Тема 3. Понятие функции. Линейная и квадратичная функции. Построение графиков функций. Область определения и множество значений функции.

Из школьного курса вам известно, что:

- «соответствие, по которому каждому элементу x множества X сопоставляется единственный элемент y множества Y, называется функцией (отображением), определенной на множестве X со значениями в множестве Y» [30];

- функция обозначается: $y = f(x)$, где $f\colon\ X \to Y$;

- элемент $x \in X$ называется аргументом или независимой переменной; множество X – областью определения функции $y = f(x)$ и обозначается $D(f)$;

- элемент $y \in Y$ называется значением функции или зависимой переменной; множество Y – областью значений функции $y = f(x)$ и обозначается $E(f)$;

- графиком функции $y = f(x)$ называется множество всех точек координатной плоскости с координатами $(x; f(x))$, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты – соответствующим значениям функции;

- функцию можно задать несколькими способами: аналитическим (формулой), графическим, табличным, а также словесным.

В 7-11 классах вами были изучены следующие основные элементарные функции:

«$y = kx$; $y = kx + b$;

$y = \frac{k}{x}$;

$y = x^2$; $y = x^3$;

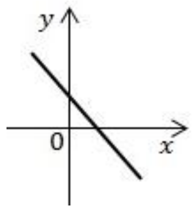
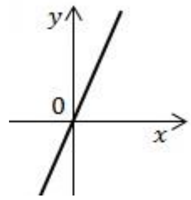
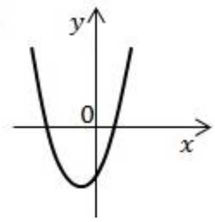
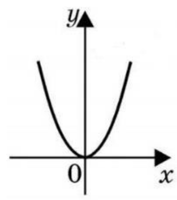
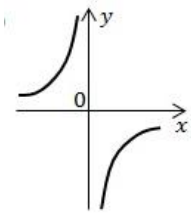
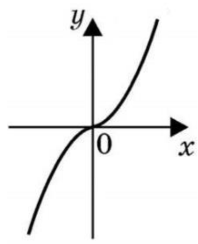
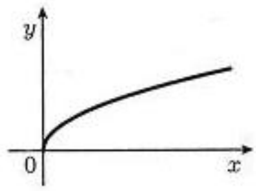
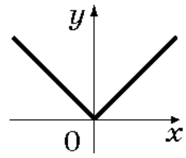
$y = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$;

$y = |x|$;

$y = \sqrt{x}$; $y = x^n$, $y = \sqrt[n]{x}$» [16].

Рассмотрим ниже графики некоторых из них (таблица 2.1).

Таблица 2.1 – Графики некоторых элементарных функций

Функция и ее график	
Линейная функция, $y = kx + b$ 	Прямая пропорциональность, $y = kx$ 
Квадратичная функция, $y = ax^2 + bx + c$ 	$y = x^2$ 
Обратная пропорциональность, $y = \frac{k}{x}$ 	$y = x^3$ 
$y = \sqrt{x}$ 	$y = \lvert x \rvert$ 

Кроме того, «напомним некоторые простейшие преобразования графиков функций:

1. График функции $y = -f(x)$ симметричен графику функции $y = f(x)$ относительно оси абсцисс.

2. График функции $y = f(-x)$ симметричен графику функции $y = f(x)$ относительно оси ординат.

3. График функции $y = -f(-x)$ симметричен графику функции $y = f(x)$ относительно начала координат.

4. График функции $y = f(x+a)$ получается из графика функции $y = f(x)$ с помощью параллельного переноса (сдвига) последнего вдоль оси OX на $|a|$ единиц масштаба влево, если $a > 0$, и на $|a|$ единиц вправо, если $a < 0$.

5. График функции $y = f(x) + b$ получается из графика функции $y = f(x)$ с помощью параллельного переноса (сдвига) последнего вдоль оси OY на $|b|$ единиц масштаба вверх, если $b > 0$, и на $|b|$ единиц вниз, если $b < 0$.

6. График функции $y = f(kx)$ получается из графика функции $y = f(x)$ с помощью сжатия по оси абсцисс исходного графика пропорционально коэффициенту k при аргументе (если $k > 1$, то график *сжимается* в k раз, а если $0 < k < 1$, то график *растягивается* в $\frac{1}{k}$ раз). Если $k < 0$, то нужно сначала построить график функции $y = f(|k|x)$, а затем отразить его симметрично относительно оси OY» [9].

7. «График функции $y = mf(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ с помощью растяжения по оси ординат исходного графика пропорционально коэффициенту m (если $m > 1$, то график *растягивается* в m раз, а если $0 < m < 1$, то график *сжимается* в $\frac{1}{m}$ раз). Если $m < 0$, то нужно сначала построить график функции $y = |m|f(x)$, а затем отразить его симметрично относительно оси OX.

График функции $y = mf(kx+a) + b$ строят, применяя в определенной последовательности описанные выше преобразования. Сначала строим график функции $y = f(x+a)$. Затем - график функции $y = f(kx+a)$. Далее строим график функции $y = mf(kx + a)$. Наконец, получаем график функции $y = mf(kx + a) + b$» [11].

Ниже представим правила построения графиков *функций, содержащих знак модуля*.

8. «Чтобы построить график функции $y = |f(x)|$ из графика функции $y = f(x)$, нужно ту часть графика функции $y = f(x)$, которая находится ниже оси OX, отразить симметрично относительно этой оси; а часть графика функции $y = f(x)$, которая находится выше оси OX, оставить без изменения.

9. Чтобы построить график функции $y = f(|x|)$ из графика функции $y = f(x)$, нужно часть графика функции $y = f(x)$, лежащую правее оси OY, оставить без изменения, а вместо оставшейся части графика нарисовать кривую, получающуюся отражением первой части графика функции $y = f(x)$ относительно оси OY.

10. Чтобы построить график функции $y = |f(|x|)|$ из графика функции $y = f(x)$, нужно сначала построить график функции $y = f(|x|)$ согласно второму правилу, а затем из полученного графика построить график функции $y = |f(|x|)|$ согласно первому правилу» [9].

Рассмотрим примеры решения заданий по данной теме.

Пример 1. «Установите соответствие между представленными графиками элементарных функций на рисунке 3.1, и формулами, задающими их: $1)\ y = x^2 - 2;\quad 2)\ y = 2x;\ 3)\ y = -\frac{2}{x}$.

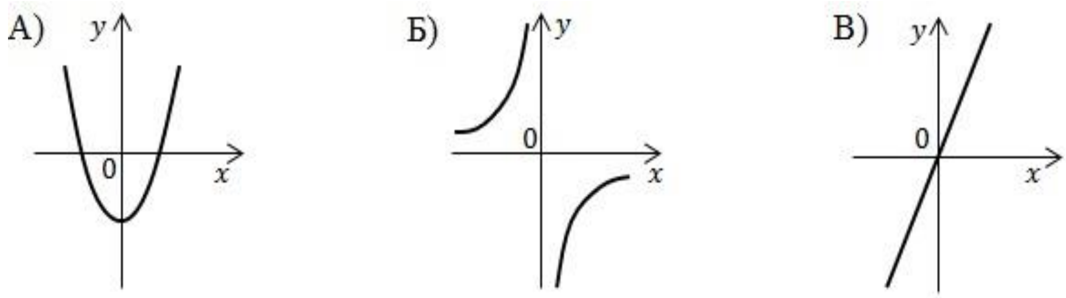


Рисунок 3.1 – Графики функций к примеру 1

Ответ: А – 1 (парабола, сдвинутая вниз на 2 единицы масштаба), Б – 3 (гипербола), В – 2 (график прямой пропорциональности)» [32].

Пример 2. «На рисунке 3.2 представлены графики квадратичной функций $y = ax^2 + bx + c$. Для каждого из них укажите соответствующие ему значения коэффициента a и дискриминанта D:

1) $a > 0, D > 0$; 2) $a > 0, D < 0$; 3) $a < 0, D > 0$; 4) $a < 0, D < 0$.

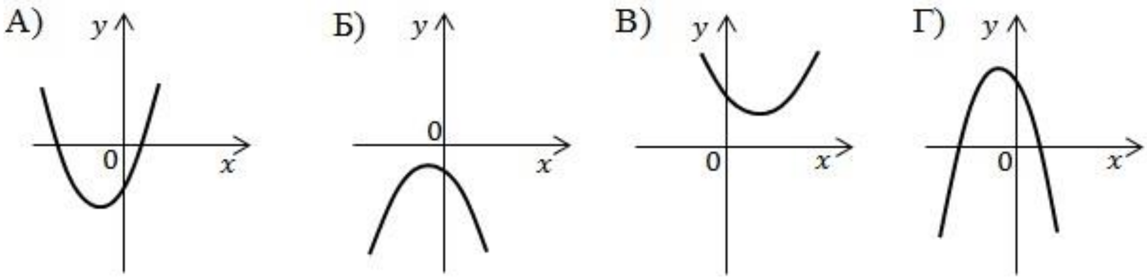


Рисунок 3.2 – Графики функций к примеру 2

Ответ: А – 1 (т.к. ветви параболы направлены вверх, то $a > 0$; пересекает ось OX в двух точках, значит $D > 0$); Б – 4 (т.к. ветви параболы направлены вниз, то $a < 0$; не пересекает ось OX, значит $D < 0$); В – 2 (т.к. ветви параболы направлены вверх, то $a > 0$; не пересекает ось OX, значит $D < 0$); Г – 3 (аналогично)» [36].

Пример 3. Найдите область определения функции:

а) $y = \frac{5-x}{2} + \sqrt{-x^2 + 5x - 6}$; в) $y = \frac{1}{\sqrt{4x-1}} + \sqrt{1-x}$;

б) $y = \frac{3}{2-x} + \sqrt{x-1}$; г) $y = \frac{24x-7}{x^2-5x+6}$.

Решение.

А. Для того, чтобы найти область определения функции надо решить неравенство: $-x^2 + 5x - 6 > 0$; имеем: $x^2 - 5x + 6 < 0$, решением данного неравенства является промежуток $x \in (2, 3)$. Значит $D(f) = (2, 3)$.

Б. Для того, чтобы найти область определения функции надо решить систему неравенств: $\begin{cases} x - 1 \geq 0, \\ 2 - x \neq 0. \end{cases}$ Имеем: $\begin{cases} x \geq 1, \\ x \neq 2. \end{cases}$ Тогда решением данной системы неравенств является промежуток $x \in [1, 2) \cup (2, +\infty)$. Значит $D(f) = [1, 2) \cup (2, +\infty)$.

В. Для того, чтобы найти область определения функции надо решить систему неравенств: $\begin{cases} 1 - x \geq 0, \\ 4x - 1 > 0. \end{cases}$ Имеем: $\begin{cases} x \leq 1, \\ x > 0{,}25. \end{cases}$ Тогда решением данной системы неравенств является промежуток $x \in (0{,}25; 1]$. Значит $D(f) = (0{,}25; 1]$.

Г. Для того, чтобы найти область определения функции надо определить, при каких значениях x $x^2 - 5x + 6 \neq 0$ имеем: $x \neq 2$, $x \neq 3$. Значит $D(f) = (-\infty, 2) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty)$.

Ответ: А. $D(f) = (2, 3)$, Б. $D(f) = [1, 2) \cup (2, +\infty)$;

В. $D(f) = (0{,}25; 1]$; Г. $D(f) = (-\infty, 2) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty)$.

Пример 4. «На рисунке 3.3 представлен график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$. Определите по графику: 1) промежуток возрастания функции; 2) наибольшее значение функции; 3) $f(-4), f(2)$.

Ответ: 1) функция возрастает на промежутке $x \in (-\infty; -1]$,
2) наибольшее значение данной функции равно 9; 3) $f(-4) = f(2) = 0$» [32].

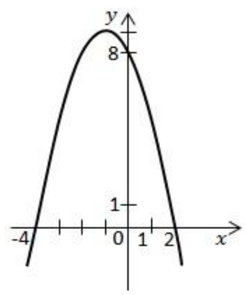


Рисунок 3.3 – График функций к примеру 4

Пример 5. Постройте график функции $y = (x+3)^2 - 4$.

Решение: график функции $y = (x+3)^2 - 4$ строится из графика функции $y = x^2$ параллельным переносом вдоль оси OX на 3 единицы масштаба влево и вдоль оси OY на 4 единицы масштаба вниз (рисунок 3.4).

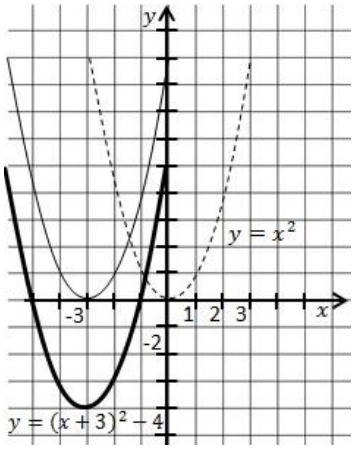


Рисунок 3.4 – График функций $y = (x+3)^2 - 4$

Пример 6. Постройте график функции $y = \sqrt{x-1} - 1$.

Решение: график функции $y = \sqrt{x-1} - 1$ строится из графика функции $y = \sqrt{x}$ параллельным переносом вдоль оси OX на 1 единицу масштаба вправо и вдоль оси OY на 1 единицу масштаба вниз (рисунок 3.5).

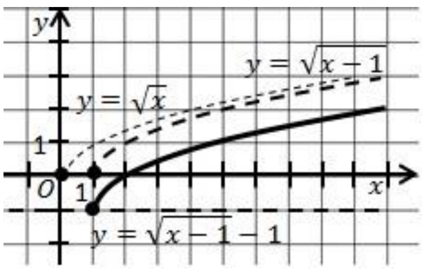


Рисунок 3.5 – График функций $y = \sqrt{x-1} - 1$

Пример 7. «Постройте график функции $y = |x^2 + 2x - 3|$. Какое наибольшее число общих точек график данной функции может иметь с прямой, параллельной оси OX ?» [36].

Решение. 1. Построим график функции $y = x^2 + 2x - 3$. Так имеем: $y = x^2 + 2x - 3 = (x^2 + 2x + 1) - 4 = (x+1)^2 - 4$. График функции

$y = (x+1)^2 - 4$ получим из графика функции $y = x^2$ параллельным переносом вдоль оси OX на 1 единицу влево и вдоль оси OY на 4 единицы вниз, шаги построения которого изображены пунктиром (рисунок 3.6).

2. Построим график функции $y = |x^2 + 2x - 3|$. Для этого симметрично отобразим ту часть графика функции $y = x^2 + 2x - 3$, где $y < 0$ относительно оси OX, который изображен сплошной линией на рисунке 3.6.

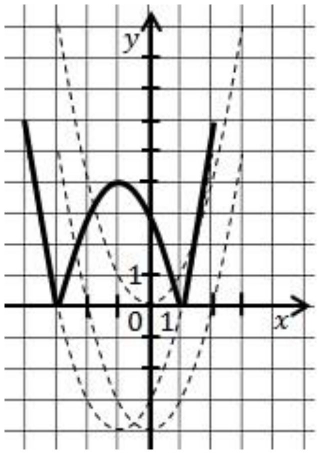


Рисунок 3.6 – График функций $y = |x^2 + 2x - 3|$

3. По графику видно, что прямая, параллельная оси OX, может пересекать график только либо в двух точках, либо – в трех точках, либо – в четырех точках, либо не иметь общих точек с графиком данной функции, то есть наибольшее число общих точек равно четырем. Ответ: 4.