Тема 9. Тригонометрические уравнения.

Тригонометрические уравнения.

Решение тригонометрических уравнений

Уравнение	Формулы решения	Частные случаи
$\sin x = a$	при $\|a\| \le 1$ $x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in \boldsymbol{Z}$ при $\|a\| > 1$ – нет решений	$\sin x = 0;\ x = \pi k, k \in \boldsymbol{Z}$ $\sin x = 1;\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \boldsymbol{Z}$ $\sin x = -1;\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \boldsymbol{Z}$
$\cos x = a$	при $\|a\| \le 1$ $x = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in \boldsymbol{Z}$ при $\|a\| > 1$ – нет решений	$\cos x = 0;\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \boldsymbol{Z}$ $\cos x = 1;\ x = 2\pi k, k \in \boldsymbol{Z}$ $\cos x = -1;\ x = \pi + 2\pi k, k \in \boldsymbol{Z}$
$\operatorname{tg} x = a$	$x = \operatorname{arctg} a + \pi k, k \in \boldsymbol{Z}$	–
$\operatorname{ctg} x = a$	$x = \operatorname{arcctg} a + \pi k, k \in \boldsymbol{Z}$	–

Решение уравнения $\sin x = a$ $(-1 < a < 1)$ можно записать совокупностью двух серий решений (рисунок 9.1):

$$x = \left[\begin{array}{l} \arcsin a + 2\pi k, \\ \pi - \arcsin a + 2\pi k, \end{array}\right. k \in \boldsymbol{Z}.$$

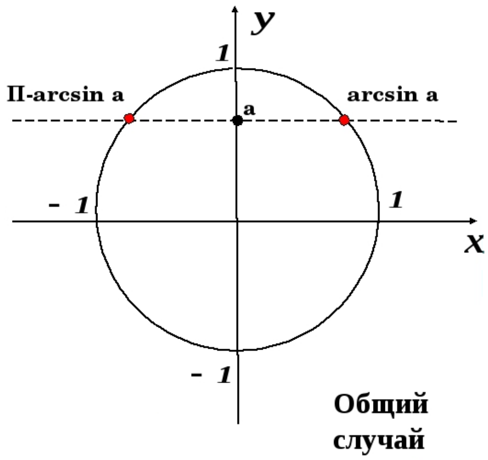

Рисунок 9.1

Решение уравнения $\cos x = a \quad (-1 < a < 1)$ можно записать совокупностью двух серий решений (рисунок 9.2):

$$x = \left[\begin{array}{l} \arccos a + 2\pi k, \\ -\arccos a + 2\pi k, \end{array}\right. k \in \boldsymbol{Z}.$$

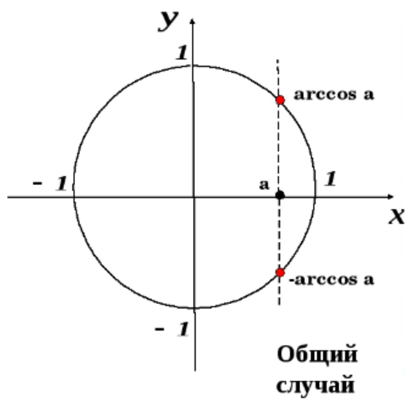

Рисунок 9.2

Решение уравнения $\operatorname{tg} x = a$ можно записать совокупностью двух серий решений (рисунок 9.3):

$$x = \left[\begin{array}{l} \operatorname{arctg} a + 2\pi k, \\ \pi + \operatorname{arctg} a + 2\pi k, \end{array}\right. k \in \boldsymbol{Z}.$$

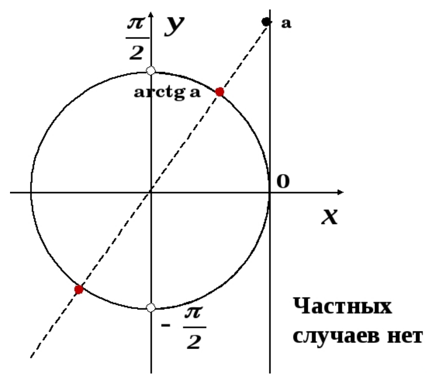

Рисунок 9.3

Решение уравнения $\operatorname{ctg} x = a$ можно записать совокупностью двух серий решений (рисунок 9.4):

$$x = \left[\begin{array}{l} \operatorname{arcctg} a + 2\pi k, \\ \pi + \operatorname{arcctg} a + 2\pi k, \end{array}\right. k \in \boldsymbol{Z}.$$

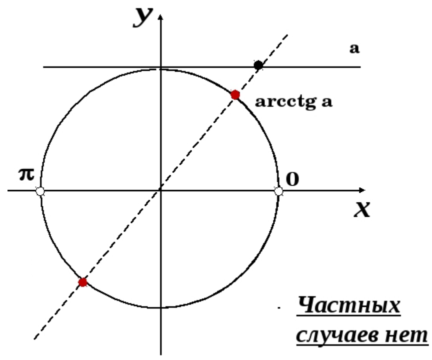

Рисунок 9.4

Рассмотрим некоторые типы тригонометрических уравнений.

I. Уравнения, сводимые к алгебраическим.

Это уравнения, сводимые к одной и той же функции относительно одного и того же неизвестного. Решение такого типа уравнений находят методом подстановки (заменой переменной).

Пример 1. Решить уравнение: $2\sin^2 x - 7\cos x - 5 = 0$.

Решение.

$$2(1 - \cos^2 x) - 7\cos x - 5 = 0,$$

$$-2\cos^2 x - 7\cos x - 3 = 0,$$

$$2\cos^2 x + 7\cos x + 3 = 0.$$

Подстановка: $\cos x = t$, получим

$$2t^2 + 7t + 3 = 0,$$

$$D = 49 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 25,$$

$$t_1 = -3, t_2 = -\frac{1}{2}.$$

Делаем обратную замену

$\cos x = -3$	$\cos x = -\frac{1}{2}$
$x \in \emptyset$	$x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi k, k \in Z$
	$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z.$

Ответ: $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$.

II. Однородные уравнения.

$a\sin x + b\cos x = 0$ *a*, *b* – заданные числа	– однородное уравнение первой степени
$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$ *a*, *b*, *c* – заданные числа	– однородное уравнение второй степени

Пример 2. Решить уравнение: $2\sin x - 3\cos x = 0$

Решение. Разделим обе части уравнения на $\cos x$:

$$2\operatorname{tg} x - 3 = 0$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{3}{2}$$

$$x = \operatorname{arctg}\frac{3}{2} + \pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z}$$

Ответ: $x = \operatorname{arctg}\frac{3}{2} + \pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 3. *Решить уравнение*

$$4\sin^2 x + 2\sin x\cos x = 3$$

Решение. Используя основное тригонометрическое тождество, представим правую часть уравнения в виде $3(\sin^2 x + \cos^2 x)$, получим:

$$4\sin^2 x + 2\sin x\cos x = 3\sin^2 x + 3\cos^2 x$$

$$\sin^2 x + 2\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$$

Последнее уравнение есть однородное второй степени. Разделим обе части уравнения на $\cos^2 x$, получим:

$$\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x - 3 = 0.$$

Сделаем замену переменной: $\operatorname{tg} x = t$, получим квадратное уравнение:

$$t^2 + 2t - 3 = 0$$

$$D = 4 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16$$

$$t_1 = -3 \qquad t_2 = 1$$

Осуществим обратную подстановку:

$\operatorname{tg} x = -3$	$\operatorname{tg} x = 1$
$x = \operatorname{arctg}(-3) + \pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z}$	$x = \operatorname{arctg} 1 + \pi n, \quad n \in \boldsymbol{Z}$

$x = -\mathrm{arctg}\, 3 + \pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z}$ $\qquad\qquad$ $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \boldsymbol{Z}$

Ответ: $x = -\mathrm{arctg}\, 3 + \pi k;\ x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad k, n \in \boldsymbol{Z}$**.**

III. Уравнение вида $a\, sin\, x + b\, cos\, x = c$. Метод вспомогательного аргумента.

Рассмотрим уравнение вида: $a \sin x + b \cos x = c$,

где *a*, *b*, *c* – заданные числа, причем $a^2 + b^2 > c^2$.

Разделим обе части уравнения на $\sqrt{a^2 + b^2}$, получим

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Учитывая, что $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$, то можно принять:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos\varphi, \qquad \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin\varphi,$$

где φ называется вспомогательным аргументом.

Тогда уравнение примет вид:

$$\cos\varphi \sin x + \sin\varphi \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\sin(x + \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

$$x + \varphi = (-1)^k \arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z}$$

$$x = (-1)^k \arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \varphi + \pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z}.$$

Учитывая, что $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, выразим $\varphi = \arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Получим решение исходного уравнения в виде:

$$x = (-1)^k \arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z}.$$

Пример 4. Решить уравнение: $3 \sin x + 4 \cos x = 2$.

Решение. Здесь *a* = 3, *b* = 4, *c* = 2, при этом легко видеть, что:

$a^2 + b^2 > c^2$, значит уравнение имеет решение.

Выразим $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Разделим все уравнение на 5, получим

$$\frac{3}{5}\sin x+\frac{4}{5}\cos x=\frac{2}{5}.$$

Обозначим $\cos\varphi=\frac{3}{5}, \sin\varphi=\frac{4}{5}$. Получим уравнение:

$$\sin(x+\varphi)=\frac{2}{5},$$

$$x+\varphi=(-1)^k \arcsin\frac{2}{5}+\pi k, \quad k\in\boldsymbol{Z}$$

$$x=(-1)^k \arcsin\frac{2}{5}-\varphi+\pi k, \quad k\in\boldsymbol{Z}$$

$$x=(-1)^k \arcsin\frac{2}{5}-\arcsin\frac{4}{5}+\pi k, \quad k\in\boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $x=(-1)^k \arcsin\frac{2}{5}-\arcsin\frac{4}{5}+\pi k, \quad k\in\boldsymbol{Z}$.