Тема 2. Алгебраические уравнения. Квадратные уравнения. Формулы Виета. Простейшие уравнения и неравенства с модулем.

Вспомним основные виды алгебраических уравнений, которые были вами изучены в школьном курсе математики.

Так, «уравнение вида:

$$a \cdot x + b = 0, \qquad (2.1)$$

где a и b – некоторые постоянные, называется *линейным уравнением*.

Если $a \neq 0$, то уравнение (2.1) имеет единственный корень: $x = -\frac{b}{a}$.

Если $a = 0$, $b \neq 0$, то уравнение (2.1) решений не имеет.

Если $a = 0$, $b = 0$, то любое x является решением уравнения (2.1)» [29].

Пример 1. «Решить уравнение: $\frac{3}{5}x - \frac{x}{2} = 0{,}2$.

Решение:

$$\frac{3x}{5} - \frac{x}{2} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{3x \cdot 2}{5 \cdot 2} - \frac{x \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{1 \cdot 2}{5 \cdot 2}$$

$$\frac{6x}{10} - \frac{5x}{10} = \frac{2}{10}$$

$$\frac{6x - 5x}{10} = \frac{2}{10}$$

$$6x - 5x = 2$$

$$x = 2$$

Ответ: $x = 2$)» [2].

Пример 2. «Решить уравнение: $2x + 3 - 6(x - 1) = 4(1 - x) + 5$.

Решение:

$$2x + 3 - 6(x - 1) = 4(1 - x) + 5$$

$$2x + 3 - 6x + 6 = 4 - 4x + 5$$

$$2x - 6x + 4x = 4 + 5 - 9$$

$$-4x + 4x = 0$$

$$0 \cdot x = 0$$

$$x \in R$$

Ответ: $x \in R$» [2].

Отметим, что «уравнение вида:

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0, \qquad (2.2)$$

где *a*, *b*, *c* – некоторые числа $(a \neq 0)$, x – переменная, называется *квадратным уравнением*.

Для решения квадратного уравнения следует вычислить дискриминант (2.3):

$$D = b^2 - 4ac. \qquad (2.3)$$

Если $D = 0$, то уравнение (2.2) имеет единственное решение: $x = -\frac{b}{2a}$.

Если $D > 0$, то уравнение (2.2) имеет два корня:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}, x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}. \qquad (2.4)$$

Если $D < 0$, то уравнение (2.2) не имеет действительных корней.

Если $b = 0$ или $c = 0$, то уравнение (2.2) можно решать, не вычисляя дискриминанта, то есть: если $b = 0, c \neq 0, \frac{c}{a} < 0$, то $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$; если $b \neq 0, c = 0$, то $x_1 = 0, x_2 = \frac{-b}{a}$.

Теорема Виета (прямая) утверждает: если у квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ есть корни x_1 и x_2 (2.4), то выполняются соотношения (2.5)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases} \qquad (2.5)$$

Обратная теорема Виета утверждает: если для некоторых постоянных *a*, *b*, *c* существуют числа x_1 и x_2, удовлетворяющие соотношениям (2.6),

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases} \qquad (2.6)$$

то эти числа x_1 и x_2 являются корнями уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

При решении задач, связанных с теоремой Виета, рациональнее использовать соотношения (2.7 - 2.10):

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} \qquad (2.7)$$

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 \qquad (2.8)$$

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1{}^2 + x_2{}^2}{x_1x_2} \qquad (2.9)$$

$$x_1{}^3 + x_2{}^3 = (x_1 + x_2) \cdot (x_1{}^2 - x_1x_2 + x_2{}^2) =$$

$$= (x_1 + x_2) \cdot ((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2) \qquad (2.10)$$ » [29].

Пример 3. «Решить уравнение: $x^2 + 5x - 6 = 0$.

Решение: $x^2 + 5x - 6 = 0$. Имеем $a = 1, b = 5, c = -6$.

1-й способ:

$$D = b^2 - 4ac = 25 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25 + 24 = 49 = 7^2.$$

Так как $D > 0$, то исходное уравнение имеет два корня:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-5+7}{2} = \frac{2}{2} = 1, x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-5-7}{2} = \frac{-12}{2} = -6.$$

2-й способ: По теореме Виета имеем:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -5, \\ x_1 \cdot x_2 = -6. \end{cases}$$

Значит, что $x_1 = 1, x_2 = -6$.

Ответ: $x_1 = 1, x_2 = -6$» [2].

Пример 4. «Решить уравнение: $x^6 - 5x^3 + 4 = 0$.

Решение. Введем новую переменную: $y = x^3$. Тогда получим уравнение:

$$y^2 - 5y + 4 = 0.$$

Решив квадратное уравнение, имеем: $y_1 = 1, y_2 = 4$.

Таким образом, исходное уравнение равносильно совокупности уравнений: $x^3 = 1$ или $x^3 = 4$, то есть $x = 1$ или $x = \sqrt[3]{4}$.

Ответ: $x = 1$, $x = \sqrt[3]{4}$» [29].

Пример 5. «Решить уравнение: $4x^2 + 12x + \frac{12}{x} + \frac{4}{x^2} = 47$.

Решение: $$\left(4x^2 + \frac{4}{x^2}\right) + \left(12x + \frac{12}{x}\right) = 47$$

$$4\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+12\left(x+\frac{1}{x}\right)=47$$

Введем новую переменную: $y=x+\frac{1}{x}$. Имеем: $y^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+$ $+2+\frac{1}{x^2}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+2=\ y^2-2$. Тогда получим уравнение:

$$4(y^2-2)+12y=47$$

$$4y^2-8+12y-47=0$$

$$4y^2+12y-55=0$$

Решив квадратное уравнение, имеем: $y_1\ =\ \frac{5}{2}, y_2\ =\ -\frac{11}{2}$.

Таким образом, исходное уравнение равносильно совокупности уравнений: $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$ или $x+\frac{1}{x}=\ -\frac{11}{2}$. Решим полученные дробно-рациональные уравнения.

$$x+\frac{1}{x}-\frac{5}{2}=0 \quad \text{или} \quad x+\frac{1}{x}+\frac{11}{2}=0.$$

$$\begin{cases}2x^2-5x+2=0,\\ \quad x\neq 0.\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases}2x^2+11x+2=0,\\ \quad x\neq 0.\end{cases}$$

$x_1\ =\ 2, x_2\ =\ \frac{1}{2}$ или $x_3\ =\ \frac{-11+\sqrt{105}}{4}, x_4\ =\ \frac{-11-\sqrt{105}}{4}$.

Ответ: $x\ =\ 2, x\ =\ \frac{1}{2},\ x\ =\ \frac{-11+\sqrt{105}}{4}, x\ =\ \frac{-11-\sqrt{105}}{4}$» [28].

Пример 6. «Вычислите $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ и ${x_1}^3+{x_2}^3$, где x_1 и x_2 – корни квадратного уравнения $x^2-x-2=0$.

Решение. По теореме Виета имеем: $\begin{cases}x_1+x_2=1,\\ x_1\cdot x_2=-2.\end{cases}$

Значит, по формуле (2.7) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\ =\frac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2}=\frac{1}{-2}=-\frac{1}{2}$;

По формуле (2.10) ${x_1}^3+{x_2}^3=(x_1+x_2)\cdot({x_1}^2-x_1x_2+{x_2}^2)=$

$$=(x_1+x_2)\cdot((x_1+x_2)^2-\ 3x_1x_2)=1\cdot\left(1^2-3\cdot(-2)\right)=7.$$

Ответ: $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=-\frac{1}{2}; {x_1}^3+{x_2}^3\ =7$» [28].

Так, «если в уравнении неизвестная величина содержится под знаком радикала, например, $\sqrt{x-5}=x+3$, то такое уравнение называется *иррациональным*.

Отметим, что одним из способов решения данных уравнений является возведение обеих частей уравнения в степень, равную показателю степени корня. Если показатель степени четный, то необходима проверка найденных решений» [28].

Пример 7. «Решить уравнение: $\sqrt[3]{1-x^2}=-2$.

Решение: $\sqrt[3]{1-x^2}=-2$.

$$1-x^2=(-2)^3$$

$$1-x^2=-8$$

$$x^2=9$$

$$x=3 \text{ или } x=-3.$$

Ответ: $x = 3, x = -3$» [28].

Пример 8. «Решить уравнение: $\sqrt[4]{25-x^2}=2$.

Решение: $\sqrt[4]{25-x^2}=2$.

$$25-x^2=2^4$$

$$25-x^2=16$$

$$x^2=9$$

$$x=3 \text{ или } x=-3.$$

Ответ: $x = 3, x = -3$» [28].

Пример 9. Решить уравнение: $\sqrt{10x-14}=11$

Решение: $\sqrt{10x-14}=11$.

$$\left(\sqrt{10x-14}\right)^2=11^2$$

$$10x-14=121$$

$$10x=135$$

$$x=13{,}5$$

Проверка: $\sqrt{10\cdot 13{,}5-14}=\sqrt{135-14}=\sqrt{121}=11.$

Ответ: $x = 13{,}5$.

Пример 10. «Решить уравнение: $\sqrt{x+2} = x$

Решение: $\sqrt{x+2} = x$.

$$\left(\sqrt{x+2}\right)^2 = x^2$$

$$x + 2 = x^2$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x = 2 \text{ или } x = -1.$$

Проверка: 1) $x = 2$, тогда $\sqrt{2+2} = 2$; $2 = 2$, верно;

2) $x = -1$, тогда $\sqrt{-1+2} = -1$; $1 = -1$, неверно.

Ответ: $x = 2$» [29].

Пример 11. «Решить уравнение: $(x+4)(x+1) - 3\sqrt{x^2+5x+2} = 6$.

Решение: $x^2 + 5x + 4 - 3\sqrt{x^2+5x+2} = 6$.

Введем новую переменную: $y = \sqrt{x^2+5x+2}$. Тогда получим уравнение:

$$y^2 + 2 - 3y = 6$$

$$y^2 - 3y - 4 = 0$$

Решив квадратное уравнение, имеем: $y_1 = -1, y_2 = 4$.

Таким образом, исходное уравнение равносильно совокупности уравнений: $\sqrt{x^2+5x+2} = -1$ или $\sqrt{x^2+5x+2} = 4$. Решим полученные уравнения. Первое уравнение не имеет решений, т.к. $\sqrt{x^2+5x+2} \geq 0$. Решив второе уравнение: $\sqrt{x^2+5x+2} = 4$, получим: $x^2 + 5x + 2 = 16$, тогда: $x^2 + 5x - 14 = 0$, $x_1 = 2$ или $x_2 = -7$.

Проверка: 1) $x = 2$, тогда $\sqrt{2^2+10+2} = 4$; $4 = 4$, верно;

2) $x = -7$, тогда $\sqrt{(-7)^2 - 35 + 2} = 4$; $4 = 4$, верно.

Ответ: $x = 2, x = -7$» [29].

Рассмотрим пример с решением дробно-рационального уравнения.

Пример 12. Решить уравнение: $\frac{17}{5x} = 2 - \frac{7}{x}$.

Решение:

$$\frac{17}{5x} = \frac{2}{1} - \frac{7}{x}$$

$$\frac{17}{5x} = \frac{2 \cdot 5x}{5x} - \frac{7 \cdot 5}{5x}.$$

$$\frac{17}{5x} = \frac{10x}{5x} - \frac{35}{5x}.$$

$$17 = 10x - 35, \quad 5x \neq 0, \text{ то есть } x \neq 0.$$

$$10x = 35 + 17$$

$$10x = 52$$

$$x = 5{,}2$$

Ответ: $x = 5{,}2$.

Кроме того, «чтобы решить *уравнение, содержащее переменную под знаком модуля*, надо освободиться от знака модуля, используя его определение (2.11):

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases} \qquad (2.11)$$

Приведем *алгоритм решения уравнений с модулем*:

1) находят критические точки, то есть значения переменной, при которых выражения, стоящие под знаком модуля, обращаются в нуль;

2) разбивают область допустимых значений переменной на промежутки, на каждом из которых выражения, стоящие под знаком модуля, сохраняют знак;

3) на каждом из найденных промежутков решают уравнение без знака модуля.

Совокупность (объединение) решений указанных промежутков и составляет все решения рассматриваемого уравнения» [29].

Покажем применение этого алгоритма на некоторых примерах.

Пример 13. «Решить уравнение: $|x + 3| = 2x - 1$.

Решение. Найдем критические точки: $x + 3 = 0, x = -3$. Имеем:

1) при $x < -3$ получаем уравнение $-(x+3) = 2x - 1$, то есть $-x - 3 = 2x - 1$, тогда $x = -\frac{2}{3}$. Найденное значение x не входит в рассматриваемый промежуток;

2) при $x \geq -3$ получаем уравнение $x + 3 = 2x - 1$, тогда $x = 4$. Найденное значение x входит в рассматриваемый промежуток.

Ответ: $x = 4$» [29].

Пример 14. «Решить уравнение: $|x+1| + |x-5| = 8$.

Решение. Найдем критические точки: $x = -1, x = 5$. Имеем:

1) при $x < -1$ получаем уравнение: $-(x+1) - (x-5) = 8$, то есть $-x - 1 - x + 5 = 8$, тогда имеем: $-2x = 4$, значит $x = -2$. Найденное значение x входит в рассматриваемый промежуток;

2) при $-1 \leq x < 5$ получаем уравнение: $(x+1) - (x-5) = 8$, то есть $x + 1 - x + 5 = 8$, тогда имеем: $6 = 8$, значит у этого уравнения нет решений.

3) при $x \geq 5$ получаем уравнение: $(x+1) + (x-5) = 8$, то есть $x + +1 + x - 5 = 8$, тогда имеем: $2x = 12$, значит $x = 6$. Найденное значение x входит в рассматриваемый промежуток.

Ответ: $x = -2, x = 6$» [28].

«**Пример 15.** Решить уравнение: $|x+1| + |x-5| = 8$.

Решение. Найдем критические точки: $x = -1, x = 5$. Имеем:

1) при $x < -1$ получаем уравнение: $-(x+1) - (x-5) = 8$, то есть $-x - 1 - x + 5 = 8$, тогда имеем: $-2x = 4$, значит $x = -2$. Найденное значение x входит в рассматриваемый промежуток;

2) при $-1 \leq x < 5$ получаем уравнение: $(x+1) - (x-5) = 8$, то есть $x + 1 - x + 5 = 8$, тогда имеем: $6 = 8$, значит у этого уравнения нет решений.

3) при $x \geq 5$ получаем уравнение: $(x+1) + (x-5) = 8$, то есть $x + +1 + x - 5 = 8$, тогда имеем: $2x = 12$, значит $x = 6$. Найденное значение x входит в рассматриваемый промежуток.

Ответ: $x = -2, x = 6$» [29].

Кроме того, при решении уравнений с модулем можно использовать не только определение модуля.

Так, «уравнение $f(|x|) = g(x)$ равносильно совокупности двух систем (2.12):

$$1)\ \begin{cases} f(x) = g(x), \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad 2)\ \begin{cases} f(-x) = g(x), \\ x < 0. \end{cases} \qquad (2.12)$$

Рассмотрим уравнение вида: $|f(x)| = a.$ (2.13)

При $a < 0$ уравнение (2.13) решений не имеет;

при $a > 0$ уравнение (2.13) равносильно совокупности (2.14):

$$\left[\begin{array}{l} f(x) = a; \\ f(x) = -a; \end{array}\right. \qquad (2.14)$$

при $a = 0$ уравнение (2.13) равносильно уравнению $f(x) = 0$.

Кроме того, уравнение $|f(x)| = g(x)$ равносильно системе или совокупности (2.15 - 2.16):

$$|f(x)| = g(x) \leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x); \\ f(x) = -g(x); \end{array}\right. \end{cases} \qquad (2.15)$$

$$|f(x)| = g(x) \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}; \\ \begin{cases} f(x) \leq 0 \\ -f(x) = g(x) \end{cases}; \end{array}\right. \qquad (2.16)$$

Уравнение вида: $|f(x)| = |g(x)|$ равносильно совокупности уравнений:

$$|f(x)| = |g(x)| \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x); \\ f(x) = -g(x). \end{array}\right. \qquad (2.17)$$» [27].

Пример 16. Решить уравнение: $|x| = |2x - 5|$.

Решение. $|x| = |2x - 5| \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2x-5; \\ x = -(2x-5). \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2x-5; \\ x = -2x+5. \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5; \\ x = \frac{5}{3}. \end{array}\right.$

Ответ: $x = 5, x = \frac{5}{3}$.

Отметим, что *«неравенства, содержащие переменную под знаком модуля,* решаются по схемам, аналогичным решению уравнений с модулем» [28].

Рассмотрим неравенство вида: $|f(x)| \leq a.$ (2.18)

При $a < 0$ неравенство (2.18) решений не имеет;

при $a \geq 0$ неравенство (2.18) равносильно системе неравенств (2.19):

$$\begin{cases} f(x) \leq a; \\ f(x) \geq -a. \end{cases} \quad (2.19)$$

При решении неравенства вида: $|f(x)| \geq a$ (2.20)

Имеем, что при $a < 0$ решением неравенства (2.20) является любое x из области допустимых значений функции $f(x)$; при $a \geq 0$ неравенство (2.20) равносильно совокупности неравенств (2.21):

$$\left[\begin{array}{l} f(x) \geq a; \\ f(x) \leq -a. \end{array}\right. \quad (2.21)$$

Отметим, что «при решении неравенств вида $|f(x)| < a$ или $|f(x)| > a$ к равносильным системе или совокупности неравенств добавляется неравенство $|f(x)| \neq \pm a$.

Неравенство вида: $|f(x)| \leq g(x)$ равносильно системе неравенств (2.22):

$$|f(x)| \leq g(x) \leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) \leq g(x); \\ f(x) \geq -g(x). \end{cases} \quad (2.22)$$

Неравенство вида: $|f(x)| \geq g(x)$ равносильно совокупности неравенств (2.23):

$$|f(x)| \geq g(x) \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) \geq g(x); \\ f(x) \leq -g(x). \end{array}\right. \quad (2.23)$$

Неравенство вида: $|f(x)| \geq |g(x)|$ равносильно неравенству (2.24):

$$f^2(x) \geq g^2(x) \leftrightarrow \big(f(x) - g(x)\big)\big(f(x) + g(x)\big) \geq 0, \quad (2.24)$$

решается методом интервалов.

В ходе решения неравенств с модулем могут применяться следующие свойства (2.25 – 2.27):

$$a \leq |a| \quad (2.25)$$

$$|a + b| \leq |a| + |b| \quad (2.26)$$

$$|a - b| \geq |a| - |b| \quad (2.27)$$» [28].

Пример 17. Решить неравенство $|x - 3| < 4$.

Решение. Решением неравенства являются все значения x, которые удовлетворяют системе неравенств: $\begin{cases} x-3<4, \\ x-3>-4. \end{cases}$.

Имеем: $\begin{cases} x-3<4, \\ x-3>-4. \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x<7, \\ x>-1. \end{cases}$ Решением системы неравенств является: $x \in (-1{,}7)$. Ответ: $x \in (-1{,}7)$.

Пример 18. Решить неравенство: $|x^2-5x|>6$.

Решение. Данное неравенство раносильно совокупности двух неравенств:

$$|x^2-5x|>6 \ \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-5x<-6, \\ x^2-5x>6. \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-5x+6<0, \\ x^2-5x-6>0. \end{array}\right.$$

Необходимо решить каждое неравенство, тогда:

Решая неравенство $x^2-5x+6<0$, имеем: $(x-2)(x-3)<0$.

$(x^2-5x+6=0,$ $(x-2)(x-3)=0;$ $x_1=2, x_2=3)$.

Воспользуемся методом интервалов (рисунок 2.1):

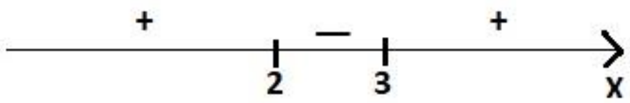

Рисунок 2.1 – Решение неравенства $x^2-5x+6<0$ методом интервалов

Решением неравенства $x^2-5x+6<0$ является промежуток $x \in (2,3)$. Решая неравенство $x^2-5x-6>0$, получим: $(x-6)(x+1)>0$.

Применим также метод интервалов (рисунок 2.2):

Рисунок 2.2 – Решение неравенства $x^2-5x-6>0$ методом интервалов

Решением неравенства $x^2-5x-6>0$ является промежуток:

$x \in (-\infty,-1) \cup (6;\ +\infty)$.

Таким образом, множеством решений исходного неравенства является объединение множеств: $x \in (-\infty,-1) \cup (2,3) \cup (6;\ +\infty)$.

Ответ: $x \in (-\infty,-1) \cup (2,3) \cup (6;\ +\infty)$.

Пример 19. Решить неравенство $|x-3|>x+1$, используя определение модуля.

Решение.

По определению модуля получим:

$$\begin{cases} x-3\ge 0, \\ x-3>x+1 \end{cases} \quad (1) \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} x-3<0, \\ -(x-3)>x+1. \end{cases} \quad (2)$$

Решим каждую систему неравенств:

$$\begin{cases} x\ge 3, \\ 0\cdot x>4 \end{cases} \quad (1) \quad \text{или} \quad \begin{cases} x<3, \\ x<1. \end{cases} \quad (2)$$

Система неравенств (1) не имеет решений, решением системы неравенств (2) является промежуток: $x\in(-\infty;1)$.

Объединив решения систем неравенств (1) и (2), получим решение исходного неравенства $|x-3|>x+1$, то есть $x\in(-\infty;1)$.

Ответ: $x\in(-\infty;1)$.

Пример 20. Найдите множество решений неравенства:

$$|x^2+3x-4|>|3x|.$$

Решение. Исходное неравенство равносильно неравенству:

$$(x^2+3x-4)^2>(3x)^2.$$

Имеем:
$$(x^2+3x-4)^2-(3x)^2>0,$$
$$(x^2+3x-4-3x)(x^2+3x-4+3x)>0,$$
$$(x^2-4)(x^2+6x-4)>0.$$

Решим уравнение: $x^2+6x-4=0$. Найдем: D = 36 + 52. Имеем:

$x_{1;2}=\dfrac{-6\pm 2\sqrt{13}}{2}$. Значит: $x_1=-3+\sqrt{13}$, $x_2=-3-\sqrt{13}$.

Тогда получим: $(x-2)(x+2)(x+3-\sqrt{13})(x+3+\sqrt{13})\succ 0.$

Решением исходного неравенства является промежуток (рисунок 2.3):
$x\in(-3-\sqrt{13};-2)\cup(-3+\sqrt{13};2).$

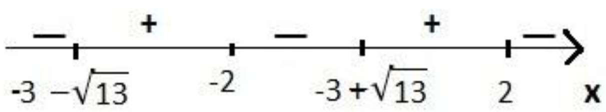

Рисунок 2.3 – Решение неравенства $|x^2 + 3x - 4| > |3x|$

Ответ: $x \in (-3-\sqrt{13};-2) \cup (-3+\sqrt{13};2)$.