Тема 4. Определение синуса, косинуса, тангенса и котангенса в прямоугольном треугольнике.

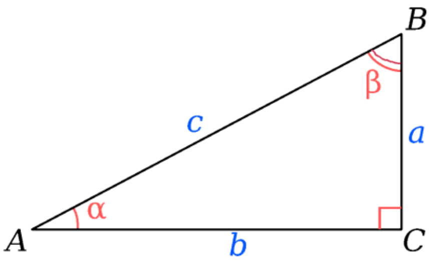

Рисунок 4.1

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC (рисунок 4.1). «Для острого угла α найдем прилежащий к нему катет и противолежащий. Так, *катет* a этого треугольника является *противолежащим* углу α, а *катет* b – *прилежащим* к углу α» [3].

Из школьного курса геометрии вам известно, что:

«1. *Синусом* острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к гипотенузе.

2. *Косинусом* острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе.

3. *Тангенсом* острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к прилежащему» [1].

Значит, $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, $tg\ \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\sin x}{\cos x}$, $ctg\ \alpha = \frac{b}{a} = \frac{\cos x}{\sin x}$.

Кроме того, $ctg\ \alpha = \frac{1}{tg\ \alpha}$.

При решении задач часто используют также и другие соотношения между элементами прямоугольного треугольника (Таблица 4.1):

Таблица 4.1 – Основные соотношения, связанные с углами прямоугольного треугольника

<table>
<tr><td colspan="2">$sin^2\,\alpha + cos^2\,\alpha\ =\ 1$ – основное тригонометрическое тождество</td></tr>
<tr><td>$1 + tg^2\,\alpha = \dfrac{1}{cos^2\,\alpha}$</td><td>$1 + ctg^2\,\alpha = \dfrac{1}{sin^2\,\alpha}$</td></tr>
<tr><td>$\alpha\ +\ \beta\ =\ 90°$</td><td>$cos\,\alpha = sin\,\beta$</td></tr>
<tr><td>$sin\,\alpha = cos\,\beta$</td><td>$tg\,\alpha = ctg\,\beta$</td></tr>
</table>

Кроме того, при решении задач на отношения между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике применяют следующие *утверждения*.

- «сумма углов любого треугольника равна $180°$;

- сумма двух острых углов прямоугольного треугольника равна $90°$;

- квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов (*теорема Пифагора*);

- катет, лежащий напротив угла в $30°$, равен половине гипотенузы;

- высота прямоугольного треугольника (рисунок 4.2), проведенная из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное для отрезков, на которые делится гипотенуза этой высотой, то есть: $h_c^2 = b_c \cdot a_c$;

- катет прямоугольного треугольника (рисунок 4.2) есть среднее пропорциональное для гипотенузы и отрезка гипотенузы, заключенного между катетом и высотой, проведенной из вершины прямого угла, то есть: $a^2 = c \cdot a_c$; $b^2 = c \cdot b_c$» [1].

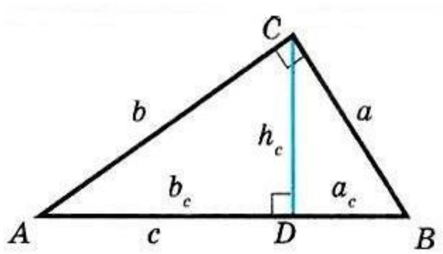

Рисунок 4.2

В таблице 4.2 приведены значений $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ и $tg\ \alpha$ для углов α, равных $30°$, $45°$ и $60°$.

Таблица 4.2 – Значения синуса, косинуса и тангенса для углов $30°$, $45°$ и $60°$

α	$30°$	$45°$	$60°$
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$tg\ \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Пример 1. «Найдите синус, косинус, тангенс и котангенс углов треугольника ABC с прямым углом C, если BC = 12, AC = 9» [1].

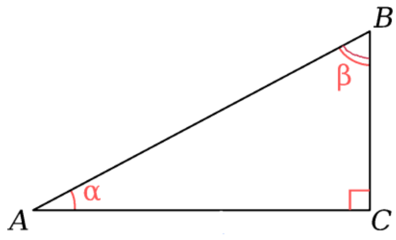

Рисунок 4.3

Решение. По теореме Пифагора имеем: AB = $\sqrt{12^2+9^2}\ = 15.$

По определениям синуса, косинуса и тангенса острого угла в прямоугольном треугольнике получим:

$$\sin\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}, \quad \cos\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}, \quad tg\ \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

$$\sin\beta = \frac{AC}{AB} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}, \quad \cos\beta = \frac{BC}{AB} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}, \quad tg\ \beta = \frac{AC}{BC} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

$$ctg\ \alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}, \quad ctg\ \beta = \frac{BC}{AC} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}.$$

В соответствии с таблицей 4.1 действительно имеем, что:

$$\cos\alpha = \sin\beta = \frac{3}{5}, \quad \sin\alpha = \cos\beta = \frac{4}{5},$$

$$tg\ \alpha = ctg\ \beta = \frac{4}{3}, \quad tg\ \beta = ctg\ \alpha = \frac{3}{4}.$$

Ответ: $\cos\alpha = \sin\beta = \frac{3}{5}$, $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{4}{5}$, $tg\ \alpha = ctg\ \beta = \frac{4}{3}, tg\ \beta =$ $= ctg\ \alpha = \frac{3}{4}.$

Пример 2. В треугольнике ABC (рисунок 4.4): ∠C = $90°$, $\sin\beta = \frac{7}{25}$. Найдите AB, если BC = $4{,}8$.

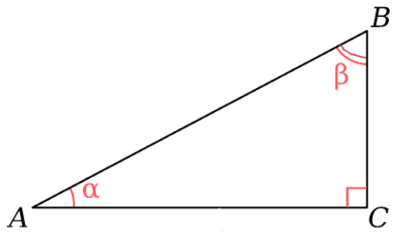

Рисунок 4.4

Решение. Так как косинус острого угла в прямоугольном треугольнике равен отношению прилежащего к этому углу катета к гипотенузе, то $\cos\beta = \frac{BC}{AB} = \frac{4,8}{AB} \Rightarrow$ AB = $\frac{4,8}{\cos\beta}$. С помощью основного тригонометрического тождества: $\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$ найдем $\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \sqrt{1-\left(\frac{7}{25}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{49}{625}} == \sqrt{\frac{576}{625}} = \frac{24}{25} = 0,96.$ Тогда AB = $\frac{4,8}{\cos\beta} = \frac{4,8}{0,96} = 5.$ Ответ: AB = 5.

Пример 3. В треугольнике ABC (рисунок 4.5) ∠C = $90°$. Известно, что ∠ B = $60°$, AB = 18. Найдите AC.

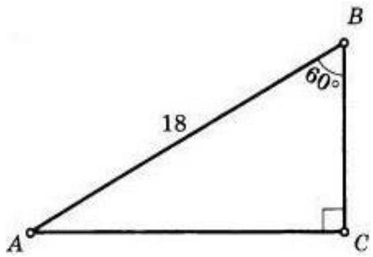

Рисунок 4.5

Решение. Так как сумма двух острых углов прямоугольного треугольника равна $90°$, то ∠ A = $90° - 60° = 30°$. Найдем BC: $BC = \frac{18}{2} == 9$, так как катет, лежащий напротив угла в $30°$, равен половине гипотенузы. По теореме Пифагора найдем катет AC: AC = $\sqrt{18^2 - 9^2} = \sqrt{(18+9)\cdot(18-9)} = \sqrt{27\cdot 9} = 9\sqrt{3}.$

Ответ: AC = $9\sqrt{3}$.

Пример 4. В треугольнике ABC (рисунок 4.6) ∠C = $90°$, CD − высота, Известно, что ∠ ACD = $30°$, AC = 6. Найдите BC.

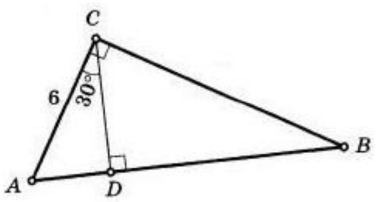

Рисунок 4.6

Решение. Рассмотрим прямоугольный треугольник ADC, AD = 3, так как катет, лежащий напротив угла в $30°$, равен половине гипотенузы. По теореме Пифагора найдем высоту CD: CD = $= \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{36-9} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}.$ Рассмотрим прямоугольный треугольник BDC, ∠C = $90°$, значит ∠ CBD = $= 90° - 60° = 30°$ Имеем: $\sin 30° = \frac{CD}{CB} = \frac{3\sqrt{3}}{CB}$. Тогда BC = $\frac{3\sqrt{3}}{\sin 30°} = \frac{3\sqrt{3}}{0,5} = 6\sqrt{3}.$

Ответ: BC = $6\sqrt{3}$.

Пример 5. В треугольнике ABC (рисунок 4.7) $\angle C = 90°$, CD – высота, Известно, что AC = BC, CD = 12. Найдите BC.

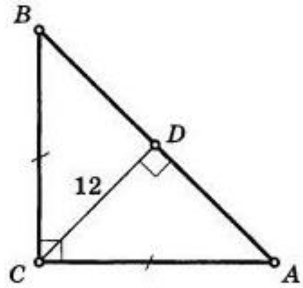

Рисунок 4.7

Решение. Так как в прямоугольном треугольнике ABC AC = BC, то он равнобедренный, $\angle$ A = $\angle$ B = $45°$. Рассмотрим прямоугольный треугольник CDB. Имеем: $\sin 45° = \frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{CB}} = \frac{12}{\mathrm{CB}}$. Тогда BC = $\frac{12}{\sin 45°} = \frac{12}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 12\sqrt{2}$.

Ответ: BC = $12\sqrt{2}$.

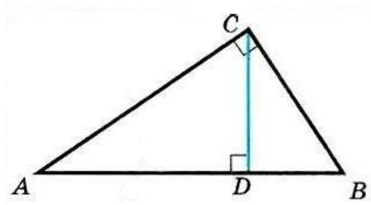

Рисунок 4.8

Пример 6. В прямоугольном треугольнике ABC (рисунок 4.8) AB = 13, $tg\ \mathrm{B} = \frac{1}{5}$. Найти BD.

Решение. *Первый способ.* Известно, что $tg\ \mathrm{B} = \frac{CD}{BD} = \frac{1}{5}$. Рассмотрим прямоугольный треугольник CDB. $cos\ B = \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{CB}}$. Тогда BD = BC $\cdot\ cos\ B$. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC, в котором: $cos\ B = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}$. Значит BC = AB $\cdot\ cos\ B$. Имеем: BD = BC $\cdot\ cos\ B$ = (AB $\cdot\ cos\ B$) $\cdot\ cos\ B$ = AB $\cdot\ cos^2\ B$. Из тождества $1 + tg^2\ \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ найдем: $cos^2\ B = \frac{1}{1+tg^2\ \mathrm{B}}$, тогда BD = AB $\cdot \cdot\ cos^2\ B = \frac{\mathrm{AB}}{1+tg^2\ \mathrm{B}} = \frac{13}{1+0{,}04}$ =12,5.

Второй способ. Пусть AC = x, тогда BC = $5x$. По теореме Пифагора: $AB^2 = AC^2 + BC^2$, тогда $13^2 = x^2 + (5x)^2$. Получим: $169 = 26x^2$. AC = $x = \frac{13}{\sqrt{26}} = \frac{13}{\sqrt{2 \cdot 13}} = \frac{13\sqrt{13}}{\sqrt{2} \cdot 13} = \sqrt{\frac{13}{2}}$, BC = $5x = 5\sqrt{\frac{13}{2}}$. Так как $\mathrm{BC}^2 = \mathrm{AB} \cdot \mathrm{BD}$, то $\left(5\sqrt{\frac{13}{2}}\right)^2 = 13 \cdot\ \mathrm{BD}$. Следовательно BD = $\frac{25 \cdot 13}{2} \cdot \frac{1}{13} = 12{,}5$. Ответ: BD = 12,5.

Пример 7. В прямоугольном треугольнике ABC (рисунок 4.8) AC = 8, $sin\ B = \frac{1}{2}$. Найти AD.

Решение. Рассмотрим прямоугольные треугольники ABC и CDB, имеем: $\angle$ CBD = $\angle$ DCA как острые углы со взаимно перпендикулярными сторонами.

Тогда $sin\angle \mathrm{DCA} = \frac{AD}{BC} = \frac{1}{2}$. Следовательно AD = $\frac{BC}{2} = \frac{8}{2} = 4$. Ответ: AD = 4.

Пример 8. В прямоугольном треугольнике ABC (рисунок 4.8) AD = 12, $tg\ B = \frac{2}{3}$. Найти BD.

Решение. Известно, что $tg\ \mathrm{B} = \frac{CD}{BD} = \frac{2}{3}$. Из прямоугольного треугольника ABC с высотой CD имеем: $\mathrm{CD}^2 = \mathrm{AD} \cdot \mathrm{BD}$. Тогда $tg\ \mathrm{B} = \frac{\sqrt{12 \cdot \mathrm{BD}}}{BD} = \frac{2}{3}$. Получим: $\frac{12}{BD} = \frac{4}{9}$, тогда BD = $\frac{12 \cdot 9}{4} = 27$. Ответ: BD = 27.