Тема 8. Логарифмические уравнения и неравенства.

Логарифмические уравнения.

1. Уравнения вида $\log_a f(x) = b$, где $a > 0, a \neq 1,\ f(x) > 0$ называют *простейшим логарифмическим уравнением*.

Данное уравнение имеет решение, которое мы можем получить по определению логарифма: $f(x) = a^b$. При решении логарифмического уравнения мы не должны забывать про ограничения, которые накладываются

Пример 1. Решите уравнение $\log_3(2x+2) = 3$.

Решение.

$$\log_3(2x+2) = 3;$$

$$\begin{cases} 2x+2 > 0 \\ 2x+2 = 3^3 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x > -1 \\ x = \frac{25}{2} \end{cases}; \quad x = \frac{25}{2}.$$

Ответ: $x = \frac{25}{2}$.

Пример 2. Решите уравнение. $\log_{x-1} 49 = 2$.

Решение.

$$\log_{x-1} 49 = 2;$$

$$\begin{cases} x-1 > 0 \\ x-1 \neq 1 \\ (x-1)^2 = 49 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x > 1 \\ x \neq 2 \\ |x-1| = 49 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x > 1 \\ x \neq 2 \\ \left[\begin{array}{l} x-1 = 7 \\ x-1 = -7 \end{array}\right. \end{cases};$$

$$\begin{cases} x > 1 \\ x \neq 2 \\ \left[\begin{array}{l} x = 8 \\ x = -6 \end{array}\right. \end{cases}; \quad x = 8.$$

Ответ: $x = 8$.

2. Логарифмические уравнения вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ сводятся к решению системы: $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$.

Пример 3. Решите уравнение $\log_5(7 - x) = \log_5(3 - x) + 1$.

Решение.

$$\log_5(7 - x) = \log_5(3 - x) + 1;$$

$$\log_5(7 - x) = \log_5(3 - x) + \log_5 5;$$

$$\log_5(7 - x) = \log_5 5 \cdot (3 - x);$$

$$\begin{cases} 7 - x > 0 \\ 3 - x > 0 \\ 7 - x = 15 - 5x \end{cases}; \quad \begin{cases} x < 7 \\ x < 3 \\ -x + 5x = 15 - 7 \end{cases}; \begin{cases} x < 3 \\ x = 2 \end{cases}; \quad x = 2.$$

Ответ: $x = 2$.

Пример 4. Решите уравнение $\log_2(x - 5) + \log_2(x + 2) = 3$.

Решение.

$$\log_2(x - 5) + \log_2(x + 2) = 3;$$

$$\log_2(x - 5) + \log_2(x + 2) = \log_2 8;$$

$$\begin{cases} x - 5 > 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x > 5 \\ x > -2 \end{cases}; \quad x > 5;$$

$$\log_2(x - 5)(x + 2) = \log_2 8;$$

$$(x - 5)(x + 2) = 8;$$

$$x^2 + 2x - 5x - 10 - 8 = 0;$$

$$x^2 - 3x - 18 = 0;$$

$$D = b^2 - 4ac = 9 + 4 \cdot 18 = 9 + 72 = 81;$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{3 \pm 9}{2};$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = 6 \\ x_2 = -3 \end{array} \right.;$$

С учетом ограничения $x > 5$ получаем решение $x = 6$.

Ответ: $x = 6$.

Пример 5. Решите уравнение $\log_{0,5}(x+2)-\log_2(x-3)=\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(-4x-8)$.

Решение:

$$\log_{0,5}(x+2)-\log_2(x-3)=\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(-4x-8)$$

$$\begin{cases} x+2>0 \\ x-3>0 \\ -4x-8>0 \end{cases} \begin{cases} x>-2 \\ x>3 \\ x<-2 \end{cases}$$

Решений нет, т.к. система ограничений не совместна.

Ответ: решений нет.

Пример 6. Решите уравнение $\log_{\sqrt{2}} x+4\log_4 x+\log_8 x=13$.

Решение:

$$\log_{\sqrt{2}} x+4\log_4 x+\log_8 x=13;$$

$$\log_{2^{\frac{1}{2}}} x+4\log_{2^2} x+\log_{2^3} x=13;$$

$$2\log_2 x+4\cdot\frac{1}{4}\log_4 x+\frac{1}{3}\log_2 x=13;$$

$$\begin{cases} \frac{13}{3}\log_2 x=13 \\ x>0 \end{cases};\quad \begin{matrix} \log_2 x=3 \\ x>0 \end{matrix};\ \begin{cases} x=2^3 \\ x>0 \end{cases};\ \begin{matrix} x=8 \\ x>0 \end{matrix}$$

Ответ: $x=8$.

3. Еще один вид логарифмических уравнений вида – уравнения, сводящиеся к рациональным с помощью введения новой переменной. После решения уравнения с новой переменной получим простейшие логарифмические уравнения.

Пример 7. Решите уравнение $6\log_8{}^2 x-5\log_8 x+1=0$.

Решение:

Запишем ограничения $x>0$.

Введем новую переменную: $\log_8 x=t$.

Решим вспомогательное уравнение:

$$6t^2-5t+1=0;$$

$$D=b^2-4ac=25-4\cdot 6=25-24=1;$$

$$t_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{5\pm1}{12};$$

$$\left[\begin{array}{l} t_1=\frac{1}{3} \\ t_2=\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Вернемся к переменной x:

$$\left[\begin{array}{l} \log_8 x=\frac{1}{3} \\ \log_8 x=\frac{1}{2} \end{array}\right.;\ \left[\begin{array}{l} x=8^{\frac{1}{2}} \\ x=8^{\frac{1}{3}} \end{array}\right.;\ \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{8} \\ x=2 \end{array}\right..$$

Ответ: x = 2, $x=2\sqrt{2}$.

Пример 8. Решите уравнение $\log_2 x-2\log_x 2+1=0$.

Решение:

Запишем ограничения $\left[\begin{array}{l} x>0 \\ x\neq 1 \end{array}\right.$.

$$\log_2 x-2\log_x 2+1=0;$$

$$\log_2 x-2\frac{1}{\log_2 x}+1=0;$$

Введем новую переменную: $\log_2 x=t$.

Решим вспомогательное уравнение:

$$t-2\frac{1}{t}+1=0;$$

$$\frac{t^2+t-2}{t}=0;$$

$$\begin{cases} t^2+t-2=0 \\ t\neq 0 \end{cases};$$

$$t^2+t-2=0;$$

$$D=b^2-4ac=1+4\cdot 2=1+8=9;$$

$$t_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-1\pm3}{2};$$

$$\left[\begin{array}{l} t_1=-2 \\ t_2=1 \end{array}\right..$$

Вернемся к переменной x:

$$\left[\begin{array}{l} \log_2 x=-2 \\ \log_2 x=1 \end{array}\right.;\ \left[\begin{array}{l} x=2^{-2} \\ x=2^1 \end{array}\right.;\ \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{4} \\ x=2 \end{array}\right..$$

Ответ: x = 0,25, $x=2$.

Пример 9. Решите уравнение $\frac{\log_3(9x)-8}{\log_3{}^2 x+\log_3 x^4} = 1.$

Решение.

Запишем ограничения: $\left[\begin{array}{l} x > 0 \\ x \neq 1 \end{array}\right.$.

$$\frac{\log_3(9x)-8}{\log_3{}^2 x+\log_3 x^4} = -1;$$

$$\frac{\log_3 9+\log_3 x-8}{\log_3{}^2 x+4\log_3|x|} = -1;$$

так как $x > 0,$ то

$$\frac{2+\log_3 x-8}{\log_3{}^2 x+4\log_3 x} = -1;$$

$$\frac{\log_3 x-6}{\log_3{}^2 x+4\log_3 x} + 1 = 0;$$

$$\frac{\log_3 x-6+(\log_3{}^2 x+4\log_3 x)}{\log_3{}^2 x+4\log_3 x} = 0;$$

$$\frac{\log_3 x-6+\log_3{}^2 x+4\log_3 x}{\log_3{}^2 x+4\log_3 x} = 0;$$

$$\frac{\log_3{}^2 x+5\log_3 x-6}{\log_3{}^2 x+4\log_3 x} = 0;$$

Введем новую переменную: $\log_3 x = t.$

Решим вспомогательное уравнение:

$$\frac{t^2+5t-6}{t^2+4t} = 0;$$

$$\begin{cases} t^2 + 5t - 6 = 0 \\ t^2 + 4t \neq 0 \end{cases};$$

$$t^2 + 5t - 6 = 0;$$

$$D = b^2 - 4ac = 25 + 4 \cdot 6 = 25 + 24 = 49;$$

$$t_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a} = \frac{-5\pm7}{2};$$

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = -6 \\ t_2 = 1 \end{array}\right.;$$

$$t^2 + 4t \neq 0;$$

$$t(t + 4) \neq 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} t_1 \neq -4 \\ t_2 \neq 0 \end{array}\right..$$

Вернемся к переменной *x:*

$$\left[\begin{array}{l}\log_3 x = -6\\ \log_3 x = 1\end{array}\right.;\ \left[\begin{array}{l}x = 3^{-6}\\ x = 3^1\end{array}\right.;\ \left[\begin{array}{l}x = \frac{1}{3^6};\\ x = 3\end{array}\right.\ \left[\begin{array}{l}x = \frac{1}{729}.\\ x = 3\end{array}\right.$$

Ответ: $x = 3,\ \ x = \frac{1}{729}$.

Логарифмические неравенства.

Логарифмические неравенства это неравенства вида $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, где $a > 0;\ \ a \neq 1$ и неравенства, сводящиеся к этому виду.

Способы решения логарифмических неравенств основаны на монотонности логарифмической функции в зависимости от основания логарифма. Функция возрастает, если $a > 1$ и убывает, если $0 < a < 1$.

Если $a > 1$, то неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ сводиться к решению системы $\begin{cases} f(x) > g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$, при этом знак неравенства сохраняется.

Если $0 < a < 1$, то неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ сводиться к решению системы $\begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$, при этом знак неравенства меняется.

1. Простейшие логарифмические неравенства $\log_a f(x) > b$.

Пример 10. Решить неравенство $\log_2(2 - x) \leq 1$.

Решение:

$$\log_2(2 - x) \leq 1;$$

$$\log_2(2 - x) \leq \log_2 2;$$

Основание логарифма *a*=2 > 1, то функция $\log_2 x$ возрастающая

$$\begin{cases} 2 - x \leq 2 \\ 2 - x > 0 \end{cases};\ \ \begin{cases} x \geq 0 \\ x < 2 \end{cases};\ \ 0 \leq x < 2.$$

Ответ: $x \epsilon [0; 2)$.

Пример 11. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{3}}(2 - x) \leq -1$.

Решение.

$$\log_{\frac{1}{3}}(2-x) \le \log_{\frac{1}{3}} 3;$$

Основание логарифма $a = \frac{1}{3} > \ 1$, то функция $\log_{\frac{1}{3}} x$ убывающая

$$\begin{cases} 2-x \ge 3 \\ 2-x > 0 \end{cases}; \ \begin{cases} x \le 1 \\ x < 2 \end{cases}; \quad x \le 1.$$

Ответ: $x\epsilon(-\infty; 1]$.

2. *Логарифмические неравенства* вида $\log_a f(x) > \log_a g(x)$.

Пример 12. Решить неравенство $\log_3(2x-4) > \log_3(14-x)$

Решение.

Основание логарифма *а* =3 > 1, то функция $\log_3 x$ возрастающая

$$\begin{cases} 2x-4 > 0 \\ 14-x > 0 \\ 2x-4 > 14-x \end{cases}; \begin{cases} x > 2 \\ x < 14; \\ x > 6 \end{cases} \ 6 < x < 14.$$

Ответ: $x\epsilon$ (6; 14).

Пример 13. Решите неравенство $\log_2(x+4) + \log_2(2x+3) > \log_2(1-2x)$.

Решение:

Основание логарифма *а*=2 > 1, то функция $\log_2 x$ возрастающая

$$\log_2(x+4) + \log_2(2x+3) > \log_2(1-2x)$$

$$\log_2\big((x+4)\cdot(2x+3)\big) > \log_2(1-2x)$$

$$\begin{cases} x+4 > 0 \\ 2x+3 > 0 \\ 1-2x > 0 \\ (x+4)\cdot(2x+3) > 1-2x \end{cases}; \begin{cases} x > -4 \\ x > -1{,}5 \\ x < 0{,}5 \\ 2x^2+3x+8x+12-1+2x > 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x > -1{,}5 \\ x < 0{,}5 \\ 2x^2+13x+11 > 0 \end{cases}; \begin{cases} x > -1{,}5 \\ x < 0{,}5 \\ 2(x+1)(x+5{,}5) > 0 \end{cases}; \begin{cases} x > -1{,}5 \\ x < 0{,}5 \\ \left[\begin{matrix} x < -5{,}5 \\ x > -1 \end{matrix}\right. \end{cases}; \ x\epsilon(-1; 0{,}5).$$

Ответ: $x\epsilon(-1; 0{,}5)$.

3. Еще один вид логарифмических неравенств – неравенства, сводящиеся к рациональным с помощью введения новой переменной. После решения неравенства с новой переменной получим простейшие логарифмические неравенства.

Пример 14. Решите неравенство $\log_2{}^2 x + 6 > 5\log_2 x$.

Решение:

$$\log_2{}^2 x + 6 > 5\log_2 x$$

Запишем ограничения $x > 0$.

Введем новую переменную $\log_2 x = t$.

Решим вспомогательное неравенство:

$$t^2 - 5t + 6 > 0;$$

$$y = t^2 - 5t + 6;$$

$$t^2 - 5t + 6 = 0;$$

$$D = b^2 - 4ac = 25 - 4 \cdot 6 = 25 - 24 = 1;$$

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 \pm 1}{2};$$

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = 3 \\ t_2 = 2 \end{array}\right.;$$

$$(t-2)(t-3) > 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} t < 2 \\ t > 3 \end{array}\right..$$

Вернемся к исходной переменной *x*.

Основание логарифма *a* = 2 > 1, то функция $\log_2 x$ возрастающая

$$\left[\begin{array}{l} t < 2 \\ t > 3 \end{array}\right.; \left[\begin{array}{l} \log_2 x < 2 \\ \log_2 x > 3 \end{array}\right.; \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x < 2^2 \\ x > 2^3 \end{array}\right. \\ x > 0 \end{array}\right.; \left[\begin{array}{c} x > 8 \\ 0 < x < 4 \end{array}\right..$$

Ответ: $x \epsilon (0; 4) \cup (8; +\infty)$.

Пример 15. Решите неравенство $(\log_2(x + 4{,}2) + 2)(\log_2(x + 4{,}2) - 3) \geq 0$.

Решение:

$$(\log_2(x + 4{,}2) + 2)(\log_2(x + 4{,}2) - 3) \geq 0;$$

Запишем ограничения $x + 4{,}2 > 0$; $x > -4{,}2$.

Введем новую переменную $\log_2(x + 4{,}2) = t$.

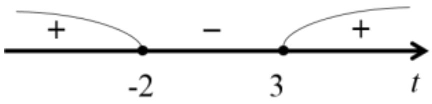
Решим вспомогательное неравенство:

$$(t + 2)(t - 3) \geq 0;$$

$$y = (t + 2)(t - 3);$$

$$(t+2)(t-3) \geq 0;$$

$$\left[\begin{matrix} t=-2 \\ t=3 \end{matrix}\right.;$$



$$\left[\begin{matrix} t \leq -2 \\ t \geq 3 \end{matrix}\right.;$$

Вернемся к исходной переменной *x*.

Основание логарифма *a* =2 > 1, то функция $\log_2 x$ возрастающая

$$\left[\begin{matrix} t \leq -2 \\ t \geq 3 \end{matrix}\right.; \quad \begin{cases} \left[\begin{matrix} t \leq -2 \\ t \geq 3 \end{matrix}\right. \\ x > -4{,}2 \end{cases}; \quad \begin{cases} \left[\begin{matrix} \log_2(x+4{,}2) \leq -2 \\ \log_2(x+4{,}2) \geq 3 \end{matrix}\right. \\ x > -4{,}2 \end{cases}; \quad \begin{cases} \left[\begin{matrix} x+4{,}2 \leq 2^{-2} \\ x+4{,}2 \geq 2^3 \end{matrix}\right. \\ x > -4{,}2 \end{cases};$$

$$\begin{cases} \left[\begin{matrix} x \leq 0{,}25-4{,}2 \\ x \geq 8-4{,}2 \end{matrix}\right. \\ x > -4{,}2 \end{cases}; \quad \begin{cases} \left[\begin{matrix} x \leq -3{,}95 \\ x \geq 3{,}8 \end{matrix}\right. \\ x > -4{,}2 \end{cases};$$

Ответ: $x \epsilon (-4{,}2; -3{,}95) \cup (3{,}8; +\infty)$

4. Логарифмические неравенства с переменным основанием $\log_{a(x)} f(x) > \log_{a(x)} g(x)$. Для решения данного неравенства применяют метод рационализации логарифмических неравенств $(a(x)-1)\big(f(x)-$ $-g(x)\big) > 0$, при соблюдений ограничений $\begin{cases} a(x) \neq 1 \\ a(x) > 0 \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$.

Пример 16. Решите неравенство $\log_{x-3}(x^2-12x+36) \leq 0$.

Решение.

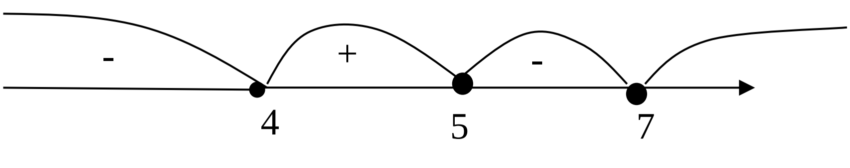
Запишем ограничения $\begin{cases} x-3 > 0 \\ x-3 \neq 1 \\ x^2-12x+36 > 0 \end{cases}; \begin{cases} x > 3 \\ x \neq 4 \\ (x-6)^2 > 0 \end{cases}; \begin{cases} x > 3 \\ x \neq 4 \\ x \neq 6 \end{cases}$

$$x \epsilon (-\infty; 3) \cup (3; 4) \cup (4; 6) \cup (6; +\infty)$$

Применяем формулу рационализации $(x-3-1)(x^2-12x+36-1) \leq 0$.

$$(x-4)(x^2-12x+35) \leq 0;$$

$$(x-4)(x-5)(x-7) \leq 0;$$



+

x

С учетом ограничений имеем $x\epsilon(3;4)\cup[5;6)\cup(6;7]$.

Ответ: $x\epsilon(3;4)\cup[5;6)\cup(6;7]$.