Тема 6. Показательная функция. Логарифм. Логарифмическая функция. Область определения.

Понятие показательной функции.

Определение. Функция, заданная формулой $y = a^x$, $a > 0$, $\mathrm{a} \neq 1$ называется *показательной функцией с основанием a*.

Такое название она получила потому, что независимая переменная x стоит в показателе. Основание a – заданное число. Для положительного основания значение степени a^x можно найти для любого значения показателя x – и целого, и рационального, и иррационального, то есть для любого действительного значения.

Основные свойства показательной функции

1. Область определения: множество R действительных чисел.

2. Область значений: множество R+ всех положительных действительных чисел.

3. Монотонность: при $a > 1$ функция монотонно возрастает на всей числовой прямой; при $0 < a < 1$ функция монотонно убывает на множестве R.

4. Нули функции: так как основание $a > 0$, то ни при каких значениях переменной x функция не обращается в 0.

5. При любом значении a значение функции $y(0) = a^0 = 1$.

6. График функции (рисунок 6.1).

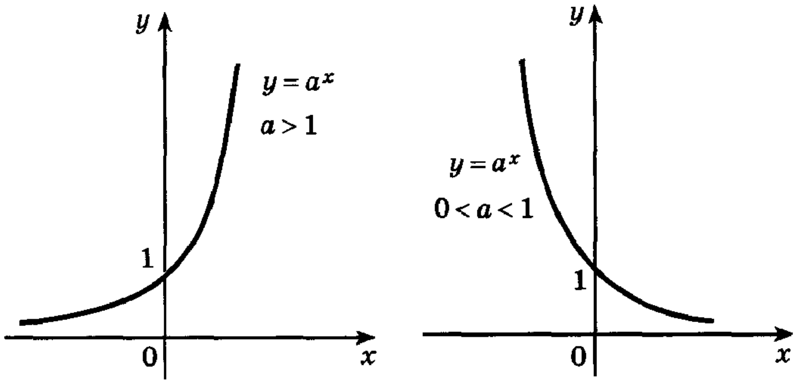

Рисунок 6.1 – Графики функций $y = a^x$.

Независимо от значения основания a график функции имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$. Для $0 < a < 1$ при x стремящемся к плюс бесконечности, для $a > 1$ при x стремящемся к минус бесконечности.

Пример 1. Постройте график функции $y = -3^x + 1$ и опишите все ее свойства.

Решение.

1. Область определения функции – любое действительное число.

2. Найдем множество значений функции: так как $3^x > 0$, то $-3^x < 0$, значит, $-3^x + 1 < 1$, то есть множество значений функции $y = -3^x + 1$ представляет собой промежуток (-∞; 1).

3. Так как функция у = 3^x монотонно возрастает, то функция $y = -3^x$ монотонно убывает. Значит, и функция $y = -3^x + 1$ также монотонно убывает.

4. Эта функция имеет нули функции: $-3^x + 1 = 0$, $3^x = 1$, $x = 0$.

5. Для этой функции (рисунок 6.2) горизонтальной асимптотой будет прямая *y = 1*.

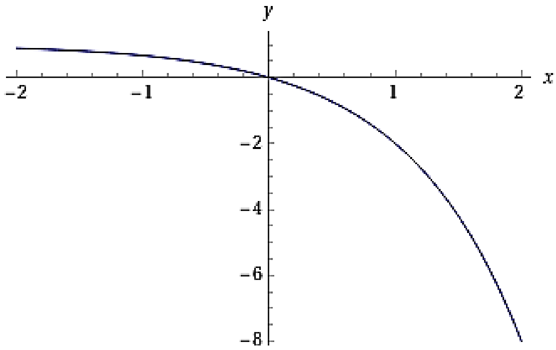

Рисунок 6.2 – График функции $y = -3^x + 1$.

Пример 2. Найдите множество значений функции $y = 3^{x+1} - 3$.

Решение. $3^{x+1} > 0$, то $3^{x+1} - 3 > -3$, то есть множество значений $(-3; +\infty)$.

Пример 3. Решите графически уравнение $3^x = 4 - x$.

Решение. Строим в одной системе координат графики функций $y = 3^x$, $y = 4 - x$. Графики функций (рисунок 6.3) пересекаются в точке x = 1.

Ответ: *x* = 1.

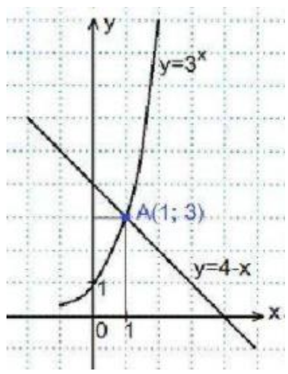

Рисунок 6.3 – Графики функций $y = 3^x$, $y = 4 - x$.

Определение логарифма.

Определение. Логарифмом положительного числа *b* по основанию *a*, $a > 0$, $a \neq 1$ называется показатель степени, в которую надо возвести число *a*, чтобы получить число *b*, то есть $\log_a b = c \rightarrow a^c = b$.

Пример 4. Вычислите $\log_3 216$.

Решение: $\log_3 216 = 3$, т.к. $6^3 = 216$.

Пример 5. Вычислите $\log_2 \frac{1}{8}$.

Решение: $\log_2 \frac{1}{8} = -3$, т.к. $2^{-3} = \frac{1}{2^{-3}} = \frac{1}{8}$.

Рассмотрим *основные свойства логарифмов.*

1. *Основное логарифмическое тождество:*

$a^{\log_a b} = b,\ a > 0,\ \ a \neq 1, b > 0$.

Пример 6. Вычислите $\frac{4^{\log_4 10}}{2}$.

Решение: $\frac{4^{\log_4 10}}{2} = \frac{10}{2} = 5$.

Пример 7. Вычислить $4^{-2\log_4 10}$.

Решение. $4^{-2\log_4 10} = \left(\ 4^{\log_4 10}\right)^{-2} = 10^{-2} = 0{,}01$.

Пример 8. Вычислить $4^{-2+\log_4 10}$.

Решение. $4^{-2+\log_4 10} = 4^{-2} \cdot 4^{\log_4 10} = \frac{1}{16} \cdot 10 = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$.

Пример 9. Вычислить $4^{-2-\log_4 10}$.

Решение. $4^{-2-\log_4 10} = \frac{4^{-2}}{4^{\log_4 10}} = \frac{1}{16} : 10 = \frac{1}{160}$.

2. *Логарифм произведения:* $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$, $\quad a > 0, a \neq 1$, $b > 0, c > 0$.

Пример 10. Вычислить $\log_2 16 + \log_2 32$.

Решение: $\log_2 16 + \log_2 32 = \log_2(2 \cdot 32) = \log_2 64 = 6$.

Пример 11. Вычислить $\log_3 6 + \log_3 \frac{3}{2}$.

Решение: $\log_3 6 + \log_3 \frac{3}{2} = \log_3 \left(6 \cdot \frac{3}{2}\right) = \log_3 9 = 2$.

3. *Логарифм частного:* $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c, a > 0, a \neq 1$,

$b > 0, c > 0$.

Пример 12. Вычислить $\log_5 75 - \log_5 3$.

Решение: $\log_5 75 - \log_5 3 = \ \log_5 \frac{75}{3} = \log_5 25 = 2$.

Пример 13. Вычислить $\log_8 10 - \log_8 15 + \log_8 12$.

Решение: $\log_8 10 - \log_8 15 + \log_8 12 = \log_8 \frac{10}{15} \cdot 12 = \log_8 8 = 1.$

4. Логарифм степени: $\log_a b^n = n \cdot \log_a |b|, a > 0, a \neq 1, b > 0.$

Пример 14. Вычислить $\log_3 \sqrt{3}$.

Решение: $\log_3 \sqrt{3} = \log_3 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_3 3 = \frac{1}{2} \cdot 1 = 0{,}5$

Пример 15. Вычислить $\frac{\log_3 25}{\log_3 5}$.

Решение: $\frac{\log_3 25}{\log_3 5} = \frac{\log_3 5^2}{\log_3 5} = \frac{2 \cdot \log_3 5}{\log_3 5} = 2.$

5. $log_{a^m} b = \frac{1}{m} log_a b, \quad a > 0, a \neq 1, b > 0.$

Пример 16. Вычислить $\log_{\sqrt[3]{13}} 13$.

Решение: $\log_{\sqrt[3]{13}} 13 = \log_{13^{\frac{1}{3}}} 13 = 3 \cdot \log_{13} 13.$

Пример 17. Вычислить $\log_{27} 243$.

Решение: $\log_{27} 243 = \log_{3^3} 3^5 = \frac{5}{3} \cdot \log_3 3 = \frac{5}{3}.$

6. Формула перехода к другому основанию $log_a b = \frac{log_c b}{log_c a}$*, где:*

$a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0, c \neq 1.$

Пример 18. Вычислить $\frac{\log_3 25}{\log_3 5}$.

Решение: $\frac{\log_3 25}{\log_3 5} = \log_5 25 = 2.$

7. Взаимообратный логарифм: $log_a b = \frac{1}{log_b a}$ *или* $log_a b \cdot log_b a = 1.$

Пример 19. Вычислить $\log_5 9 \cdot \log_3 25$

Решение: $\log_5 9 \cdot \log_3 25 = \log_5 3^2 \cdot \log_3 5^2 = 2 \cdot \log_3 5 \cdot 2 \cdot \log_5 3 =$
$= 4 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 3 = 4.$

Понятие логарифмической функции.

Определение. Функцию вида $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ называют *логарифмической функцией* с основанием *a*.

Основные свойства логарифмической функции

1. Область определения – множество R+ всех положительных чисел. Это следует из определения логарифма (так как логарифм существует только положительного числа!)

2. Множество значений логарифмической функции – множество R всех действительных чисел.

3. Неограниченная функция (следует напрямую из 2 свойства.)

4. Возрастающая, если *a* > 1, и убывающая, если $0 < a < 1$.

5. Нули функции: *x* = 1.

6. Промежутки знакопостоянства: если *a* > 0, то функция принимает положительные значение при *x > 1*, отрицательные при *0 < x < 1*. Если 0 < *a* < 1, функция принимает положительные значение при *0 < x < 1*, отрицательные при *x > 1*.

Из рассмотренных свойств логарифмической функции следует, что ее график располагается правее оси *OУ*, обязательно проходит через точку (1; 0) и имеет вид (рисунок 6.4):

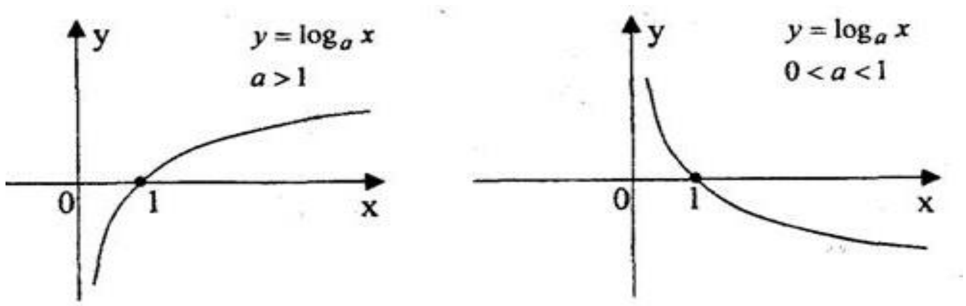

Рисунок 6.4 – Графики функций $y = \log_a x$.

Пример 20. Найдите область определения функции: $y = \log_2 3x + 1$

Решение: D(y) : $3x > 0$; $x > 0$. Ответ: D(y) = $(0; +\infty)$.

Пример 21. Найдите область определения функции: $y = \log_{0,5}(x^2 - 4)$

Решение: $(x^2 - 4) > 0$; $(x - 2)(x + 2) > 0$; $\left[\begin{array}{l} x < -2 \\ x > 2 \end{array}\right.$.

Ответ: D(y) = $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

Пример 22. Сравните числа $\log_2 \frac{1}{7}$ и -3 .

Решение. Представим число - 3 в виде логарифма по основанию 2:

$-3 = -3 \cdot \log_2 2 = \log_2(2)^{-3} = \log_2 \frac{1}{8}$. Получаем, что $y = \log_2 x$ - возрастающая функция, значит $\log_2 \frac{1}{7} > \log_2 \frac{1}{8}$, тогда $\log_2 \frac{1}{7} > -3$.

Пример 23. Решите графически уравнение $\log_2 x = 3 - x$.

Решение. Построим в одной системе координат две функции $y = \log_2 x$ и $y = 3 - x$. Найдем точки их пересечения (рисунок 6.5). Ответ: x = 2.

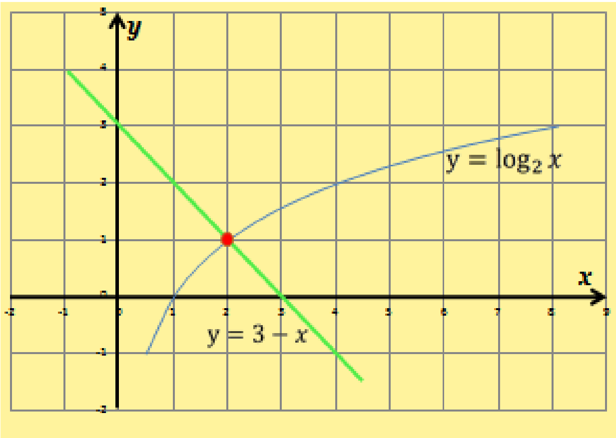

Рисунок 6.5 – Графики функций $y = \log_2 x$ и $y = 3 - x$.