и проходит через центр O его основания, то высота OO_1 цилиндра лежит в этой плоскости, и OO_1 = 2OK. Находим OK.

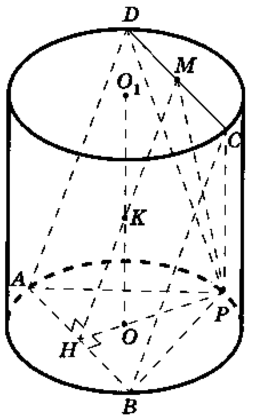


Рисунок 12.1

В прямоугольном ΔHOK имеем: OK = $\sqrt{HK^2 - OH^2}$ = $=\sqrt{25 - \frac{25}{3}} = \sqrt{\frac{50}{3}} = \frac{5\sqrt{6}}{3}$. Поэтому OO_1 = 2$\cdot\frac{5\sqrt{6}}{3}$ $=\frac{10\sqrt{6}}{3}$.

Тогда площадь боковой поверхности цилиндра равна $2\pi\cdot R\cdot OO_1 = =2\pi\cdot\frac{10\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{10\sqrt{6}}{3} = \frac{200\pi\sqrt{2}}{3}$ (кв.ед.), его объем равен $\pi\cdot R^2\cdot OO_1 = \pi\cdot(\frac{10\sqrt{3}}{3})^2\cdot\frac{10\sqrt{6}}{3} = \frac{1000\pi\sqrt{6}}{9}$ (куб.ед.)» [23].

Ответ: $\frac{200\pi\sqrt{2}}{3}$ (кв.ед.). $\frac{1000\pi\sqrt{6}}{9}$ (куб.ед.).

Конус и его свойства.

Определение. «*Конус* – это тело, которое образуется при вращении прямоугольного треугольника вокруг прямой, содержащей его катет. Отрезок оси вращения, заключенный внутри конуса, называется *осью конуса.*

Поверхность, полученная при вращении гипотенузы, называется *боковой поверхностью конуса,* а ее площадь – *площадью боковой поверхности конуса.* Объединение боковой поверхности конуса и его основания называется *полной поверхностью конуса*, а ее площадь называется *площадью полной поверхности конуса* или, короче, *площадью поверхности конуса*.

Напомним, что: а) все осевые сечения конуса – равные равнобедренные треугольники; б) угол при вершине любого из этих треугольников называют углом при вершине осевого сечения конуса; в) конус, в осевом сечении которого правильный треугольник, называется равносторонним; г) если секущая плоскость проходит через вершину конуса (но не содержит его ось) и пересекает основание конуса, то в сечении конуса этой плоскостью также получается равнобедренный треугольник.

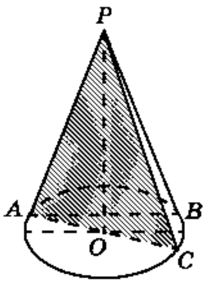


Рисунок 12.2

Для изображения конуса достаточно построить: 1) эллипс, изображающий окружность основания конуса; 2) центр O этого эллипса (рисунок 12.2); 3) отрезок OP, перпендикулярный плоскости основания и изображающий высоту конуса; 4) касательные прямые PA и PB из точки P к эллипсу (A и B – точки касания; касательные PA и PB проводят с помощью линейки на глаз). При этом, необходимо обратить особое внимание на следующий важный факт: отрезок AB, соединяющий точки касания образующих PA и PB к эллипсу, ни в коем случае не является диаметром эллипса, т. е. отрезок AB не содержит центра O эллипса. Следовательно, ∆ABP – не осевое сечение конуса. Осевым же сечением конуса является ∆ ACP, где отрезок AC проходит через центр O эллипса (при этом, образующая PC не является касательной к эллипсу). Для достижения наглядности изображения невидимую часть эллипса изображают штрихами.

Площадь боковой поверхности конуса находится как площадь ее развертки и вычисляется по формуле: $S_{бок} = \pi \cdot R \cdot l$» [20].

Рассмотрим *понятие правильной пирамиды, вписанной в конус*. Отметим, что «для построения *изображения правильной пирамиды, вписанной в конус*, следует: 1) построить изображение конуса; 2) построить изображение правильного многоугольника, вписанного в основание конуса; 3) через вершины построенного многоугольника провести образующие конуса - боковые ребра пирамиды; 4) выделить видимые и невидимые линии изображенных фигур. При этом высота этой правильной пирамиды проходит через центр окружности, описанной около ее основания, и расположена на прямой пересечения биссекторных плоскостей двугранных углов при ее боковых ребрах» [23].

Объем конуса вычисляется по формуле: $V_{конуса} = \frac{1}{3}\pi\cdot R^2\cdot h$.

Шар. Сфера.

Определения. «Шаром называется множество всех точек пространства, находящихся от данной точки на расстоянии, не большем данного R (R > 0). Эта точка называется *центром шара*, а данное расстояние *R – радиусом шара*.

Сферой называется множество всех точек пространства, находящихся от данной точки на расстоянии, равном данному R. Данные точка и расстояние *R* называются соответственно *центром* и *радиусом сферы*.

Радиусом шара называют также всякий отрезок, соединяющий центр шара с точкой шаровой поверхности. Отрезок, соединяющий две точки шаровой поверхности и проходящий через центр шара, называется *диаметром шара*. Концы любого диаметра шара называются *диаметрально противоположными точками шара*. Отрезок, соединяющий две любые точки шаровой поверхности и не являющийся диаметром шара, называют *хордой шара (сферы). Шар – тело вращения, сфера- поверхность вращения*.

Сечением шара плоскостью, перпендикулярной его оси вращения *l* и пересекающей шар, является *круг*, а сечением сферы такой плоскостью – *окружность этого круга*; *центр круга (окружности)* есть точка пересечения секущей плоскости с осью *l*.

Плоскость, проходящая через центр шара (сферы), называется *диаметральной плоскостью шара* (*сферы*). Сечением шара диаметральной плоскостью является круг, радиус которого равен радиусу шара. Такой круг называется *большим кругом*, а его окружность – *большой окружностью*, большая окружность является пересечением сферы и ее диаметральной плоскости. Отметим, что если *сечение сферы диаметральной плоскостью* изображено в виде эллипса, то концы диаметра сферы, перпендикулярного этой плоскости, находятся не на окружности (абрисе), «изображающей» сферу, а внутри круга этой окружности, причем положение концов этого диаметра зависит от формы эллипса» [20].

Необходимо знать, что:

1) «если расстояние d от центра шара (сферы) до данной плоскости:

– *меньше* радиуса R шара (сферы), то пересечением шара (сферы) с плоскостью является круг (окружность). *Центром этого круга* (этой окружности) является основание перпендикуляра, проведенного из центра шара (сферы) на данную плоскость, или сам центр шара (сферы), если плоскость проходит через этот центр. Для радиуса r сечения выполняется: $r = \sqrt{R^2 - d^2}$;

– *равно* радиусу R шара (сферы), то плоскость имеет с шаром (сферой) только одну общую точку и является касательной к сфере в этой точке.

2) *если расстояние от центра шара (сферы) до данной плоскости больше* радиуса R шара (сферы), то плоскость не имеет с шаром (сферой) общих точек;

3) *для шара (сферы) выполняются следующие метрические соотношения*:

– диаметр шара (сферы), делящий его хорду пополам, перпендикулярен этой хорде;

– отрезки всех касательных прямых, проведенных к шару из одной расположенной вне шара точки, равны между собой (они образуют поверхность конуса с вершиной в данной точке, а точки касания этих прямых - окружность основания этого конуса);

– произведение длин отрезков хорд шара, проходящих через одну и ту же внутреннюю точку шара, есть величина постоянная (равная R^2 - a^2, где R – радиус шара, a – расстояние от центра шара до данной точки);

– если из одной и той же точки вне шара проведены к нему секущая и касательная, то произведение длины отрезка всей секущей на длину отрезка её внешней части равно квадрату длины отрезка касательной (и равно a^2 - R^2, где R – радиус шара, a – расстояние от центра шара до данной точки)» [23].

Задача 2. «Сфера радиуса r касается двух взаимно перпендикулярных плоскостей. Найдите радиус наименьшей сферы, касающейся этих двух плоскостей и данной сферы» [26].

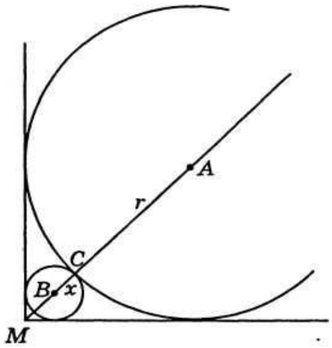


Рисунок 12.3

Решение. Пусть точка A – центр данной сферы радиуса r, касающейся двух взаимно перпендикулярных плоскостей, точка B – центр наименьшей сферы, касающейся этих двух плоскостей и данной сферы, C – точка касания этих сфер. Центры A и B принадлежат биссектору данного двугранного угла.

На рисунке 12.3 изображено сечение рассматриваемых сфер и двугранного угла плоскостью, проходящей через центры A и B этих сфер перпендикулярно ребру двугранного угла (M – точка пересечения этого ребра и плоскости сечения).

Если BC = x – длина искомого радиуса, то имеем: AM = $r\sqrt{2}$, BM = $x\sqrt{2}$. Тогда AM – BM = AC + CB или $r\sqrt{2} - x\sqrt{2}$ = $r + x$, откуда: $x(\sqrt{2}+1) = r(\sqrt{2}$ -1) $\Rightarrow$ x = $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} r = r(3-2\sqrt{2})$. Ответ: $r(3-2\sqrt{2})$.

Сфера и три взаимно перпендикулярные плоскости.

Известно, что при решении *задач на комбинации сферы с кубом и прямоугольным параллелепипедом* часто используют определенные соотношения: если сфера радиуса r вписана в трехгранный угол, все плоские углы которого прямые, то для расстояния m от центра сферы до ребра трехгранного угла справедливо: $m = r\sqrt{2}$, а для расстояния d от центра этой сферы до вершины трехгранного угла выполняется: $d = r\sqrt{3}$ » [23].

Рассмотрим решение некоторых задач.

Задача 3. «Сфера радиуса r касается каждой из трех попарно перпендикулярных плоскостей. Найдите радиус сферы, касающейся этих трех плоскостей и данной сферы» [26].

Решение. Пусть А – общая точка трех данных плоскостей, точка В - центр сферы ω радиуса r, О и R – соответственно центр и радиус сферы ω_1, касающейся этих трех плоскостей и сферы ω.

Возможны два случая: 1) сфера ω_1 расположена между сферой ω и точкой А; 2) сфера ω расположена между сферой ω_1 и точкой А.

Случай 1. Пусть С – точка касания сфер. Тогда: АО = $R\sqrt{3}$, АВ = $r\sqrt{3}$, ОС= R, ВС = r. Так как ОВ = ОС + ВС = АВ – ОА, то $r\sqrt{3} - R\sqrt{3} = r + R$ или $R(\sqrt{3}+1) = r(\sqrt{3}-1)$, откуда $R = \frac{r(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}+1} = r(2-\sqrt{3}).$

Случай 2. Пусть К – точка касания сфер. Тогда: АО = $R\sqrt{3}$, АВ = $r\sqrt{3}$, ОК= R, ВК = r. Так как ОВ = ОК + ВК = ОА – АВ, то $R\sqrt{3} - r\sqrt{3} = r + R$ или

$R(\sqrt{3}-1) = r(\sqrt{3}+1)$, откуда $R = \frac{r(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}-1} = r(2+\sqrt{3}).$ Ответ: $r(2-\sqrt{3});\ r(2+\sqrt{3}).$

Задача 4. «Сфера с центром Н радиуса 6 касается всех сторон квадрата ABCD. Чему равно расстояние от центра сферы до плоскости квадрата, если его сторона равна 6» [26].

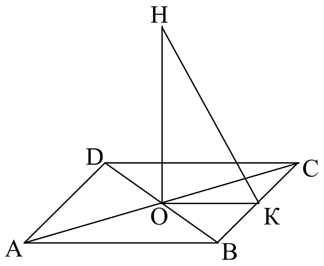


Рисунок 12.4

Решение. Так как сфера касается всех сторон квадрата ABCD, то ее пересечением с плоскостью квадрата является окружность с центром $O = AC \cap BD$ (рисунок 12.4), вписанная в этот квадрат, при этом $OH \perp (ABC)$. Тогда точками касания сферы со сторонами квадрата являются середины его сторон – точки касания вписанной в квадрат окружности.

Пусть точка K – середина стороны BC данного квадрата, значит, K – точка касания сферы с этой стороной.

Так как касательная к окружности перпендикулярна ее радиусу, проведенному в точку касания, то $OK \perp BC$, откуда $HK \perp BC$ (по теореме о трех перпендикулярах), при этом HK = 6 – радиус сферы, OK = 3 - радиус окружности сечения сферы. В прямоугольном ΔHOK находим искомое расстояние: OH = $\sqrt{HK^2 - OK^2}$ = $\sqrt{6^2 - 3^2}$ =$3\sqrt{3}$. Ответ: $3\sqrt{3}$.

Задача 5. «Сфера с центром H касается всех сторон правильного треугольника ABC. Чему равен радиус сферы, если расстояние от ее центра до плоскости треугольника равно $2\sqrt{6}$, а сторона треугольника равна 12» [26].

Решение. Пусть AK, BT – медианы правильного треугольника ABC (рисунок 12.5); $O = AK \cap BT$. Так как сфера касается всех сторон правильного треугольника ABC, то ее пересечением с плоскостью этого треугольника является окружность с центром в точке O, вписанная в него, при этом $OH \perp (ABC)$. Значит, точки касания сферы со сторонами треугольника - середины его сторон – точки касания вписанной в треугольник окружности.

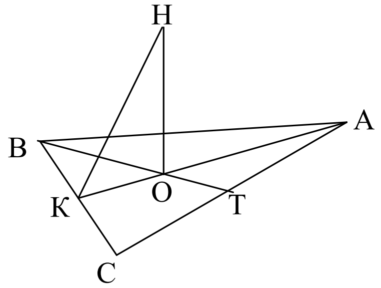


Рисунок 12.5

Точка K – середина стороны BC треугольника ABC и является точкой касания вписанной в него окружности, значит, точкой касания сферы с этой стороной. Поэтому отрезок HK – радиус нашей сферы. Найдем радиус HK.

В прямоугольном ΔKOH с катетами OH = $2\sqrt{6}$ и OK = $2\sqrt{3}$ находим: HK = $\sqrt{OH^2 + OK^2}$ = = $\sqrt{(2\sqrt{6})^2 + (2\sqrt{3})^2}$ = 6. Ответ: 6.

Задача 6. «Сфера с центром H касается всех сторон правильного шестиугольника ABCDEF. Чему равен радиус сферы, если расстояние от ее центра до плоскости шестиугольника равно $4\sqrt{6}$, а сторона шестиугольника равна 8» [26].

Решение. Так как сфера касается всех сторон правильного шестиугольника ABCDEF, то ее пересечением с плоскостью этого шестиугольника является окружность с центром O = FC ∩ BE (рисунок 12.6), вписанная в этот шестиугольник, при этом OH $\perp$ (ABC). Тогда точками касания сферы со сторонами шестиугольника являются середины его сторон – точки касания вписанной в шестиугольник окружности.

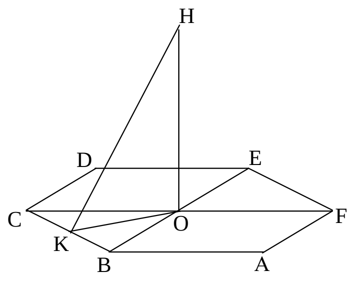


Рисунок 12.6

Пусть точка K – середина стороны BC шестиугольника ABCDEF, значит, K – точка касания сферы с этой стороной, а отрезок HK – радиус сферы. Так как OH = $4\sqrt{6}$ – расстояние от центра сферы до плоскости шестиугольника, OK = $4\sqrt{3}$ - радиус окружности сечения сферы, то в прямоугольном ΔHOK находим радиус HK сферы: HK = $\sqrt{OH^2 + OK^2}$ = = $\sqrt{(4\sqrt{6})^2 + (4\sqrt{3})^2}$ =12. Ответ: 12.

Задача 7. «$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб с ребром 12. Сфера с центром O касается всех ребер этого куба. Найдите: а) положение центра O сферы; б) радиус сферы; в) расстояния от центра сферы до вершины, грани и ребра куба» [26].

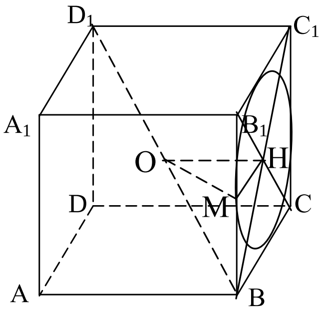


Рисунок 12.7

Решение. Сфера с центром O касается всех ребер куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, поэтому ее пересечением с гранями куба являются равные окружности, вписанные в его грани – равные квадраты (рисунок 12.7). Значит центр O сферы равноудален от всех граней куба, следовательно, совпадает с его центром –точкой пересечения диагоналей куба.

Пусть точка H – центр окружности пересечения сферы с гранью BCC_1B_1, M – точка касания этой окружности с ребром BB_1.Тогда: MH = 6 – радиус этой окружности; $OH \perp (B_1BC)$, $OH = \frac{1}{2}AB = 6$ – *расстояние от центра O сферы до грани куба.*

Радиус OM сферы (M – точка касания сферы с ребром куба, значит, точка сферы) находим в прямоугольном ΔOMH: $OM = \sqrt{OH^2 + MH^2} = = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$. Так как $OM \perp BB_1$ (по теореме о трех перпендикуляров), то $OM = 6\sqrt{2}$ – *расстояние от центра сферы до ребра куба.*

Расстояние OB от центра сферы до вершины данного куба равно половине его диагонали BD_1, то есть *равно* $\frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$.

Ответ: центр сферы - центр куба; $6\sqrt{2}$ - радиус сферы; 6 - расстояние от центра сферы до грани куба; $6\sqrt{3}$ - расстояние от центра сферы до вершины куба; $6\sqrt{2}$ – расстояние от центра сферы до ребра куба.

Задача 8. «В куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ помещены два касающиеся друг друга равных шара. При этом первый шар касается всех граней куба, содержащих вершину A, второй - всех граней куба, содержащих вершину C. Найдите радиусы этих шаров, если ребро куба равно 17» [26].

Решение. Обозначим: R – радиус данных шаров ω_1 и ω_2. Пусть точки $T \in AC_1$ и $K \in CA_1$ – их центры; H и M – точки касания данных шаров с гранью ABCD куба (рисунок 12.8), тогда $KM \perp (ABC)$, $TH \perp (ABC)$ (как радиусы, проведенные в точки касания).

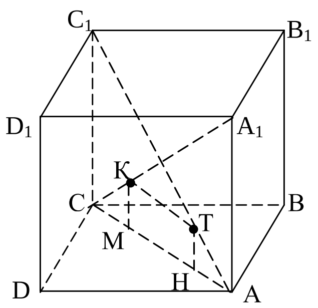


Рисунок 12.8

Так как $(AA_1C) \perp (ABC)$ (по признаку перпендикулярности двух плоскостей) и $K \in (AA_1C)$, $T \in (AA_1C)$, то $H \in AC$ и $M \in AC$, где AC = $(AA_1C) \cap (ABC)$. Тогда AH + HM + + MC = AC = $17\sqrt{2}$, при этом MH = KT = 2R (расстояние между центрами данных касающихся шаров).

Ввиду того, что AT = CK = $R\sqrt{3}$, TH = KM = R, то AH = MC = $R\sqrt{2}$. Значит: 2$R\sqrt{2}$ + 2R =$17\sqrt{2}$, откуда $R = \dfrac{17\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}+1)}$ = $\dfrac{17(2-\sqrt{2})}{2}$ = $8{,}5\cdot(2-\sqrt{2})$. Ответ: $8{,}5\cdot(2-\sqrt{2})$.

Используемая и рекомендуемая литература

1. Атанасян Л.С. Геометрия, 7-9: учеб. для общеобразоват. учрежд. / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. – 15-е изд. - М.: Просвещение, 2005. - 384 с.

2. Балаян Э.Н. Репетитор по математике для старшеклассников и поступающих в вузы: задачи трех уровней сложности (типа A, B, C), 1000 задач с решениями, 3000 задач для самостоятельного решения, олимпиадные задачи, тесты для подготовки к ЕГЭ / Э. Н. Балаян. - 8-е изд., перераб. и доп. - Ростов-на-Дону: Феникс, 2010. - 763, [1] с.: ил.; 21 см. - (Абитуриент).

3. Бахтина Т.П. Математика. Подготовка к централизованному тестированию «с нуля» / Т.П. Бахтина, С.А. Барвенов. - 2-е изд. - Минск: Издательство «ТетраСистемс», 2011. – 288 с.

4. Берникова И.К. Математика для гуманитариев [Электронный ресурс]: учеб.-метод. пособие / И.К. Берникова, И.А. Круглова. - Омск: Изд-во Ом. гос. ун-та, 2016. - 200 с.

5. Веременюк В.В. Тренажер по математике для подготовки к централизованному тестированию и экзамену / В.В. Веременюк. - 3-е изд. - Минск: Тетралит, 2019. - 176 с/

6. Грес П.В. Математика для бакалавров [Электронный ресурс]: универсальный курс для студентов гуманит. направлений: [учеб. пособие] / П.В. Грес. - [Изд. 2-е, перераб. и доп.]. - Москва: Логос, 2015. - 288 с.: ил.

7. Жафяров А.Ж. Профильное обучение математике старшеклассников: учебно-дидактический комплекс / А.Ж. Жафяров. — Новосибирск: Сибирское университетское издательство, 2017. — 468 с.

8. Казиев В.М. Введение в математику [Электронный ресурс]: учеб. пособие / В. М. Казиев. - 2-е изд., испр. - Москва: ИНТУИТ, 2016. - 197 с. - (Основы информационных технологий).

9. Кытманов А.М. Математика [Электронный ресурс]: адаптационный курс: учеб. пособие / А.М. Кытманов, Е.К. Лейнартас, С.Г. Мысливец. - Санкт-Петербург: Лань, 2013. - 287 с.: ил. - (Учебники для вузов. Специальная литература).

10. Лисичкин В. Т. Математика в задачах с решениями: учебное пособие / В.Т. Лисичкин, И.Л. Соловейчик. - 7-е изд., стер. - Санкт-Петербург: Лань, 2020. - 464 с.

11. Математика. Адаптационный курс: учеб. пособие / ЗЕНШ при СФУ; сост.: А.М. Кытманов, Е.К. Лейнартас, С.Г. Мысливец. - Красноярск ИПК СФУ, 2009. - 196 с.

12. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы: учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин и др.- М.: Просвещение, 2015. - 463 с.

13. Математика [Электронный ресурс]: учебник / М. С. Ананьева [и др.]. - Пермь : Пермский гос. гуманит.-пед. ун-т, 2014. - 172 с.

14. Меняйлов А. И. Математический практикум [Электронный ресурс]: учеб. пособие для вузов / А. И. Меняйлов, М. А. Меняйлова. - Москва: Акад. проект, 2016. - 191 с. - (Gaudeamus).

15. Миронова С.В. Практикум по решению задач школьной математики: применение Web-квест технологии [Электронный ресурс]: учеб.-метод. пособие / С.В. Миронова, С.В. Напалков. - Изд. 2-е, перераб. - Санкт-Петербург: Лань, 2018. - 120 с.: ил. - (Учебники для вузов. Специальная литература).

16. Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа. 10-11 кл.: учеб. для общеобразоват. учреждений / А. Г. Мордкович. - 2-е изд. – М..: Мнемозима, 2001. - 335 с.

17. Потоскуев Е.В. В единстве логической и графической культуры залог решения геометрических задач / Е.В. Потоскуев // Математическое образование. – 2012. - №1(61). – С. 30-40.

18. Потоскуев Е.В., Звавич Л.И. Геометрия. 10 кл.: учебник для общеобразовательных учреждений с углубленным и профильным изучением математики. – М.: Дрофа, 2003-2012.

19. Потоскуев Е.В., Звавич Л.И. Геометрия. 10 кл.: задачник для общеобразовательных учреждений с углубленным и профильным изучением математики. – М.: Дрофа, 2003-2012.

20. Потоскуев Е. В., Звавич Л. И. Геометрия. 11 кл.: учебник для общеобразовательных учреждений с углубленным и профильным изучением математики. – М.: Дрофа, 2003-2012.

21. Потоскуев Е.В., Звавич Л.И. Геометрия. 11 кл.: задачник для общеобразовательных учреждений с углубленным и профильным изучением математики. – М.: Дрофа, 2003-2012.

22. Потоскуев Е.В. Методическое пособие к учебнику Е.В. Потоскуева, Л.И. Звавича «Геометрия. 10 класс» / Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич, Л.Я. Шляпочник. – М.: Дрофа, 2004. – 224 с.

23. Потоскуев Е.В. Методическое пособие к учебнику Е.В. Потоскуева, Л.И. Звавича «Геометрия. 11 класс» / Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич, Л.Я. Шляпочник. – М.: Дрофа, 2005. – 220 с.

24. Потоскуев Е.В., Звавич Л.И. Математика. Алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10 кл. Углублённый уровень. Учебник. – М.: Дрофа, 2014.

25. Потоскуев Е.В., Звавич Л.И. Математика. Алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10 кл. Углублённый уровень. Задачник. – М.: Дрофа, 2014.

26. Потоскуев Е.В., Звавич Л.И. Геометрия. 11 кл.: учебник для общеобразовательных учреждений с углубленным и профильным изучением математики. – М.: Дрофа, 2014.

27. Потоскуев Е.В., Звавич Л.И. Геометрия. 11 кл.: задачник для общеобразовательных учреждений с углубленным и профильным изучением математики. – М.: Дрофа, 2014.

28. Решение задач по математике. Адаптивный курс для студентов технических вузов: учебное пособие / В.В. Гарбарук, В.И. Родин, И.М. Соловьева, М.А. Шварц. - 2-е изд., стер. - Санкт-Петербург: Лань, 2018. - 688 с.

29. Симонов А.Я. Система тренировочных задач и упражнений по математике / А.Я. Симонов, Д.С. Бакаев, А.Г. Эпельман и др. – М.: Просвещение, 1991. – 208 с.

30. Стойлова Л.П. Теоретические основы начального курса математики: учебн. пос. – М.: Издат. центр «АКадемия», 2014. – 272 с.

31. Турецкий В. Я. Математика и информатика: учеб. пособие для студ. вузов, обуч. по гуманит. направлениям и спец./ В.Я. Турецкий. - 3-е изд., перераб. и доп. - Москва: ИНФРА-М, 2010. - 558 с. (Высшее образование). - Библиогр.: с. 557-558.

32. Федеральный институт педагогических измерений. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://fipi.ru/.

33. Шипачев В. С. Начала высшей математики [Электронный ресурс]: учеб. пособие / В.С. Шипачев. - Изд. 5-е, стер. - Санкт-Петербург: Лань, 2013. - 382 с. (Учебники для вузов. Специальная литература).

34. Элементарная математика в помощь высшей [Электронный ресурс]: учеб. пособие / сост. И. К. Берникова, И. А. Круглова. - Омск: Изд-во Ом. гос. ун-та, 2016. - 118 с.

35. Элементарная математика: Арифметика. Алгебра. Тригонометрия [Электронный ресурс]: учеб. пособие / авт.-сост. В. П. Краснощекова [и др.]; Пермский гос. гуманит.-пед. ун-т. - Пермь: ПГГПУ, 2014. - 131 с.

36. Ященко И.В. ОГЭ 2017. Математика 9 класс. 3 модуля. Основной государственный экзамен. 30 вариантов типовых тестовых заданий / И.Р. Высоцкий, Л.О. Рослова, Л.В. Кузнецова и др.; под ред. И.В. Ященко. – М.: Издательство «Экзамен», МЦНМО, 2017. – 167 с.

Тема 11. Треугольник, четырехугольник, n-угольники. Окружность и круг.

Треугольник. Четырехугольник. Площади фигур.

Представим *основные теоремы*, используемые при решении задач по данной теме.

«**Теорема 1** (*о замечательных точках и линиях треугольника*):

– три медианы треугольника пересекаются в одной точке (эта точка называется *центроидом треугольника*) и делятся этой точкой в отношении 2:1, считая от вершины; три высоты треугольника пересекаются в одной точке (эта точка называется *ортоцентром треугольника*); три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке (эта точка является *центром окружности, вписанной в данный треугольник*); три серединных перпендикуляра к сторонам треугольника пересекаются в одной точке (эта точка является *центром окружности, описанной около данного треугольника*);

– ортоцентр H треугольника, его центроид M и центр O описанной окружности лежат на одной прямой (она называется *прямой Эйлера*), причем OM : MH = 1: 2 (рисунок 11.1);

– основания высот треугольника, середины его сторон и середины отрезков, соединяющих ортоцентр треугольника с его вершинами, лежат на одной окружности (она называется *окружностью Эйлера* или *окружностью девяти точек*) (рисунок 11.2): центр этой окружности совпадает с серединой отрезка, соединяющего ортоцентр и центр описанной окружности; радиус ее равен половине радиуса описанной окружности» [18].

Рисунок 11.1

Рисунок 11.2

«**Теорема 2** (*теорема Менелая*). Пусть A_1, B_1, C_1 - три точки, лежащие на сторонах соответственно BC, CA, AB треугольника ABC, или на их продолжениях (рисунок 11.3). Точки A_1, B_1, C_1 тогда и только тогда лежат на одной прямой, если: $\left|\frac{AC_1}{C_1B}\right| \cdot \left|\frac{BA_1}{A_1C}\right| \cdot \left|\frac{CB_1}{B_1A}\right| = 1$.

Теорема 3 (*теорема Чевы*). Пусть A_1, B_1, C_1 - три точки, лежащие на сторонах соответственно BC, CA, AB треугольника ABC, или на их продолжениях (рисунок 11.4, а, б). Для того, чтобы прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекались в одной точке, необходимо и достаточно чтобы: $\left|\frac{AC_1}{C_1B}\right| \cdot \left|\frac{BA_1}{A_1C}\right| \cdot \left|\frac{CB_1}{B_1A}\right| = 1$» [24].

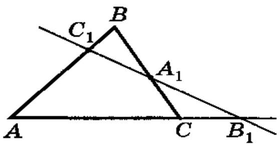
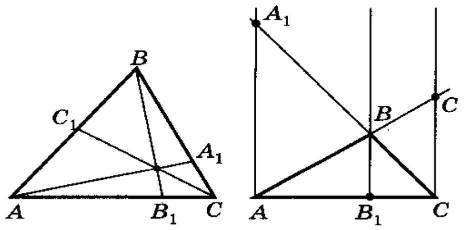


Рисунок 11.3



а) б)

Рисунок 11.4

«**Теорема 4.** Биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные сторонам этого треугольника, заключающих данный угол: BD:DC = AB:BC (рисунок 11.5).

Теорема 5. Средние линии треугольника делят его на четыре равных треугольника (рисунок 11.6).

Теорема 6. Середины сторон выпуклого четырехугольника являются вершинами

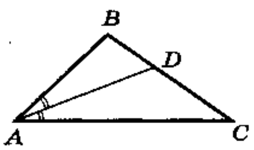


Рисунок 11.5

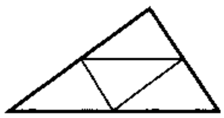


Рисунок 11.6

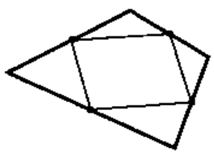


Рисунок 11.7

параллелограмма (рисунок 11.7).

Теорема 7 (*признак прямоугольного треугольника*). Если в треугольнике одна из медиан равна половине стороны, к которой она проведена, то этот треугольник прямоугольный» [18].

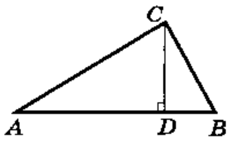


Рисунок 11.8

«**Теорема 8**. В прямоугольном треугольнике (рисунок 11.8): а) высота, проведенная из вершины прямого угла на гипотенузу, является средней пропорциональной величиной между проекциями катетов на гипотенузу: $CD^2 = AD \cdot BD$; б) каждый катет является средней пропорциональной величиной между гипотенузой и проекцией этого катета на гипотенузу: $AC^2 = AB \cdot AD$; $BC^2 = AB \cdot BD$.

Теорема 9. Если R и r - радиусы соответственно описанной и вписанной окружностей прямоугольного треугольника, катеты которого равны *a* и *b*, а гипотенуза - *c*, то $r = \frac{a+b-c}{2}$, $R + r = \frac{a+b}{2}$ » [24].

«**Теорема 10.** Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

Теорема 11. (*теорема синусов*). Во всяком треугольнике ABC со сторонами BC = *a*, CA = *b*, AB = *c* выполняется соотношение: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$, где R - радиус описанной окружности.

Теорема 12. (*теорема косинусов*). Во всяком треугольнике ABC со сторонами BC = *a*, CA = *b*, AB = *c* выполняется соотношение:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$» [18].

«**Теорема 13** (*о площади треугольника*):

- площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту (рисунок 11.9): $S = \frac{1}{2} a \cdot h$;

- площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними (рисунок 11.10): $S = \frac{1}{2} ab \sin C$;

- площадь треугольника равна половине произведения периметра треугольника на радиус вписанной в него окружности (рисунок 11.11): S = $\frac{1}{2}(a+b+c)\cdot r$;

- площадь треугольника со сторонами a, b и c вычисляется по формуле (формуле Герона): S = $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p=\frac{a+b+c}{2}$;

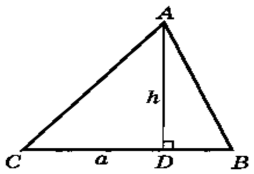


Рисунок 11.9

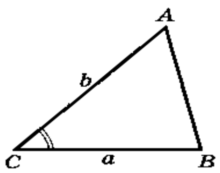


Рисунок 11.10

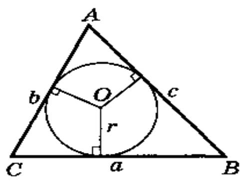


Рисунок 11.11

- площадь треугольника со сторонами a, b и c вычисляется по формуле: S = $\frac{abc}{4R}$, где R - радиус описанной окружности;

- отношение площадей двух подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия этих треугольников;

- отношение площадей двух треугольников, имеющих общее основание (рисунок 11.12), равно отношению высот этих треугольников: $S_{\Delta ABC}:S_{\Delta ABD}$ = CE:DK;

- отношение площадей двух треугольников, имеющих равные высоты (рисунок 11.13), равно отношению оснований этих треугольников: $S_{\Delta AEC}:S_{\Delta BEC}$ = AE:BE;

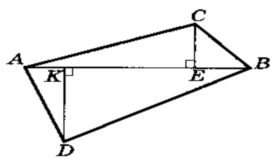


Рисунок 11.12

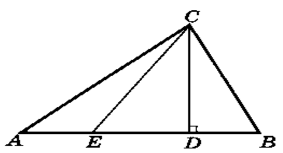


Рисунок 11.13

- отношение площадей двух треугольников, имеющих равный угол, равно отношению произведений длин сторон этих треугольников, заключающих этот угол: $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta MPK}} = \frac{AB \cdot AC}{MP \cdot MK}$, ($\angle BAC = \angle PMK$)» [24].

«**Теорема 14** (*о площади четырехугольника*):

- площадь *выпуклого четырехугольника* равна половине произведения длин его диагоналей на синус угла между ними (рисунок 11.14): S = $\frac{1}{2} mn \sin\varphi$;

- площадь *выпуклого четырехугольника* равна половине произведения его периметра на радиус вписанного круга (рисунок 11.15): S = $\frac{1}{2}(a+b+c+d) \cdot r$;

- площадь *трапеции* равна произведению полусуммы ее оснований на высоту (произведению средней линии на высоту);

- площадь *параллелограмма* равна произведению длин двух его сторон на синус угла между ними (рисунок 11.16);

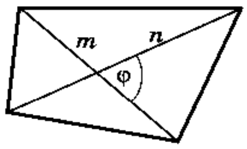


Рисунок 11.14

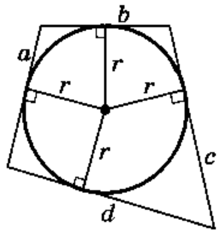


Рисунок 11.15

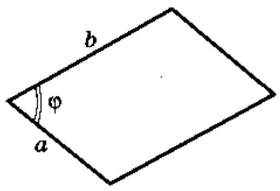


Рисунок 11.16

- площадь *ромба* равна половине произведения его диагоналей» [18].

Приведем примеры решения задач.

Задача 1. «Две медианы треугольника, равные 9 и 12, взаимно перпендикулярны. Найдите длину третьей медианы этого треугольника.

Решение. Построение данного треугольника начинаем с проведения двух взаимно перпендикулярных прямых. Пусть O - точка их пересечения (рисунок 11.17). На одной из этих прямых выбираем точку A и строим точку P (по разные стороны от точки O) так, чтобы выполнялось AO:OP = 2:1. Аналогично, на другой прямой выбираем точку B и строим точку H так, чтобы BO:OH = 2:1. Точки A и B принимаем за вершины заданного треугольника и получаем третью вершину C = AH ∩ BP.

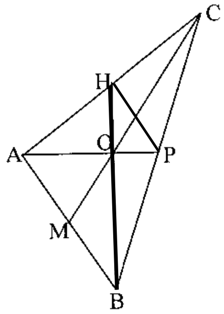


Рисунок 11.17

Докажем, что BH и AP - медианы треугольника ABC. Из соотношений AO:OP = BO:OH = 2:1 следует подобие треугольников AOB и POH с равными вертикальными углами при вершине O. Поэтому HP $\parallel$ AB и HP = 0,5AB. Это означает, что точки H и P - середины сторон соответственно AC и BC треугольника ABC, то есть, AP и BH - его медианы. Теперь приступаем к *«вычислительному» этапу решения этой задачи*. Пусть AP = 9 и BH = 12 - медианы в ΔABC. Найдем длину медианы CM. По свойству медиан треугольника имеем: AO:OP = BO:OH = 2:1 $\Rightarrow$ AO = $\frac{2}{3}$ AP = $\frac{2}{3}\cdot 9 = 6$; BO = $\frac{2}{3}$ BH = $\frac{2}{3}\cdot 12 = 8$. Тогда по теореме Пифагора в прямоугольном ΔAOB: AB = $\sqrt{AO^2+BO^2}$ = $\sqrt{6^2+8^2}$ =10. Так как OM - медиана этого треугольника, проведенная из вершины прямого угла, то OM = $\frac{1}{2}$ AB = $\frac{1}{2}\cdot 10 = 5$. Имеем: MO:OC = 1:2, значит: CM = 3MO = 3·5 = 15» [17]. Ответ: 15.

Задача 2. Найдите площадь треугольника ABC, если AB = 26 см, AC = 30 см и длина медианы AM равна 14 см.

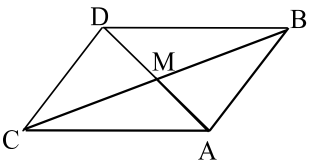


Рисунок 11.18

Решение. Достроим треугольник ABC до параллелограмма ABDC (рисунок 11.18), в котором M - середина AD. Тогда AD = 28, и по формуле Герона находим $S_{ABD} = \sqrt{42 \cdot 16 \cdot 12 \cdot 14} = 336$, что составляет половину площади параллелограмма ABDC, которая, в свою очередь, равна удвоенной площади треугольника ABC. Значит, $S_{\Delta ABC} = 336$ (см^2). Ответ: 336 см^2.

Задача 3. В выпуклом четырехугольнике ABCD длины диагоналей равны 7 и 18. Найдите площадь четырехугольника, зная, что длины отрезков, соединяющих середины его противоположных сторон, равны.

Решение. Пусть MK и PH - отрезки, соединяющие середины противоположных сторон выпуклого четырехугольника ABCD (рисунок 11.19), причем MK = PH, AC =18, BD = 7. Имеем: $MP \parallel AC$, $MP = \frac{1}{2}AC$ (как средняя линия ΔABC); $HK \parallel AC$, $HK = \frac{1}{2}AC$ (как средняя линия ΔADC) $\Rightarrow MP \parallel HK$, $MP = HK \Rightarrow$ MPKH - параллелограмм. А так как MK = PH,

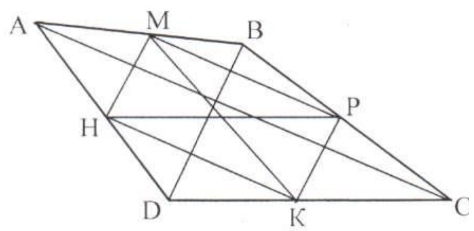


Рисунок 11.19

то четырехугольник MPKH - прямоугольник, стороны которого параллельны диагоналям AC и BD данного четырехугольника ABCD, поэтому $AC \perp BD$. Это означает, что $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 7 = 63$ (кв.ед.). Ответ: 63 кв.ед.

Треугольник, четырехугольник и окружность

Для решения задач на комбинации треугольника, многоугольника с окружностью применяются следующие теоремы:

«**Теорема 15** (*об измерении углов, связанных с окружностью*).

– центральный угол измеряется дугой, на которую он опирается (рисунок 11.20);

– вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается (рисунок 11.20);

– угол с вершиной внутри круга (рисунок 11.21) измеряется полусуммой дуг, заключенных между его сторонами и их продолжениями за вершину угла;

– угол с вершиной вне круга (рисунок 11.22) измеряется полуразностью дуг, заключенных между его сторонами (предполагается, что каждая из сторон угла пересекается с окружностью данного круга);

– угол между касательной и хордой (рисунок 11.23) измеряется половиной дуги, заключенной между ними» [18].

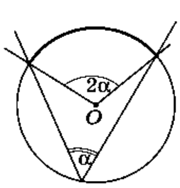


Рисунок 11.20

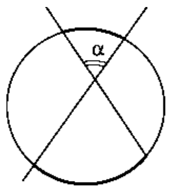


Рисунок 11.21

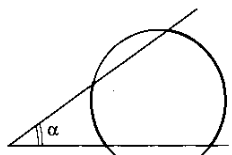


Рисунок 11.22

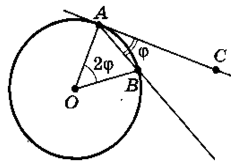


Рисунок 11.23

«**Теорема 16** (*о свойствах касательных, секущих и хорд окружности*):

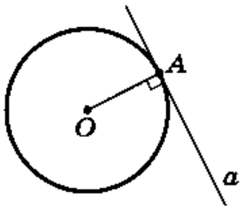
– радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной (рисунок 11.24);

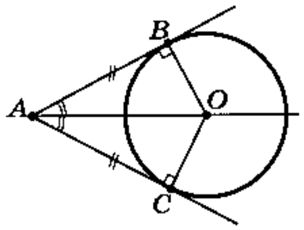
– если из точки проведены две касательные к окружности, то длины отрезков касательных от этой точки до точек касания равны и центр окружности лежит на биссектрисе угла между ними (рисунок 11.25);

– если из точки A проведена касательная AB и секущая AC, то AC·AD = AB2 (рисунок 11.26);

– если хорды AB и CD пересекаются в точке M (рисунок 11.27), то MA · MB = MC · MD;

– если из точки M проведены к окружности две секущие MAB и MCD (рисунок 11.28), то MA · MB = MC · MD» [23].





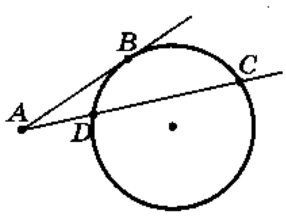
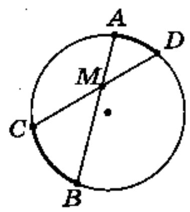


Рисунок 11.24 Рисунок 11.25 Рисунок 11.26



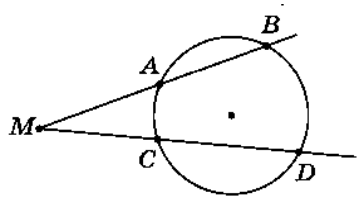


Рисунок 11.27 Рисунок 11.28

«**Теорема 17** (*о центре вписанной и описанной окружности треугольника*):

– три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке (эта точка является центром окружности, вписанной в данный треугольник);

– три серединных перпендикуляра к сторонам треугольника пересекаются в одной точке (эта точка является центром окружности, описанной около данного треугольника).

Теорема 18 (*об окружности и четырехугольнике*):

– около выпуклого четырехугольника ABCD можно описать окружность тогда и только тогда, когда сумма величин его противоположных углов равна 180º: $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$;

– в выпуклый четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда равны суммы длин его противоположных сторон: $a + c = b + d$;

– из всех параллелограммов только около прямоугольника можно описать окружность;

– около трапеции можно описать окружность тогда и только тогда, когда она равнобедренная;

– если для четырех точек A, B, M и K плоскости выполняется одно из следующих условий:

а) $\angle AMB = \angle AKB$ и точки M и K расположены по одну сторону от прямой AB;

б) $\angle AMB + \angle AKB = 180^\circ$ и точки M и K расположены по разные стороны от прямой AB, то точки A, B, M и K лежат на одной окружности» [18].

Таким образом, при решении задач по теме «Треугольник, четырехугольник, n-угольники. Окружность и круг» рекомендуется использовать таблицы 11.1 - 11.4 [24].

Таблица 11.1 - Треугольник. Окружность

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Периметр (P)	$P = a + b + c$; $p = \frac{a+b+c}{2}$	a, b, c – длины сторон p – полупериметр
Сумма внутренних углов	$A + B + C = 180^\circ$	A, B, C – величины углов
Теорема косинусов	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$; $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$; $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$; $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$	a, b, c – длины сторон A, B, C – величины углов R – радиус описанной окружности
Теорема синусов	$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$	
Радиус описанной окружности	$2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$	

Продолжение Таблицы 11.1

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)

Площадь (S) Формула Герона	$S = \frac{1}{2} a h_a = \frac{1}{2} b h_b =$ $= \frac{1}{2} c h_c;$ $S = \frac{1}{2} ab \sin C =$ $= \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} bc \sin A;$ $S = p r,$ $S = \frac{abc}{4R}$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$	a, b, c – длины сторон h_a, h_b, h_c – длины высот A, B, C – величины углов p – полупериметр r – радиус вписанной окружности R – радиус описанной окружности
Связь между медианой и сторонами	$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$	a, b, c – длины сторон m_a – длина медианы к стороне a m, n – длины отрезков, на которые биссектриса угла C делит сторону c h_a, h_b, h_c – длины высот r – радиус вписанной окружности
Свойство биссектрисы внутреннего угла	$\frac{m}{n} = \frac{a}{b}$	
Связь между высотами и радиусом вписанной окружности	$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$	

Таблица 11.2 - Прямоугольный треугольник. Окружность

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Сумма острых углов	$A + B = 90°$	A, B – величины острых углов
Теорема Пифагора	$a^2 + b^2 = c^2$	a, b – длины катетов

Метрические соотношения	$h_c^2 = a_1 \cdot b_1$; $a^2 = c \cdot a_1$, $b^2 = c \cdot b_1$	c – длина гипотенузы h_c – длина высоты a_1, b_1 – длины проекций катетов на гипотенузу r – радиус вписанной окружности R – радиус описанной окружности
Зависимость между сторонами, радиусами вписанной и описанной окружностей	$R = \frac{c}{2}$; $r = \frac{a+b-c}{2}$; $r = \frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}{2}$; $R + r = \frac{1}{2}(a+b)$	
Площадь (S)	$S = \frac{1}{2}ab$	a, b – длины катетов

Таблица 11.3 - Правильный треугольник. Окружность

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Периметр (P)	$P = 3a$	a – длина стороны
Величина угла	$A = B = C = 60^{\circ}$	A, B, C – величины углов
Зависимость между высотой и стороной	$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$	h – длина высоты a – длина стороны R – радиус описанной окружности r – радиус вписанной окружности
Зависимость между стороной, радиусами вписанной и описанной окружностей	$a = R\sqrt{3}$; $R = 2r$, $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$; $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$	
Выражение площади (S) через: сторону, радиус описанной окружности, радиус вписанной окружности	$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $S = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$; $S = 3r^2\sqrt{3}$	a – длина стороны R – радиус описанной окружности r – радиус вписанной окружности

Таблица 11.4 - Окружность и круг

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Длина окружности (*C*)	$C = 2\pi R$	*C* – длина окружности; *R* – радиус окружности; *n* – градусная мера дуги; φ – градусная мера дуги; *R* – радиус круга; *d* – диаметр; *a* – длина стороны *b* – основание сегмента; *h* – высота сегмента.
Длина дуги (*l*)	$l = \frac{\pi R n}{180}$; $l = \varphi R$	
Площадь круга (*S*)	$S = \pi R^2$; $S = \frac{\pi d^2}{4}$	
Площадь сектора (*S*)	$S = \frac{\pi R^2 n}{360}$	
Площадь сегмента (*S*)	$S = \frac{\pi R^2 n}{360} \pm S_\Delta$; $S = \frac{2}{3} bh$	

Приведем примеры решения задач.

Задача 4. В прямоугольный треугольник, периметр которого равен 15, вписана окружность радиуса 1. Найдите стороны этого треугольника.

Решение. Пусть в прямоугольный ΔABC вписана окружность с центром O и радиусом *r* (рисунок 11.29). Обозначим: AB = c, BC = a, AC = b.

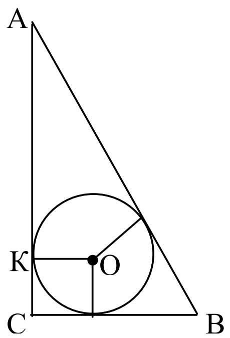


Рисунок 11.29

Так как $c = (a-1)+(b-1)$, то $a+b+c =$ $= a+b+(a-1)+(b-1) = 15 \Rightarrow$ $a+b = 8{,}5$. Имеем: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} a \cdot b = \frac{1}{2}(a+b+c)\cdot r = \frac{1}{2}\cdot 15 \cdot 1$, откуда $a \cdot b = 15$. Таким образом, $a+b = 8{,}5$ и $a \cdot b = 15$, поэтому значения a и b являются корнями квадратного уравнения: $t^2 - 8{,}5t + 15 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - 17t + 30 = 0$. Находим: $t_1 = 2{,}5$, $t_2 = 6$. Значит, $a = 2{,}5$; $b = 6$. Тогда $c = 15 - (a+b) =$ $= 15 - 8{,}5 = 6{,}5$. Ответ: AB = 6,5; BC = 2,5; AC = 6.

Задача 5. В окружность радиуса 32,5 см вписан треугольник, две стороны которого равны 25 см и 39 см. Найдите третью сторону треугольника.

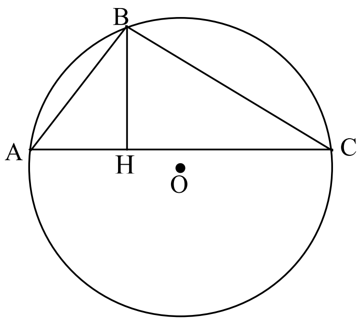


Рисунок 11.30

Решение. Пусть в ΔABC известно (рисунок 11.30): AB = 25 см, BC = 39 см. Найдем длину стороны AC. Вычислим сначала высоту BH: BH $=\frac{AB\cdot BC}{2R}=\frac{25\cdot 39}{2\cdot 32{,}5}=15.$ В ΔABH и ΔBCH: AH = $\sqrt{AB^2-BH^2}$ = $\sqrt{25^2-15^2}=20$; CH = $\sqrt{BC^2-BH^2}$ = $\sqrt{39^2-15^2}$ = 36. Тогда: AC = = AH + HC = 20 + 36 = 56 (см). Ответ: 56 см.

Задача 6. В прямоугольную трапецию с основаниями *a* и *b* вписана окружность. Найдите площадь этой трапеции.

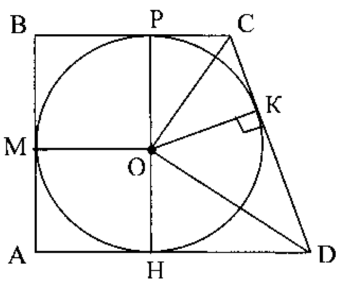


Рисунок 11.31

Решение*.* Пусть окружность с центром O и радиусом R, вписанная в прямоугольную трапецию ABCD, касается ее оснований AD = *a* и BC = *b* в точках H и P, а боковых сторон AB и CD - в точках M и K соответственно (рисунок 11.31). Тогда: O ∈ PH; OM = BP = AH = R; PH = 2R, (O - середина высоты PH трапеции); PC = *b* - R, HD = *a* - R. Так как, центр окружности, вписанной в трапецию, - точка пересечения биссектрис углов трапеции; сумма внутренних односторонних углов трапеции при ее основаниях, равна 180°, тогда центр O окружности, вписанной в трапецию, - вершина прямого угла прямоугольного треугольника COD. Значит в этом треугольнике на основании свойства высоты, проведенной из вершины прямого угла на гипотенузу, имеем: $OK^2 = CK\cdot KD$ ($OK \perp CD$, как радиус, проведенный в точку касания). На основании свойства отрезков касательных, проведенных к окружности из данной точки, находим: CK = PC = *b* - R, KD = HD = *a* - R. Тогда: $R^2 = (b - R)\cdot(a - R) = ab - R(a + b) + R^2 \Rightarrow R = \frac{ab}{a+b}$. $S_{трап.} = 0{,}5(BC + AD)\cdot PH = 0{,}5(b + a)\cdot 2\cdot\frac{ab}{a+b} = ab$ (кв.ед.). Ответ: *ab* кв.ед.

Задача 7. Основания равнобедренной трапеции, в которую можно вписать окружность, равны 1 и 3. Найдите радиус окружности, описанной около этой трапеции.

Решение. Пусть ABCD - данная трапеция (BC = 1, AD = 3), в которую вписана окружность ω и около которой описана окружность ω_1 с центром O и радиуса R (рисунок 11.32). Так как в данную трапецию вписана окружность, то BC + AD = 2 CD, откуда CD = $\frac{BC+AD}{2}$ = $\frac{1+3}{2}$ = 2. Кроме того, в равнобедренной трапеции выполняется: AH = = $\frac{BC+AD}{2}$ = $\frac{1+3}{2}$ = 2, значит, HD = AD - AH = = 3 – 2 = 1. Тогда в прямоугольном треугольнике CHD имеем: CD = 2HD $\Rightarrow \angle HCD$ = 30º, значит, $\angle CDH$ = 60º. В прямоугольных треугольниках CHD и ACH находим соответственно: $CH^2 = CD^2 - HD^2$ = 4 – 1 = 3; AC = $\sqrt{AH^2+CH^2}$ = = $\sqrt{4+3}$ = $\sqrt{7}$. Трапеция ABCD - равнобедренная, поэтому окружность ω_1, описанная около этой трапеции, совпадает с окружностью, описанной около ΔACD. Значит искомый радиус R найдем по теореме синусов в ΔACD: R = $\frac{AC}{2\sin 60^\circ}$ = $\sqrt{7}$: (2·$\frac{\sqrt{3}}{2}$) = $\frac{\sqrt{21}}{3}$. Ответ: $\frac{\sqrt{21}}{3}$.

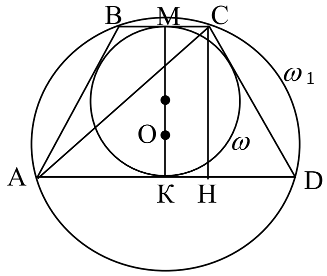


Рисунок 11.32

Тема 10. Тригонометрические неравенства.

Тригонометрические неравенства.

Неравенства вида $\sin x \vee a$ или $\cos x \vee a$

Напомним алгоритм решения простейших тригонометрических неравенств вида $\sin x \vee a$ или $\sin x \vee a$, $|a| \leq 1$, где символ $\vee$ заменяет один из знаков неравенств: $>$, $<$, $\geq$, $\leq$.

1. Отмечаем на линии синусов (косинусов) число *a* и все значения синуса (косинуса), которые больше (меньше) числа *a*.

2. Выделяем на числовой окружности дугу, на которой находятся точки, удовлетворяющие данному условию.

3. Если выделенная дуга прошла через 0, то для записи граничных точек выбирают разное направление (одно число положительное, другое – отрицательное). Если выделенная дуга не прошла через 0, то для записи граничных точек выбирают одно направление.

4. Записываем общее решение неравенства, добавляя к концам найденного промежутка число кратное периоду синуса или косинуса.

Пример 1. Решить неравенство: $\sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. 1. Отмечаем на линии синусов (рисунок 10.1) число $\frac{\sqrt{2}}{2}$ и все значения синуса, которые меньше этого числа.

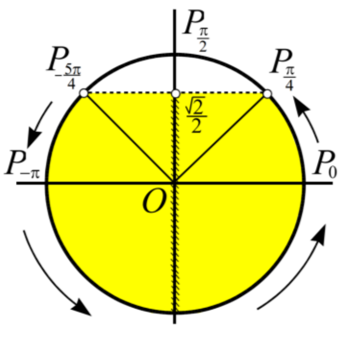


Рисунок 10.1

2. Выделяем на числовой окружности дугу, на которой находятся точки, ординаты которых меньше $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. Выделенная дуга проходит через нуль, поэтому при положительном обходе от нуля получаем первую граничную точку $P_{\frac{\pi}{4}}$, которая соответствует положительному числу $\frac{\pi}{4}$. Делаем обход по дуге от нуля

в отрицательном направлении до второй граничной точки $P_{\frac{5\pi}{4}}$, соответствующей отрицательному числу $-\frac{5\pi}{4}$. Числа из промежутка $\left(-\frac{5\pi}{4};\ \frac{\pi}{4}\right)$ являются решения данного неравенства (рисунок 10.1). Все решения данного неравенства будут иметь вид $\left(-\frac{5\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 2. Решить неравенство: $\cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение. 1. Отмечаем на линии косинусов (рисунок 10.2) число $\frac{\sqrt{3}}{2}$ и все значения косинуса, меньшие этого числа.

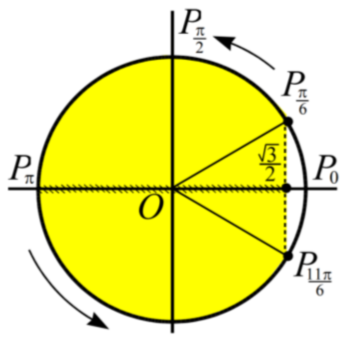


Рисунок 10.2

2. Выделяем на числовой окружности дугу, на которой находятся точки, абсциссы которых не больше $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Выделенная дуга не проходит через нуль, поэтому первая точка $P_{\frac{\pi}{6}}$, соответствует положительному числу $\frac{\pi}{6}$. Делаем обход по дуге от точки $P_{\frac{\pi}{6}}$ в положительном направлении до второй точки $P_{\frac{11\pi}{6}}$, соответствующей числу $\frac{11\pi}{6}$. Числа из промежутка $\left[\frac{\pi}{6};\ \frac{11\pi}{6}\right]$, являются решения данного неравенства (рисунок 10.2). Все решения данного неравенства будут иметь вид: $\left[\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{11\pi}{6}+2\pi n\right], n \in \boldsymbol{Z}$.

Неравенства вида $\operatorname{tg} x \vee a$ или $\operatorname{ctg} x \vee a$

Для решения неравенств с тангенсом и котангенсом удобно использовать линии тангенсов и котангенсов, касающиеся тригонометрической окружности в точках (1; 0) и (0; 1) соответственно.

Напомним алгоритм решения простейших тригонометрических неравенств вида $\operatorname{tg} x \vee a$ или $\operatorname{ctg} x \vee a$, где символ $\vee$ заменяет один из знаков неравенств: $>$, $<$, $\geq$, $\leq$.

1. Отмечаем на линии тангенсов (котангенсов) число a и все значения тангенса (котангенса), которые больше (меньше) числа a.

2. Выделяем на числовой окружности дугу, на которой находятся точки, удовлетворяющие данному условию.

3. Записываем ответ для соответствующего неравенства:

а) для неравенства $\operatorname{tg} x < a$ решение имеет вид

$$-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \operatorname{arctg} a + \pi n, \qquad n \in \boldsymbol{Z};$$

б) для неравенства $\operatorname{tg} x > a$ решение имеет вид

$$\operatorname{arctg} a + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n, \qquad n \in \boldsymbol{Z};$$

в) для неравенства $\operatorname{ctg} x < a$ решение имеет вид

$$\operatorname{arcctg} a + \pi n < x < \pi + \pi n, \qquad n \in \boldsymbol{Z};$$

г) для неравенства $\operatorname{ctg} x > a$ решение имеет вид

$$\pi n < x < \operatorname{arcctg} a + \pi n, \qquad n \in \boldsymbol{Z}.$$

Пример 3. Решить неравенство:

$$\operatorname{tg} x > \sqrt{3}.$$

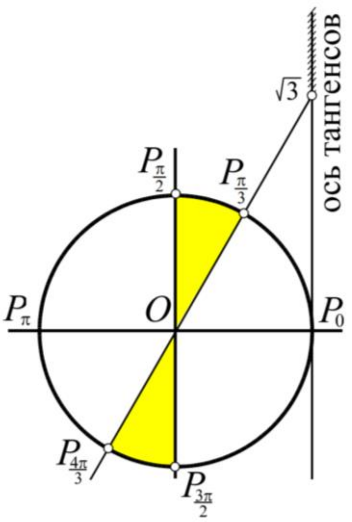


Рисунок 10.3

Решение. 1. Отмечаем на линии тангенсов (рисунок 10.3) число $\sqrt{3}$ и все значения тангенса, которые больше этого числа.

2. Выделяем на числовой окружности дугу, на которой находятся точки, удовлетворяющие данному условию.

3. Выделенная дуга имеет граничную точку $P_{\frac{\pi}{3}}$, соответствующую числу $\frac{\pi}{3}$. Делаем обход по дуге от точки $P_{\frac{\pi}{3}}$ в положительном направлении до второй точки $P_{\frac{\pi}{2}}$, соответствующей числу $\frac{\pi}{2}$.

Числа из промежутка $\left(\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{2}\right)$, являются решения данного неравенства. Все решения данного неравенства будут иметь вид: $\left(\frac{\pi}{3}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right),\ n \in \boldsymbol{Z}$. На окружности (рисунок 10.3) выделены два интервала.

Пример 4. Решить неравенство:

$$\operatorname{ctg} x \leq -1.$$

Решение.

1. Отмечаем на линии котангенсов (рисунок 10.4) число -1 и все значения котангенса, меньшие этого числа.

2. Выделяем на числовой окружности дугу, на которой находятся точки, удовлетворяющие данному условию.

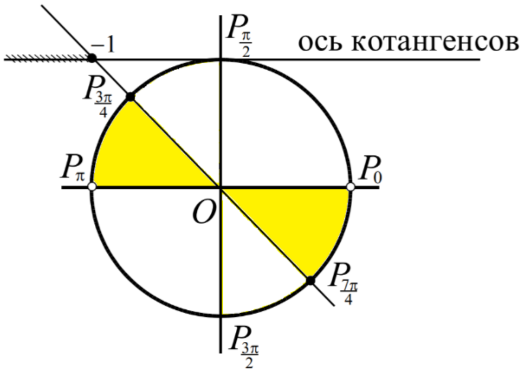


Рисунок 10.4

3. Выделенная дуга имеет граничную точку $P_{\frac{3\pi}{4}}$, соответствующую числу $\frac{3\pi}{4}$. Делаем обход по дуге от точки $P_{\frac{3\pi}{4}}$ в положительном направлении до второй точки P_{π}, соответствующей числу π.

Числа из промежутка $\left[\frac{3\pi}{4};\ \pi\right)$ являются решения данного неравенства. Остальные решения получают добавлением слагаемого $\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$ к концам полученного промежутка.

На окружности (рисунок 10.4) выделены два промежутка.

Все решения данного неравенства будут иметь вид: $\left[\frac{3\pi}{4}+\pi n;\ \pi+\pi n\right)$.

Тема 9. Тригонометрические уравнения.

Тригонометрические уравнения.

Решение тригонометрических уравнений

Уравнение	Формулы решения	Частные случаи
$\sin x = a$	при $\lvert a \rvert \le 1$ $x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in \boldsymbol{Z}$ при $\lvert a \rvert > 1$ – нет решений	$\sin x = 0;\ x = \pi k, k \in \boldsymbol{Z}$ $\sin x = 1;\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \boldsymbol{Z}$ $\sin x = -1;\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \boldsymbol{Z}$
$\cos x = a$	при $\lvert a \rvert \le 1$ $x = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in \boldsymbol{Z}$ при $\lvert a \rvert > 1$ – нет решений	$\cos x = 0;\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \boldsymbol{Z}$ $\cos x = 1;\ x = 2\pi k, k \in \boldsymbol{Z}$ $\cos x = -1;\ x = \pi + 2\pi k, k \in \boldsymbol{Z}$
$\operatorname{tg} x = a$	$x = \operatorname{arctg} a + \pi k, k \in \boldsymbol{Z}$	–
$\operatorname{ctg} x = a$	$x = \operatorname{arcctg} a + \pi k, k \in \boldsymbol{Z}$	–

Решение уравнения $\sin x = a$ $(-1 < a < 1)$ можно записать совокупностью двух серий решений (рисунок 9.1):

$$x = \left[\begin{array}{l} \arcsin a + 2\pi k, \\ \pi - \arcsin a + 2\pi k, \end{array}\right. k \in \boldsymbol{Z}.$$

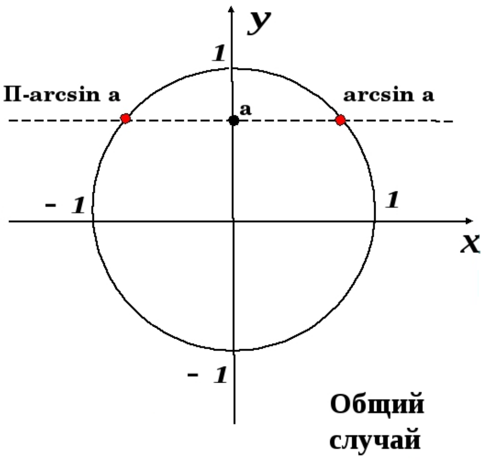


Рисунок 9.1

Решение уравнения $\cos x = a$ $(-1 < a < 1)$ можно записать совокупностью двух серий решений (рисунок 9.2):

$$x = \left[\begin{array}{l} \arccos a + 2\pi k, \\ -\arccos a + 2\pi k, \end{array}\right. k \in \boldsymbol{Z}.$$

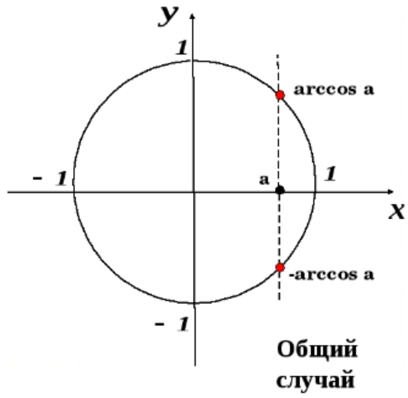


Рисунок 9.2

Решение уравнения $\operatorname{tg} x = a$ можно записать совокупностью двух серий решений (рисунок 9.3):

$$x = \left[\begin{array}{l} \operatorname{arctg} a + 2\pi k, \\ \pi + \operatorname{arctg} a + 2\pi k, \end{array}\right. k \in \boldsymbol{Z}.$$

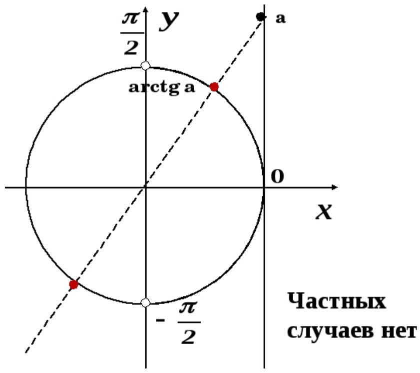


Рисунок 9.3

Решение уравнения $\operatorname{ctg} x = a$ можно записать совокупностью двух серий решений (рисунок 9.4):

$$x = \left[\begin{array}{l} \operatorname{arcctg} a + 2\pi k, \\ \pi + \operatorname{arcctg} a + 2\pi k, \end{array}\right. k \in \boldsymbol{Z}.$$

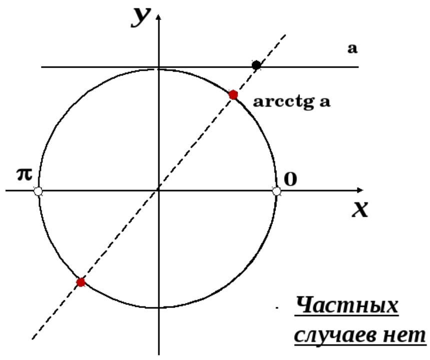


Рисунок 9.4

Рассмотрим некоторые типы тригонометрических уравнений.

I. Уравнения, сводимые к алгебраическим.

Это уравнения, сводимые к одной и той же функции относительно одного и того же неизвестного. Решение такого типа уравнений находят методом подстановки (заменой переменной).

Пример 1. Решить уравнение: $2\sin^2 x - 7\cos x - 5 = 0$.

Решение.

$$2(1 - \cos^2 x) - 7\cos x - 5 = 0,$$

$$-2\cos^2 x - 7\cos x - 3 = 0,$$

$$2\cos^2 x + 7\cos x + 3 = 0.$$

Подстановка: $\cos x = t$, получим

$$2t^2 + 7t + 3 = 0,$$

$$D = 49 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 25,$$

$$t_1 = -3, t_2 = -\frac{1}{2}.$$

Делаем обратную замену

$\cos x = -3$	$\cos x = -\frac{1}{2}$
$x \in \emptyset$	$x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi k, k \in Z$
	$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z.$

Ответ: $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$.

II. Однородные уравнения.

$a\sin x + b\cos x = 0$ *a*, *b* – заданные числа	– однородное уравнение первой степени
$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$ *a*, *b*, *c* – заданные числа	– однородное уравнение второй степени

Пример 2. Решить уравнение: $2\sin x - 3\cos x = 0$

Решение. Разделим обе части уравнения на $\cos x$:

$$2\operatorname{tg} x - 3 = 0$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{3}{2}$$

$$x = \operatorname{arctg}\frac{3}{2} + \pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z}$$

Ответ: $x = \operatorname{arctg}\frac{3}{2} + \pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 3. *Решить уравнение*

$$4\sin^2 x + 2\sin x\cos x = 3$$

Решение. Используя основное тригонометрическое тождество, представим правую часть уравнения в виде $3(\sin^2 x + \cos^2 x)$, получим:

$$4\sin^2 x + 2\sin x\cos x = 3\sin^2 x + 3\cos^2 x$$

$$\sin^2 x + 2\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$$

Последнее уравнение есть однородное второй степени. Разделим обе части уравнения на $\cos^2 x$, получим:

$$\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x - 3 = 0.$$

Сделаем замену переменной: $\operatorname{tg} x = t$, получим квадратное уравнение:

$$t^2 + 2t - 3 = 0$$

$$D = 4 - 4\cdot 1\cdot(-3) = 16$$

$$t_1 = -3 \qquad t_2 = 1$$

Осуществим обратную подстановку:

$\operatorname{tg} x = -3$

$x = \operatorname{arctg}(-3) + \pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z}$

$\operatorname{tg} x = 1$

$x = \operatorname{arctg} 1 + \pi n, \quad n \in \boldsymbol{Z}$

$x = -\mathrm{arctg}\, 3 + \pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z}$ $\qquad\qquad$ $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \boldsymbol{Z}$

Ответ: $x = -\mathrm{arctg}\, 3 + \pi k;\ x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad k, n \in \boldsymbol{Z}$.

III. Уравнение вида $a \sin x + b \cos x = c$. Метод вспомогательного аргумента.

Рассмотрим уравнение вида: $a \sin x + b \cos x = c$,

где *a*, *b*, *c* – заданные числа, причем $a^2 + b^2 > c^2$.

Разделим обе части уравнения на $\sqrt{a^2 + b^2}$, получим

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Учитывая, что $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$, то можно принять:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \varphi, \qquad \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \varphi,$$

где φ называется вспомогательным аргументом.

Тогда уравнение примет вид:

$$\cos \varphi \sin x + \sin \varphi \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\sin(x + \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

$$x + \varphi = (-1)^k \arcsin \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z}$$

$$x = (-1)^k \arcsin \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \varphi + \pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z}.$$

Учитывая, что $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, выразим $\varphi = \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Получим решение исходного уравнения в виде:

$$x = (-1)^k \arcsin \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z}.$$

Пример 4. Решить уравнение: $3 \sin x + 4 \cos x = 2$.

Решение. Здесь *a* = 3, *b* = 4, *c* = 2, при этом легко видеть, что:

$a^2 + b^2 > c^2$, значит уравнение имеет решение.

Выразим $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Разделим все уравнение на 5, получим

$$\frac{3}{5}\sin x + \frac{4}{5}\cos x = \frac{2}{5}.$$

Обозначим $\cos\varphi = \frac{3}{5}, \sin\varphi = \frac{4}{5}$. Получим уравнение:

$$\sin(x+\varphi) = \frac{2}{5},$$

$$x + \varphi = (-1)^k \arcsin\frac{2}{5} + \pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z}$$

$$x = (-1)^k \arcsin\frac{2}{5} - \varphi + \pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z}$$

$$x = (-1)^k \arcsin\frac{2}{5} - \arcsin\frac{4}{5} + \pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $x = (-1)^k \arcsin\frac{2}{5} - \arcsin\frac{4}{5} + \pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z}$.

Тема 8. Логарифмические уравнения и неравенства.

Логарифмические уравнения.

1. Уравнения вида $\log_a f(x) = b$, где $a > 0, a \neq 1,\ f(x) > 0$ называют *простейшим логарифмическим уравнением*.

Данное уравнение имеет решение, которое мы можем получить по определению логарифма: $f(x) = a^b$. При решении логарифмического уравнения мы не должны забывать про ограничения, которые накладываются

Пример 1. Решите уравнение $\log_3(2x+2) = 3$.

Решение.

$$\log_3(2x+2) = 3;$$

$$\begin{cases} 2x+2 > 0 \\ 2x+2 = 3^3 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x > -1 \\ x = \frac{25}{2} \end{cases}; \quad x = \frac{25}{2}.$$

Ответ: $x = \frac{25}{2}$.

Пример 2. Решите уравнение. $\log_{x-1} 49 = 2$.

Решение.

$$\log_{x-1} 49 = 2;$$

$$\begin{cases} x-1 > 0 \\ x-1 \neq 1 \\ (x-1)^2 = 49 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x > 1 \\ x \neq 2 \\ |x-1| = 49 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x > 1 \\ x \neq 2 \\ \left[\begin{array}{l} x-1 = 7 \\ x-1 = -7 \end{array}\right. \end{cases};$$

$$\begin{cases} x > 1 \\ x \neq 2 \\ \left[\begin{array}{l} x = 8 \\ x = -6 \end{array}\right. \end{cases}; \quad x = 8.$$

Ответ: $x = 8$.

2. Логарифмические уравнения вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ сводятся к решению системы: $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$.

Пример 3. Решите уравнение $\log_5(7 - x) = \log_5(3 - x) + 1$.

Решение.

$$\log_5(7 - x) = \log_5(3 - x) + 1;$$

$$\log_5(7 - x) = \log_5(3 - x) + \log_5 5;$$

$$\log_5(7 - x) = \log_5 5 \cdot (3 - x);$$

$$\begin{cases} 7 - x > 0 \\ 3 - x > 0 \\ 7 - x = 15 - 5x \end{cases}; \quad \begin{cases} x < 7 \\ x < 3 \\ -x + 5x = 15 - 7 \end{cases}; \begin{cases} x < 3 \\ x = 2 \end{cases}; \quad x = 2.$$

Ответ: $x = 2$.

Пример 4. Решите уравнение $\log_2(x - 5) + \log_2(x + 2) = 3$.

Решение.

$$\log_2(x - 5) + \log_2(x + 2) = 3;$$

$$\log_2(x - 5) + \log_2(x + 2) = \log_2 8;$$

$$\begin{cases} x - 5 > 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x > 5 \\ x > -2 \end{cases}; \quad x > 5;$$

$$\log_2(x - 5)(x + 2) = \log_2 8;$$

$$(x - 5)(x + 2) = 8;$$

$$x^2 + 2x - 5x - 10 - 8 = 0;$$

$$x^2 - 3x - 18 = 0;$$

$$D = b^2 - 4ac = 9 + 4 \cdot 18 = 9 + 72 = 81;$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{3 \pm 9}{2};$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = 6 \\ x_2 = -3 \end{array}\right.;$$

С учетом ограничения $x > 5$ получаем решение $x = 6$.

Ответ: $x = 6$.

Пример 5. Решите уравнение $\log_{0,5}(x+2)-\log_2(x-3)=\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(-4x-8)$.

Решение:

$$\log_{0,5}(x+2)-\log_2(x-3)=\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(-4x-8)$$

$$\begin{cases} x+2>0 \\ x-3>0 \\ -4x-8>0 \end{cases} \begin{cases} x>-2 \\ x>3 \\ x<-2 \end{cases}$$

Решений нет, т.к. система ограничений не совместна.

Ответ: решений нет.

Пример 6. Решите уравнение $\log_{\sqrt{2}} x+4\log_4 x+\log_8 x=13$.

Решение:

$$\log_{\sqrt{2}} x+4\log_4 x+\log_8 x=13;$$

$$\log_{2^{\frac{1}{2}}} x+4\log_{2^2} x+\log_{2^3} x=13;$$

$$2\log_2 x+4\cdot\frac{1}{4}\log_4 x+\frac{1}{3}\log_2 x=13;$$

$$\begin{cases} \frac{13}{3}\log_2 x=13 \\ x>0 \end{cases}; \quad \begin{matrix} \log_2 x=3 \\ x>0 \end{matrix}; \begin{cases} x=2^3 \\ x>0 \end{cases}; \quad \begin{matrix} x=8 \\ x>0 \end{matrix}$$

Ответ: $x=8$.

3. Еще один вид логарифмических уравнений вида – уравнения, сводящиеся к рациональным с помощью введения новой переменной. После решения уравнения с новой переменной получим простейшие логарифмические уравнения.

Пример 7. Решите уравнение $6\log_8{}^2 x-5\log_8 x+1=0$.

Решение:

Запишем ограничения $x>0$.

Введем новую переменную: $\log_8 x=t$.

Решим вспомогательное уравнение:

$$6t^2-5t+1=0;$$

$$D=b^2-4ac=25-4\cdot 6=25-24=1;$$

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 \pm 1}{12};$$

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = \frac{1}{3} \\ t_2 = \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Вернемся к переменной x:

$$\left[\begin{array}{l} \log_8 x = \frac{1}{3} \\ \log_8 x = \frac{1}{2} \end{array}\right.; \left[\begin{array}{l} x = 8^{\frac{1}{2}} \\ x = 8^{\frac{1}{3}} \end{array}\right.; \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{8} \\ x = 2 \end{array}\right..$$

Ответ: x = 2, $x = 2\sqrt{2}$.

Пример 8. Решите уравнение $\log_2 x - 2\log_x 2 + 1 = 0$.

Решение:

Запишем ограничения $\left[\begin{array}{l} x > 0 \\ x \neq 1 \end{array}\right.$.

$$\log_2 x - 2\log_x 2 + 1 = 0;$$

$$\log_2 x - 2\frac{1}{\log_2 x} + 1 = 0;$$

Введем новую переменную: $\log_2 x = t$.

Решим вспомогательное уравнение:

$$t - 2\frac{1}{t} + 1 = 0;$$

$$\frac{t^2 + t - 2}{t} = 0;$$

$$\begin{cases} t^2 + t - 2 = 0 \\ t \neq 0 \end{cases};$$

$$t^2 + t - 2 = 0;$$

$$D = b^2 - 4ac = 1 + 4 \cdot 2 = 1 + 8 = 9;$$

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 \pm 3}{2};$$

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = -2 \\ t_2 = 1 \end{array}\right..$$

Вернемся к переменной x:

$$\left[\begin{array}{l} \log_2 x = -2 \\ \log_2 x = 1 \end{array}\right.; \left[\begin{array}{l} x = 2^{-2} \\ x = 2^1 \end{array}\right.; \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{4} \\ x = 2 \end{array}\right..$$

Ответ: x = 0,25, $x = 2$.

Пример 9. Решите уравнение $\frac{\log_3(9x)-8}{\log_3{}^2 x+\log_3 x^4} = 1.$

Решение.

Запишем ограничения: $\left[\begin{matrix} x > 0 \\ x \neq 1 \end{matrix}\right.$.

$$\frac{\log_3(9x)-8}{\log_3{}^2 x+\log_3 x^4} = -1;$$

$$\frac{\log_3 9+\log_3 x-8}{\log_3{}^2 x+4\log_3|x|} = -1;$$

так как $x > 0,$ то

$$\frac{2+\log_3 x-8}{\log_3{}^2 x+4\log_3 x} = -1;$$

$$\frac{\log_3 x-6}{\log_3{}^2 x+4\log_3 x} + 1 = 0;$$

$$\frac{\log_3 x-6+(\log_3{}^2 x+4\log_3 x)}{\log_3{}^2 x+4\log_3 x} = 0;$$

$$\frac{\log_3 x-6+\log_3{}^2 x+4\log_3 x}{\log_3{}^2 x+4\log_3 x} = 0;$$

$$\frac{\log_3{}^2 x+5\log_3 x-6}{\log_3{}^2 x+4\log_3 x} = 0;$$

Введем новую переменную: $\log_3 x = t.$

Решим вспомогательное уравнение:

$$\frac{t^2+5t-6}{t^2+4t} = 0;$$

$$\begin{cases} t^2 + 5t - 6 = 0 \\ t^2 + 4t \neq 0 \end{cases};$$

$$t^2 + 5t - 6 = 0;$$

$$D = b^2 - 4ac = 25 + 4 \cdot 6 = 25 + 24 = 49;$$

$$t_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a} = \frac{-5\pm7}{2};$$

$$\left[\begin{matrix} t_1 = -6 \\ t_2 = 1 \end{matrix}\right.;$$

$$t^2 + 4t \neq 0;$$

$$t(t + 4) \neq 0;$$

$$\left[\begin{matrix} t_1 \neq -4 \\ t_2 \neq 0 \end{matrix}\right..$$

Вернемся к переменной *x:*

$$\left[\begin{array}{l}\log_3 x = -6\\ \log_3 x = 1\end{array}\right.;\ \left[\begin{array}{l}x = 3^{-6}\\ x = 3^1\end{array}\right.;\ \left[\begin{array}{l}x = \frac{1}{3^6};\\ x = 3\end{array}\right.\ \left[\begin{array}{l}x = \frac{1}{729}.\\ x = 3\end{array}\right.$$

Ответ: $x = 3,\ \ x = \frac{1}{729}$.

Логарифмические неравенства.

Логарифмические неравенства это неравенства вида $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, где $a > 0;\ \ a \neq 1$ и неравенства, сводящиеся к этому виду.

Способы решения логарифмических неравенств основаны на монотонности логарифмической функции в зависимости от основания логарифма. Функция возрастает, если $a > 1$ и убывает, если $0 < a < 1$.

Если $a > 1$, то неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ сводиться к решению системы $\begin{cases} f(x) > g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$, при этом знак неравенства сохраняется.

Если $0 < a < 1$, то неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ сводиться к решению системы $\begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$, при этом знак неравенства меняется.

1. Простейшие логарифмические неравенства $\log_a f(x) > b$.

Пример 10. Решить неравенство $\log_2(2 - x) \leq 1$.

Решение:

$$\log_2(2 - x) \leq 1;$$

$$\log_2(2 - x) \leq \log_2 2;$$

Основание логарифма *a*=2 > 1, то функция $\log_2 x$ возрастающая

$$\begin{cases} 2 - x \leq 2 \\ 2 - x > 0 \end{cases};\ \ \begin{cases} x \geq 0 \\ x < 2 \end{cases};\ \ 0 \leq x < 2.$$

Ответ: $x \epsilon [0; 2)$.

Пример 11. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{3}}(2 - x) \leq -1$.

Решение.

$$\log_{\frac{1}{3}}(2-x) \leq \log_{\frac{1}{3}} 3;$$

Основание логарифма $a = \frac{1}{3} > \ 1$, то функция $\log_{\frac{1}{3}} x$ убывающая

$$\begin{cases} 2-x \geq 3 \\ 2-x > 0 \end{cases}; \ \begin{cases} x \leq 1 \\ x < 2 \end{cases}; \quad x \leq 1.$$

Ответ: $x\epsilon(-\infty; 1]$.

2. *Логарифмические неравенства* вида $\log_a f(x) > \log_a g(x)$.

Пример 12. Решить неравенство $\log_3(2x-4) > \log_3(14-x)$

Решение.

Основание логарифма *a* =3 > 1, то функция $\log_3 x$ возрастающая

$$\begin{cases} 2x-4 > 0 \\ 14-x > 0 \\ 2x-4 > 14-x \end{cases}; \begin{cases} x > 2 \\ x < 14 \\ x > 6 \end{cases}; \ 6 < x < 14.$$

Ответ: $x\epsilon$ (6; 14).

Пример 13. Решите неравенство $\log_2(x+4) + \log_2(2x+3) > \log_2(1-2x)$.

Решение:

Основание логарифма *a*=2 > 1, то функция $\log_2 x$ возрастающая

$$\log_2(x+4) + \log_2(2x+3) > \log_2(1-2x)$$

$$\log_2\big((x+4)\cdot(2x+3)\big) > \log_2(1-2x)$$

$$\begin{cases} x+4 > 0 \\ 2x+3 > 0 \\ 1-2x > 0 \\ (x+4)\cdot(2x+3) > 1-2x \end{cases}; \begin{cases} x > -4 \\ x > -1{,}5 \\ x < 0{,}5 \\ 2x^2+3x+8x+12-1+2x > 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x > -1{,}5 \\ x < 0{,}5 \\ 2x^2+13x+11 > 0 \end{cases}; \begin{cases} x > -1{,}5 \\ x < 0{,}5 \\ 2(x+1)(x+5{,}5) > 0 \end{cases}; \begin{cases} x > -1{,}5 \\ x < 0{,}5 \\ \left[\begin{array}{l} x < -5{,}5 \\ x > -1 \end{array}\right. \end{cases}; \ x\epsilon(-1; 0{,}5).$$

Ответ: $x\epsilon(-1; 0{,}5)$.

3. Еще один вид логарифмических неравенств – неравенства, сводящиеся к рациональным с помощью введения новой переменной. После решения неравенства с новой переменной получим простейшие логарифмические неравенства.

Пример 14. Решите неравенство $\log_2{}^2 x + 6 > 5\log_2 x$.

Решение:

$$\log_2{}^2 x + 6 > 5\log_2 x$$

Запишем ограничения $x > 0$.

Введем новую переменную $\log_2 x = t$.

Решим вспомогательное неравенство:

$$t^2 - 5t + 6 > 0;$$

$$y = t^2 - 5t + 6;$$

$$t^2 - 5t + 6 = 0;$$

$$D = b^2 - 4ac = 25 - 4 \cdot 6 = 25 - 24 = 1;$$

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 \pm 1}{2};$$

$$\left[\begin{matrix} t_1 = 3 \\ t_2 = 2 \end{matrix}\right.;$$

$$(t-2)(t-3) > 0;$$

$$\left[\begin{matrix} t < 2 \\ t > 3 \end{matrix}\right..$$

Вернемся к исходной переменной *x*.

Основание логарифма *a* = 2 > 1, то функция $\log_2 x$ возрастающая

$$\left[\begin{matrix} t < 2 \\ t > 3 \end{matrix}\right.; \left[\begin{matrix} \log_2 x < 2 \\ \log_2 x > 3 \end{matrix}\right.; \left\{\begin{matrix} \left[\begin{matrix} x < 2^2 \\ x > 2^3 \end{matrix}\right. \\ x > 0 \end{matrix}\right.; \left[\begin{matrix} x > 8 \\ 0 < x < 4 \end{matrix}\right..$$

Ответ: $x \epsilon (0; 4) \cup (8; +\infty)$.

Пример 15. Решите неравенство $(\log_2(x+4{,}2) + 2)(\log_2(x+4{,}2) - 3) \geq 0$.

Решение:

$$(\log_2(x+4{,}2) + 2)(\log_2(x+4{,}2) - 3) \geq 0;$$

Запишем ограничения $x + 4{,}2 > 0;\ \ x > -4{,}2$.

Введем новую переменную $\log_2(x+4{,}2) = t$.

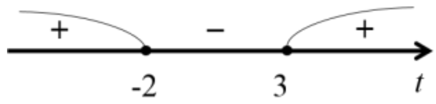
Решим вспомогательное неравенство:

$$(t+2)(t-3) \geq 0;$$

$$y = (t+2)(t-3);$$

$$(t+2)(t-3) \geq 0;$$

$$\left[\begin{matrix} t=-2 \\ t=3 \end{matrix}\right.;$$



$$\left[\begin{matrix} t \leq -2 \\ t \geq 3 \end{matrix}\right.;$$

Вернемся к исходной переменной *x*.

Основание логарифма *a* =2 > 1, то функция $\log_2 x$ возрастающая

$$\left[\begin{matrix} t \leq -2 \\ t \geq 3 \end{matrix}\right.; \quad \begin{cases} \left[\begin{matrix} t \leq -2 \\ t \geq 3 \end{matrix}\right. \\ x > -4{,}2 \end{cases}; \quad \begin{cases} \left[\begin{matrix} \log_2(x+4{,}2) \leq -2 \\ \log_2(x+4{,}2) \geq 3 \end{matrix}\right. \\ x > -4{,}2 \end{cases}; \quad \begin{cases} \left[\begin{matrix} x+4{,}2 \leq 2^{-2} \\ x+4{,}2 \geq 2^3 \end{matrix}\right. \\ x > -4{,}2 \end{cases};$$

$$\begin{cases} \left[\begin{matrix} x \leq 0{,}25-4{,}2 \\ x \geq 8-4{,}2 \end{matrix}\right. \\ x > -4{,}2 \end{cases}; \quad \begin{cases} \left[\begin{matrix} x \leq -3{,}95 \\ x \geq 3{,}8 \end{matrix}\right. \\ x > -4{,}2 \end{cases};$$

Ответ: $x\epsilon(-4{,}2;-3{,}95) \cup (3{,}8;+\infty)$

4. Логарифмические неравенства с переменным основанием $\log_{a(x)} f(x) > \log_{a(x)} g(x)$. Для решения данного неравенства применяют метод рационализации логарифмических неравенств $(a(x)-1)\big(f(x)-$ $-g(x)\big) > 0$, при соблюдений ограничений $\begin{cases} a(x) \neq 1 \\ a(x) > 0 \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}.$

Пример 16. Решите неравенство $\log_{x-3}(x^2-12x+36) \leq 0$.

Решение.

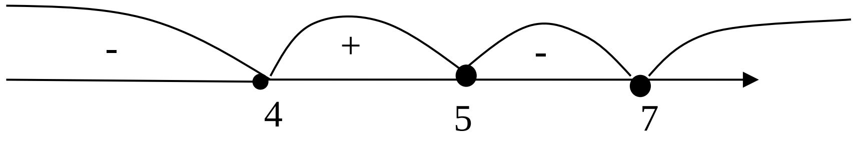
Запишем ограничения $\begin{cases} x-3>0 \\ x-3 \neq 1 \\ x^2-12x+36>0 \end{cases}; \begin{cases} x>3 \\ x \neq 4 \\ (x-6)^2>0 \end{cases}; \begin{cases} x>3 \\ x \neq 4 \\ x \neq 6 \end{cases}$

$$x\epsilon(-\infty;3) \cup (3;4) \cup (4;6) \cup (6;+\infty)$$

Применяем формулу рационализации $(x-3-1)(x^2-12x+36-1) \leq 0$.

$$(x-4)(x^2-12x+35) \leq 0;$$

$$(x-4)(x-5)(x-7) \leq 0;$$



+

x

С учетом ограничений имеем $x\epsilon(3;4) \cup [5;6) \cup (6;7]$.

Ответ: $x\epsilon(3;4) \cup [5;6) \cup (6;7]$.

Тема 7. Показательные уравнения и неравенства.

Показательные уравнения.

Показательным называется уравнение, в котором переменная входит в показатели степеней, при заданном основании.

1. *Простейшие показательные уравнения* - это уравнения вида:
$a^{f(x)} = b$, $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, $a > 0, a \neq 1$.

Так как множество значений показательной функции - множество положительных чисел, то при $b \leq 0$ уравнение решений не имеет. Теперь рассмотрим случай $b > 0$.

Пример 1. Решите уравнение $13^x = \sqrt[5]{169}$.

Решение:

$$13^x = \sqrt[5]{169};$$

$$13^x = 169^{\frac{1}{5}};$$

$$13^x = 13^{\frac{2}{5}};$$

$$x = 0{,}4.$$

Ответ: x = 0,4.

Пример 2. Решите уравнение $0{,}6^x \cdot 0{,}6^3 = \frac{0{,}6^{2x}}{0{,}6^5}$.

Решение:

$$0{,}6^x \cdot 0{,}6^3 = \frac{0{,}6^{2x}}{0{,}6^5};$$

$$0{,}6^{x+3} = 0{,}6^{2x+5};$$

$$x + 3 = 2x + 5;$$

$$x - 2x = 5 - 3;$$

$$-x = 2;$$

$$x = -2.$$

Ответ: x = - 2.

Пример 3. Решите уравнение $0{,}5^{\frac{1}{x}} = 4^{\frac{1}{x+1}}$.

Решение:

$$0{,}5^{\frac{1}{x}} = 4^{\frac{1}{x+1}};$$

$$2^{\frac{-1}{x}} = 2^{\frac{2}{x+1}};$$

$$\frac{-1}{x} = \frac{2}{x+1};$$

$$-(x+1) = 2x;$$

$$-x-1 = 2x;$$

$$-x-2x = 1;$$

$$-3x = 1;$$

$$x = -\frac{1}{3}.$$

Ответ: $x = -\frac{1}{3}$.

2. Рассмотрим *показательные уравнения* вида:

$$\alpha \cdot a^{f(x)+a} + \beta \cdot a^{f(x)+b} + \cdots + \gamma \cdot a^{f(x)+n} = b.$$

Для решения таких уравнений левую часть преобразуют следующим образом: выносят за скобку степень $a^{f(x)+a}$ (часто, чтобы избежать дробных коэффициентов, выносят степень с наименьшим показателем).

Пример 4. Решите уравнение $3^{2x-1} + 3^{2x} = 108$.

Решение:

$$3^{2x-1} + 3^{2x} = 108;$$

$$3^{2x-1} \cdot (1+3) = 108;$$

$$3^{2x-1} \cdot 4 = 108;$$

$$3^{2x-1} = 27;$$

$$3^{2x-1} = 3^3;$$

$$2x-1 = 3;$$

$$2x = 4;$$

$$x = 2.$$

Ответ: $x = 2$.

Пример 5. Решите уравнение $3^{x+3} + 3^x = 7^{x+1} + 5 \cdot 7^x$.

Решение:

$$3^{x+3} + 3^x = 7^{x+1} + 5 \cdot 7^x;$$

$$3^x \cdot (27 + 1) = 7^x \cdot (7 + 5);$$

$$3^x \cdot 28 = 7^x \cdot 12;$$

$$\left(\frac{3}{7}\right)^x = \frac{12}{28};$$

$$\left(\frac{3}{7}\right)^x = \frac{3}{7};$$

$$x = 1.$$

Ответ: $x = 1$.

Пример 6. Решите уравнение $20^x - 64 \cdot 5^x - 4^x + 64 = 0$.

Решение:

$$20^x - 64 \cdot 5^x - 4^x + 64 = 0;$$

$$(20^x - 64 \cdot 5^x) - (4^x - 64) = 0;$$

$$5^x \cdot (4^x - 64) - (4^x - 64) = 0;$$

$$(4^x - 64) \cdot (5^x - 1) = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l}(4^x - 64) = 0 \\ (5^x - 1) = 0\end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l}4^x = 64 \\ 5^x = 1\end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l}4^x = 4^3 \\ 5^x = 5^0\end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l}x = 3 \\ x = 0\end{array}\right..$$

Ответ: $x = 0$, $x = 3$.

3. Еще один вид показательных уравнений – уравнения, сводящиеся к рациональным с помощью введения новой переменной. После решения уравнения с новой переменной получим простейшие показательные уравнения.

Пример 7. Решите уравнение $16^x - 5 \cdot 4^x + 4 = 0$.

Решение:

$$16^x - 5 \cdot 4^x + 4 = 0;$$

$$4^{2x} - 5 \cdot 4^x + 4 = 0;$$

Введем новую переменную: $4^x = t,\ t > 0$.

Решим вспомогательное уравнение:

$$t^2 - 5t + 4 = 0;$$

$$D = b^2 - 4ac = 25 - 16 = 9;$$

$$t_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 \mp 3}{2};$$

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = 1 \\ t_2 = 4 \end{array}\right..$$

Вернемся к переменной x:

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = 1 \\ t_2 = 4 \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} 4^x = 1 \\ 4^x = 4 \end{array}\right.; \left[\begin{array}{l} 4^x = 4^0 \\ 4^x = 4^1 \end{array}\right.; \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right..$$

Ответ: $x = 0$, $x = 1$.

Пример 8. Решите уравнение $13^{2x+1} - 13^x - 12 = 0$.

Решение:

$$13^{2x+1} - 13^x - 12 = 0;$$

$$13^1 \cdot 13^{2x} - 13^x - 12 = 0;$$

Введем новую переменную: $13^x = t,\ t > 0$.

Решим вспомогательное уравнение:

$$13^1 \cdot t^2 - t - 12 = 0;$$

$$D = b^2 - 4ac = 1 + 4 \cdot 12 \cdot 13 = 1 + 624 = 625;$$

$$t_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 \mp 25}{26};$$

$$\left[\begin{array}{c} t_1 = 1 \\ t_2 = -\frac{-24}{26} < 0 - \text{посторонний корень} \end{array}\right..$$

Вернемся к переменной x:

$$t = 1;$$

$$13^x = 1;$$

$$x = 0.$$

Ответ: $x = 0$.

Пример 9. Решите уравнение $9^{x-\frac{1}{2}} - 8 \cdot 3^{x-1} + 5 = 0$.

Решение:

$$9^{x-\frac{1}{2}} - 8 \cdot 3^{x-1} + 5 = 0;$$

$$9^x \cdot 9^{-\frac{1}{2}} - 8 \cdot 3^x \cdot 3^{-1} + 5 = 0;$$

$$\frac{3^{2x}}{3} - 8 \cdot \frac{3^x}{3} + 5 = 0;$$

$$3^{2x} - 8 \cdot 3^x + 15 = 0;$$

Введем новую переменную: $3^x = t,\ t > 0$.

Решим вспомогательное уравнение:

$$t^2 - 8 \cdot t + 15 = 0;$$

$$D = b^2 - 4ac = 64 - 4 \cdot 1 \cdot 15 = 64 - 60 = 4;$$

$$t_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{D}}{2a} = \frac{8 \mp 2}{2};$$

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = 5 \\ t_2 = 3 \end{array}\right..$$

Вернемся к переменной х:

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = 5 \\ t_2 = 3 \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} 3^x = 5 \\ 3^x = 3 \end{array}\right.; \left[\begin{array}{l} 3^x = 5 \\ 3^x = 3^1 \end{array}\right.; \left[\begin{array}{l} x = \log_3 5 \\ x = 1 \end{array}\right..$$

Ответ: $x = \log_3 5,\ x = 1$.

4. Однородные показательные уравнения называется уравнение вида:

$$\alpha \cdot a^{2x} + \beta \cdot a^x \cdot b^x + \gamma \cdot b^{2x} = 0.$$

Данные показательные уравнения решаются делением на любую показательную функцию, а затем введение новой переменной.

Пример 10. Решите уравнение $4 \cdot 9^x - 13 \cdot 6^x + 9 \cdot 4^x = 0$.

Решение:

$$4 \cdot 9^x - 13 \cdot 6^x + 9 \cdot 4^x = 0;$$

$$4 \cdot 3^{2x} - 13 \cdot 2^x \cdot 3^x + 9 \cdot 2^{2x} = 0;$$

Делим каждое слагаемое на $2^{2x} > 0$.

$$4 \cdot \frac{3^{2x}}{2^{2x}} - 13 \cdot \frac{2^x \cdot 3^x}{2^{2x}} + 9 \cdot \frac{2^{2x}}{2^{2x}} = 0;$$

$$4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 13 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x + 9 = 0;$$

Введем новую переменную: $\left(\frac{3}{2}\right)^x = t,\ t > 0$.

Решим вспомогательное уравнение:

$$4t^2 - 13t + 9 = 0;$$

$$D = b^2 - 4ac = 169 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 169 - 144 = 25;$$

$$t_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{D}}{2a} = \frac{13 \mp 5}{8};$$

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = 1 \\ t_2 = \frac{9}{4} \end{array}\right.$$

Вернемся к переменной x:

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = 1 \\ t_2 = \frac{9}{4} \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} \left(\frac{3}{2}\right)^x = 1 \\ \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{9}{4} \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} \left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^0 \\ \left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \end{array}\right.; \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

Ответ: $x = 0$, $x = 2$.

Показательные неравенства.

Показательным называется неравенство, в котором переменная входит только в показатели степеней, при постоянном основании.

1. *Простейшие показательные неравенства* - это неравенства вида $a^{f(x)} > b$, $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, $a > 0, a \neq 1$. Очевидно, что знак неравенства может быть любым (<, >, ≤, ≥).

Рассмотрим неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$.

Если основание *a* > 1, то при переходе от исходного неравенства к неравенству с показателями знак неравенства не изменяется, так как показательная функция при *a* > 1 является *возрастающей*, то есть:

$a^{f(x)} > a^{g(x)}$, если *a* > 1, то $y = a^x$ - возрастающая функция, $f(x) > g(x)$.

Если *0 < a < 1*, то при переходе от исходного неравенства к неравенству с показателями знак неравенства изменяется на противоположный, так как показательная функция при *0 < a < 1* является *убывающей*. то есть:

$a^{f(x)} > a^{g(x)}$, если *0 < a < 1*, то $y = a^x$ - убывающая функция, $f(x) < g(x)$.

Пример 11. Решите неравенство $5^x > \sqrt[7]{125}$.

Решение.

$$5^x > \sqrt[7]{125};$$

$$5^x > 5^{\frac{3}{7}};$$

a = 5 > 1, то $y = 5^x$ - возрастающая функция

$$x > \frac{3}{7};$$

$$x \epsilon (3; +\infty).$$

Ответ: $x \epsilon (3; +\infty)$.

Пример 12. Решите неравенство $(0{,}4)^{x^2-2x} \le \frac{8}{125}$.

Решение.

$$(0{,}4)^{x^2-2x} \le \frac{8}{125};$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{x^2-2x} \le \left(\frac{2}{5}\right)^3;$$

a = 0,4 < 1, то $y = \left(\frac{2}{5}\right)^x$ - убывающая функция

$$x^2 - 2x \ge 3;$$

$$x^2 - 2x - 3 \ge 0.$$

Решим квадратное неравенство:

$$y = x^2 - 2x - 3;$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0;$$

$$D = b^2 - 4ac = 4 + 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4 + 12 = 16;$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 \pm 4}{2};$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 \end{array}\right.;$$

$$(x-3)(x+1) \ge 0.$$

$$x \epsilon (-\infty; -1) \cup (3; +\infty).$$

Ответ: $x \epsilon (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

2. Рассмотрим *показательные неравенства* вида:

$$\alpha \cdot a^{f(x)+a} + \beta \cdot a^{f(x)+b} + \dots + \gamma \cdot a^{f(x)+n} > b.$$

Для решения таких уравнений левую часть преобразуют следующим образом: выносят за скобку степень $a^{f(x)+a}$ (часто, чтобы избежать дробных коэффициентов, выносят степень с наименьшим показателем), а затем решают простейшее показательное неравенство.

Пример 13. Решите неравенство $3^{x+2} + 3^{x-1} < 28$.

Решение:

$$3^{x+2} + 3^{x-1} < 28;$$

$$3^{x-1} \cdot (3^3 + 1) < 28;$$

$$3^{x-1} \cdot 28 < 28;$$

$$3^{x-1} < 1;$$

$$3^{x-1} < 3^0;$$

если *a = 3* > 1, то $y = 3^x$ - возрастающая функция

$$x - 1 < 0;$$

$$x < 1.$$

Ответ: $x \epsilon (-\infty; 1)$.

Пример 14. Решите неравенство $5^{3x+1} - 5^{3x-3} \geq 624$.

Решение:

$$5^{3x-3} \cdot (5^4 - 1) \geq 624;$$

$$5^{3x-3} \cdot 624 \geq 624;$$

$$5^{3x-3} \geq 1;$$

$$5^{3x-3} \geq 5^0;$$

если *a = 5* > 1, то $y = 5^x$ - возрастающая функция

$$3x - 3 \geq 0;$$

$$3x \geq 3;$$

$$x \geq 1.$$

Ответ: $x \epsilon [1; +\infty)$.

3. Еще один вид показательных неравенств – неравенства, сводящиеся к рациональным с помощью введения новой переменной. После решения неравенства с новой переменной получим простейшие показательные неравенства.

Пример 15. Решите неравенство $9^x - 3^{x+4} \leq 82$.

Решение:

$$9^x - 3^{x+4} \leq 82;$$

$$3^{2x} - 3^4 \cdot 3^x - 82 \leq 0.$$

Введем новую переменную $3^x = t,\ t > 0$.

Решим вспомогательное неравенство:

$$t^2 - 81t - 82 \leq 0;$$

$$y = t^2 - 81t - 82;$$

$$t^2 - 81t - 82 = 0;$$

$$D = b^2 - 4ac = 81^2 + 4 \cdot 1 \cdot 82 = 6561 + 324 = 6889;$$

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{81 \pm 83}{2};$$

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = 82 \\ t_2 = -1 \end{array}\right.;$$

$$(t - 82)(t + 1) \leq 0;$$

$$\left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} t \leq 82 \\ t \geq -1 \end{array}\right. \\ \quad t > 0 \end{array}\right. ; \quad \left\{\begin{array}{l} t > 0 \\ t \leq 82 \end{array}\right. ; \quad t \leq 82.$$

Вернемся к исходной переменной *x*: $t \leq 82; \quad 3^x \leq 82;$

если *a = 3* > 1, то $y = 3^x$ - возрастающая функция

$$x \leq \log_3 82.$$

Ответ: $x \epsilon (-\infty; \log_3 82)$.

Пример 16. Решите неравенство $11^{x+1} + 3 \cdot 11^{-x} \geq 34$.

Решение: $11^{x+1} + 3 \cdot 11^{-x} \geq 34;$

$$11 \cdot 11^x + 3 \cdot \frac{1}{11^x} \geq 34.$$

Введем новую переменную $11^x = t,\ t > 0$.

Решим вспомогательное неравенство: $11t + 3 \cdot \frac{1}{t} - 34 \geq 0;$

$\frac{11t^2 - 34t + 3}{t} \geq 0;$ так как $t > 0$, то $11t^2 - 34t + 3 \geq 0;$

$$y = 11t^2 - 34t + 3; \quad 11t^2 - 34t + 3 = 0;$$

$$D = b^2 - 4ac = 34^2 - 4 \cdot 11 \cdot 3 = 1156 - 132 = 1024;$$

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{34 \pm 32}{22};$$

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = 3 \\ t_2 = \frac{1}{11} \end{array}\right.; \quad (t - 3)\left(t - \frac{1}{11}\right) \geq 0;$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} t \geq 3 \\ t \leq \frac{1}{11} \end{array}\right. \\ t > 0 \end{cases}; \quad \left[\begin{array}{l} t \geq 3 \\ 0 \leq t \leq \frac{1}{11} \end{array}\right..$$

Вернемся к исходной переменной x:

$$\left[\begin{array}{l} t \geq 3 \\ 0 \leq t \leq \frac{1}{11} \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} 11^x \geq 3 \\ 0 \leq 11^x \leq \frac{1}{11} \end{array}\right.; \left[\begin{array}{l} 11^x \geq 3 \\ 11^x \leq 11^{-1} \end{array}\right.; \left[\begin{array}{l} x \geq \log_{11} 3 \\ x \leq -1 \end{array}\right..$$

Ответ: $x \epsilon (-\infty; -1] \cup [\log_{11} 3\,; +\infty)$.

Пример 17. Решите неравенство $\frac{5^x}{5^x-4} + \frac{5^x+5}{5^x-5} + \frac{22}{5^{2x}-9\cdot 5^x+20} \leq 0$.

Решение:

$$\frac{5^x}{5^x-4} + \frac{5^x+5}{5^x-5} + \frac{22}{5^{2x}-9\cdot 5^x+20} \leq 0$$

Введем новую переменную $5^x = t,\ t > 0$.

Решим вспомогательное неравенство: $\frac{t}{t-4} + \frac{t+5}{t-5} + \frac{22}{t^2-9t+20} \leq 0$

$$\frac{t\cdot(t-5) + (t+5)\cdot(t-4) + 22}{(t-4)\cdot(t-5)} \leq 0$$

$$\frac{t^2 - 5t + t^2 - 4t + 5t - 20 + 22}{(t-4)\cdot(t-5)} \leq 0$$

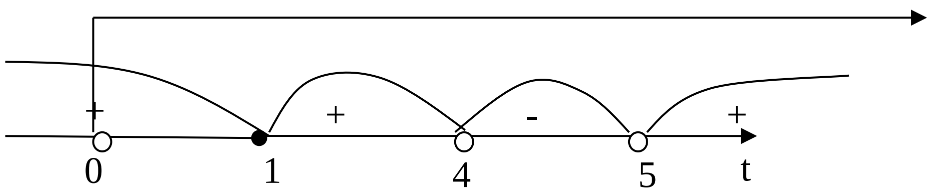
$$\frac{2t^2 - 4t + 2}{(t-4)\cdot(t-5)} \leq 0$$

Решим неравенство методом интервалов:

$$y = \frac{2t^2 - 4t + 2}{(t-4)\cdot(t-5)}$$

$$\left[\begin{array}{l} 2t^2 - 4t + 2 = 0 \\ (t-4)\cdot(t-5) \neq 0 \end{array}\right.; \left[\begin{array}{l} t^2 - 2t + 1 = 0 \\ (t-4)\cdot(t-5) \neq 0 \end{array}\right.; \left[\begin{array}{l} (t-1)^2 = 0 \\ (t-4)\cdot(t-5) \neq 0 \end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l} t_{1,2} = 0 \\ t \neq 4 \\ t \neq 5 \end{array}\right.. \quad \frac{(t-1)^2}{(t-4)\cdot(t-5)} \leq 0$$



$$\left[\begin{array}{l} t = 1 \\ \begin{cases} t > 4 \\ t < 5 \end{cases} \end{array}\right.$$

Вернемся к исходной переменной *x*:

$$\left[\begin{array}{l} t = 1 \\ \begin{cases} t > 4 \\ t < 5 \end{cases} \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} 5^x = 1 \\ \begin{cases} 5^x > 4 \\ 5^x < 5 \end{cases} \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} 5^x = 5^0 \\ \begin{cases} 5^x > 4 \\ 5^x < 5^1 \end{cases} \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ \begin{cases} x > \log_5 4 \\ x < 1 \end{cases} \end{array}\right..$$

Ответ: $x\epsilon\{0\} \cup (\log_5 4; 1)$.

4. Однородные показательные неравенства - это неравенства вида:

$\alpha \cdot a^{2x} + \beta \cdot a^x \cdot b^x + \gamma \cdot b^{2x} > 0$ (знак может быть любой).

Данные показательные неравенства решаются делением на любую показательную функцию, а затем введение новой переменной.

Пример 18. Решите неравенство $2 \cdot 81^{x+1} - 36^{x+1} - 3 \cdot 16^{x+1} < 0$

Решение: $2 \cdot 81^{x+1} - 36^{x+1} - 3 \cdot 16^{x+1} < 0;$

$$2 \cdot 81^x \cdot 81^1 - 36^x \cdot 36 - 3 \cdot 16^x \cdot 16 < 0;$$

$$162 \cdot 9^{2x} - 36 \cdot 4^x \cdot 9^x - 48 \cdot 4^{2x} < 0;$$

Разделим каждое слагаемое на $4^{2x} > 0$.

$$162 \cdot \frac{9^{2x}}{4^{2x}} - \frac{36 \cdot 4^x \cdot 9^x}{4^{2x}} - 48 \cdot \frac{4^{2x}}{4^{2x}} < 0;$$

$$162 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^{2x} - 36 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^{2x} - 48 < 0;$$

Разделим каждое слагаемое на 6:

$$27 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^{2x} - 6 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^{x} - 8 < 0;$$

Введем новую переменную $\left(\frac{9}{4}\right)^x = t,\ t > 0.$

Решим вспомогательное неравенство: $27t^2 - 6t - 8 < 0;$

$$y = 27t^2 - 6t - 8; \quad 27t^2 - 6t - 8 = 0;$$

$$D = b^2 - 4ac = 6^2 + 4 \cdot 27 \cdot 8 = 36 + 864 = 900;$$

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{6 \pm 30}{54}; \quad \left[\begin{array}{l} t_1 = \frac{2}{3} \\ t_2 = -\frac{1}{2} \end{array}\right.; \quad \left(t - \frac{2}{3}\right)\left(t + \frac{1}{2}\right) < 0;$$

$$\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}t > -\frac{1}{2} \\ t < \frac{2}{3}\end{array}\right. ; \\ t > 0\end{array}\right. \qquad 0 < t < \frac{2}{3}; \quad 0 < \left(\frac{9}{4}\right)^x < \frac{2}{3};$$

$$\left(\frac{9}{4}\right)^x < \frac{2}{3}; \quad \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} < \left(\frac{3}{2}\right)^{-1};$$

если *a = 1,5* > 1, то $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ - возрастающая функция

$2x < -1; \quad x < -0{,}5.$ Ответ: $x\epsilon(-\infty; -0{,}5)$.

Тема 6. Показательная функция. Логарифм. Логарифмическая функция. Область определения.

Понятие показательной функции.

Определение. Функция, заданная формулой $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ называется *показательной функцией с основанием a*.

Такое название она получила потому, что независимая переменная x стоит в показателе. Основание a – заданное число. Для положительного основания значение степени a^x можно найти для любого значения показателя x – и целого, и рационального, и иррационального, то есть для любого действительного значения.

Основные свойства показательной функции

1. Область определения: множество R действительных чисел.

2. Область значений: множество R+ всех положительных действительных чисел.

3. Монотонность: при $a > 1$ функция монотонно возрастает на всей числовой прямой; при $0 < a < 1$ функция монотонно убывает на множестве R.

4. Нули функции: так как основание $a > 0$, то ни при каких значениях переменной x функция не обращается в 0.

5. При любом значении a значение функции $y(0) = a^0 = 1$.

6. График функции (рисунок 6.1).

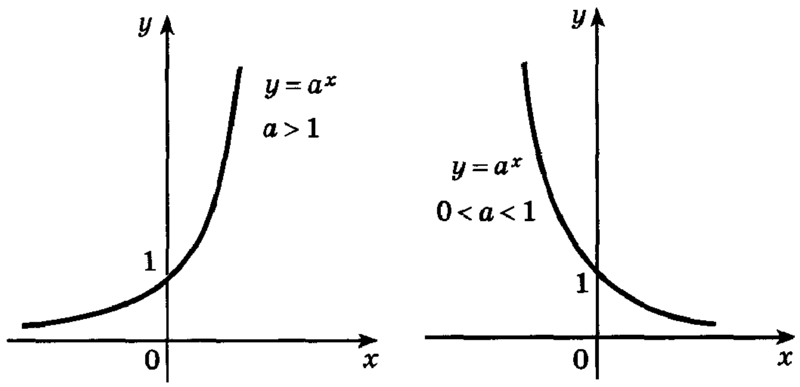


Рисунок 6.1 – Графики функций $y = a^x$.

Независимо от значения основания *a* график функции имеет горизонтальную асимптоту *y* = 0. Для 0 < *a* < *1* при x стремящемся к плюс бесконечности, для *a > 1* при *x* стремящемся к минус бесконечности.

Пример 1. Постройте график функции $y= -3^x + 1$ и опишите все ее свойства.

Решение.

1. Область определения функции – любое действительное число.

2. Найдем множество значений функции: так как $3^x > 0$, то $-3^x < 0$, значит, $-3^x + 1 < 1$, то есть множество значений функции $y= -3^x + 1$ представляет собой промежуток (-∞; 1).

3. Так как функция y = 3^x монотонно возрастает, то функция $y = -3^x$ монотонно убывает. Значит, и функция $y= - 3^x + 1$ также монотонно убывает.

4. Эта функция имеет нули функции: $-3^x + 1 = 0$, $3^x = 1$, $x = 0$.

5. Для этой функции (рисунок 6.2) горизонтальной асимптотой будет прямая *y = 1*.

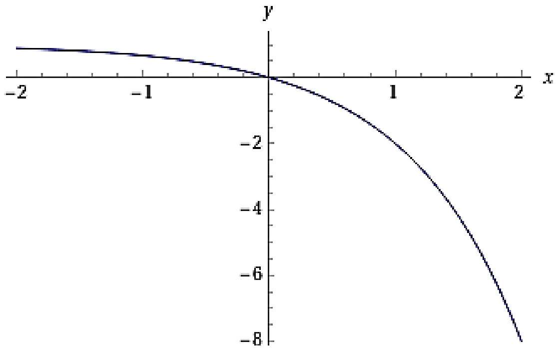


Рисунок 6.2 – График функции $y = -3^x + 1$.

Пример 2. Найдите множество значений функции $y = 3^{x+1} - 3$.

Решение. $3^{x+1} > 0$, то $3^{x+1} - 3 > -3$, то есть множество значений $(-3; +\infty)$.

Пример 3. Решите графически уравнение $3^x = 4 - x$.

Решение. Строим в одной системе координат графики функций $y = 3^x$, $y = 4 - x$. Графики функций (рисунок 6.3) пересекаются в точке x = 1.

Ответ: *x* = 1.

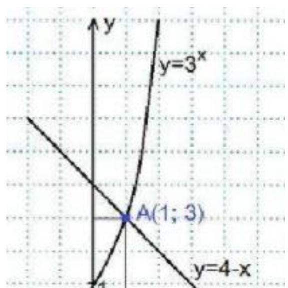


Рисунок 6.3 – Графики функций $y = 3^x$, $y = 4 - x$.

Определение логарифма.

Определение. Логарифмом положительного числа *b* по основанию *a*, $a > 0$, $a \neq 1$ называется показатель степени, в которую надо возвести число *a*, чтобы получить число *b*, то есть $\log_a b = c \rightarrow a^c = b$.

Пример 4. Вычислите $\log_3 216$.

Решение: $\log_3 216 = 3$, т.к. $6^3 = 216$.

Пример 5. Вычислите $\log_2 \frac{1}{8}$.

Решение: $\log_2 \frac{1}{8} = -3$, т.к. $2^{-3} = \frac{1}{2^{-3}} = \frac{1}{8}$.

Рассмотрим *основные свойства логарифмов.*

1. *Основное логарифмическое тождество:*

$a^{\log_a b} = b,\ a > 0,\ \ a \neq 1, b > 0$.

Пример 6. Вычислите $\frac{4^{\log_4 10}}{2}$.

Решение: $\frac{4^{\log_4 10}}{2} = \frac{10}{2} = 5$.

Пример 7. Вычислить $4^{-2\log_4 10}$.

Решение. $4^{-2\log_4 10} = \left(\ 4^{\log_4 10}\right)^{-2} = 10^{-2} = 0{,}01$.

Пример 8. Вычислить $4^{-2+\log_4 10}$.

Решение. $4^{-2+\log_4 10} = 4^{-2} \cdot 4^{\log_4 10} = \frac{1}{16} \cdot 10 = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$.

Пример 9. Вычислить $4^{-2-\log_4 10}$.

Решение. $4^{-2-\log_4 10} = \frac{4^{-2}}{4^{\log_4 10}} = \frac{1}{16} : 10 = \frac{1}{160}$.

2. *Логарифм произведения:* $\log_a bc = \log_a b + \log_a c,\quad a > 0, a \neq 1,$ $b > 0, c > 0$.

Пример 10. Вычислить $\log_2 16 + \log_2 32$.

Решение: $\log_2 16 + \log_2 32 = \log_2(2 \cdot 32) = \log_2 64 = 6$.

Пример 11. Вычислить $\log_3 6 + \log_3 \frac{3}{2}$.

Решение: $\log_3 6 + \log_3 \frac{3}{2} = \log_3 \left(6 \cdot \frac{3}{2}\right) = \log_3 9 = 2$.

3. *Логарифм частного:* $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c, a > 0, a \neq 1,$

$b > 0, c > 0$.

Пример 12. Вычислить $\log_5 75 - \log_5 3$.

Решение: $\log_5 75 - \log_5 3 = \ \log_5 \frac{75}{3} = \log_5 25 = 2$.

Пример 13. Вычислить $\log_8 10 - \log_8 15 + \log_8 12$.

Решение: $\log_8 10 - \log_8 15 + \log_8 12 = \log_8 \frac{10}{15} \cdot 12 = \log_8 8 = 1.$

4. Логарифм степени: $\log_a b^n = n \cdot \log_a |b|, a > 0, a \neq 1, b > 0.$

Пример 14. Вычислить $\log_3 \sqrt{3}$.

Решение: $\log_3 \sqrt{3} = \log_3 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_3 3 = \frac{1}{2} \cdot 1 = 0{,}5$

Пример 15. Вычислить $\frac{\log_3 25}{\log_3 5}$.

Решение: $\frac{\log_3 25}{\log_3 5} = \frac{\log_3 5^2}{\log_3 5} = \frac{2 \cdot \log_3 5}{\log_3 5} = 2.$

5. $log_{a^m} b = \frac{1}{m} log_a b\,,\quad a > 0, a \neq 1, b > 0.$

Пример 16. Вычислить $\log_{\sqrt[3]{13}} 13$.

Решение: $\log_{\sqrt[3]{13}} 13 = \log_{13^{\frac{1}{3}}} 13 = 3 \cdot \log_{13} 13.$

Пример 17. Вычислить $\log_{27} 243$.

Решение: $\log_{27} 243 = \log_{3^3} 3^5 = \frac{5}{3} \cdot \log_3 3 = \frac{5}{3}.$

6. Формула перехода к другому основанию $log_a b = \frac{log_c b}{log_c a}$*, где:*

$a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0, \mathrm{c} \neq 1.$

Пример 18. Вычислить $\frac{\log_3 25}{\log_3 5}$.

Решение: $\frac{\log_3 25}{\log_3 5} = \log_5 25 = 2.$

7. Взаимообратный логарифм: $log_a b = \frac{1}{log_b a}$ *или* $log_a b \cdot log_b a = 1.$

Пример 19. Вычислить $\log_5 9 \cdot \log_3 25$

Решение: $\log_5 9 \cdot \log_3 25 = \log_5 3^2 \cdot \log_3 5^2 = 2 \cdot \log_3 5 \cdot 2 \cdot \log_5 3 =$
$= 4 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 3 = 4.$

Понятие логарифмической функции.

Определение. Функцию вида $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ называют *логарифмической функцией* с основанием *а.*

Основные свойства логарифмической функции

1. Область определения – множество R+ всех положительных чисел. Это следует из определения логарифма (так как логарифм существует только положительного числа!)

2. Множество значений логарифмической функции – множество R всех действительных чисел.

3. Неограниченная функция (следует напрямую из 2 свойства.)

4. Возрастающая, если $a > 1$, и убывающая, если $0 < a < 1$.

5. Нули функции: $x = 1$.

6. Промежутки знакопостоянства: если $a > 0$, то функция принимает положительные значение при $x > 1$, отрицательные при $0 < x < 1$. Если $0 < a < 1$, функция принимает положительные значение при $0 < x < 1$, отрицательные при $x > 1$.

Из рассмотренных свойств логарифмической функции следует, что ее график располагается правее оси *ОУ*, обязательно проходит через точку (1; 0) и имеет вид (рисунок 6.4):

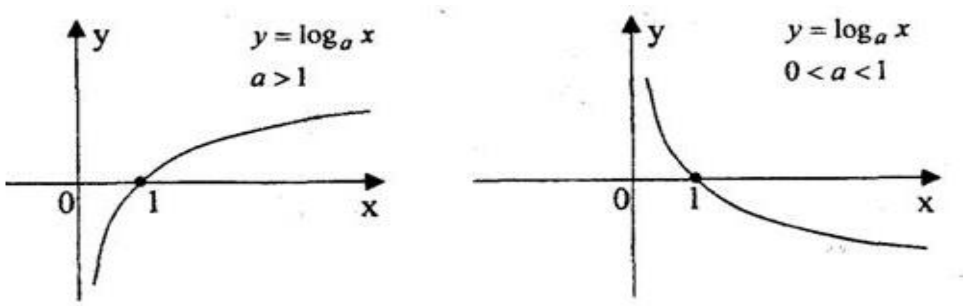


Рисунок 6.4 – Графики функций $y = \log_a x$.

Пример 20. Найдите область определения функции: $y = \log_2 3x + 1$

Решение: D(y) : $3x > 0$; $x > 0$. Ответ: D(y) = $(0; +\infty)$.

Пример 21. Найдите область определения функции: $y = \log_{0,5}(x^2 - 4)$

Решение: $(x^2 - 4) > 0$; $(x-2)(x+2) > 0$; $\left[\begin{array}{l} x < -2 \\ x > 2 \end{array}\right.$.

Ответ: D(y) = $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

Пример 22. Сравните числа $\log_2 \frac{1}{7}$ и -3 .

Решение. Представим число - 3 в виде логарифма по основанию 2:

$-3 = -3 \cdot \log_2 2 = \log_2 (2)^{-3} = \log_2 \frac{1}{8}$. Получаем, что $y = \log_2 x$ - возрастающая функция, значит $\log_2 \frac{1}{7} > \log_2 \frac{1}{8}$, тогда $\log_2 \frac{1}{7} > -3$.

Пример 23. Решите графически уравнение $\log_2 x = 3 - x$.

Решение. Построим в одной системе координат две функции $y = \log_2 x$ и $y = 3 - x$. Найдем точки их пересечения (рисунок 6.5). Ответ: x = 2.

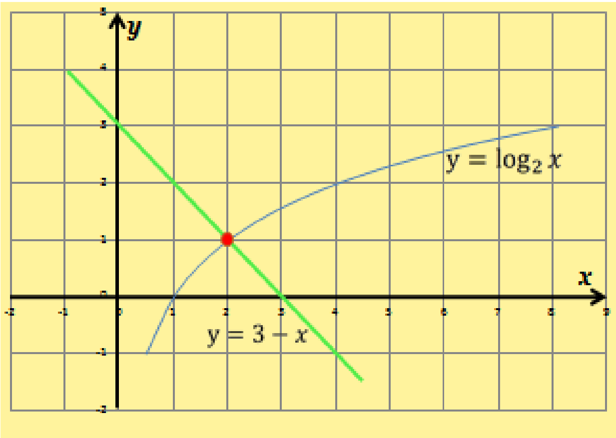


Рисунок 6.5 – Графики функций $y = \log_2 x$ и $y = 3 - x$.

Тема 5. Тригонометрические функции произвольного угла, их свойства и элементарные тригонометрические тождества.

Приведем основные тригонометрические формулы, известные вам из курса алгебры и начал математического анализа (5.1 – 5.36).

1. Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента (основные тригонометрические тождества (5.1 - 5.6))

$$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \qquad (5.1)$$

$$tg\ \alpha = \frac{sin\ \alpha}{cos\ \alpha} \qquad (5.2)$$

$$ctg\ \alpha = \frac{cos\ \alpha}{sin\ \alpha} \qquad (5.3)$$

$$tg\ \alpha \cdot ctg\ \alpha = 1 \qquad (5.4)$$

$$1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{sin^2\alpha} \qquad (5.5)$$

$$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{cos^2\alpha} \qquad (5.6)$$

2. Формулы сложения:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \qquad (5.7)$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \qquad (5.8)$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \qquad (5.9)$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \qquad (5.10)$$

$$tg\ (\alpha+\beta) = \frac{tg\ \alpha + tg\ \beta}{1 - tg\ \alpha\ tg\ \beta} \qquad (5.11)$$

$$tg\ (\alpha-\beta) = \frac{tg\ \alpha - tg\ \beta}{1 + tg\ \alpha\ tg\ \beta} \qquad (5.12)$$

3. Формулы кратных аргументов:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \qquad (5.13)$$

$$\cos 2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha = 2cos^2\alpha - 1 = 1 - 2sin^2\alpha \qquad (5.14)$$

$$tg\ 2\alpha = \frac{2\ tg\ \alpha}{1 - tg^2\alpha} \qquad (5.15)$$

$$\sin 3a = 3\sin a - 4\, sin^3 a \tag{5.16}$$

$$\cos 3a = 4\, cos^3 a - 3\cos a \tag{5.17}$$

4. Формулы преобразования сумм или разностей в произведения:

$$\sin a + \sin\beta = 2\sin\frac{a+\beta}{2}\cos\frac{a-\beta}{2} \tag{5.18}$$

$$\sin a - \sin\beta = 2\sin\frac{a-\beta}{2}\cos\frac{a+\beta}{2} \tag{5.19}$$

$$\cos a + \cos\beta = 2\cos\frac{a+\beta}{2}\cos\frac{a-\beta}{2} \tag{5.20}$$

$$\cos a - \cos\beta = -2\sin\frac{a+\beta}{2}\sin\frac{a-\beta}{2} \tag{5.21}$$

$$tg\,\alpha + tg\,\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} \tag{5.22}$$

$$tg\,\alpha - tg\,\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} \tag{5.23}$$

5. Формулы преобразования произведений в суммы или разности:

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)) \tag{5.24}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)) \tag{5.25}$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)) \tag{5.26}$$

6. Формулы понижения степени:

$$cos^2 a = \frac{1 + cos\,2a}{2} \tag{5.27}$$

$$sin^2 a = \frac{1 - cos\,2a}{2} \tag{5.28}$$

$$cos^3 a = \frac{3\,cos\,\alpha + cos\,3a}{4} \tag{5.29}$$

$$sin^3 a = \frac{3\,sin\,\alpha - sin\,3a}{4} \tag{5.30}$$

7. Формулы половинного аргумента:

$$sin\ \frac{\alpha}{2} = \mp\sqrt{\frac{1 - cos\ a}{2}} \tag{5.31}$$

$$cos\ \frac{\alpha}{2} = \mp\sqrt{\frac{1 + cos\ a}{2}} \tag{5.32}$$

$$tg\ \frac{\alpha}{2} = \mp\sqrt{\frac{1 - cos\ a}{1 + cos\ a}} \tag{5.33}$$

8. Формулы выражения тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента:

$$sin\,\alpha = \frac{2tg\ \frac{\alpha}{2}}{1 + tg^2\frac{\alpha}{2}} \tag{5.34}$$

$$cos\,\alpha = \frac{1 - tg^2\frac{\alpha}{2}}{1 + tg^2\frac{\alpha}{2}} \tag{5.35}$$

$$tg\ \ \alpha = \frac{2tg\ \frac{\alpha}{2}}{1 - tg^2\frac{\alpha}{2}} \tag{5.36}$$

9. Формулы приведения:

	$\boldsymbol{\frac{\pi}{2} - \alpha}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{2} + \alpha}$	$\boldsymbol{\pi - \alpha}$	$\boldsymbol{\pi + \alpha}$	$\boldsymbol{\frac{3\pi}{2} - \alpha}$	$\boldsymbol{\frac{3\pi}{2} + \alpha}$	$\boldsymbol{2\pi - \alpha}$	$\boldsymbol{2\pi + \alpha}$
$\boldsymbol{sin\,\alpha}$	$cos\,\alpha$	$cos\,\alpha$	$sin\,\alpha$	$-sin\,\alpha$	$-cos\,\alpha$	$-\ cos\,\alpha$	$-\ sin\,\alpha$	$sin\,\alpha$
$\boldsymbol{cos\,\alpha}$	$sin\,\alpha$	$-\ sin\,\alpha$	$-\ cos\,\alpha$	$-cos\,\alpha$	$-\ sin\,\alpha$	$sin\,\alpha$	$cos\,\alpha$	$cos\,\alpha$
$\boldsymbol{tg\ \alpha}$	$ctg\ \alpha$	$-ctg\ \alpha$	$-tg\ \alpha$	$tg\ \alpha$	$ctg\ \alpha$	$-ctg\ \alpha$	$-tg\ \alpha$	$tg\ \alpha$
$\boldsymbol{ctg\ \alpha}$	$tg\ \alpha$	$-tg\ \alpha$	$-ctg\ \alpha$	$ctg\ \alpha$	$tg\ \alpha$	$-tg\ \alpha$	$-ctg\ \alpha$	$ctg\ \alpha$

Четность и нечетность тригонометрических функций:

$$sin\,(-\alpha) = -\,sin\,\alpha,\ cos\,(-\alpha) = \cos\alpha$$

$$tg(-\alpha) = -\,tg\,\alpha\,, \qquad ctg(-\alpha) = -\,ctg\,\alpha$$

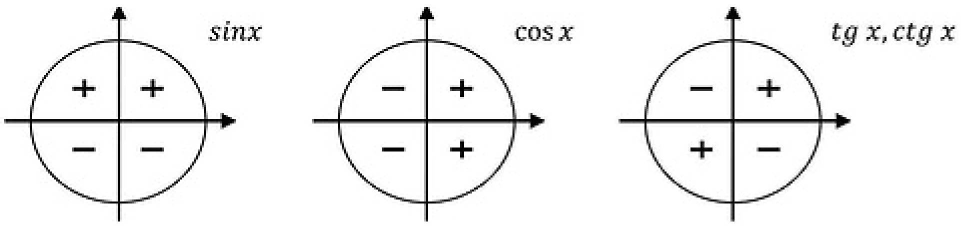


Рисунок 5.1 - Знаки тригонометрических функций

10. Значения тригонометрических функций основных углов:

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	90°	180°	270°	360°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	- 1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	- 1	0	1
$tg\ \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-	0
$ctg\ \alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-	0	-

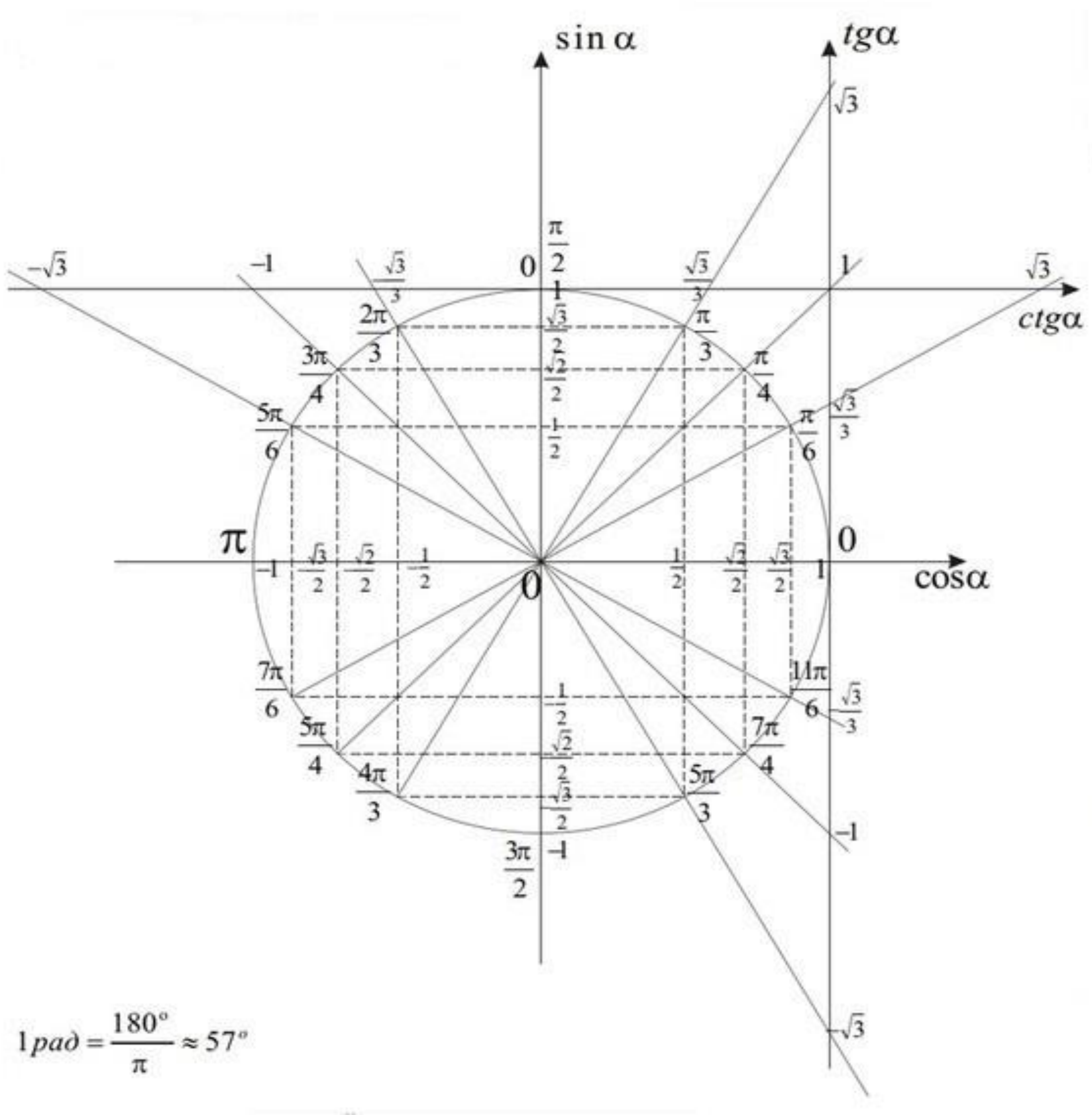


Рисунок 5.2 – Числовая окружность на координатной плоскости

Напомним, что в ходе изучения тригонометрических функций в школьном курсе математики используется понятие *числовой окружности* (рисунок 5.2) – «единичной окружности с установленным соответствием (между действительными числами и точками окружности)» [16], представленной выше.

Пример 1. Вычислить: а) $\sin 75^0 + \cos 75^0$; б) $\cos\frac{11\pi}{12} - \cos\frac{5\pi}{12}$.

Решение: а) применим формулу приведения (п. 9) и формулу (5.18):

$$\sin 75^0 + \cos 75^0 = \sin 75^0 + \cos\left(90^0 - 15^0\right) = \sin 75^0 + \sin 15^0 = 2\sin\frac{75^0 + 15^0}{2}\cdot$$

$$\cdot\cos\frac{75^0-15^0}{2}=2\sin\frac{75^0+15^0}{2}\cos\frac{75^0-15^0}{2}=2\sin 45^0\cos 30^0=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

б) воспользуемся формулой (5.21), получим: $\cos\frac{11\pi}{12}-\cos\frac{5\pi}{12}=$

$$=-2\sin\frac{\frac{11\pi}{12}+\frac{5\pi}{12}}{2}\sin\frac{\frac{11\pi}{12}-\frac{5\pi}{12}}{2}=-2\sin\frac{2\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=-2\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{\pi}{4}=$$

$=-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{6}}{2}$. Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{2}$; $-\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Пример 2. Докажите тождество: а) $\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}=\cos^4\alpha-\sin^4\alpha$;

б) $\cos^2\alpha=(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)$; в) $\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}=\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Доказательство: а) преобразуем левую часть равенства, получим: $\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}=\frac{1-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$. Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством, тогда: $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\cdot(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=\cos^4\alpha-\sin^4\alpha$;

б) преобразуем правую часть равенства: $(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)==1-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha$;

в) найдем разность левой и правой частей равенства, которая должна быть равна нулю: $\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}-\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\cos^2\alpha-(1-\sin^2\alpha)}{\cos\alpha(1-\sin\alpha)}=\frac{\cos^2\alpha-\cos^2\alpha}{\cos\alpha(1-\sin\alpha)}=0$.

Пример 3. Упростите выражение: а) $\left(\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\alpha}\right)\cdot\frac{1-\cos 4\alpha}{\cos(\pi-\beta+\alpha)}$;

б) $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)$; в) $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$.

Решение: а) $\left(\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\alpha}\right)\cdot\frac{1-\cos4\alpha}{\cos(\pi-\beta+\alpha)}=\frac{\cos\beta\cos\alpha+\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\alpha}\cdot$

$$\cdot\frac{1-\left(\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha\right)}{\cos(\pi-(\beta-\alpha))}=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\cos\alpha}\cdot\frac{1-\left(1-\sin^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha\right)}{-\cos(\beta-\alpha)}=\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}\cdot\frac{2\sin^2 2\alpha}{-1}=$$

$$=\frac{2\sin^2 2\alpha}{-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{2\sin^2 2\alpha}{-\frac{1}{2}\sin 2\alpha}=-4\sin 2\alpha;$$

б) $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)=-2\sin\frac{\frac{\pi}{4}-\beta+\frac{\pi}{4}+\beta}{2}\sin\frac{\frac{\pi}{4}-\beta-\frac{\pi}{4}-\beta}{2}=$

$$=2\sin\frac{\pi}{4}\sin\beta=\sqrt{2}\sin\beta;$$

в) $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right)\cdot$

$$\cdot\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right)=\left(2\sin\frac{\frac{\pi}{4}+\alpha-\frac{\pi}{4}+\alpha}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{4}+\alpha+\frac{\pi}{4}-\alpha}{2}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(2\sin\frac{\frac{\pi}{4}+\alpha+\frac{\pi}{4}-\alpha}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{4}+\alpha-\frac{\pi}{4}+\alpha}{2}\right)=2\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}\cdot 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha=2\sin\alpha\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2\cdot$$

$$\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha.$$

Ответ: а) $-4\sin 2\alpha$; б) $\sqrt{2}\sin\beta$; в) $\sin 2\alpha$.

Пример 4. Разложить выражение на множители:

а) $1-2\sin\alpha$; б) $1+\sin\alpha$; в) $2\sin\alpha+\sqrt{3}$; г) $1-\cos\alpha+\sin\alpha$.

Решение: а) применим формулу (5.19): $1-2\sin\alpha=2\left(\frac{1}{2}-\sin\alpha\right)=$

$$=2\left(\sin 30^0-\sin\alpha\right)=2\cdot 2\cdot\sin\frac{30^0-\alpha}{2}\cos\frac{30^0+\alpha}{2}=4\sin\frac{30^0-\alpha}{2}\cos\frac{30^0+\alpha}{2}.$$

б) с помощью формулы (5.18) получим: $1+\sin\alpha = \sin\frac{\pi}{2}+\sin\alpha =$

$$= 2\sin\frac{\frac{\pi}{2}+\alpha}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{2} = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right);$$

в) применим формулу (5.18): $2\sin\alpha+\sqrt{3} = 2\left(\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$

$$= 2\left(\sin\alpha+\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\cdot 2\sin\frac{\alpha+\frac{\pi}{3}}{2}\cos\frac{\alpha-\frac{\pi}{3}}{2} = 4\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right).$$

г) $1-\cos\alpha+\sin\alpha = \cos 0^0-\cos\alpha+\sin\alpha = -2\sin\frac{0+\alpha}{2}\sin\frac{0-\alpha}{2}+\sin\alpha =$

$$= -2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(-\frac{\alpha}{2}\right)+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right).$$

Ответ: а) $4\sin\frac{30^0-\alpha}{2}\cos\frac{30^0+\alpha}{2}$; б) $2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$;

в) $4\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$; г) $2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)$.

Пример 5. Вычислить: $\left(\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)\right)\cdot\sin\frac{\pi}{12}$.

Решение: *Первый способ*. Воспользуемся формулой сложения (5.7), получим: $\left(\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)\right)\cdot\sin\frac{\pi}{12} =$

$$= \left(\sin\alpha\cos\frac{\pi}{12}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{12}+\sin\alpha\cos\frac{\pi}{12}-\cos\alpha\sin\frac{\pi}{12}\right)\cdot\sin\frac{\pi}{12} =$$

$$= 2\sin\alpha\cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12} = \sin\alpha\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\sin\alpha.$$

Второй способ. Применим формулу (5.18): $\left(\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)\right)\cdot\sin\frac{\pi}{12} =$

$$= 2\sin\frac{\alpha+\frac{\pi}{12}+\alpha-\frac{\pi}{12}}{2}\cos\frac{\alpha+\frac{\pi}{12}-\alpha+\frac{\pi}{12}}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{12} = 2\sin\alpha\cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\sin\alpha.$$

Ответ: $\frac{1}{2}\sin\alpha.$

Пример 6. Доказать тождество: $\frac{\sin\alpha+\sin 3\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha}=tg2\alpha.$

Доказательство: преобразуем левую часть равенства, получим:
$$\frac{2\sin\frac{\alpha+3\alpha}{2}\cos\frac{\alpha-3\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha+3\alpha}{2}\cos\frac{\alpha-3\alpha}{2}}=\frac{2\sin 2\alpha\cos(-\alpha)}{2\cos 2\alpha\cos(-\alpha)}=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=tg2\alpha.$$

Пример 7. Доказать тождество: $tg\alpha+tg\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$ и на основе его вычислить $tg267^0+tg93^0$.

Доказательство: преобразуем левую часть равенства: $tg\alpha+tg\beta=$
$=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$. Так как $tg\alpha+tg\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$, то $tg267^0+tg93^0=\frac{\sin 360^0}{\cos 267^0\cos 93^0}=0.$ Ответ: 0.

Пример 8. Вычислить $tg\ \alpha$, если $sin\ \alpha=(-0{,}6)$ и $\alpha\in(\pi;\frac{3\pi}{2})$.

Решение. С помощью основного тригонометрического тождества $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ найдем $\cos\alpha$: $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-(-0{,}6)^2}=$ $=-\sqrt{1-0{,}36}=-0{,}8$, так как $\alpha\in(\pi;\frac{3\pi}{2})$ – 3 четверти и $\cos\alpha<0$. Тогда: $tg\ \alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{-0{,}6}{-0{,}8}=\frac{3}{4}=0{,}75.$ Ответ: $tg\ \alpha=0{,}75.$

Тема 4. Определение синуса, косинуса, тангенса и котангенса в прямоугольном треугольнике.

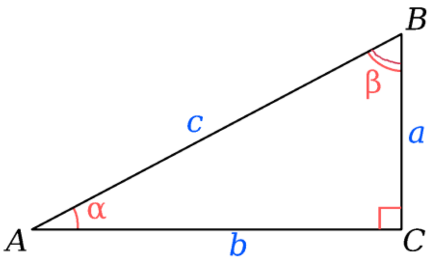


Рисунок 4.1

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC (рисунок 4.1). «Для острого угла α найдем прилежащий к нему катет и противолежащий. Так, *катет* a этого треугольника является *противолежащим* углу α, а *катет* b – *прилежащим* к углу α» [3].

Из школьного курса геометрии вам известно, что:

«1. *Синусом* острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к гипотенузе.

2. *Косинусом* острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе.

3. *Тангенсом* острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к прилежащему» [1].

Значит, $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, $tg\ \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\sin x}{\cos x}$, $ctg\ \alpha = \frac{b}{a} = \frac{\cos x}{\sin x}$.

Кроме того, $ctg\ \alpha = \frac{1}{tg\ \alpha}$.

При решении задач часто используют также и другие соотношения между элементами прямоугольного треугольника (Таблица 4.1):

Таблица 4.1 – Основные соотношения, связанные с углами прямоугольного треугольника

$sin^2\,\alpha + cos^2\,\alpha\ =\ 1$ – основное тригонометрическое тождество	
$1 + tg^2\,\alpha = \dfrac{1}{cos^2\,\alpha}$	$1 + ctg^2\,\alpha = \dfrac{1}{sin^2\,\alpha}$
$\alpha\ +\ \beta\ =\ 90°$	$cos\,\alpha = sin\,\beta$
$sin\,\alpha = cos\,\beta$	$tg\,\alpha = ctg\,\beta$

Кроме того, при решении задач на отношения между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике применяют следующие *утверждения*.

- «сумма углов любого треугольника равна $180°$;

- сумма двух острых углов прямоугольного треугольника равна $90°$;

- квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов (*теорема Пифагора*);

- катет, лежащий напротив угла в $30°$, равен половине гипотенузы;

- высота прямоугольного треугольника (рисунок 4.2), проведенная из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное для отрезков, на которые делится гипотенуза этой высотой, то есть: $h_c^2 = b_c \cdot a_c$;

- катет прямоугольного треугольника (рисунок 4.2) есть среднее пропорциональное для гипотенузы и отрезка гипотенузы, заключенного между катетом и высотой, проведенной из вершины прямого угла, то есть: $a^2 = c \cdot a_c$; $b^2 = c \cdot b_c$» [1].

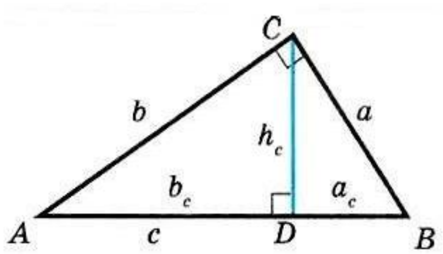


Рисунок 4.2

В таблице 4.2 приведены значений $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $tg\ \alpha$ для углов α, равных $30°$, $45°$ и $60°$.

Таблица 4.2 – Значения синуса, косинуса и тангенса для углов $30°$, $45°$ и $60°$

α	$30°$	$45°$	$60°$
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$tg\,\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Пример 1. «Найдите синус, косинус, тангенс и котангенс углов треугольника ABC с прямым углом C, если BC = 12, AC = 9» [1].

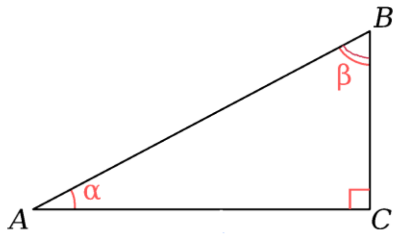


Рисунок 4.3

Решение. По теореме Пифагора имеем: AB = $\sqrt{12^2+9^2} = 15.$

По определениям синуса, косинуса и тангенса острого угла в прямоугольном треугольнике получим:

$$\sin\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}, \quad \cos\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}, \quad tg\,\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

$$\sin\beta = \frac{AC}{AB} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}, \quad \cos\beta = \frac{BC}{AB} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}, \quad tg\,\beta = \frac{AC}{BC} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

$$ctg\,\alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}, \quad ctg\,\beta = \frac{BC}{AC} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}.$$

В соответствии с таблицей 4.1 действительно имеем, что:

$$\cos\alpha = \sin\beta = \frac{3}{5}, \quad \sin\alpha = \cos\beta = \frac{4}{5},$$

$$tg\,\alpha = ctg\,\beta = \frac{4}{3}, \quad tg\,\beta = ctg\,\alpha = \frac{3}{4}.$$

Ответ: $\cos\alpha = \sin\beta = \frac{3}{5}$, $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{4}{5}$, $tg\,\alpha = ctg\,\beta = \frac{4}{3}, tg\,\beta =$ $= ctg\,\alpha = \frac{3}{4}.$

Пример 2. В треугольнике ABC (рисунок 4.4): ∠C = $90°$, $\sin\beta = \frac{7}{25}$. Найдите AB, если BC = $4{,}8$.

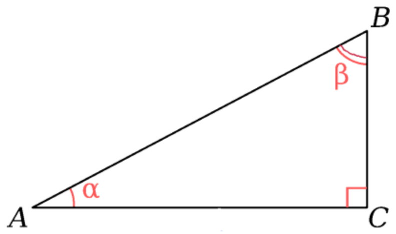


Рисунок 4.4

Решение. Так как косинус острого угла в прямоугольном треугольнике равен отношению прилежащего к этому углу катета к гипотенузе, то $\cos\beta = \frac{BC}{AB} = \frac{4{,}8}{AB} \Rightarrow$ AB = $\frac{4{,}8}{\cos\beta}$. С помощью основного тригонометрического тождества: $\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$ найдем $\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \sqrt{1-\left(\frac{7}{25}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{49}{625}} == \sqrt{\frac{576}{625}} = \frac{24}{25} = 0{,}96.$

Тогда AB = $\frac{4{,}8}{\cos\beta} = \frac{4{,}8}{0{,}96} = 5.$ Ответ: AB = 5.

Пример 3. В треугольнике ABC (рисунок 4.5) ∠C = $90°$. Известно, что ∠ B = $60°$, AB = 18. Найдите AC.

Решение. Так как сумма двух острых углов прямоугольного треугольника равна $90°$, то ∠ A = $90° - 60° = 30°$. Найдем BC: $BC = \frac{18}{2} ==$ 9, так как катет, лежащий напротив угла в $30°$, равен половине гипотенузы. По теореме Пифагора найдем катет AC: AC = $\sqrt{18^2-9^2} = \sqrt{(18+9)\cdot(18-9)} = \sqrt{27\cdot 9} = 9\sqrt{3}.$

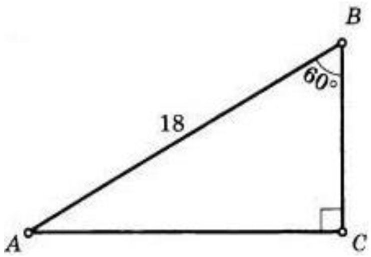


Рисунок 4.5

Ответ: AC = $9\sqrt{3}$.

Пример 4. В треугольнике ABC (рисунок 4.6) ∠C = $90°$, CD – высота, Известно, что ∠ ACD = $30°$, AC = 6. Найдите BC.

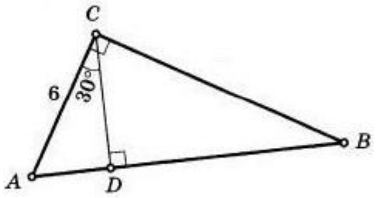


Рисунок 4.6

Решение. Рассмотрим прямоугольный треугольник ADC, AD = 3, так как катет, лежащий напротив угла в $30°$, равен половине гипотенузы. По теореме Пифагора найдем высоту CD: CD = $= \sqrt{6^2-3^2} = \sqrt{36-9} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}.$ Рассмотрим прямоугольный треугольник BDC, ∠C = $90°$, значит ∠ CBD = $= 90° - 60° = 30°$ Имеем: $\sin 30° = \frac{CD}{CB} = \frac{3\sqrt{3}}{CB}$. Тогда BC = $\frac{3\sqrt{3}}{\sin 30°} = \frac{3\sqrt{3}}{0{,}5} = 6\sqrt{3}.$

Ответ: BC = $6\sqrt{3}$.

Пример 5. В треугольнике ABC (рисунок 4.7) $\angle C = 90°$, CD – высота, Известно, что AC = BC, CD = 12. Найдите BC.

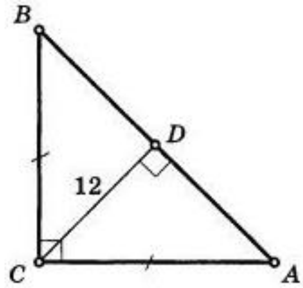


Рисунок 4.7

Решение. Так как в прямоугольном треугольнике ABC AC = BC, то он равнобедренный, ∠ A = ∠ B = $45°$. Рассмотрим прямоугольный треугольник CDB. Имеем: $\sin 45° = \frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{CB}} = \frac{12}{\mathrm{CB}}$. Тогда BC = $\frac{12}{\sin 45°} = \frac{12}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 12\sqrt{2}$.

Ответ: BC = $12\sqrt{2}$.

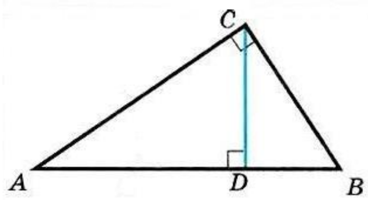


Рисунок 4.8

Пример 6. В прямоугольном треугольнике ABC (рисунок 4.8) AB = 13, $tg\ \mathrm{B} = \frac{1}{5}$. Найти BD.

Решение. *Первый способ.* Известно, что $tg\ \mathrm{B} = \frac{CD}{BD} = \frac{1}{5}$. Рассмотрим прямоугольный треугольник CDB. $cos\ B = \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{CB}}$. Тогда BD = BC $\cdot\ cos\ B$. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC, в котором: $cos\ B = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}$. Значит BC = AB $\cdot\ cos\ B$. Имеем: BD = BC $\cdot\ cos\ B$ = (AB $\cdot\ cos\ B$) $\cdot\ cos\ B$ = AB $\cdot\ cos^2\ B$. Из тождества $1 + tg^2\ \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ найдем: $cos^2\ B = \frac{1}{1+tg^2\ \mathrm{B}}$, тогда BD = AB $\cdot\cdot\ cos^2\ B = \frac{\mathrm{AB}}{1+tg^2\ \mathrm{B}} = \frac{13}{1+0{,}04}$ =12,5.

Второй способ. Пусть AC = x, тогда BC = $5x$. По теореме Пифагора: $AB^2 = AC^2 + BC^2$, тогда $13^2 = x^2 + (5x)^2$. Получим: $169 = 26x^2$. AC = $x = \frac{13}{\sqrt{26}} = \frac{13}{\sqrt{2 \cdot 13}} = \frac{13\sqrt{13}}{\sqrt{2} \cdot 13} = \sqrt{\frac{13}{2}}$, BC = $5x = 5\sqrt{\frac{13}{2}}$. Так как $\mathrm{BC}^2 = \mathrm{AB} \cdot \mathrm{BD}$, то $\left(5\sqrt{\frac{13}{2}}\right)^2 = 13 \cdot\ \mathrm{BD}$. Следовательно BD = $\frac{25 \cdot 13}{2} \cdot \frac{1}{13} = 12{,}5$. Ответ: BD = 12,5.

Пример 7. В прямоугольном треугольнике ABC (рисунок 4.8) AC = 8, $sin\ B = \frac{1}{2}$. Найти AD.

Решение. Рассмотрим прямоугольные треугольники ABC и CDB, имеем: ∠ CBD = ∠ DCA как острые углы со взаимно перпендикулярными сторонами.

Тогда $sin\angle \mathrm{DCA} = \frac{AD}{BC} = \frac{1}{2}$. Следовательно AD = $\frac{BC}{2} = \frac{8}{2} = 4$. Ответ: AD = 4.

Пример 8. В прямоугольном треугольнике ABC (рисунок 4.8) AD = 12, $tg\ B = \frac{2}{3}$. Найти BD.

Решение. Известно, что $tg\ \mathrm{B} = \frac{CD}{BD} = \frac{2}{3}$. Из прямоугольного треугольника ABC с высотой CD имеем: $\mathrm{CD}^2 = \mathrm{AD} \cdot \mathrm{BD}$. Тогда $tg\ \mathrm{B} = \frac{\sqrt{12 \cdot \mathrm{BD}}}{BD} = \frac{2}{3}$. Получим: $\frac{12}{BD} = \frac{4}{9}$, тогда BD = $\frac{12 \cdot 9}{4} = 27$. Ответ: BD = 27.

Тема 3. Понятие функции. Линейная и квадратичная функции. Построение графиков функций. Область определения и множество значений функции.

Из школьного курса вам известно, что:

- «соответствие, по которому каждому элементу x множества X сопоставляется единственный элемент y множества Y, называется функцией (отображением), определенной на множестве X со значениями в множестве Y» [30];

- функция обозначается: $y = f(x)$, где $f\colon X \to Y$;

- элемент $x \in X$ называется аргументом или независимой переменной; множество X – областью определения функции $y = f(x)$ и обозначается $D(f)$;

- элемент $y \in Y$ называется значением функции или зависимой переменной; множество Y – областью значений функции $y = f(x)$ и обозначается $E(f)$;

- графиком функции $y = f(x)$ называется множество всех точек координатной плоскости с координатами $(x; f(x))$, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты – соответствующим значениям функции;

- функцию можно задать несколькими способами: аналитическим (формулой), графическим, табличным, а также словесным.

В 7-11 классах вами были изучены следующие основные элементарные функции:

«$y = kx$; $y = kx + b$;

$y = \frac{k}{x}$;

$y = x^2$; $y = x^3$;

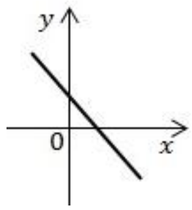
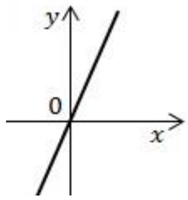
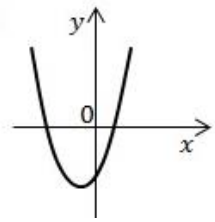
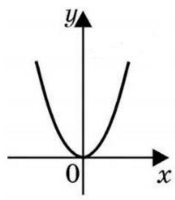
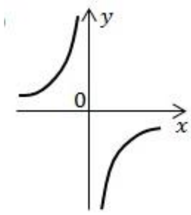
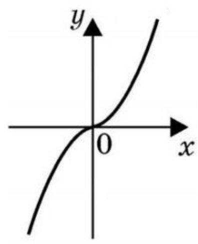
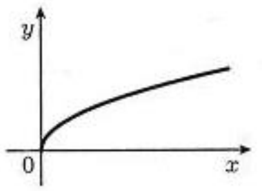
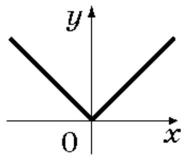
$y = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$;

$y = |x|$;

$y = \sqrt{x}$; $y = x^n$, $y = \sqrt[n]{x}$» [16].

Рассмотрим ниже графики некоторых из них (таблица 2.1).

Таблица 2.1 – Графики некоторых элементарных функций

Функция и ее график	
Линейная функция, $y = kx + b$ 	Прямая пропорциональность, $y = kx$ 
Квадратичная функция, $y = ax^2 + bx + c$ 	$y = x^2$ 
Обратная пропорциональность, $y = \frac{k}{x}$ 	$y = x^3$ 
$y = \sqrt{x}$ 	$y = \|x\|$ 

Кроме того, «напомним некоторые простейшие преобразования графиков функций:

1. График функции $y = -f(x)$ симметричен графику функции $y = f(x)$ относительно оси абсцисс.

2. График функции $y = f(-x)$ симметричен графику функции $y = f(x)$ относительно оси ординат.

3. График функции $y = -f(-x)$ симметричен графику функции $y = f(x)$ относительно начала координат.

4. График функции $y = f(x + a)$ получается из графика функции $y = f(x)$ с помощью параллельного переноса (сдвига) последнего вдоль оси OX на $|a|$ единиц масштаба влево, если $a > 0$, и на $|a|$ единиц вправо, если $a < 0$.

5. График функции $y = f(x) + b$ получается из графика функции $y = f(x)$ с помощью параллельного переноса (сдвига) последнего вдоль оси OY на $|b|$ единиц масштаба вверх, если $b > 0$, и на $|b|$ единиц вниз, если $b < 0$.

6. График функции $y = f(kx)$ получается из графика функции $y = f(x)$ с помощью сжатия по оси абсцисс исходного графика пропорционально коэффициенту k при аргументе (если $k > 1$, то график *сжимается* в k раз, а если $0 < k < 1$, то график *растягивается* в $\frac{1}{k}$ раз). Если $k < 0$, то нужно сначала построить график функции $y = f(|k|x)$, а затем отразить его симметрично относительно оси OY» [9].

7. «График функции $y = mf(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ с помощью растяжения по оси ординат исходного графика пропорционально коэффициенту m (если $m > 1$, то график *растягивается* в m раз, а если $0 < m < 1$, то график *сжимается* в $\frac{1}{m}$ раз). Если $m < 0$, то нужно сначала построить график функции $y = |m|f(x)$, а затем отразить его симметрично относительно оси OX.

График функции $y = mf(kx + a) + b$ строят, применяя в определенной последовательности описанные выше преобразования. Сначала строим график функции $y = f(x + a)$. Затем - график функции $y = f(kx + a)$. Далее строим график функции $y = mf(kx + a)$. Наконец, получаем график функции $y = mf(kx + a) + b$» [11].

Ниже представим правила построения графиков *функций, содержащих знак модуля*.

8. «Чтобы построить график функции $y = |f(x)|$ из графика функции $y = f(x)$, нужно ту часть графика функции $y = f(x)$, которая находится ниже оси OX, отразить симметрично относительно этой оси; а часть графика функции $y = f(x)$, которая находится выше оси OX, оставить без изменения.

9. Чтобы построить график функции $y = f(|x|)$ из графика функции $y = f(x)$, нужно часть графика функции $y = f(x)$, лежащую правее оси OY, оставить без изменения, а вместо оставшейся части графика нарисовать кривую, получающуюся отражением первой части графика функции $y = f(x)$ относительно оси OY.

10. Чтобы построить график функции $y = |f(|x|)|$ из графика функции $y = f(x)$, нужно сначала построить график функции $y = f(|x|)$ согласно второму правилу, а затем из полученного графика построить график функции $y = |f(|x|)|$ согласно первому правилу» [9].

Рассмотрим примеры решения заданий по данной теме.

Пример 1. «Установите соответствие между представленными графиками элементарных функций на рисунке 3.1, и формулами, задающими их: $1)\ y = x^2 - 2;\quad 2)\ y = 2x;\ 3)\ y = -\frac{2}{x}$.

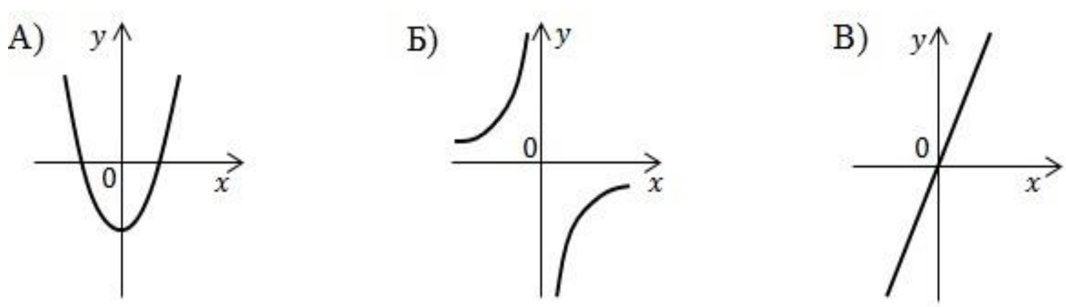


Рисунок 3.1 – Графики функций к примеру 1

Ответ: А – 1 (парабола, сдвинутая вниз на 2 единицы масштаба), Б – 3 (гипербола), В – 2 (график прямой пропорциональности)» [32].

Пример 2. «На рисунке 3.2 представлены графики квадратичной функций $y = ax^2 + bx + c$. Для каждого из них укажите соответствующие ему значения коэффициента a и дискриминанта D:

1) $a > 0, D > 0$; 2) $a > 0, D < 0$; 3) $a < 0, D > 0$; 4) $a < 0, D < 0$.

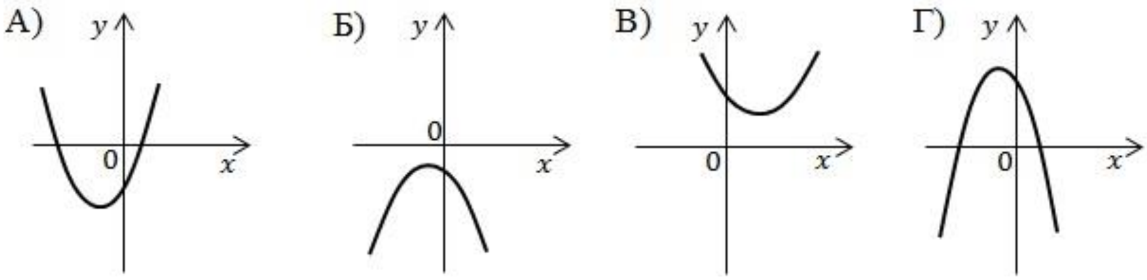


Рисунок 3.2 – Графики функций к примеру 2

Ответ: А – 1 (т.к. ветви параболы направлены вверх, то $a > 0$; пересекает ось OX в двух точках, значит $D > 0$); Б – 4 (т.к. ветви параболы направлены вниз, то $a < 0$; не пересекает ось OX, значит $D < 0$); В – 2 (т.к. ветви параболы направлены вверх, то $a > 0$; не пересекает ось OX, значит $D < 0$); Г – 3 (аналогично)» [36].

Пример 3. Найдите область определения функции:

а) $y = \frac{5-x}{2} + \sqrt{-x^2 + 5x - 6}$; в) $y = \frac{1}{\sqrt{4x-1}} + \sqrt{1-x}$;

б) $y = \frac{3}{2-x} + \sqrt{x-1}$; г) $y = \frac{24x-7}{x^2-5x+6}$.

Решение.

А. Для того, чтобы найти область определения функции надо решить неравенство: $-x^2 + 5x - 6 > 0$; имеем: $x^2 - 5x + 6 < 0$, решением данного неравенства является промежуток $x \in (2, 3)$. Значит $D(f) = (2, 3)$.

Б. Для того, чтобы найти область определения функции надо решить систему неравенств: $\begin{cases} x - 1 \geq 0, \\ 2 - x \neq 0. \end{cases}$ Имеем: $\begin{cases} x \geq 1, \\ x \neq 2. \end{cases}$ Тогда решением данной системы неравенств является промежуток $x \in [1, 2) \cup (2, +\infty)$. Значит $D(f) = [1, 2) \cup (2, +\infty)$.

В. Для того, чтобы найти область определения функции надо решить систему неравенств: $\begin{cases} 1 - x \geq 0, \\ 4x - 1 > 0. \end{cases}$ Имеем: $\begin{cases} x \leq 1, \\ x > 0{,}25. \end{cases}$ Тогда решением данной системы неравенств является промежуток $x \in (0{,}25; 1]$. Значит $D(f) = (0{,}25; 1]$.

Г. Для того, чтобы найти область определения функции надо определить, при каких значениях x $x^2 - 5x + 6 \neq 0$ имеем: $x \neq 2$, $x \neq 3$. Значит $D(f) = (-\infty, 2) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty)$.

Ответ: А. $D(f) = (2, 3)$, Б. $D(f) = [1, 2) \cup (2, +\infty)$;

В. $D(f) = (0{,}25; 1]$; Г. $D(f) = (-\infty, 2) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty)$.

Пример 4. «На рисунке 3.3 представлен график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$. Определите по графику: 1) промежуток возрастания функции; 2) наибольшее значение функции; 3) $f(-4), f(2)$.

Ответ: 1) функция возрастает на промежутке $x \in (-\infty; -1]$,
2) наибольшее значение данной функции равно 9; 3) $f(-4) = f(2) = 0$» [32].

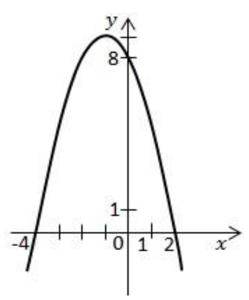


Рисунок 3.3 – График функций к примеру 4

Пример 5. Постройте график функции $y = (x + 3)^2 - 4$.

Решение: график функции $y = (x + 3)^2 - 4$ строится из графика функции $y = x^2$ параллельным переносом вдоль оси OX на 3 единицы масштаба влево и вдоль оси OY на 4 единицы масштаба вниз (рисунок 3.4).

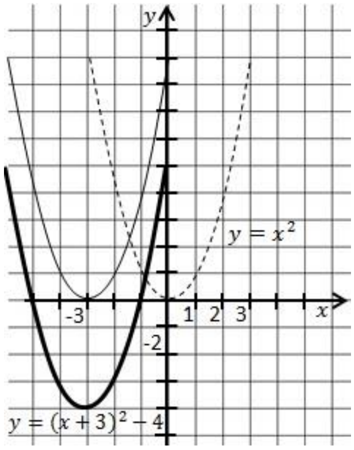


Рисунок 3.4 – График функций $y = (x + 3)^2 - 4$

Пример 6. Постройте график функции $y = \sqrt{x - 1} - 1$.

Решение: график функции $y = \sqrt{x - 1} - 1$ строится из графика функции $y = \sqrt{x}$ параллельным переносом вдоль оси OX на 1 единицу масштаба вправо и вдоль оси OY на 1 единицу масштаба вниз (рисунок 3.5).

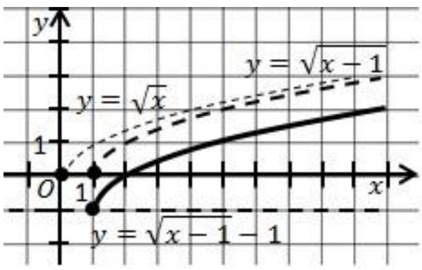


Рисунок 3.5 – График функций $y = \sqrt{x - 1} - 1$

Пример 7. «Постройте график функции $y = |x^2 + 2x - 3|$. Какое наибольшее число общих точек график данной функции может иметь с прямой, параллельной оси OX ?» [36].

Решение. 1. Построим график функции $y = x^2 + 2x - 3$. Так имеем: $y = x^2 + 2x - 3 = (x^2 + 2x + 1) - 4 = (x + 1)^2 - 4$. График функции

$y = (x+1)^2 - 4$ получим из графика функции $y = x^2$ параллельным переносом вдоль оси OX на 1 единицу влево и вдоль оси OY на 4 единицы вниз, шаги построения которого изображены пунктиром (рисунок 3.6).

2. Построим график функции $y = |x^2 + 2x - 3|$. Для этого симметрично отобразим ту часть графика функции $y = x^2 + 2x - 3$, где $y < 0$ относительно оси OX, который изображен сплошной линией на рисунке 3.6.

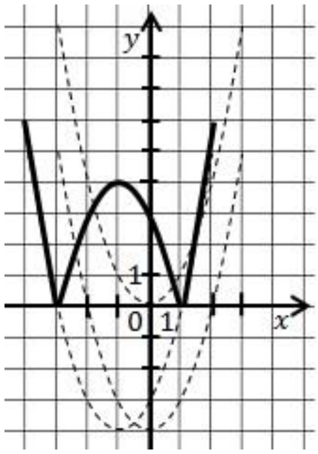


Рисунок 3.6 – График функций $y = |x^2 + 2x - 3|$

3. По графику видно, что прямая, параллельная оси OX, может пересекать график только либо в двух точках, либо – в трех точках, либо – в четырех точках, либо не иметь общих точек с графиком данной функции, то есть наибольшее число общих точек равно четырем. Ответ: 4.

Тема 2. Алгебраические уравнения. Квадратные уравнения. Формулы Виета. Простейшие уравнения и неравенства с модулем.

Вспомним основные виды алгебраических уравнений, которые были вами изучены в школьном курсе математики.

Так, «уравнение вида:

$$a \cdot x + b = 0, \qquad (2.1)$$

где *a* и *b* – некоторые постоянные, называется *линейным уравнением*.

Если $a \neq 0$, то уравнение (2.1) имеет единственный корень: $x = -\frac{b}{a}$.

Если $a = 0$, $b \neq 0$, то уравнение (2.1) решений не имеет.

Если $a = 0$, $b = 0$, то любое *x* является решением уравнения (2.1)» [29].

Пример 1. «Решить уравнение: $\frac{3}{5}x - \frac{x}{2} = 0{,}2$.

Решение:

$$\frac{3x}{5} - \frac{x}{2} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{3x \cdot 2}{5 \cdot 2} - \frac{x \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{1 \cdot 2}{5 \cdot 2}$$

$$\frac{6x}{10} - \frac{5x}{10} = \frac{2}{10}$$

$$\frac{6x - 5x}{10} = \frac{2}{10}$$

$$6x - 5x = 2$$

$$x = 2$$

Ответ: $x = 2$)» [2].

Пример 2. «Решить уравнение: $2x + 3 - 6(x - 1) = 4(1 - x) + 5$.

Решение:

$$2x + 3 - 6(x - 1) = 4(1 - x) + 5$$

$$2x + 3 - 6x + 6 = 4 - 4x + 5$$

$$2x - 6x + 4x = 4 + 5 - 9$$

$$-4x + 4x = 0$$

$$0 \cdot x = 0$$

$$x \in R$$

Ответ: $x \in R$» [2].

Отметим, что «уравнение вида:

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0, \qquad (2.2)$$

где *a*, *b*, *c* – некоторые числа $(a \neq 0)$, х – переменная, называется *квадратным уравнением*.

Для решения квадратного уравнения следует вычислить дискриминант (2.3):

$$D = b^2 - 4ac. \qquad (2.3)$$

Если $D = 0$, то уравнение (2.2) имеет единственное решение: $x = -\frac{b}{2a}$.

Если $D > 0$, то уравнение (2.2) имеет два корня:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}, x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}. \qquad (2.4)$$

Если $D < 0$, то уравнение (2.2) не имеет действительных корней.

Если $b = 0$ или $c = 0$, то уравнение (2.2) можно решать, не вычисляя дискриминанта, то есть: если $b = 0, c \neq 0, \frac{c}{a} < 0$, то $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$; если $b \neq 0, c = 0$, то $x_1 = 0, x_2 = \frac{-b}{a}$.

Теорема Виета (прямая) утверждает: если у квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ есть корни x_1 и x_2 (2.4), то выполняются соотношения (2.5)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases} \qquad (2.5)$$

Обратная теорема Виета утверждает: если для некоторых постоянных *a*, *b*, *c* существуют числа x_1 и x_2, удовлетворяющие соотношениям (2.6),

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases} \qquad (2.6)$$

то эти числа x_1 и x_2 являются корнями уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

При решении задач, связанных с теоремой Виета, рациональнее использовать соотношения (2.7 - 2.10):

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2} \qquad (2.7)$$

$$x_1{}^2+x_2{}^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2 \qquad (2.8)$$

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_1{}^2+x_2{}^2}{x_1x_2} \qquad (2.9)$$

$$x_1{}^3+x_2{}^3=(x_1+x_2)\cdot(x_1{}^2-x_1x_2+x_2{}^2)=$$

$$=(x_1+x_2)\cdot((x_1+x_2)^2-\ 3x_1x_2)$$ (2.10) » [29].

Пример 3. «Решить уравнение: $x^2+5x-6=0$.

Решение: $x^2+5x-6=0$. Имеем $a=1, b=5, c=-6$.

1-й способ:

$$D=b^2-4ac=25-4\cdot 1\cdot(-6)=25+24=49=7^2.$$

Так как $D>0$, то исходное уравнение имеет два корня:

$$x_1=\ \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{-5+7}{2}=\frac{2}{2}=1, x_2=\ \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{-5-7}{2}=\frac{-12}{2}=-6.$$

2-й способ: По теореме Виета имеем:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-5, \\ x_1\cdot x_2=-6. \end{cases}$$

Значит, что $x_1=\ 1, x_2=\ -6$.

Ответ: $x_1=\ 1, x_2=\ -6$» [2].

Пример 4. «Решить уравнение: $x^6-5x^3+4=0$.

Решение. Введем новую переменную: $y=x^3$. Тогда получим уравнение:

$$y^2-5y+4=0.$$

Решив квадратное уравнение, имеем: $y_1=\ 1, y_2=\ 4$.

Таким образом, исходное уравнение равносильно совокупности уравнений: $x^3=\ 1$ или $x^3=\ 4$, то есть $x=\ 1$ или $x=\ \sqrt[3]{4}$.

Ответ: $x=\ 1,\ \ x=\ \sqrt[3]{4}$» [29].

Пример 5. «Решить уравнение: $4x^2+12x+\frac{12}{x}+\frac{4}{x^2}=47$.

Решение: $$\left(4x^2+\frac{4}{x^2}\right)+\left(12x+\frac{12}{x}\right)=47$$

$$4\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+12\left(x+\frac{1}{x}\right)=47$$

Введем новую переменную: $y=x+\frac{1}{x}$. Имеем: $y^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+$ $+2+\frac{1}{x^2}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+2=\ y^2-2$. Тогда получим уравнение:

$$4(y^2-2)+12y=47$$

$$4y^2-8+12y-47=0$$

$$4y^2+12y-55=0$$

Решив квадратное уравнение, имеем: $y_1=\frac{5}{2}, y_2=-\frac{11}{2}$.

Таким образом, исходное уравнение равносильно совокупности уравнений: $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$ или $x+\frac{1}{x}=-\frac{11}{2}$. Решим полученные дробно-рациональные уравнения.

$$x+\frac{1}{x}-\frac{5}{2}=0 \quad \text{или} \quad x+\frac{1}{x}+\frac{11}{2}=0.$$

$$\begin{cases}2x^2-5x+2=0,\\ x\neq 0.\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases}2x^2+11x+2=0,\\ x\neq 0.\end{cases}$$

$x_1=2, x_2=\frac{1}{2}$ или $x_3=\frac{-11+\sqrt{105}}{4}, x_4=\frac{-11-\sqrt{105}}{4}$.

Ответ: $x=2, x=\frac{1}{2},\ x=\frac{-11+\sqrt{105}}{4}, x=\frac{-11-\sqrt{105}}{4}$» [28].

Пример 6. «Вычислите $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ и ${x_1}^3+{x_2}^3$, где x_1 и x_2 – корни квадратного уравнения $x^2-x-2=0$.

Решение. По теореме Виета имеем: $\begin{cases}x_1+x_2=1,\\ x_1\cdot x_2=-2.\end{cases}$

Значит, по формуле (2.7) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2}=\frac{1}{-2}=-\frac{1}{2}$;

По формуле (2.10) ${x_1}^3+{x_2}^3=(x_1+x_2)\cdot({x_1}^2-x_1x_2+{x_2}^2)=$

$$=(x_1+x_2)\cdot((x_1+x_2)^2-\ 3x_1x_2)=1\cdot\left(1^2-3\cdot(-2)\right)=7.$$

Ответ: $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=-\frac{1}{2}; {x_1}^3+{x_2}^3=7$» [28].

Так, «если в уравнении неизвестная величина содержится под знаком радикала, например, $\sqrt{x-5} = x+3$, то такое уравнение называется *иррациональным*.

Отметим, что одним из способов решения данных уравнений является возведение обеих частей уравнения в степень, равную показателю степени корня. Если показатель степени четный, то необходима проверка найденных решений» [28].

Пример 7. «Решить уравнение: $\sqrt[3]{1-x^2} = -2$.

Решение: $\sqrt[3]{1-x^2} = -2$.

$$1-x^2 = (-2)^3$$

$$1-x^2 = -8$$

$$x^2 = 9$$

$$x = 3 \text{ или } x = -3.$$

Ответ: $x = 3, x = -3$» [28].

Пример 8. «Решить уравнение: $\sqrt[4]{25-x^2} = 2$.

Решение: $\sqrt[4]{25-x^2} = 2$.

$$25-x^2 = 2^4$$

$$25-x^2 = 16$$

$$x^2 = 9$$

$$x = 3 \text{ или } x = -3.$$

Ответ: $x = 3, x = -3$» [28].

Пример 9. Решить уравнение: $\sqrt{10x-14} = 11$

Решение: $\sqrt{10x-14} = 11$.

$$\left(\sqrt{10x-14}\right)^2 = 11^2$$

$$10x-14 = 121$$

$$10x = 135$$

$$x = 13{,}5$$

Проверка: $\sqrt{10 \cdot 13{,}5 - 14} = \sqrt{135-14} = \sqrt{121} = 11.$

Ответ: $x = 13{,}5$.

Пример 10. «Решить уравнение: $\sqrt{x+2} = x$

Решение: $\sqrt{x+2} = x$.

$$\left(\sqrt{x+2}\right)^2 = x^2$$

$$x + 2 = x^2$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x = 2 \text{ или } x = -1.$$

Проверка: 1) $x = 2$, тогда $\sqrt{2+2} = 2$; $2 = 2$, верно;

2) $x = -1$, тогда $\sqrt{-1+2} = -1$; $1 = -1$, неверно.

Ответ: $x = 2$» [29].

Пример 11. «Решить уравнение: $(x+4)(x+1) - 3\sqrt{x^2+5x+2} = 6$.

Решение: $x^2 + 5x + 4 - 3\sqrt{x^2+5x+2} = 6$.

Введем новую переменную: $y = \sqrt{x^2+5x+2}$. Тогда получим уравнение:

$$y^2 + 2 - 3y = 6$$

$$y^2 - 3y - 4 = 0$$

Решив квадратное уравнение, имеем: $y_1 = -1, y_2 = 4$.

Таким образом, исходное уравнение равносильно совокупности уравнений: $\sqrt{x^2+5x+2} = -1$ или $\sqrt{x^2+5x+2} = 4$. Решим полученные уравнения. Первое уравнение не имеет решений, т.к. $\sqrt{x^2+5x+2} \geq 0$. Решив второе уравнение: $\sqrt{x^2+5x+2} = 4$, получим: $x^2 + 5x + 2 = 16$, тогда: $x^2 + 5x - 14 = 0$, $x_1 = 2$ или $x_2 = -7$.

Проверка: 1) $x = 2$, тогда $\sqrt{2^2+10+2} = 4$; $4 = 4$, верно;

2) $x = -7$, тогда $\sqrt{(-7)^2 - 35 + 2} = 4$; $4 = 4$, верно.

Ответ: $x = 2, x = -7$» [29].

Рассмотрим пример с решением дробно-рационального уравнения.

Пример 12. Решить уравнение: $\frac{17}{5x} = 2 - \frac{7}{x}$.

Решение:

$$\frac{17}{5x} = \frac{2}{1} - \frac{7}{x}$$

$$\frac{17}{5x} = \frac{2 \cdot 5x}{5x} - \frac{7 \cdot 5}{5x}.$$

$$\frac{17}{5x} = \frac{10x}{5x} - \frac{35}{5x}.$$

$$17 = 10x - 35, \quad 5x \neq 0, \text{ то есть } x \neq 0.$$

$$10x = 35 + 17$$

$$10x = 52$$

$$x = 5{,}2$$

Ответ: $x = 5{,}2$.

Кроме того, «чтобы решить *уравнение, содержащее переменную под знаком модуля*, надо освободиться от знака модуля, используя его определение (2.11):

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases} \qquad (2.11)$$

Приведем *алгоритм решения уравнений с модулем*:

1) находят критические точки, то есть значения переменной, при которых выражения, стоящие под знаком модуля, обращаются в нуль;

2) разбивают область допустимых значений переменной на промежутки, на каждом из которых выражения, стоящие под знаком модуля, сохраняют знак;

3) на каждом из найденных промежутков решают уравнение без знака модуля.

Совокупность (объединение) решений указанных промежутков и составляет все решения рассматриваемого уравнения» [29].

Покажем применение этого алгоритма на некоторых примерах.

Пример 13. «Решить уравнение: $|x + 3| = 2x - 1$.

Решение. Найдем критические точки: $x + 3 = 0, x = -3$. Имеем:

1) при $x < -3$ получаем уравнение $-(x+3) = 2x - 1$, то есть $-x - 3 = 2x - 1$, тогда $x = -\frac{2}{3}$. Найденное значение x не входит в рассматриваемый промежуток;

2) при $x \geq -3$ получаем уравнение $x + 3 = 2x - 1$, тогда $x = 4$. Найденное значение x входит в рассматриваемый промежуток.

Ответ: $x = 4$» [29].

Пример 14. «Решить уравнение: $|x+1| + |x-5| = 8$.

Решение. Найдем критические точки: $x = -1, x = 5$. Имеем:

1) при $x < -1$ получаем уравнение: $-(x+1) - (x-5) = 8$, то есть $-x - 1 - x + 5 = 8$, тогда имеем: $-2x = 4$, значит $x = -2$. Найденное значение x входит в рассматриваемый промежуток;

2) при $-1 \leq x < 5$ получаем уравнение: $(x+1) - (x-5) = 8$, то есть $x + 1 - x + 5 = 8$, тогда имеем: $6 = 8$, значит у этого уравнения нет решений.

3) при $x \geq 5$ получаем уравнение: $(x+1) + (x-5) = 8$, то есть $x + +1 + x - 5 = 8$, тогда имеем: $2x = 12$, значит $x = 6$. Найденное значение x входит в рассматриваемый промежуток.

Ответ: $x = -2, x = 6$» [28].

«Пример 15. Решить уравнение: $|x+1| + |x-5| = 8$.

Решение. Найдем критические точки: $x = -1, x = 5$. Имеем:

1) при $x < -1$ получаем уравнение: $-(x+1) - (x-5) = 8$, то есть $-x - 1 - x + 5 = 8$, тогда имеем: $-2x = 4$, значит $x = -2$. Найденное значение x входит в рассматриваемый промежуток;

2) при $-1 \leq x < 5$ получаем уравнение: $(x+1) - (x-5) = 8$, то есть $x + 1 - x + 5 = 8$, тогда имеем: $6 = 8$, значит у этого уравнения нет решений.

3) при $x \geq 5$ получаем уравнение: $(x+1) + (x-5) = 8$, то есть $x + +1 + x - 5 = 8$, тогда имеем: $2x = 12$, значит $x = 6$. Найденное значение x входит в рассматриваемый промежуток.

Ответ: $x = -2, x = 6$» [29].

Кроме того, при решении уравнений с модулем можно использовать не только определение модуля.

Так, «уравнение $f(|x|) = g(x)$ равносильно совокупности двух систем (2.12):

$$1)\ \begin{cases} f(x) = g(x), \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad 2)\ \begin{cases} f(-x) = g(x), \\ x < 0. \end{cases} \tag{2.12}$$

Рассмотрим уравнение вида: $$|f(x)| = a. \tag{2.13}$$

При $a < 0$ уравнение (2.13) решений не имеет;

при $a > 0$ уравнение (2.13) равносильно совокупности (2.14):

$$\left[\begin{array}{l} f(x) = a; \\ f(x) = -a; \end{array}\right. \tag{2.14}$$

при $a = 0$ уравнение (2.13) равносильно уравнению $f(x) = 0$.

Кроме того, уравнение $|f(x)| = g(x)$ равносильно системе или совокупности (2.15 - 2.16):

$$|f(x)| = g(x) \leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x); \\ f(x) = -g(x); \end{array}\right. \end{cases} \tag{2.15}$$

$$|f(x)| = g(x) \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}; \\ \begin{cases} f(x) \leq 0 \\ -f(x) = g(x) \end{cases}; \end{array}\right. \tag{2.16}$$

Уравнение вида: $|f(x)| = |g(x)|$ равносильно совокупности уравнений:

$$|f(x)| = |g(x)| \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x); \\ f(x) = -g(x). \end{array}\right.$$ (2.17)» [27].

Пример 16. Решить уравнение: $|x| = |2x - 5|$.

Решение. $|x| = |2x - 5| \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2x-5; \\ x = -(2x-5). \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2x-5; \\ x = -2x+5. \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5; \\ x = \frac{5}{3}. \end{array}\right.$

Ответ: $x = 5, x = \frac{5}{3}$.

Отметим, что *«неравенства, содержащие переменную под знаком модуля,* решаются по схемам, аналогичным решению уравнений с модулем» [28].

Рассмотрим неравенство вида: $$|f(x)| \leq a. \tag{2.18}$$

При $a < 0$ неравенство (2.18) решений не имеет;

при $a \geq 0$ неравенство (2.18) равносильно системе неравенств (2.19):

$$\begin{cases} f(x) \leq a; \\ f(x) \geq -a. \end{cases} \qquad (2.19)$$

При решении неравенства вида: $|f(x)| \geq a$ (2.20)

Имеем, что при $a < 0$ решением неравенства (2.20) является любое x из области допустимых значений функции $f(x)$; при $a \geq 0$ неравенство (2.20) равносильно совокупности неравенств (2.21):

$$\left[\begin{array}{l} f(x) \geq a; \\ f(x) \leq -a. \end{array}\right. \qquad (2.21)$$

Отметим, что «при решении неравенств вида $|f(x)| < a$ или $|f(x)| > a$ к равносильным системе или совокупности неравенств добавляется неравенство $|f(x)| \neq \pm a$.

Неравенство вида: $|f(x)| \leq g(x)$ равносильно системе неравенств (2.22):

$$|f(x)| \leq g(x) \leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) \leq g(x); \\ f(x) \geq -g(x). \end{cases} \qquad (2.22)$$

Неравенство вида: $|f(x)| \geq g(x)$ равносильно совокупности неравенств (2.23):

$$|f(x)| \geq g(x) \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) \geq g(x); \\ f(x) \leq -g(x). \end{array}\right. \qquad (2.23)$$

Неравенство вида: $|f(x)| \geq |g(x)|$ равносильно неравенству (2.24):

$$f^2(x) \geq g^2(x) \leftrightarrow \big(f(x) - g(x)\big)\big(f(x) + g(x)\big) \geq 0, \qquad (2.24)$$

решается методом интервалов.

В ходе решения неравенств с модулем могут применяться следующие свойства (2.25 – 2.27):

$$a \leq |a| \qquad (2.25)$$

$$|a + b| \leq |a| + |b| \qquad (2.26)$$

$$|a - b| \geq |a| - |b| \qquad (2.27)$$» [28].

Пример 17. Решить неравенство $|x - 3| < 4$.

Решение. Решением неравенства являются все значения x, которые удовлетворяют системе неравенств: $\begin{cases} x-3<4, \\ x-3>-4. \end{cases}$.

Имеем: $\begin{cases} x-3<4, \\ x-3>-4. \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x<7, \\ x>-1. \end{cases}$ Решением системы неравенств является: $x \in (-1{,}7)$. Ответ: $x \in (-1{,}7)$.

Пример 18. Решить неравенство: $|x^2-5x|>6$.

Решение. Данное неравенство раносильно совокупности двух неравенств:

$|x^2-5x|>6 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-5x<-6, \\ x^2-5x>6. \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-5x+6<0, \\ x^2-5x-6>0. \end{array}\right.$

Необходимо решить каждое неравенство, тогда:

Решая неравенство $x^2-5x+6<0$, имеем: $(x-2)(x-3)<0$.

$(x^2-5x+6=0,$ $(x-2)(x-3)=0;$ $x_1=2, x_2=3)$.

Воспользуемся методом интервалов (рисунок 2.1):

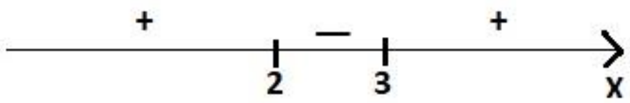


Рисунок 2.1 – Решение неравенства $x^2-5x+6<0$ методом интервалов

Решением неравенства $x^2-5x+6<0$ является промежуток $x \in (2,3)$. Решая неравенство $x^2-5x-6>0$, получим: $(x-6)(x+1)>0$.

Применим также метод интервалов (рисунок 2.2):

Рисунок 2.2 – Решение неравенства $x^2-5x-6>0$ методом интервалов

Решением неравенства $x^2-5x-6>0$ является промежуток:

$x \in (-\infty,-1) \cup (6;\ +\infty)$.

Таким образом, множеством решений исходного неравенства является объединение множеств: $x \in (-\infty,-1) \cup (2,3) \cup (6;\ +\infty)$.

Ответ: $x \in (-\infty,-1) \cup (2,3) \cup (6;\ +\infty)$.

Пример 19. Решить неравенство $|x-3| > x+1$, используя определение модуля.

Решение.

По определению модуля получим:

$$\begin{cases} x-3 \geq 0, \\ x-3 > x+1 \end{cases} (1) \quad \text{или} \quad \begin{cases} x-3 < 0, \\ -(x-3) > x+1. \end{cases} (2)$$

Решим каждую систему неравенств:

$$\begin{cases} x \geq 3, \\ 0 \cdot x > 4 \end{cases} (1) \quad \text{или} \quad \begin{cases} x < 3, \\ x < 1. \end{cases} (2)$$

Система неравенств (1) не имеет решений, решением системы неравенств (2) является промежуток: $x \in (-\infty; 1)$.

Объединив решения систем неравенств (1) и (2), получим решение исходного неравенства $|x-3| > x+1$, то есть $x \in (-\infty; 1)$.

Ответ: $x \in (-\infty; 1)$.

Пример 20. Найдите множество решений неравенства:

$$|x^2+3x-4| > |3x|.$$

Решение. Исходное неравенство равносильно неравенству:

$$(x^2+3x-4)^2 > (3x)^2.$$

Имеем: $$(x^2+3x-4)^2 - (3x)^2 > 0,$$

$$(x^2+3x-4-3x)(x^2+3x-4+3x) > 0,$$

$$(x^2-4)(x^2+6x-4) > 0.$$

Решим уравнение: $x^2+6x-4=0$. Найдем: D = 36 + 52. Имеем:

$x_{1;2} = \dfrac{-6 \pm 2\sqrt{13}}{2}$. Значит: $x_1 = -3+\sqrt{13}$, $x_2 = -3-\sqrt{13}$.

Тогда получим: $(x-2)(x+2)(x+3-\sqrt{13})(x+3+\sqrt{13}) \succ 0$.

Решением исходного неравенства является промежуток (рисунок 2.3): $x \in (-3-\sqrt{13};-2) \cup (-3+\sqrt{13};2)$.

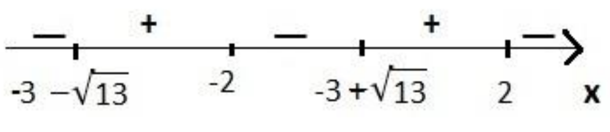


Рисунок 2.3 – Решение неравенства $|x^2 + 3x - 4| > |3x|$

Ответ: $x \in (-3-\sqrt{13};-2) \cup (-3+\sqrt{13};2)$.

Тема 1. Тождественные преобразования выражений. Степень. Основные тождества. Формулы сокращенного умножения.

Вспомним основные понятия по данной теме, изученные вами в школьном курсе математики.

Определение. «Два выражения называются *тождественно равными*, если при любых значениях переменных из области определения выражений, их соответственные значения равны. Равенство, верное при любых значениях переменных, называется *тождеством*» [30].

Приведем примеры тождеств: $a + b = b + a$; $ab = ba$; $a(b + c) = ab + ac$; $a + 0 = 0 + a = a$ и др.

Под *тождественным преобразованием алгебраического выражения* понимают «последовательный переход от одного выражения к другому, тождественно равном ему» [30].

При выполнении тождественных преобразований выражений используются *формулы сокращенного выражения* (1.1 - 1.7), *свойства степеней и действия с корнями* (1.8 - 1.25).

Формулы сокращенного выражения

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \tag{1.1}$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \tag{1.2}$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \tag{1.3}$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \tag{1.4}$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \tag{1.5}$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \tag{1.6}$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) \tag{1.7}$$

Свойства степеней и действия с корнями

$a^0 = 1,\ a \neq 0$	(1.8)	$\sqrt{a^2} = \lvert a\rvert$	(1.17)
$\left(\frac{1}{a}\right)^{-n} = a^n,\ a \neq 0$	(1.9)	$\sqrt[2n]{a^{2n}} = \lvert a\rvert$	(1.18)
$a^m a^n = a^{m+n}$	(1.10)	$\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}} = a$	(1.19)
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	(1.11)	$\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a}$	(1.20)
$(a^m)^n = a^{mn}$	(1.12)	$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$	(1.21)
$(ab)^n = a^n b^n$	(1.13)	$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}$	(1.22)
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0$	(1.14)	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	(1.23)
$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$	(1.15)	$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$	(1.24)
$a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k}$	(1.16)	$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$	(1.25)

Рассмотрим примеры выполнения тождественных преобразований выражений.

Пример 1. $4p^3(-3)pq^5 = 4(-3)p^3pq^5 = -12p^4q^5$.

Пример 2. «Упростить выражение: $\left(\frac{3}{a} + \frac{3}{a+d}\right) \cdot \frac{a}{18(2a+d)}$.

Решение: $\left(\frac{3}{a} + \frac{3}{a+d}\right) \cdot \frac{a}{18(2a+d)} = \frac{(3(a+d)+3a)a}{a(a+d)18(2a+d)} = \frac{(3a+3d+3a)\cdot a}{18a(a+d)(2a+d)} =$
$= \frac{(6a+3d)\cdot a}{18a(a+d)(2a+d)} = \frac{3(2a+d)}{18(a+d)(2a+d)} = \frac{1}{6(a+d)}$. Ответ: $\frac{1}{6(a+d)}$ » [3].

Пример 3. Упростить выражение: $\frac{n-2}{n-5} : \left(\frac{n^2+24}{n^2-25} - \frac{4}{n-5}\right)$.

Решение:

«$\frac{n-2}{n-5} : \left(\frac{n^2+24}{n^2-25} - \frac{4}{n-5}\right) = \frac{n-2}{n-5} : \left(\frac{n^2+24}{(n-5)(n+5)} - \frac{4}{n-5}\right) = \frac{n-2}{n-5} : \left(\frac{n^2+24}{(n-5)(n+5)} - \frac{4(n+5)}{n-5}\right) =$
$\frac{n-2}{n-5} : \frac{n^2+24-4n-20}{(n-5)(n+5)} = \frac{n-2}{n-5} \cdot \frac{(n-5)(n+5)}{n^2-4n+4} = \frac{(n-2)(n+5)}{n^2-4n+4} = \frac{(n-2)(n+5)}{(n-2)^2} = \frac{n+5}{n-2}$» [2]. Ответ: $\frac{n+5}{n-2}$.

Пример 4. Упростить выражение: $\sqrt{150}-\sqrt{96}-\sqrt{\frac{2}{3}}-\frac{1}{\sqrt{6}}$.

Решение: «$\sqrt{150}-\sqrt{96}-\sqrt{\frac{2}{3}}-\frac{1}{\sqrt{6}}=\sqrt{25\cdot 6}-\sqrt{16\cdot 6}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}}=$
$=5\sqrt{6}-4\sqrt{6}-\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2\cdot 3}\cdot\sqrt{6}}=5\sqrt{6}-4\sqrt{6}-\frac{\sqrt{6}}{3}-\frac{\sqrt{6}}{6}=\sqrt{6}\cdot\Big(5-4-\frac{1}{3}-$
$-\frac{1}{6}\Big)=\frac{1}{2}\sqrt{6}$» [2]. Ответ: $\frac{1}{2}\sqrt{6}$.

Пример 5. Исключить иррациональность из знаменателя:

$$а)\frac{1}{2-\sqrt{3}};\quad б)\frac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{\sqrt{5}+\sqrt{7}};\quad в)\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}.$$

Решение: « $а)\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\frac{1(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=\frac{2+\sqrt{3}}{4-3}=\frac{2+\sqrt{3}}{1}=2+\sqrt{3}.$

Ответ: а) $2+\sqrt{3}$.

$$б)\frac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}=\frac{(\sqrt{5}-\sqrt{7})(\sqrt{5}-\sqrt{7})}{(\sqrt{5}+\sqrt{7})(\sqrt{5}-\sqrt{7})}=\frac{(\sqrt{5}-\sqrt{7})^2}{5-7}=$$
$$=\frac{5-2\sqrt{35}+7}{-2}=\frac{12-2\sqrt{35}}{-2}=\frac{-2(\sqrt{35}-6)}{-2}=\sqrt{35}-6.$$

Ответ: б) $\sqrt{35}-6$.

$$в)\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}+\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=$$
$$=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2+(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}{3-2}=$$
$$=\frac{2+2\sqrt{6}+3-2+2\sqrt{6}-3}{1}=4\sqrt{6}.$$

Ответ: $4\sqrt{6}$» [2].

Пример 6. Упростить выражение: $2\sqrt{8}+0{,}5\sqrt{32}-\frac{1}{3}\sqrt{18}$.

Решение: $2\sqrt{8}+0{,}5\sqrt{32}-\frac{1}{3}\sqrt{18}=2\sqrt{4\cdot 2}+0{,}5\sqrt{16\cdot 2}-\frac{1}{3}\sqrt{9\cdot 2}=$

$= 2 \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} + 0{,}5 \cdot \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} - \frac{1}{3} \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot 2\sqrt{2} + 0{,}5 \cdot 4\sqrt{2} - \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{2} =$

$= 4\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$. Ответ: $5\sqrt{2}$.

Пример 7. Выполните действия: $(2\sqrt{a} + \sqrt{b})(4a - 2\sqrt{ab} + b)$.

Решение:

$(2\sqrt{a} + \sqrt{b})(4a - 2\sqrt{ab} + b) = (2\sqrt{a})^3 + (\sqrt{b})^3 = 8\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3}$.

Ответ: $8\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3}$.

Пример 8. Вычислить: $\sqrt{27 + 10\sqrt{2}} + \sqrt{27 - 10\sqrt{2}}$.

Решение. Заметим, что «$\sqrt{27 + 10\sqrt{2}} = (\sqrt{2} + 5)^2$; $\sqrt{27 - 10\sqrt{2}} = (\sqrt{2} - 5)^2$. Тогда имеем: $\sqrt{27 + 10\sqrt{2}} + \sqrt{27 - 10\sqrt{2}} = (\sqrt{2} + 5)^2 + (\sqrt{2} - 5)^2 = |\sqrt{2} + 5| + |\sqrt{2} - 5| = \sqrt{2} + 5 + 5 - \sqrt{2} = 10$» [28].

Ответ: 10.

Пример 9. Доказать, что: $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = 2$.

Доказательство:

$\left(\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}\right)^2 = 4 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{(4 + 2\sqrt{3})(4 - 2\sqrt{3})} + 4 - 2\sqrt{3} = 8 - 2\sqrt{16 - 12} = 8 - 4 = 4 = 2^2$.

Следовательно, исходное выражение может быть равно 2 или - 2; так как $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} > \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$, то это выражение положительно и $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = 2$.

Пример 10. Упростить выражение:

а) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{a^2 b}}\right)^6$; б) $\sqrt[4]{abc} \cdot \sqrt[4]{a^3 b^2 c} \cdot \sqrt[4]{b^5 c^2}$.

Решение: а) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{a^2 b}}\right)^6 = \left(\sqrt[3]{a^2 b}\right)^{\frac{6}{2}} = \left(\sqrt[3]{a^2 b}\right)^3 = a^2 b$;

б) $\sqrt[4]{abc} \cdot \sqrt[4]{a^3 b^2 c} \cdot \sqrt[4]{b^5 c^2} = \sqrt[4]{a^4 b^8 c^4} = |a| \cdot b^2 \cdot |c|$.

Ответ: $a^2 b$; $|a| \cdot b^2 \cdot |c|$.