Тема 12. Основные понятия и формулы для вычисления площадей и объемов многогранников и тел вращения.

При решении задач по данной теме рекомендуется использовать таблицы 12.1 - 12.2 [20].

Таблица 12.1 - Многогранники. Вычисление площадей и объемов многогранников.

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Площадь поверхности куба (S)	$S = 6a^2$	a – длина ребра куба
Площадь боковой поверхности прямой призмы ($S_{бок}$)	$S_{бок} = P \cdot h$	P – периметр основания h – высота (длина бокового ребра)
Площадь боковой поверхности наклонной призмы ($S_{бок}$)	$S_{бок} = P \cdot l$	P – периметр перпендикулярного сечения l – длина бокового ребра
Площадь боковой поверхности прямого параллелепипеда ($S_{бок}$)	$S_{бок} = P \cdot l$	P – периметр основания l – длина бокового ребра
Площадь боковой поверхности правильной пирамиды ($S_{бок}$)	$S_{бок} = \frac{1}{2} P \cdot a$ $S_{бок} = \frac{Q}{\cos\varphi}$	P – периметр основания a – апофема Q – площадь основания φ – величина двугранного угла при стороне основания
Площадь боковой поверхности	$S_{бок} = \frac{P + P_1}{2} \cdot h$	P, P_1 – периметры оснований

правильной усеченной пирамиды ($S_{бок}$)		h – апофема
Объем куба (V)	$V = a^3$	a – длина ребра куба
Объем прямоугольного параллелепипеда (V)	$V = a\,b\,c$	a, b, c – измерения параллелепипеда
Объем призмы (параллелепипеда) (V)	$V = S_{осн} \cdot h$, $V = Q \cdot l$	$S_{осн}$ – площадь основания h – высота Q – площадь перпендикулярного сечения l – длина бокового ребра

Продолжение Таблицы 12.1

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Объем пирамиды (V)	$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h$	$S_{осн}$ – площадь основания h – высота
Объем усеченной пирамиды (V)	$V = \frac{1}{3} h\,(Q_1 + \sqrt{Q_1 Q_2} + Q_2)$	Q_1, Q_2 – площади оснований h – высота
Отношение объемов тетраэдров $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, имеющих равные трехгранные углы с вершинами A и A_1	$\frac{V_{ABCD}}{V_{A_1B_1C_1D_1}} = \frac{AB \cdot AC \cdot AD}{A_1B_1 \cdot A_1C_1 \cdot A_1D_1}$	V_{ABCD} и $V_{A_1B_1C_1D_1}$ - объемы тетраэдров $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$

Таблицы 12.2 - Фигуры вращения

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Площадь боковой поверхности цилиндра ($S_{бок}$)	$S_{бок} = 2\pi R \cdot h$	R – радиус основания h – высота
Площадь полной поверхности цилиндра ($S_{полн}$)	$S_{полн} = 2\pi R(h + R)$	R – радиус основания h – высота
Площадь боковой поверхности конуса ($S_{бок}$)	$S_{бок} = \pi R l$	R – радиус основания l – длина образующей
Площадь полной поверхности конуса ($S_{полн}$)	$S_{полн} = \pi R(l + R)$	R – радиус основания l – длина образующей
Площадь боковой поверхности усеченного конуса ($S_{бок}$)	$S_{бок} = \pi l(R + r)$	R, r – радиусы оснований l – длина образующей
Площадь сферы (S)	$S = 4\pi R^2$	R – радиус сферы
Площадь сегментной поверхности (S)	$S = 2\pi R \cdot H$	R – радиус сферы H – высота сегментной поверхности
Площадь шарового пояса (S)	$S = 2\pi R \cdot H$	R – радиус шара H – высота шарового пояса

Продолжение Таблицы 12.2

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)

Площадь поверхности шарового сектора (S)	$S = \pi R \cdot (2h + \sqrt{2Rh - h^2})$	R – радиус шара h – высота шарового сегмента
Объем цилиндра (V)	$V = \pi R^2 \cdot H$	R – радиус основания H – высота
Объем конуса (V)	$V = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot H$	R – радиус основания H – высота
Объем усеченного конуса (V)	$V = \frac{1}{3} \pi H (r^2 + Rr + R^2)$	R, r – радиусы оснований H – высота
Объем шара (V)	$V = \frac{4}{3} \pi R^3$; $V = \frac{1}{6} \pi d^3$	R – радиус шара d – диаметр шара
Объем шарового слоя (V)	$V = \frac{\pi H}{6} (3r_1^2 +$ $+ 3r_2^2 + H^2)$	r_1, r_2 – радиусы оснований шарового слоя H – высота
Объем шарового сегмента (V)	$V = \pi H^2 (R - \frac{H}{3})$ $V = \frac{\pi H}{6} (3r^2 + H^2)$	R – радиус шара H – высота r – радиус основания шарового сегмента
Объем шарового сектора (V)	$V = \frac{2}{3} \pi R^2 \cdot H$	R – радиус шара H – высота

Далее подробнее рассмотрим основные понятия и формулы по теме «Фигуры вращения. Вычисление площадей и объемов тел вращения», которая вызывает наибольшие затруднения у школьников.

Цилиндр и его свойства.

Определение. «Тело, которое образуется при вращении прямоугольника вокруг прямой, содержащей его сторону, называется цилиндром.

Напомним, что *любое сечение цилиндра*, перпендикулярное его оси, есть *круг*, а такое же *сечение боковой поверхности цилиндра – окружность*; центры этих окружностей и кругов – точки пересечения секущих плоскостей и оси цилиндра. *Осевым сечением цилиндра* вращения является прямоугольник, стороны которого равны диаметру основания и образующей цилиндра. Цилиндр, осевое сечение которого – квадрат, называют *равносторонним цилиндром*.

Для построения изображения *правильной призмы, вписанной в цилиндр* следует: 1) построить изображение цилиндра; 2) построить изображение правильного многоугольника, вписанного в верхнее основание цилиндра; 3) через вершины построенного многоугольника провести образующие цилиндра; 4) в нижнем основании цилиндра последовательно соединить штриховыми линиями концы этих образующих; 5) выделить видимые и невидимые линии (отрезки) изображаемых фигур» [23].

Площади боковой и полной поверхностей цилиндра вычисляются по формулам: $S_{бок} = 2\pi Rh$, $S_{полн} = 2\pi R(R + h)$; *объем цилиндра* - $V_{цил.} = \pi \cdot R^2 \cdot h$.

Приведем *понятие призмы, вписанной в цилиндр,* и рассмотрим решение соответствующей задачи.

Определение. «Призма называется *вписанной в цилиндр*, если основания призмы вписаны в основания цилиндра. Отметим, что цилиндр в этом случае называют *описанным около призмы*.

Боковые ребра призмы соединяют соответственные вершины ее оснований, вписанных в основания цилиндра. Эти вершины лежат на окружностях оснований цилиндра. Образующие цилиндра соединяют соответственные точки окружностей его оснований и параллельны боковым ребрам призмы. Следовательно, *боковые ребра вписанной в цилиндр призмы – образующие цилиндра»* [26].

Задача 1. «Около правильной четырехугольной пирамиды, каждое ребро которой равно 10, описан цилиндр так, что все вершины пирамиды находятся на окружностях оснований цилиндра. Найдите *объем и площадь боковой поверхности цилиндра*.

Решение. Пусть вершина P данной пирамиды PABCD лежит на окружности нижнего основания описанного около этой пирамиды цилиндра, центрами оснований которого служат точки O и O_1 (рисунок 12.1).

Так как каждое ребро пирамиды равно 10, то в правильном ΔABP находим PH = $\frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$, тогда: OH= $\frac{1}{3}$ PH = $\frac{5\sqrt{3}}{3}$; OP = $\frac{2}{3}$ PH = $\frac{10\sqrt{3}}{3}$. Радиус R основания цилиндра равен OP, т.е. R = $\frac{10\sqrt{3}}{3}$.

Если точки H и M – середины противоположных сторон соответственно AB и CD квадрата ABCD (основания данной пирамиды), то MH = 10, причем середина *K* отрезка HM является серединой высоты OO_1 цилиндра. Так как плоскость MPH перпендикулярна плоскости основания цилиндра и проходит

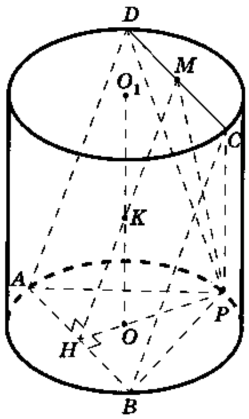

Рисунок 12.1

через центр O его основания, то высота OO_1 цилиндра лежит в этой плоскости, и OO_1 = 2OK. Находим OK.

В прямоугольном ΔHOK имеем: OK = $\sqrt{HK^2 - OH^2}$ = $= \sqrt{25 - \frac{25}{3}} = \sqrt{\frac{50}{3}} = \frac{5\sqrt{6}}{3}$. Поэтому $OO_1 = 2\cdot\frac{5\sqrt{6}}{3} = \frac{10\sqrt{6}}{3}$.

Тогда площадь боковой поверхности цилиндра равна $2\pi\cdot R\cdot OO_1 = =2\pi\cdot\frac{10\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{10\sqrt{6}}{3} = \frac{200\pi\sqrt{2}}{3}$ (кв.ед.), его объем равен $\pi\cdot R^2\cdot OO_1 = \pi\cdot(\frac{10\sqrt{3}}{3})^2\cdot\frac{10\sqrt{6}}{3} = \frac{1000\pi\sqrt{6}}{9}$ (куб.ед.)» [23].

Ответ: $\frac{200\pi\sqrt{2}}{3}$ (кв.ед.). $\frac{1000\pi\sqrt{6}}{9}$ (куб.ед.).

Конус и его свойства.

Определение. «*Конус* – это тело, которое образуется при вращении прямоугольного треугольника вокруг прямой, содержащей его катет. Отрезок оси вращения, заключенный внутри конуса, называется *осью конуса.*

Поверхность, полученная при вращении гипотенузы, называется *боковой поверхностью конуса,* а ее площадь *– площадью боковой поверхности конуса.* Объединение боковой поверхности конуса и его основания называется *полной поверхностью конуса*, а ее площадь называется *площадью полной поверхности конуса* или, короче, *площадью поверхности конуса*.

Напомним, что: а) все осевые сечения конуса – равные равнобедренные треугольники; б) угол при вершине любого из этих треугольников называют углом при вершине осевого сечения конуса; в) конус, в осевом сечении которого правильный треугольник, называется равносторонним; г) если секущая плоскость проходит через вершину конуса (но не содержит его ось) и пересекает основание конуса, то в сечении конуса этой плоскостью также получается равнобедренный треугольник.

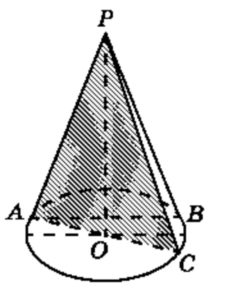

Рисунок 12.2

Для изображения конуса достаточно построить: 1) эллипс, изображающий окружность основания конуса; 2) центр O этого эллипса (рисунок 12.2); 3) отрезок OP, перпендикулярный плоскости основания и изображающий высоту конуса; 4) касательные прямые PA и PB из точки P к эллипсу (A и B – точки касания; касательные PA и PB проводят с помощью линейки на глаз). При этом, необходимо обратить особое внимание на следующий важный факт: отрезок AB, соединяющий точки касания образующих PA и PB к эллипсу, ни в коем случае не является диаметром эллипса, т. е. отрезок AB не содержит центра O эллипса. Следовательно, ΔABP – не осевое сечение конуса. Осевым же сечением конуса является Δ ACP, где отрезок AC проходит через центр O эллипса (при этом, образующая PC не является касательной к эллипсу). Для достижения наглядности изображения невидимую часть эллипса изображают штрихами.

Площадь боковой поверхности конуса находится как площадь ее развертки и вычисляется по формуле: $S_{бок} = \pi \cdot R \cdot l$ [20].

Рассмотрим *понятие правильной пирамиды, вписанной в конус*. Отметим, что «для построения *изображения правильной пирамиды, вписанной в конус*, следует: 1) построить изображение конуса; 2) построить изображение правильного многоугольника, вписанного в основание конуса; 3) через вершины построенного многоугольника провести образующие конуса - боковые ребра пирамиды; 4) выделить видимые и невидимые линии изображенных фигур. При этом высота этой правильной пирамиды проходит через центр окружности, описанной около ее основания, и расположена на прямой пересечения биссекторных плоскостей двугранных углов при ее боковых ребрах» [23].

Объем конуса вычисляется по формуле: $V_{конуса} = \frac{1}{3}\pi\cdot R^2\cdot h$.

Шар. Сфера.

Определения. «*Шаром* называется множество всех точек пространства, находящихся от данной точки на расстоянии, не большем данного R ($R > 0$). Эта точка называется *центром шара*, а данное расстояние *R – радиусом шара*.

Сферой называется множество всех точек пространства, находящихся от данной точки на расстоянии, равном данному R. Данные точка и расстояние *R* называются соответственно *центром* и *радиусом сферы*.

Радиусом шара называют также всякий отрезок, соединяющий центр шара с точкой шаровой поверхности. Отрезок, соединяющий две точки шаровой поверхности и проходящий через центр шара, называется *диаметром шара*. Концы любого диаметра шара называются *диаметрально противоположными точками шара*. Отрезок, соединяющий две любые точки шаровой поверхности и не являющийся диаметром шара, называют *хордой шара (сферы). Шар – тело вращения, сфера- поверхность вращения*.

Сечением шара плоскостью, перпендикулярной его оси вращения *l* и пересекающей шар, является *круг*, а сечением сферы такой плоскостью – *окружность этого круга*; *центр круга (окружности)* есть точка пересечения секущей плоскости с осью *l*.

Плоскость, проходящая через центр шара (сферы), называется *диаметральной плоскостью шара* (*сферы*). Сечением шара диаметральной плоскостью является круг, радиус которого равен радиусу шара. Такой круг называется *большим кругом*, а его окружность – *большой окружностью*, большая окружность является пересечением сферы и ее диаметральной плоскости. Отметим, что если *сечение сферы диаметральной плоскостью* изображено в виде эллипса, то концы диаметра сферы, перпендикулярного этой плоскости, находятся не на окружности (абрисе), «изображающей» сферу, а внутри круга этой окружности, причем положение концов этого диаметра зависит от формы эллипса» [20].

Необходимо знать, что:

1) «если расстояние d от центра шара (сферы) до данной плоскости:

– *меньше* радиуса *R* шара (сферы), то пересечением шара (сферы) с плоскостью является круг (окружность). *Центром этого круга* (этой окружности) является основание перпендикуляра, проведенного из центра шара (сферы) на данную плоскость, или сам центр шара (сферы), если плоскость проходит через этот центр. Для радиуса *r* сечения выполняется: $r = \sqrt{R^2 - d^2}$;

– *равно* радиусу *R* шара (сферы), то плоскость имеет с шаром (сферой) только одну общую точку и является касательной к сфере в этой точке.

2) *если расстояние от центра шара (сферы) до данной плоскости больше* радиуса *R* шара (сферы), то плоскость не имеет с шаром (сферой) общих точек;

3) *для шара (сферы) выполняются следующие метрические соотношения*:

– диаметр шара (сферы), делящий его хорду пополам, перпендикулярен этой хорде;

– отрезки всех касательных прямых, проведенных к шару из одной расположенной вне шара точки, равны между собой (они образуют поверхность конуса с вершиной в данной точке, а точки касания этих прямых - окружность основания этого конуса);

– произведение длин отрезков хорд шара, проходящих через одну и ту же внутреннюю точку шара, есть величина постоянная (равная R^2 - a^2, где R – радиус шара, a – расстояние от центра шара до данной точки);

– если из одной и той же точки вне шара проведены к нему секущая и касательная, то произведение длины отрезка всей секущей на длину отрезка её внешней части равно квадрату длины отрезка касательной (и равно a^2 - R^2, где R – радиус шара, a – расстояние от центра шара до данной точки)» [23].

Задача 2. «Сфера радиуса *r* касается двух взаимно перпендикулярных плоскостей. Найдите радиус наименьшей сферы, касающейся этих двух плоскостей и данной сферы» [26].

Решение. Пусть точка A – центр данной сферы радиуса *r*, касающейся двух взаимно перпендикулярных плоскостей, точка B – центр наименьшей сферы, касающейся этих двух плоскостей и данной сферы, C – точка касания этих сфер. Центры A и B принадлежат биссектору данного двугранного угла.

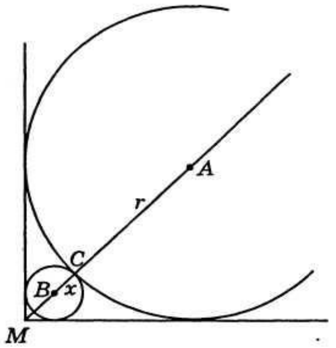

Рисунок 12.3

На рисунке 12.3 изображено сечение рассматриваемых сфер и двугранного угла плоскостью, проходящей через центры A и B этих сфер перпендикулярно ребру двугранного угла (M – точка пересечения этого ребра и плоскости сечения).

Если BC = *x* – длина искомого радиуса, то имеем: AM = $r\sqrt{2}$, BM = $x\sqrt{2}$. Тогда AM – BM = AC + CB или $r\sqrt{2} - x\sqrt{2}$ = *r* + *x*, откуда: $x(\sqrt{2}+1) = r(\sqrt{2}-1) \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} r = r(3-2\sqrt{2})$. Ответ: $r(3-2\sqrt{2})$.

Сфера и три взаимно перпендикулярные плоскости.

Известно, что при решении *задач на комбинации сферы с кубом и прямоугольным параллелепипедом* часто используют определенные соотношения: если сфера радиуса *r* вписана в трехгранный угол, все плоские углы которого прямые, то для расстояния *m* от центра сферы до ребра трехгранного угла справедливо: *m* = $r\sqrt{2}$, а для расстояния *d* от центра этой сферы до вершины трехгранного угла выполняется: *d* = $r\sqrt{3}$ » [23].

Рассмотрим решение некоторых задач.

Задача 3. «Сфера радиуса *r* касается каждой из трех попарно перпендикулярных плоскостей. Найдите радиус сферы, касающейся этих трех плоскостей и данной сферы» [26].

Решение. Пусть A – общая точка трех данных плоскостей, точка B - центр сферы ω радиуса *r*, O и *R* – соответственно центр и радиус сферы ω_1, касающейся этих трех плоскостей и сферы ω.

Возможны два случая: 1) сфера ω_1 расположена между сферой ω и точкой A; 2) сфера ω расположена между сферой ω_1 и точкой A.

Случай 1*.* Пусть C – точка касания сфер. Тогда: AO = $R\sqrt{3}$, AB = $r\sqrt{3}$, OC= R, BC = *r*. Так как OB = OC + BC = AB – OA, то $r\sqrt{3}$ – $R\sqrt{3}$ = *r* + *R* или R($\sqrt{3}+1) = r(\sqrt{3}-1)$, откуда *R* = $\frac{r(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}+1} = r(2-\sqrt{3}).$

Случай 2*.* Пусть K – точка касания сфер. Тогда: AO = $R\sqrt{3}$, AB = $r\sqrt{3}$, OK= *R*, BK = *r*. Так как OB = OK + BK = OA – AB, то $R\sqrt{3}$ – $r\sqrt{3}$ = *r* + *R* или

R$(\sqrt{3}-1) = r(\sqrt{3}+1)$, откуда *R* = $\frac{r(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}-1} = r(2+\sqrt{3}).$ Ответ: $r(2-\sqrt{3});\ r(2+\sqrt{3}).$

Задача 4. «Сфера с центром H радиуса 6 касается всех сторон квадрата ABCD. Чему равно расстояние от центра сферы до плоскости квадрата, если его сторона равна 6» [26].

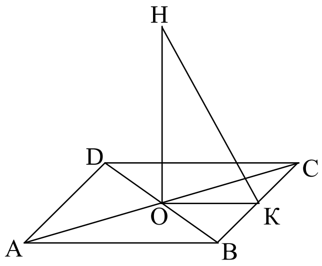

Рисунок 12.4

Решение. Так как сфера касается всех сторон квадрата ABCD, то ее пересечением с плоскостью квадрата является окружность с центром O = AC ∩ BD (рисунок 12.4), вписанная в этот квадрат, при этом OH $\perp$ (ABC). Тогда точками касания сферы со сторонами квадрата являются середины его сторон – точки касания вписанной в квадрат окружности.

Пусть точка K – середина стороны BC данного квадрата, значит, K – точка касания сферы с этой стороной.

Так как касательная к окружности перпендикулярна ее радиусу, проведенному в точку касания, то OK $\perp$ BC, откуда HK $\perp$ BC (по теореме о трех перпендикулярах), при этом HK = 6 – радиус сферы, OK = 3 - радиус окружности сечения сферы. В прямоугольном ΔHOK находим искомое расстояние: OH = $\sqrt{HK^2 - OK^2}$ = $\sqrt{6^2 - 3^2}$ =$3\sqrt{3}$. Ответ: $3\sqrt{3}$.

Задача 5. «Сфера с центром H касается всех сторон правильного треугольника ABC. Чему равен радиус сферы, если расстояние от ее центра до плоскости треугольника равно $2\sqrt{6}$, а сторона треугольника равна 12» [26].

Решение. Пусть AK, BT – медианы правильного треугольника ABC (рисунок 12.5); O = AK ∩ BT. Так как сфера касается всех сторон правильного треугольника ABC, то ее пересечением с плоскостью этого треугольника является окружность с центром в точке O, вписанная в него, при этом OH $\perp$ (ABC). Значит, точки касания сферы со сторонами треугольника - середины его сторон – точки касания вписанной в треугольник окружности.

Точка К – середина стороны ВС треугольника АВС и является точкой касания вписанной в него окружности, значит, точкой касания сферы с этой стороной. Поэтому отрезок НК – радиус нашей сферы. Найдем радиус НК.

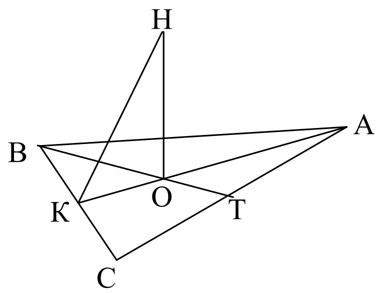

Рисунок 12.5

В прямоугольном ΔКОН с катетами ОН = $2\sqrt{6}$ и ОК = $2\sqrt{3}$ находим: НК = $\sqrt{OH^2 + OK^2}$ = = $\sqrt{(2\sqrt{6})^2 + (2\sqrt{3})^2}$ = 6. Ответ: 6.

Задача 6. «Сфера с центром Н касается всех сторон правильного шестиугольника ABCDEF. Чему равен радиус сферы, если расстояние от ее центра до плоскости шестиугольника равно $4\sqrt{6}$, а сторона шестиугольника равна 8» [26].

Решение. Так как сфера касается всех сторон правильного шестиугольника ABCDEF, то ее пересечением с плоскостью этого шестиугольника является окружность с центром О = FC ∩ BE (рисунок 12.6), вписанная в этот шестиугольник, при этом ОН $\perp$ (АВС). Тогда точками касания сферы со сторонами шестиугольника являются середины его сторон – точки касания вписанной в шестиугольник окружности.

Пусть точка К – середина стороны ВС шестиугольника ABCDEF, значит, К – точка касания сферы с этой стороной, а отрезок НК – радиус сферы. Так как ОН = $4\sqrt{6}$ – расстояние от центра сферы до плоскости шестиугольника, ОК = $4\sqrt{3}$ - радиус окружности сечения сферы,

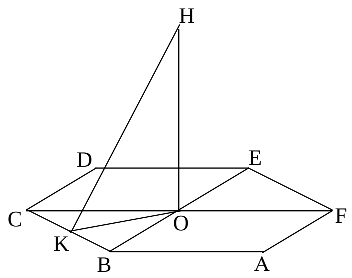

Рисунок 12.6

то в прямоугольном ΔНОК находим радиус НК сферы: НК = $\sqrt{OH^2 + OK^2}$ = = $\sqrt{(4\sqrt{6})^2 + (4\sqrt{3})^2}$ =12. Ответ: 12.

Задача 7. «$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб с ребром 12. Сфера с центром O касается всех ребер этого куба. Найдите: а) положение центра O сферы; б) радиус сферы; в) расстояния от центра сферы до вершины, грани и ребра куба» [26].

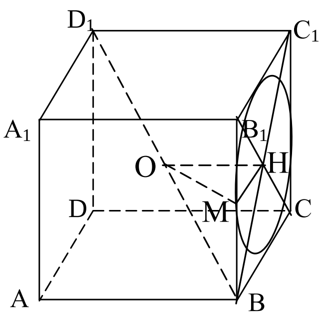

Рисунок 12.7

Решение. Сфера с центром O касается всех ребер куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, поэтому ее пересечением с гранями куба являются равные окружности, вписанные в его грани – равные квадраты (рисунок 12.7). Значит центр O сферы равноудален от всех граней куба, следовательно, совпадает с его центром –точкой пересечения диагоналей куба.

Пусть точка H – центр окружности пересечения сферы с гранью BCC_1B_1, M – точка касания этой окружности с ребром BB_1.Тогда: MH = 6 – радиус этой окружности; $OH \perp (B_1BC)$, OH = $\frac{1}{2}$AB = 6 – *расстояние от центра O сферы до грани куба.*

Радиус OM сферы (M – точка касания сферы с ребром куба, значит, точка сферы) находим в прямоугольном ΔOMH: OM = $\sqrt{OH^2 + MH^2}$ = = $\sqrt{6^2+6^2}$ = $6\sqrt{2}$. Так как $OM \perp BB_1$ (по теореме о трех перпендикуляров), то OM = $6\sqrt{2}$ – *расстояние от центра сферы до ребра куба.*

Расстояние OB от центра сферы до вершины данного куба равно половине его диагонали BD_1, то есть *равно* $\frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$.

Ответ: центр сферы - центр куба; $6\sqrt{2}$ - радиус сферы; 6 - расстояние от центра сферы до грани куба; $6\sqrt{3}$ - расстояние от центра сферы до вершины куба; $6\sqrt{2}$ – расстояние от центра сферы до ребра куба.

Задача 8. «В куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ помещены два касающиеся друг друга равных шара. При этом первый шар касается всех граней куба, содержащих вершину A, второй - всех граней куба, содержащих вершину C. Найдите радиусы этих шаров, если ребро куба равно 17» [26].

Решение. Обозначим: R – радиус данных шаров ω_1 и ω_2. Пусть точки $T \in AC_1$ и $K \in CA_1$ – их центры; H и M – точки касания данных шаров с гранью ABCD куба (рисунок 12.8), тогда $KM \perp (ABC)$, $TH \perp (ABC)$ (как радиусы, проведенные в точки касания).

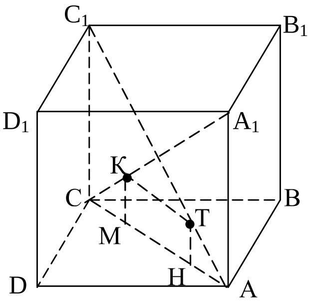

Рисунок 12.8

Так как $(AA_1C) \perp (ABC)$ (по признаку перпендикулярности двух плоскостей) и $K \in (AA_1C)$, $T \in (AA_1C)$, то $H \in AC$ и $M \in AC$, где AC = $(AA_1C) \cap (ABC)$. Тогда AH + HM + + MC = AC = $17\sqrt{2}$, при этом MH = KT = 2R (расстояние между центрами данных касающихся шаров).

Ввиду того, что AT = CK = $R\sqrt{3}$, TH = KM = R, то AH = MC = $R\sqrt{2}$. Значит: 2$R\sqrt{2}$ + 2R =$17\sqrt{2}$, откуда $R = \dfrac{17\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}+1)}$ = $\dfrac{17(2-\sqrt{2})}{2}$ = $8{,}5\cdot(2-\sqrt{2})$. Ответ: $8{,}5\cdot(2-\sqrt{2})$.

Используемая и рекомендуемая литература

1. Атанасян Л.С. Геометрия, 7-9: учеб. для общеобразоват. учрежд. / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. – 15-е изд. - М.: Просвещение, 2005. - 384 с.

2. Балаян Э.Н. Репетитор по математике для старшеклассников и поступающих в вузы: задачи трех уровней сложности (типа А, В, С), 1000 задач с решениями, 3000 задач для самостоятельного решения, олимпиадные задачи, тесты для подготовки к ЕГЭ / Э. Н. Балаян. - 8-е изд., перераб. и доп. - Ростов-на-Дону: Феникс, 2010. - 763, [1] с.: ил.; 21 см. - (Абитуриент).

3. Бахтина Т.П. Математика. Подготовка к централизованному тестированию «с нуля» / Т.П. Бахтина, С.А. Барвенов. - 2-е изд. - Минск: Издательство «ТетраСистемс», 2011. – 288 с.

4. Берникова И.К. Математика для гуманитариев [Электронный ресурс]: учеб.-метод. пособие / И.К. Берникова, И.А. Круглова. - Омск: Изд-во Ом. гос. ун-та, 2016. - 200 с.

5. Веременюк В.В. Тренажер по математике для подготовки к централизованному тестированию и экзамену / В.В. Веременюк. - 3-е изд. - Минск: Тетралит, 2019. - 176 с/

6. Грес П.В. Математика для бакалавров [Электронный ресурс]: универсальный курс для студентов гуманит. направлений: [учеб. пособие] / П.В. Грес. - [Изд. 2-е, перераб. и доп.]. - Москва: Логос, 2015. - 288 с.: ил.

7. Жафяров А.Ж. Профильное обучение математике старшеклассников: учебно-дидактический комплекс / А.Ж. Жафяров. — Новосибирск: Сибирское университетское издательство, 2017. — 468 с.

8. Казиев В.М. Введение в математику [Электронный ресурс]: учеб. пособие / В. М. Казиев. - 2-е изд., испр. - Москва: ИНТУИТ, 2016. - 197 с. - (Основы информационных технологий).

9. Кытманов А.М. Математика [Электронный ресурс]: адаптационный курс: учеб. пособие / А.М. Кытманов, Е.К. Лейнартас, С.Г. Мысливец. - Санкт-Петербург: Лань, 2013. - 287 с.: ил. - (Учебники для вузов. Специальная литература).

10. Лисичкин В. Т. Математика в задачах с решениями: учебное пособие / В.Т. Лисичкин, И.Л. Соловейчик. - 7-е изд., стер. - Санкт-Петербург: Лань, 2020. - 464 с.

11. Математика. Адаптационный курс: учеб. пособие / ЗЕНШ при СФУ; сост.: А.М. Кытманов, Е.К. Лейнартас, С.Г. Мысливец. - Красноярск ИПК СФУ, 2009. - 196 с.

12. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы: учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин и др.- М.: Просвещение, 2015. - 463 с.

13. Математика [Электронный ресурс]: учебник / М. С. Ананьева [и др.]. - Пермь : Пермский гос. гуманит.-пед. ун-т, 2014. - 172 с.

14. Меняйлов А. И. Математический практикум [Электронный ресурс]: учеб. пособие для вузов / А. И. Меняйлов, М. А. Меняйлова. - Москва: Акад. проект, 2016. - 191 с. - (Gaudeamus).

15. Миронова С.В. Практикум по решению задач школьной математики: применение Web-квест технологии [Электронный ресурс]: учеб.-метод. пособие / С.В. Миронова, С.В. Напалков. - Изд. 2-е, перераб. - Санкт-Петербург: Лань, 2018. - 120 с.: ил. - (Учебники для вузов. Специальная литература).

16. Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа. 10-11 кл.: учеб. для общеобразоват. учреждений / А. Г. Мордкович. - 2-е изд. – М..: Мнемозима, 2001. - 335 с.

17. Потоскуев Е.В. В единстве логической и графической культуры залог решения геометрических задач / Е.В. Потоскуев // Математическое образование. – 2012. - №1(61). – С. 30-40.

18. Потоскуев Е.В., Звавич Л.И. Геометрия. 10 кл.: учебник для общеобразовательных учреждений с углубленным и профильным изучением математики. – М.: Дрофа, 2003-2012.

19. Потоскуев Е.В., Звавич Л.И. Геометрия. 10 кл.: задачник для общеобразовательных учреждений с углубленным и профильным изучением математики. – М.: Дрофа, 2003-2012.

20. Потоскуев Е. В., Звавич Л. И. Геометрия. 11 кл.: учебник для общеобразовательных учреждений с углубленным и профильным изучением математики. – М.: Дрофа, 2003-2012.

21. Потоскуев Е.В., Звавич Л.И. Геометрия. 11 кл.: задачник для общеобразовательных учреждений с углубленным и профильным изучением математики. – М.: Дрофа, 2003-2012.

22. Потоскуев Е.В. Методическое пособие к учебнику Е.В. Потоскуева, Л.И. Звавича «Геометрия. 10 класс» / Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич, Л.Я. Шляпочник. – М.: Дрофа, 2004. – 224 с.

23. Потоскуев Е.В. Методическое пособие к учебнику Е.В. Потоскуева, Л.И. Звавича «Геометрия. 11 класс» / Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич, Л.Я. Шляпочник. – М.: Дрофа, 2005. – 220 с.

24. Потоскуев Е.В., Звавич Л.И. Математика. Алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10 кл. Углублённый уровень. Учебник. – М.: Дрофа, 2014.

25. Потоскуев Е.В., Звавич Л.И. Математика. Алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10 кл. Углублённый уровень. Задачник. – М.: Дрофа, 2014.

26. Потоскуев Е.В., Звавич Л.И. Геометрия. 11 кл.: учебник для общеобразовательных учреждений с углубленным и профильным изучением математики. – М.: Дрофа, 2014.

27. Потоскуев Е.В., Звавич Л.И. Геометрия. 11 кл.: задачник для общеобразовательных учреждений с углубленным и профильным изучением математики. – М.: Дрофа, 2014.

28. Решение задач по математике. Адаптивный курс для студентов технических вузов: учебное пособие / В.В. Гарбарук, В.И. Родин, И.М. Соловьева, М.А. Шварц. - 2-е изд., стер. - Санкт-Петербург: Лань, 2018. - 688 с.

29. Симонов А.Я. Система тренировочных задач и упражнений по математике / А.Я. Симонов, Д.С. Бакаев, А.Г. Эпельман и др. – М.: Просвещение, 1991. – 208 с.

30. Стойлова Л.П. Теоретические основы начального курса математики: учебн. пос. – М.: Издат. центр «АКадемия», 2014. – 272 с.

31. Турецкий В. Я. Математика и информатика: учеб. пособие для студ. вузов, обуч. по гуманит. направлениям и спец./ В.Я. Турецкий. - 3-е изд., перераб. и доп. - Москва: ИНФРА-М, 2010. - 558 с. (Высшее образование). - Библиогр.: с. 557-558.

32. Федеральный институт педагогических измерений. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://fipi.ru/.

33. Шипачев В. С. Начала высшей математики [Электронный ресурс]: учеб. пособие / В.С. Шипачев. - Изд. 5-е, стер. - Санкт-Петербург: Лань, 2013. - 382 с. (Учебники для вузов. Специальная литература).

34. Элементарная математика в помощь высшей [Электронный ресурс]: учеб. пособие / сост. И. К. Берникова, И. А. Круглова. - Омск: Изд-во Ом. гос. ун-та, 2016. - 118 с.

35. Элементарная математика: Арифметика. Алгебра. Тригонометрия [Электронный ресурс]: учеб. пособие / авт.-сост. В. П. Краснощекова [и др.]; Пермский гос. гуманит.-пед. ун-т. - Пермь: ПГГПУ, 2014. - 131 с.

36. Ященко И.В. ОГЭ 2017. Математика 9 класс. 3 модуля. Основной государственный экзамен. 30 вариантов типовых тестовых заданий / И.Р. Высоцкий, Л.О. Рослова, Л.В. Кузнецова и др.; под ред. И.В. Ященко. – М.: Издательство «Экзамен», МЦНМО, 2017. – 167 с.