3 слайд

1.1. Модуль 1. Методы проецирования

В этом модуле вы познакомитесь с понятием «несобственные элементы». Точки, прямые, плоскости, упрощающие решение многих задач, – это и есть несобственные элементы. Здесь же вы рассмо́трите центральное, параллельное и ортогональное проецирование, а также аппарат проецирования и метод Монжа. И ещё нау́читесь проецировать точку и линию.

Первые попытки построения проекционных изображений предпринимались в далеком прошлом. Еще в Древнем Египте при возведении сооружений применялись планы и фасады, то есть использовались горизонтальные и фронтальные проекции предметов, но без проекционной связи. Накопленные знания по теории и практике изображения систематизировал и обобщил французский ученый **Гаспар Монж**. Работа Монжа «Начертательная геометрия» была опубликована в 1795 году как учебное пособие.

В России курс начертательной геометрии впервые начал читать в 1810 году Потье, ученик Монжа. В 1812 году вышел в свет первый в России оригинальный курс начертательной геометрии Севастьянова. Большой вклад в развитие этой дисциплины внесли профессора Макаров, Курдюмов, Рынин, Котов, Кузнецов и другие.

В курсе элементарной геометрии изучается трехмерное пространство. Оно названо евклидовым по имени греческого ученого Евклида, описавшего его основные свойства и закономерности. Однако положений евклидовой геометрии недостаточно для выполнения некоторых операций проецирования.

Развитие науки привело к расширению понятия «пространство». Вселенная представляется теперь состоящей из искривленных пространств. Это позволило дополнить привычное для нас евклидово пространство новыми элементами – бесконечно удаленной точкой, прямой, плоскостью. Чтобы получить соответствующие элементы при выполнении операции проецирования, достаточно понимать, что две параллельные прямые считались пересекающимися. Точку их пересечения называют несобственной точкой или бесконечно удаленной. Это понятие было введено в 1636 году французским математиком Жаном Дезаргом, математическое доказательство позже выполнил Лобачевский. Несобственные элементы позволяют создать более строгую теорию метода проецирования.

На этом слайде внимательно рассмотри́те аппарат проецирования, обозначение всех элементов: $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один] – плоскость проекций или картинная плоскость, ***S*** – центр проецирования, ***A*** – точка в пространстве или оригинал, A_1 – проекция точки на плоскость проекций, $\boldsymbol{l_A}$ [эль а] – проецирующий луч.

Спецификой курса начертательной геометрии является то, что изучение ведется на абстрактных геометрических фигурах: точка, линия, плоскость, поверхность. Будут изучаться принципы построения изображений этих фигур на плоскости. Прежде всего дадим определения простейшим геометрическим фигурам – точке и линии.

Точка – это нульмерная геометрическая фигура, неделимый элемент пространства, то есть она не может быть определена другими, более элементарными понятиями. Точка обозначается прописными буквами латинского алфавита или цифрами. Она не имеет размеров. То, что мы показываем на чертеже точку в виде какой-то площади, пересечения двух линий или кружочка, является лишь ее условным изображением.

Линия – одномерная геометрическая фигура. **В начертательной геометрии линия определяется кинематически – как траектория**

непрерывно движущейся точки в пространстве. Линии обозначаются строчными буквами латинского алфавита.

4 слайд

Методы проецирования

Символы и обозначения. Подробно рассмотри́те символы и обозначения, примеры символической записи. Многие символы вам известны из курса элементарной геометрии, особое внимание обратите на знаки пересечения и проецирования. Изучи́те буквы греческого алфавита хотя бы в указанном объеме. Они будут постоянно использоваться.

Точки обозначаются прописными буквами латинского алфавита – ***A***, ***B***, ***C*** и так далее или арабскими цифрами – ***1***, ***2***, ***3*** и так далее. Линии обозначаются строчными буквами латинского алфавита – ***a***, ***b***, ***c*** и так далее. Поверхности обозначаются прописными буквами греческого алфавита: ***Γ*** – гамма, ***Δ*** – дельта, ***Λ*** – лямбда, ***Σ*** – сигма, ***Φ*** – фи, ***Ψ*** – пси, ***Ω*** – омега.

5 слайд

Методы проецирования

Внимательно рассмотри́те примеры символической записи. На следующих слайдах вы сможете прочитать определители геометрических фигур, алгоритмы решения графических задач. В домашних заданиях вам нужно будет самостоятельно их составить, сопровождая графическое решение.

6 слайд

1.1.1. Центральное проецирование

Проецирование называется центральным, когда проецирующие лучи проходят через фиксированную точку $\boldsymbol{S}$. На слайде показано построение центральных проекций точек $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ и прямой $\boldsymbol{AM}$. Подробно рассмотри́те чертеж и обозначения к нему, так как в дальнейшем вы постоянно будете оперировать этими понятиями, составлять алгоритмы решения задач.

Через точку $\boldsymbol{S}$ – центр проецирования и точку $\boldsymbol{B}$ проведем проецирующий луч $\boldsymbol{l_B}$ [эль б], отметим точку $\boldsymbol{B_1}$ пересечения проецирующего луча с картинной плоскостью. На чертеже видно, что каждой точке пространства соответствует единственная точка на плоскости проекций.

Аналогично точке $\boldsymbol{B}$ можно построить проекцию любой точки пространства, например точки $\boldsymbol{C}$.

Если $\boldsymbol{l_D}$ [эль д] $/\!/ \boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один], то проекцией точки $\boldsymbol{D}$ служит несобственная точка $\boldsymbol{D_1}$ на плоскости $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один].

По принципу центрального проецирования работают фото – и кинокамеры. Упрощенная схема работы человеческого глаза близка к этому виду проецирования. Изображения, построенные по принципу центрального проецирования, наиболее наглядны, и их широко используют в своей работе архитекторы, дизайнеры, геологи и другие специалисты. Описанным методом центрального проецирования может быть построена проекция любой точки геометрической фигуры, а следовательно, и проекция самой фигуры. Например, центральную проекцию отрезка $\boldsymbol{AM}$ на плоскость $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один] можно построить как линию пересечения плоскости $\boldsymbol{\Sigma}$ [сигма], проведенную через центр $\boldsymbol{S}$ и прямую $\boldsymbol{a}$, с плоскостью проекций. Так как две плоскости пересекаются по единственной прямой, то проекция прямой есть прямая, и притом единственная. Смотрите на слайде символическую запись проецирования указанных проецирующих фигур.

7 слайд

1.1.2. Параллельное проецирование

Проецирование называется параллельным, если центр проецирования удален в бесконечность, а все проецирующие лучи параллельны заданному направлению *s*.

Итак, ***s*** – направление проецирования. Обратите внимание на то, что при центральном проецировании ***S*** – это точка, поэтому буква прописная. При параллельном ***s*** – прямая, поэтому буква строчная.

Чтобы найти точку A_1 – параллельную проекцию точки ***A***, построенную по направлению ***s*** на плоскости проекций Π_1 [пи один], нужно через точку ***A*** провести проецирующий луч l_A [эль а], параллельный прямой ***s***, и определить точку его пересечения с плоскостью Π_1 [пи один]. Точка A_1 является параллельной проекцией как для точки ***A***, так и для точек A^1 [а один] и A^2 [а два].

Свойства параллельных проекций. Геометрическая фигура в общем случае проецируется на плоскость проекций с искажением, но некоторые свойства оригинала сохраняются в проекциях при любом преобразовании и называются его инвариантами, то есть остаются неизменными.

Первое свойство. *Проекция точки на плоскость проекций есть точка.* Важно не само свойство, а следствие из него. Каждой точке пространства соответствует одна и только одна точка на плоскости проекций. Доказательством может служить то, что через точку ***A*** можно провести только одну прямую, параллельную заданному направлению проецирования, и эта прямая пересечется с плоскостью проекций только в одной точке.

Второе свойство. *Проекция прямой линии в общем случае есть прямая.* Надо исходить из того, что прямая есть траектория непрерывно движущейся точки в пространстве, а значит, через каждое положение движущейся точки пройдет проецирующий луч. Все эти параллельные лучи образуют плоскость, которая будет называться проецирующей, в данном случае – ***Г*** [гамма]. Две плоскости ***Г*** [гамма] и $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один] всегда пересекаются по прямой линии. Поэтому проекцией прямой ***a*** будет прямая $\boldsymbol{a_1}$.

Если прямая параллельна направлению проецирования, то её проекция вырождается в точку. Например, $\boldsymbol{1_1}$ совпала с $\boldsymbol{2_1}$ и совпала с проекцией $\boldsymbol{c_1}$ – точка.

Третье свойство – свойство принадлежности. ***Если точка принадлежит прямой, то проекция точки принадлежит проекции прямой.*** Это свойство следует из определения проекции фигуры как совокупности проекций всех ее точек. То есть через точку ***K*** пройдет проецирующий луч, который будет принадлежать той же проецирующей плоскости ***Г*** [гамма], а значит, $\boldsymbol{K_1}$ будет принадлежать проекции прямой $\boldsymbol{a_1}$.

Четвертое свойство – ***свойство простого соотношения трех точек.*** Если точка делит отрезок в некотором отношении, то проекция этой точки делит проекцию отрезка в том же отношении.

8 слайд

1.1.2. Параллельное проецирование

На этом слайде продолжим рассматривать следующие свойства параллельных проекций.

Пятое свойство. ***Если прямые в пространстве параллельны, то их проекции тоже параллельны.*** Пусть дано, что ***m*** // ***n***. Построим проецирующие плоскости ***Г*** [гамма] и ***Σ*** [сигма] проходящие через эти прямые ***m*** и ***n***. Тогда эти две плоскости взаимно параллельны по построению. Но из стереометрии известно, что две параллельные плоскости ***Г*** [гамма] и ***Σ***

[сигма] пересекаются с третьей плоскостью $\mathit{\Pi_1}$ [пи один] по двум параллельным прямым, поэтому если $m \parallel n$, то $m_1 \parallel n_1$.

Шестое свойство. ***Отношение длин отрезков параллельных прямых равно отношению длин их проекций.***

Седьмое свойство. ***Проекция геометрической фигуры не изменяется при параллельном переносе плоскостей проекций.***

Рассмотренные свойства параллельного проецирования сохраняются при любом направлении проецирования. Знание основных свойств проецирования необходимо для того, чтобы грамотно и рационально строить проекционные изображения предметов и решать графические задачи методами проецирования.

9 слайд

1.1.3. Ортогональное проецирование

Ортогональное или прямоугольное проецирование является частным случаем параллельного проецирования, когда направление проецирования перпендикулярно к плоскости проекций, $s \perp \mathit{\Pi_1}$ [пи один]. В этом случае проекции геометрических фигур называются ортогональными. Ортогональному проецированию присущи все свойства параллельного проецирования, а также свойства, относящиеся только к ортогональному проецированию.

Первое свойство. ***В общем случае ортогональная проекция отрезка всегда меньше его натуральной длины.***

Если провести A^*[а со звездочкой] $B \parallel A_1B_1$, то угол AA^*[а со звездочкой] B равен $90°$. Из прямоугольного треугольника следует, что AB – гипотенуза, A^*[а со звездочкой] B – катет, а гипотенуза всегда больше катета.

Рассмотрим частные случаи.

Если угол α [альфа] равен ***0***, то A_1B_1 по абсолютной величине равняется AB, то есть проекция отрезка равна самому отрезку.

Если угол α [альфа] равен $90°$, то A_1 совпадет с B_1, то есть проекция отрезка есть точка.

Второе свойство: теорема о проецировании прямого угла.

Если одна сторона прямого угла параллельна какой-нибудь плоскости проекций, а вторая сторона не перпендикулярна ей, то на эту плоскость проекций прямой угол проецируется без искажения.

Дано: угол ABC равен $90°$, $BC \parallel \Pi_1$ [пи один]. Доказать: угол $A_1B_1C_1$ равен $90°$.

Доказательство

Плоскость Φ [фи] есть результат пересечения двух прямых AB с BB_1.

Плоскость Σ [сигма] есть результат пересечения двух прямых BC с BB_1.

$BC \perp \Phi$ [фи], так как $BC \perp AB$ по условию и $BC \perp BB_1$, так как это ортогональное проецирование. Но $B_1C_1 \parallel BC$, значит $B_1C_1 \perp \Phi$ [фи]. Но если прямая перпендикулярна плоскости, значит, она перпендикулярна любой прямой этой плоскости, следовательно, $B_1C_1 \perp A_1B_1$, а значит, угол $A_1B_1C_1$ – прямой.

Третье свойство. ***Ортогональная проекция окружности в общем случае есть эллипс.*** Заключим окружность в плоскость Σ [сигма], угол между плоскостями Σ [сигма] и Π_1 [пи один] равен α [альфа]. Если $0 < \alpha$ [альфа] $< 90°$, то окружность k будет проецироваться как эллипс k_1, при этом прямые $AB \perp CD$ называются сопряженными диаметрами. Пусть $AB \parallel \Pi_1$ [пи один], значит, A_1B_1 равняется AB. Прямая A_1B_1 будет называться большой осью эллипса. Прямая C_1D_1 будет называться малой осью эллипса.

Все хорды окружности, параллельные CD, проецируются с коэффициентом сжатия, равным $\cos\alpha$, и делятся осью A_1B_1 пополам. Ортогональная проекция окружности в общем случае есть замкнутая центрально симметричная кривая второго порядка, имеющая две взаимно перпендикулярные оси, то есть эллипс.

Частные случаи: Если Σ [сигма] $//$ Π_1 [пи один], то окружность k проецируется без искажения. Если Σ [сигма] $\perp$ Π_1 [пи один], то есть угол α [альфа] равен $90°$, то окружность k есть прямая линия, равная диаметру.

10 слайд

1.2. Метод Монжа

В машиностроительных чертежах используется метод прямоугольных проекций. Поэтому дальнейшее изучение курса будет вестись с использованием метода ортогонального проецирования. Чтобы однозначно решить две основные задачи курса начертательной геометрии, чертежи должны удовлетворять следующим требованиям: **простота и наглядность; обратимость чертежа.**

Рассмотренные методы проецирования с использованием однокартинных чертежей позволяют решать прямую задачу, то есть по данному оригиналу построить его проекцию. Однако обратную задачу, то есть по проекции воспроизвести оригинал, решить однозначно невозможно. Эта задача допускает бесчисленное множество решений, так как каждую точку проекции A_1, как показано на слайде, плоскости проекций Π_1 [пи один] можно считать проекцией любой точки проецирующего луча l_A [эль а], проходящего через A_1. Таким образом, рассмотренные однокартинные чертежи не обладают свойством **обратимости**.

Для получения обратимых однокартинных чертежей их дополняют необходимыми данными. Существуют различные способы такого дополнения. Например, **чертежи с числовыми отметками**. Посмотрите на рисунок *а*. Способ заключается в том, что наряду с проекцией точки A_1

задаётся высота точки, то есть её расстояние от плоскости проекций. Задают также масштаб. Такой способ используется в строительстве, архитектуре, геодезии и т. д. Однако он не является универсальным для создания чертежей сложных пространственных форм.

В 1798 году французский геометр – инженер Гаспар Монж обобщил накопленные к тому времени теоретические знания и опыт и впервые дал научное обоснование общего метода построения изображений. Он предложил рассматривать плоский чертёж, состоящий из двух проекций, как результат совмещения двух взаимно перпендикулярных плоскостей проекций. Отсюда ведёт начало принцип построения чертежей, которым мы пользуемся и поныне.

Поставим перед собой задачу построить проекции отрезка $\boldsymbol{AB}$ на две взаимно перпендикулярные плоскости проекций $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один] и $\boldsymbol{\Pi_2}$ [пи два]. Для этого рассмотрим пространственную модель двух взаимно перпендикулярных плоскостей,

где $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один] $\perp$ $\boldsymbol{\Pi_2}$ [пи два]; $\boldsymbol{AA_1} \perp \boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один]; $\boldsymbol{AA_1}$ – расстояние от $\boldsymbol{A}$ до $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один];

$\boldsymbol{AA_2} \perp \boldsymbol{\Pi_2}$ [пи два]; $\boldsymbol{AA_2}$ – расстояние от $\boldsymbol{A}$ до $\boldsymbol{\Pi_2}$ [пи два];

$\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один] – горизонтальная плоскость проекций;

$\boldsymbol{\Pi_2}$ [пи два] – фронтальная плоскость проекций;

$\boldsymbol{A_1B_1}$ – горизонтальная проекция отрезка;

$\boldsymbol{A_2B_2}$ – фронтальная проекция отрезка;

$\boldsymbol{x_{12}}$ – линия пересечения плоскостей проекций.

Однако в таком виде чертёж неудобно читать. Поэтому Гаспар Монж предложил совместить эти плоскости проекций, причём $\boldsymbol{\Pi_2}$ [пи два] принимается за плоскость чертежа, а $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один] поворачивается до совмещения с $\boldsymbol{\Pi_2}$ [пи два]. Такой чертёж называется комплексным чертежом. Это **двухкартинный** чертёж.

11 слайд

1.2. Метод Монжа

Рассмотрим плоский чертеж – совмещение плоскостей проекций со всем их содержимым на плоском чертеже. Совокупность проекций множества точек пространства на Π_1 [пи один] называется горизонтальным полем проекций, а на Π_2 [пи два] – фронтальным полем проекций. Ось x_{12} – ось проекций, база отсчёта. Прямые A_1A_2, B_1B_2 будут называться ***линиями связи – это прямые, соединяющие две проекции точки на комплексном чертеже.*** Линии связи перпендикулярны оси проекций.

Свойства комплексного чертежа Монжа

Первое. ***Две проекции точки всегда лежат на одной линии связи установленного направления.***

Второе. ***Все линии связи одного установленного направления параллельны между собой.***

Рассмотрим безосный чертеж. Если совмещённые плоскости Π_1 [пи один] и Π_2 [пи два] перемещать параллельно самим себе на произвольные расстояния (смотрите положение осей x_{12} [икс один два], x_{12}' [икс один два штрих], x_{12}'' [икс один два, два штриха]), то будут меняться расстояния от фигуры до плоскостей проекций. Однако сами проекции фигуры, в данном случае проекции отрезка AB, при параллельном перемещении плоскостей проекций не меняются, согласно седьмому свойству параллельного проецирования, показанному на слайде.

На безосном чертеже видно, что при любом положении оси x **величины** ΔZ [дельта зет], **которая есть разность расстояний от концов отрезка до** Π_1 [пи один], **и** ΔY [дельта игрек], **которая есть разность расстояний от концов отрезка до** Π_2 [пи два], **остаются неизменными.** Поэтому нет необходимости указывать положение оси x_{12} на комплексном чертеже и тем самым предопределять положение плоскостей проекций Π_1 [пи один] и $\boldsymbol{\Pi_2}$ [пи два] в пространстве. Это учитывается в чертежах, применяющихся в технике, они называются **безосными**.

Безосный чертеж позволяет, не привязываясь к осям, располагать изображения в удобном для исполнителя положении, но с соблюдением проекционной связи. То есть построение чертежа происходит по законам, установленным Гаспаром Монжем. Такой чертеж называется комплексным чертежом или эпюром Монжа.

Доказательство обратимости чертежа Монжа. Если по плоскому изображению можно определить натуральную длину отрезка и его ориентацию в пространстве, значит, реконструирование пространства возможно. Следовательно, однозначно решается вторая или обратная задача курса начертательной геометрии.

Рассмотрим пространственный чертеж отрезка ***AB, где AB*** – отрезок прямой в пространстве, $\boldsymbol{A_1B_1}$ – горизонтальная проекция отрезка.

Через точку $\boldsymbol{A}$ проведём $\boldsymbol{AB'}$ [аб штрих] $/\!/\boldsymbol{A_1B_1}$. Тогда получим:

Треугольник $\boldsymbol{ABB'}$ [б штрих] – прямоугольный; $\boldsymbol{AB}$ **– гипотенуза** треугольника или натуральная величина отрезка; **отрезок** $\boldsymbol{AB'}$ [б штрих] равен $\boldsymbol{A_1B_1}$, то есть один из катетов равен проекции отрезка $\boldsymbol{AB}$ на плоскость проекций $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один]. **Второй катет** $\boldsymbol{BB'}$ [б штрих] есть разность удалений концов отрезка от плоскости проекций $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один].

Проведя аналогичные рассуждения для плоскости проекций $\boldsymbol{\Pi_2}$ [пи два], можно сделать вывод, что натуральная величина отрезка есть гипотенуза прямоугольного треугольника, одним из катетов которого является одна из проекций отрезка. Другой катет есть разность удалений концов отрезка от той плоскости, проекцию на которую взяли за первый катет.

Такой метод нахождения натуральной величины отрезка общего положения называют **методом прямоугольного треугольника**.

Теперь рассмотрим плоский чертеж отрезка AB.

Дано: две проекции отрезка AB: A_2B_2 – фронтальная и A_1B_1 – горизонтальная.

Требуется определить натуральную величину этого отрезка.

Исходя из вышесказанного A_1B_1 является одним из катетов прямоугольного треугольника. Чтобы найти второй катет, проведём A_2B' [б штрих] $\perp$ линиям связи.

B_2B' – это разность удалений концов отрезка AB от Π_1 [пи один].

Откладываем расстояние B_2B' [б штрих] на перпендикуляре к A_1B_1 с любой стороны.

Отрезок A_1B_0 есть натуральная величина AB, а угол α [альфа] есть угол наклона AB к Π_1 [пи один].

Аналогично можно найти угол наклона данного отрезка к Π_2 [пи два], построив прямоугольный треугольник на Π_2 [пи два].

Вывод: двухкартинный чертеж Монжа обратим, значит, по двум проекциям отрезка можно однозначно определить длину этого отрезка и его ориентацию, то есть положение отрезка в пространстве.

12 слайд

1.3. Трехкартинный комплексный чертеж точки

Пространственный чертеж. Двухкартинный чертёж является метрически определённым чертежом, то есть он вполне определяет форму и размеры фигуры и её ориентацию в пространстве. Однако часто комплексный чертёж становится более ясным, если помимо двух основных проекций дана ещё одна проекция на третью плоскость. В качестве такой плоскости применяют профильную плоскость проекций Π_3 [пи три].

Три плоскости проекций образуют в пространстве прямоугольный трёхгранник, то есть систему трёх взаимно перпендикулярных плоскостей. Рёбра этого трёхгранника будем обозначать x, y, z.

$\boldsymbol{\mathit{П}_3}$ [пи три] – профильная плоскость проекций.

$\boldsymbol{A_3}$ – профильная проекция точки *А*.

$\boldsymbol{AA_3}$ равняется $\boldsymbol{3A_2}$, равняется $\boldsymbol{2A_1}$ – это есть удаление точки ***А*** от $\boldsymbol{\mathit{П}_3}$ [пи три].

Плоский чертеж. Необходимо развернуть плоскости $\boldsymbol{\mathit{П}_1}$ [пи один] и $\boldsymbol{\mathit{П}_3}$ [пи три] до совмещения с $\boldsymbol{\mathit{П}_2}$ [пи два].

$\boldsymbol{A_1A_2}$ – линия связи в системе $\boldsymbol{\mathit{П}_1}$ [пи один] – $\boldsymbol{\mathit{П}_2}$ [пи два];

$\boldsymbol{3A_3 = 1A_1}$;

$\boldsymbol{A_2A_3}$ – линия связи в системе $\boldsymbol{\mathit{П}_2}$ [пи два] – $\boldsymbol{\mathit{П}_3}$[пи три];

$\boldsymbol{1A_2}$ – высота расположения точки ***А***;

$\boldsymbol{1A_1}$ – есть глубина расположения точки ***А***;

$\boldsymbol{3A_2}$ – есть ширина расположения точки ***А***;

x – ось абсцисс, ***y*** – ось ординат, ***z*** – ось аппликат.

Связь ортогональных проекций точки с её прямоугольными координатами. Если в точку ***О*** поместить начало декартовой прямоугольной системы координат, то линии пересечения плоскостей проекций совпадут с соответствующими осями координат и **задание точки двумя ортогональными проекциями будет равносильно заданию её тремя прямоугольными координатами.**

Так, по заданной горизонтальной проекции $\boldsymbol{A_1}$ определяем координаты по осям ***x*** и ***y***; по заданной фронтальной проекции $\boldsymbol{A_2}$ – определяем координаты по осям ***x*** и **z**.

И наоборот. Например, даны координаты точки ***А (18, 24, 18)***, построить ортогональные проекции точки ***А,*** то есть горизонтальную проекцию $\boldsymbol{A_1}$ и фронтальную проекцию $\boldsymbol{A_2}$. По данным координатам задаём две проекции точки ***А***. При необходимости можно построить $\boldsymbol{A_3}$.

Выводы. Комплексным чертежом принято называть совокупность двух или более взаимосвязанных ортогональных проекций оригинала, расположенных на одной плоскости чертежа. Двухкартинный комплексный чертёж Монжа является метрически определённым чертежом, следовательно, он обратим. Имея две проекции оригинала, можно построить сколько угодно адекватных проекций данного оригинала, что широко используется в технических чертежах.

13 слайд

1.4. Задание прямой на чертеже

Прямая в пространстве может занимать общее и частное положение.

Общее положение – прямая расположена произвольно относительно плоскостей проекций, то есть не параллельна и не перпендикулярна ни к одной из плоскостей проекций.

Частных положений два. *Прямая может быть параллельна одной плоскости проекций, эти прямые называются прямыми уровня.* Таких прямых три: горизонтальная прямая, или горизонталь, она параллельна горизонтальной плоскости проекций; фронтальная прямая, или фронталь, она параллельна фронтальной плоскости проекций; профильная прямая параллельна профильной плоскости проекций.

Прямая может быть параллельна сразу двум плоскостям проекций, а значит, перпендикулярна третьей плоскости проекций. Таких прямых тоже три: горизонтально проецирующая прямая перпендикулярна горизонтальной плоскости проекций; фронтально проецирующая прямая перпендикулярна фронтальной плоскости проекций; профильно проецирующая прямая перпендикулярна профильной плоскости проекций.

На чертеже изображена прямая в виде отрезка ***AB***, не параллельная и не перпендикулярная ни к одной из плоскостей проекций, то есть прямая общего положения.

Необходимо отметить особенности задания таких прямых на комплексном чертеже. На безосных чертежах нет очертаний плоскостей проекций, но есть линии связи. Поэтому положение геометрических фигур в пространстве определяется положением их проекций относительно линий связи. Любая проекция прямой общего положения искажает натуральную длину. Любая проекция прямой общего положения наклонена к линиям связи под углом, не равным 90°; ни один из них не показывает натуральную величину углов наклона прямой к плоскостям проекций. Натуральную величину прямой общего положения находят методом прямоугольного треугольника, который был рассмотрен на слайде.

Графический признак прямой общего положения: ни одна из ее проекций не параллельна и не перпендикулярна линиям связи. Графический признак прямой общего положения необходимо знать, так как нужно не только правильно использовать эту прямую при решении задач, но и верно отвечать на тестовые задания.

14 слайд

1.4.2. Прямые уровня

Прямые, параллельные какой-либо плоскости проекций, называются прямыми уровня. Существует три линии уровня: **горизонталь,** обозначается буквой ***h*** [аш], **фронталь**, обозначается буквой ***f***, **профильная прямая**, обозначается буквой ***p***.

Горизонталь *h* [аш] **//** $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один] **– это прямая, параллельная горизонтальной плоскости проекций** $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один].

Если взять карандаш в руки и расположить его параллельно столу, то длина карандаша спроецируется на плоскость стола без искажения. У горизонтали $\boldsymbol{h_1}$ есть натуральная величина ***h*** [аш], угол $\boldsymbol{\beta}$ [бета] – это угол наклона горизонтали к $\boldsymbol{\Pi_2}$ [пи два], проецируется без искажения.

Графический признак горизонтали – ее фронтальная проекция перпендикулярна линиям связи, поэтому построение горизонтали всегда начинается с ее фронтальной проекции. Графический признак горизонтали необходимо знать, так как нужно не только правильно использовать эту прямую при решении задач, но и верно отвечать на вопросы тестовых заданий.

15 слайд

1.4.2. Прямые уровня

Фронталь $f \parallel \Pi_2$ [пи два] – это прямая, параллельная фронтальной плоскости проекций Π_2 [пи два].

Если взять карандаш в руки и расположить его параллельно стене, находящейся перед наблюдателем, то длина карандаша спроецируется на плоскость стены без искажения. У фронтали f_2 есть натуральная величина f, угол α [альфа] – это угол наклона фронтали к Π_1 [пи один], проецируется без искажения.

Графический признак фронтали – ее горизонтальная проекция перпендикулярна линиям связи, поэтому построение фронтали всегда начинается с ее горизонтальной проекции. Графический признак фронтали необходимо знать, так как не только нужно правильно использовать эту прямую при решении задач, но и правильно отвечать на вопросы тестовых заданий.

16 слайд

1.4.2. Прямые уровня

Профильная прямая $p \parallel \Pi_3$ [пи три] – это прямая, параллельная профильной плоскости проекций Π_3 [пи три].

У профильной прямой p_3 есть натуральная величина p.

Углы наклона профильной прямой к Π_1 [пи один] и Π_2 [пи два] проецируются на Π_3 [пи три] без искажения.

Графический признак профильной прямой – ее горизонтальная и фронтальная проекции совпадают с линиями связи в системе Π_1 [пи один] – Π_2 [пи два].

17 слайд

1.4.3. Проецирующие прямые

Прямые, параллельные двум плоскостям проекций, а следовательно, перпендикулярные третьей плоскости проекций, называются проецирующими прямыми. Различают горизонтально проецирующую прямую, фронтально проецирующую прямую, профильно проецирующую прямую.

Отличительным признаком проецирующих прямых на комплексном чертеже является то, что одна из проекций прямой вырождается в точку.

Очень важно понимать, что любая проецирующая фигура изображается на одной из плоскостей проекций фигурой на единицу меньшего измерения, чем сама фигура. Это свойство проецирующих фигур является важным при решении позиционных и метрических задач. Поэтому необходимо запомнить понятие главной проекции проецирующей фигуры и привыкнуть к нему, чтобы легко оперировать им при решении задач в дальнейшем.

Геометрическая фигура называется проецирующей, если одна из ее проекций есть геометрическая фигура на единицу меньшего измерения. Эта проекция называется главной и обладает так называемыми «собирательными» свойствами.

Горизонтально проецирующая прямая – это прямая, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций Π_1 [пи один].

Прямая $\boldsymbol{a} \perp \Pi_1$ [пи один], значит, $\boldsymbol{a} \parallel \Pi_2$ и Π_3 [пи три].

Графический признак горизонтально проецирующей прямой – ее горизонтальная проекция есть точка, она называется главной проекцией и обладает собирательными свойствами. Эта прямая проецируется на фронтальную и профильную плоскости проекций без искажения.

Таким образом, $\boldsymbol{a_1}$ – главная проекция, которая обладает «собирательными» свойствами. Любая точка, взятая на этой прямой, совпадет с ее горизонтальной проекцией, то есть с проекцией $\boldsymbol{a_1}$ совпадают $\boldsymbol{A_1}$ и $\boldsymbol{B_1}$. Точки $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ называются ***горизонтально конкурирующими***, точка $\boldsymbol{B_1}$ на чертеже в скобках, так как в пространстве точка $\boldsymbol{A}$ выше точки $\boldsymbol{B}$.

18 слайд

1.4.3. Проецирующие прямые

Фронтально проецирующая прямая – это прямая, перпендикулярная фронтальной плоскости проекций Π_2 [пи два].

Прямая $\boldsymbol{b} \perp \Pi_2$ [пи два], значит, $\boldsymbol{b} \parallel \Pi_1$ [пи один] и Π_3 [пи три].

Графический признак фронтально проецирующей прямой – ее фронтальная проекция есть точка, она называется главной проекцией и обладает собирательными свойствами. Эта прямая проецируется на горизонтальную и профильную плоскости проекций без искажения.

Проекция $\boldsymbol{b_2}$ – главная проекция, которая обладает «собирательными» свойствами. Любая точка, взятая на этой прямой, совпадет с ее фронтальной проекцией, то есть с $\boldsymbol{b_2}$ совпадают $\boldsymbol{M_2}$ и $\boldsymbol{N_2}$. Точки $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{N}$ называются ***фронтально конкурирующими***, точка $\boldsymbol{N}$ на чертеже в скобках, так как в пространстве точка $\boldsymbol{M}$ ближе к наблюдателю, чем точка $\boldsymbol{N}$.

19 слайд

1.4.3. Проецирующие прямые

Профильно проецирующая прямая – это прямая, перпендикулярная профильной плоскости проекций $\boldsymbol{\Pi_3}$ **[пи три].**

Прямая $\boldsymbol{c}$ [ц] $\perp \boldsymbol{\Pi_3}$ [пи три], значит, $\boldsymbol{c}$ [ц] $/\!/ \boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один] и $\boldsymbol{\Pi_2}$ [пи два].

Графический признак профильно проецирующей прямой – ее профильная проекция есть точка, она называется главной проекцией. Эта прямая проецируется на горизонтальную и фронтальную плоскости проекций без искажения.

Проекция $\boldsymbol{c_3}$ [ц три] – главная проекция, которая обладает «собирательными» свойствами. Любая точка, взятая на этой прямой, совпадет с ее профильной проекцией, то есть с $\boldsymbol{c_3}$ [ц три] совпадают $\boldsymbol{E_3}$ и $\boldsymbol{F_3}$.

Сравните и хорошо запомните графические признаки соответствующих прямых, которые надо знать, как таблицу умножения, чтобы успешно ответить на тестовые задания. Но еще важнее, что знание этой темы поможет в освоении последующих.

Выводы. Рассмотренные слайды позволяют отметить особенности задания прямых уровня на комплексном чертеже:

одна из проекций прямых уровня перпендикулярна линиям связи установленного направления;

одна из проекций прямой уровня параллельна самой прямой и дает истинную величину, а также показывает без вспомогательных построений угол наклона к одной из плоскостей проекций – это горизонталь и фронталь, к двум плоскостям проекций – это профильная прямая уровня.

Рассмотренные слайды позволяют отметить особенности задания проецирующих прямых на комплексном чертеже:

одна из проекций проецирующих прямых есть точка;

другие две проекции дают натуральную величину прямой, то есть проецируются без искажения.

И наконец, четко видно, что проекции прямой общего положения не параллельны и не перпендикулярны линиям связи.

20 слайд

1.5. Взаимное положение прямых

Как вы думаете, могут ли проекции скрещивающихся прямых быть параллельны? Можно ли проекции пересекающихся и параллельных прямых изобразить одной линией? Имеют ли скрещивающиеся прямые общую точку? А их проекции?

Чтобы ответить на эти вопросы, надо изучить следующие два слайда, а затем вернуться к вопросам.

Две прямые в пространстве могут: пересекаться, быть параллельными, скрещиваться. Рассмотрим сначала пересекающиеся прямые.

Прямые называются пересекающимися, если они имеют единственную общую точку. Такие прямые всегда лежат в одной плоскости. Если прямые пересекаются, то существует единственная точка их пересечения.

Прямые $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ пересекаются в точке $\boldsymbol{K}$. На основании свойства принадлежности, если прямые $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ пересекаются в точке $\boldsymbol{K}$, то горизонтальные проекции $\boldsymbol{a_1}$ и $\boldsymbol{b_1}$ пересекаются в точке $\boldsymbol{K_1}$, фронтальные проекции $\boldsymbol{a_2}$ и $\boldsymbol{b_2}$ пересекаются в точке $\boldsymbol{K_2}$.

Согласно свойству чертежа Монжа, обе проекции $\boldsymbol{K_1}$ и $\boldsymbol{K_2}$ точки **К** лежат на одной линии связи данного установленного направления.

Рассмотрите чертежи внимательно. Сначала дается пространственное изображение пересекающихся прямых, затем изображение их на плоскости. В дальнейшем на чертеже вы будете видеть плоское изображение, а представлять пространственное. Учитесь быстро переходить от одного к другому, то есть мысленно «перекодировать» изображение.

Графический признак пересекающихся прямых *а* и *в* – точки пересечения одноименных проекций лежат на одной линии связи установленного направления. Еще раз подчеркиваем, что через пересекающиеся прямые можно провести плоскость.

Параллельными прямыми называются такие, которые лежат в одной плоскости и не пересекаются. На основании свойства параллельности прямых ***a* // *b*** можно сформулировать их **графический признак – одноименные проекции параллельных прямых параллельны.**

Рассмотрите чертежи внимательно. Сначала дается пространственное изображение параллельных прямых, затем изображение их на плоскости. В дальнейшем на чертеже вы будете видеть плоское изображение, а представлять пространственное. Учитесь быстро переходить от одного к другому, то есть мысленно «перекодировать» изображение.

Через параллельные прямые можно провести плоскость.

21 слайд

1.5. Взаимное положение прямых

Если прямые не параллельны и не пересекаются, то они называются скрещивающимися прямыми.

На слайде прямые в пространстве показаны красным цветом, их проекции – синим цветом. Обратите внимание, что в пространстве точки ***A*** и ***B*** не совпадают, а находятся на одном перпендикуляре к горизонтальной плоскости проекций, но на самой плоскости проекций эти точки сливаются. Точки ***A*** и ***B*** называются горизонтально конкурирующими. Напоминаем, что с их помощью определяется видимость геометрических фигур относительно ***П₁*** при решении задач. Из двух точек видна та, что выше.

Обратите внимание, что в пространстве точки ***C*** и ***D*** не совпадают, а находятся на одном перпендикуляре к фронтальной плоскости проекций, но на самой плоскости проекций эти точки сливаются. Точки ***C*** и ***D*** называются фронтально конкурирующими. С их помощью определяется видимость геометрических фигур относительно ***П₂*** [пи два]. Из двух точек видна та, что ближе к наблюдателю. При решении позиционных задач с помощью таких точек будет определяться видимость поверхностей и линий их пересечения.

Графический признак скрещивающихся прямых – точки пересечения одноименных проекций прямых никогда не находятся на одной линии связи.

Через скрещивающиеся прямые невозможно провести плоскость, так как если одна прямая будет принадлежать плоскости, то другая будет пересекать эту плоскость. Подробно рассмотри́те плоское изображение скрещивающихся прямых, их графический признак и конкурирующие точки, мысленно представляя их пространственное изображение.

Точки ***A*** и ***B*** – горизонтально конкурирующие.

Точки ***C*** и ***D*** – фронтально конкурирующие.

Еще раз напоминаем, что через параллельные и пересекающиеся прямые можно провести плоскость. Через скрещивающиеся прямые нельзя провести плоскость. Теперь вернемся к поставленным вопросам.

Могут ли проекции скрещивающихся прямых быть параллельны? Конечно нет, так как параллельные прямые лежат в одной плоскости, а у скрещивающихся одна прямая будет пересекать эту плоскость.

Можно ли проекции пересекающихся и параллельных прямых изобразить одной линией? Одной линией может быть изображена одна из проекций параллельных и пересекающихся прямых в определённых случаях, когда прямые принадлежат плоскости, которая будет перпендикулярна или параллельна какой-либо плоскости проекций.

Имеют ли скрещивающиеся прямые общую точку. А их проекции? Скрещивающиеся прямые общую точку в пространстве иметь не могут, а на чертеже одноименные проекции конкурирующих точек могут совпадать.

22 слайд

1.6. Задание кривых линий. Метод хорд

В начертательной геометрии кривые линии изучают по их проекциям. Кривые бывают плоские и пространственные.

Если все точки кривой расположены в одной плоскости, то такую кривую называют плоской, например эллипс, окружность.

Если все точки кривой невозможно совместить с одной плоскостью, то такую кривую называют пространственной, например винтовая линия.

Если существует математическое уравнение, описывающее движение точки, то кривую называют закономерной. Аналитически закономерные линии подразделяются на алгебраические и трансцендентные. Примером алгебраических кривых служат кривые второго порядка, например эллипс, парабола, гипербола. К трансцендентным линиям относят графики тригонометрических функций, это, например, синусоида, косинусоида, циклоида.

Если кривую линию не удается выразить в аналитической форме, то ее задают графически. Графически, то есть своим изображением, может быть задана и закономерная линия, образование которой подчинено определенным геометрическим условиям.

Алгебраический порядок кривой равен степени ее уравнения, графический определяется числом точек ее возможного пересечения с произвольной прямой. Например, эллипс – кривая второго порядка, так как прямая пересекает эллипс в двух точках.

Метод хорд. По чертежу кривой линии сразу невозможно однозначно решить вопрос о ее характере, то есть плоская она или пространственная.

Если на заданной кривой взять произвольные четыре точки и через них провести хорды, то есть секущие, то возможны два варианта.

Первый вариант. Если хорды пересекаются, графически это видно на первом чертеже. Когда K_1, K_2 – точки пересечения проекций хорд – лежат на одной линии связи, то через пересекающиеся прямые можно провести плоскость, а это значит, что они образуют плоскость, в которой лежит заданная кривая. Следовательно, кривая линия плоская.

Второй вариант. Хорды не пересекаются, а скрещиваются. Графически это видно на втором чертеже, когда K_1, K_2 – точки пересечения проекций хорд – не лежат на одной линии связи. Значит, кривая линия пространственная.

Касательная и нормаль к кривой. Как построить касательную к кривой? Для построения используем прямые, называемые секущими.

Прямая, пересекающая кривую линию в двух и более точках, называется секущей AB.

Чтобы через точку A провести касательную t к кривой m, в окрестности точки A недалеко выбирают точку B и проводят секущую AB. Приближая точку B к точке A, в пределе получают касательную t в данной точке. Касательную t в точке A можно рассматривать как предельное положение секущей, которое занимает последняя при сближении точек пересечения A и B секущей AB до слияния их в одну точку.

На чертеже рассматривается построение нормали n. Нормаль к кривой линии в данной точке – это прямая, перпендикулярная касательной в данной точке, $n \perp t$. Сколько их можно провести? К пространственной кривой можно провести их бесконечное множество, то есть к касательной можно построить плоскость, нормальную к ней. Если кривая плоская, то к касательной можно провести только одну нормаль.

Рассмотренная точка ***A***, у которой только одна касательная и одна нормаль, называется ***обыкновенной точкой кривой***. Если вся кривая состоит из обыкновенных точек, то она называется регулярной или гладкой, или плавной.

У регулярной плоской кривой в каждой точке ***A***, ***B***, ***C***, ***D***, ***E*** к касательной можно провести только одну нормаль, поэтому все точки являются обыкновенными или монотонными. Характеристикой плавной кривой может быть и угол наклона касательных относительно оси ***X***, который в данном случае меняется плавно.

Свойства проекций кривых линий. Как спроецировать кривую на плоскость проекций? Мысленно проецируют **все** точки кривой на плоскость проекций, но практически это сделать невозможно, поэтому для проецирования выбирают конечное число точек. Чем больше точек, тем точнее проекция кривой. При выполнении заданий по нашему курсу следует брать не менее 8–12 точек.

Перечислим свойства спроецированной кривой: проекцией кривой линии в общем случае является кривая линия. Касательная к кривой проецируется в касательную к ее проекции. Несобственная точка кривой проецируется в несобственную точку ее проекции. Порядок кривой только для алгебраических кривых в проекциях не изменяется. Число точек пересечения кривой сохраняется при проецировании.

23 слайд

1.7. Некоторые кривые линии

Рассмотрим некоторые плоские и пространственные кривые. Эллипс, парабола, гипербола – алгебраические кривые второго порядка определяются квадратными уравнениями. Винтовая линия – пространственная кривая.

Эллипс – это все множество точек, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек, то есть фокусов, есть величина постоянная, равная 2а.

У эллипса:

AB равняется ***2a*** – большая ось эллипса,

CD равняется ***2в*** – малая ось эллипса,

O – центр эллипса,

F_1; F_2 – фокусы эллипса,

точки ***M*** и ***N*** – любые точки эллипса, тогда

$MF_1 + MF_2$ равняется $NF_1 + NF_2$, равняется ***AB*** – есть ***Const*** [константа].

У эллипса все точки собственные. Кривая симметрична относительно обеих осей. Всегда можно подобрать такую пару диаметров эллипса, чтобы хорды, параллельные одному диаметру, делились другим диаметром пополам. Такие диаметры называются сопряженными.

Графически можно построить любую точку эллипса, если заданы его оси. Эллипс на слайде построен равномерным сжатием окружности в направлении $OC \perp OA$. Существует несколько способов построения эллипса. Один из них: построить две окружности, причем одна окружность имеет диаметр, равный малой оси эллипса, у другой диаметр равен большой оси. Окружности пересечь лучами, разделив любую из окружностей на 12 равных частей.

Из точек пересечения любого луча с окружностями провести прямые, параллельные осям эллипса. Все полученные точки обвести плавной кривой с помощью лекала.

Парабола – это все множество точек, равноудаленных от прямой *d* – директрисы и данной точки *F* – фокуса.

Парабола обладает одной осью и имеет две вершины: ***O*** – собственная точка и ***S*** – несобственная точка, парабола имеет одну несобственную точку, ***F*** – это фокус и ***P*** – это параметр параболы.

Если требуется построить параболу по заданной вершине ***O***, оси ***X*** и точке ***M***, то строится прямоугольный треугольник ***OAM***. Катеты обычно заданы разной длины, разбиваются на равные части. Из всех отрезков катета ***AO*** проводятся лучи, параллельные катету ***AM***. Затем все отрезки на катете ***AM*** соединяются лучами с точкой ***O***. На пересечении лучей отмечаются точки, которые соединяются плавной кривой с помощью лекала.

Гипербола – разомкнутая кривая, состоящая из двух симметричных ветвей. Она имеет две оси симметрии – действительную, то есть ось *x*, и мнимую, то есть ось *y*. Асимптоты – это прямые, к которым ветви гиперболы неограниченно приближаются при удалении в бесконечность.

Точки ***A*** и ***B*** – вершины гиперболы,

F_1 и F_2 – фокусы гиперболы,

$MF_1 - MF_2$ равняется $NF_1 - NF_2$ есть ***const*** [константа], равняется $2a$.

Гипербола – это все множество точек, разность расстояний от каждой из которых до двух данных точек – фокусов, есть величина постоянная, равная $2a$.

Цилиндрическая винтовая линия. Из закономерных пространственных кривых наибольшее практическое применение находят винтовые линии: цилиндрические и конические.

Цилиндрическая винтовая линия образуется вращением точки вокруг некоторой оси с одновременным поступательным движением вдоль этой же оси. Если вращение и поступательное движение равномерны, то такая винтовая линия называется гелисой.

i – ось винтовой линии,

R – радиус вращения,

P – шаг, определяет расстояние между двумя смежными витками.

Алгоритм построения винтовой линии. Горизонтальную проекцию, то есть окружность радиусом ***R***, делят на 12 частей. Затем делят принятое значение шага ***P*** на 12 частей. Определяют нулевое положение точки ***O***, то есть проекций O_1 и O_2. Фронтальные проекции точек находятся как точки пересечения одноименных горизонтальных и вертикальных прямых, проведенных через точки деления. Линия m_1, то есть проекция винтовой линии на горизонтальную плоскость проекций, есть окружность. Линия m_2, то есть проекция винтовой линии на фронтальную плоскость проекций, есть синусоида.

Винтовую линию называют правой, если точка поднимается вверх и вправо по мере удаления от наблюдателя, и левой, если точка поднимается вверх и влево по мере удаления от наблюдателя.

24 слайд

2.1. Модуль 2. Задание плоскости на чертеже

В этом разделе вы познакомитесь с различными видами поверхностей и их модификациями, способами задания их на комплексном чертеже, особенностями построения. Узнаете, что простейшая поверхность – это плоскость. Научитесь строить точки и линии, принадлежащие поверхности.

Плоскость является частным случаем поверхности – это двумерная геометрическая фигура, которая имеет только длину и ширину и не имеет толщины. Обозначаются плоскости прописными буквами греческого алфавита. Плоскость – это множество точек, но определяется она тремя точками. Напомним, что прямую линию определяют две точки. Плоскость безгранична в пространстве, она условно «делит» помещение, землю на части. Представьте себе тонкую пленку, не имеющую толщины и натянутую на каркас из двух, например, пересекающихся прямых. Как определить ее положение относительно плоскостей проекций? Как плоскость изобразить относительно плоскостей проекций, если она безгранична в пространстве? Если на этой тонкой прозрачной пленке нарисовать 3 точки, не лежащие на одной прямой, то вот уже их можно сфотографировать и спереди и сверху.

Плоскость можно сфотографировать, то есть задать на чертеже одним из следующих способов:

рисунок *а* – тремя точками;

рисунок *б* – прямой и точкой, не лежащей на данной прямой;

рисунок *в* – двумя параллельными прямыми;

рисунок *г* – двумя пересекающимися прямыми;

рисунок *д* – любой плоской фигурой;

рисунок е – своей главной проекцией.

Задание плоскости на чертеже будем изучать по принципу задания прямой на комплексном чертеже, то есть учитывая, какое положение занимает плоскость относительно плоскостей проекций. Плоскость может занимать произвольное положение, может быть параллельна или перпендикулярна какой-либо плоскости проекций.

Плоскость общего положения. Если плоскость не перпендикулярна и не параллельна ни одной из плоскостей проекций, то она называется плоскостью общего положения. Примеры чертежа плоскости общего положения показаны на слайде: рисунки *а, б, в, г, д, е*.

Точка принадлежит плоскости, если она принадлежит какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости.

Построение точки в плоскости сводится к двум операциям: построению в плоскости вспомогательной прямой и построению точки на этой прямой.

Задача 1. Плоскость $\boldsymbol{\Sigma}$ [сигма] задана пересекающимися прямыми $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Точка $\boldsymbol{M(M_2)}$, заданная фронтальной проекцией, принадлежит плоскости. Найти горизонтальную проекцию точки, то есть $\boldsymbol{M_1}$.

Решение. Через точку $\boldsymbol{M_2}$ проводим вспомогательную прямую $\boldsymbol{k}$, которая принадлежит $\boldsymbol{\Sigma}$ [сигма]: значит, $\boldsymbol{k_2}$ пересекает $\boldsymbol{a_2}$ в точке $\boldsymbol{1_2}$; соответственно, $\boldsymbol{k_2}$ пересекает $\boldsymbol{b_2}$ в точке $\boldsymbol{2_2}$; затем находим горизонтальные проекции точек $\boldsymbol{1}$ и $\boldsymbol{2}$ по условию принадлежности прямым $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ соответственно; через две точки $\boldsymbol{1_1}$ и $\boldsymbol{2_1}$ проводим прямую $\boldsymbol{k_1}$ и на ней с помощью линии связи находим точку $\boldsymbol{M_1}$. И таких прямых можно провести сколько угодно, то есть вариантов решения этой задачи бесчисленное множество. Надо выбирать графически удобный вариант.

Прямая принадлежит плоскости, если она:

– проходит через две точки плоскости;

– проходит через одну точку плоскости и параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости.

В предыдущем примере мы рассмотрели, как построить прямую в плоскости по двум точкам. Для второго случая в задаче 2 плоскость ***Г*** [гамма] зададим треугольником ***ABC***.

Задача 2. Плоскость ***Г*** [гамма] задана треугольником ***ABC***.
Точка ***M*** задана своей горизонтальной проекцией M_1 принадлежит ***Г*** [гамма]. Найти M_2.

Решение: Через точку M_1 проведём прямую ***k***, параллельную стороне треугольника ***AB***. Она пересечёт сторону ***AC*** в точке 1_1; с помощью линии связи найдём 1_2, проведём k_2 параллельно A_2B_2 и на ней найдём точку M_2.

Эти две задачи хорошо иллюстрируют свойство взаимной принадлежности точки, прямой и плоскости.

25 слайд

2.1.1. Плоскости проецирующие

Плоскости, параллельные или перпендикулярные одной из плоскостей проекций, называются плоскостями частного положения.

Имеются две группы таких плоскостей – проецирующие и плоскости уровня.

Проецирующие плоскости. Если плоскость перпендикулярна только одной плоскости проекций, то она называется проецирующей. Одна из её проекций вырождается в прямую линию, называемую главной проекцией и обладающую собирательными свойствами.

Горизонтально проецирующая плоскость. Это плоскость, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций.

Графический признак: горизонтальная проекция $\boldsymbol{\Gamma_1}$ [гамма один] ***горизонтально проецирующей плоскости есть прямая линия, не параллельная и не перпендикулярная линиям связи. Это ее главная проекция.***

Например: $\boldsymbol{\Gamma}$ [гамма] – горизонтально проецирующая плоскость, значит, $\boldsymbol{\Gamma}$ [гамма] $\perp$ $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один], то есть ее горизонтальная проекция $\boldsymbol{\Gamma_1}$ [гамма один] есть прямая линия, называемая главной проекцией. Угол $\boldsymbol{\beta}$ [бета] есть угол наклона плоскости $\boldsymbol{\Gamma}$ [гамма] к $\boldsymbol{\Pi_2}$ [пи два] и проецируется без искажения.

Фронтально проецирующая плоскость. Это плоскость, перпендикулярная фронтальной плоскости проекций.

Графический признак: фронтальная проекция $\boldsymbol{\Sigma_2}$ [сигма два] ***фронтально проецирующей плоскости есть прямая линия, не параллельная и не перпендикулярная линиям связи. Это ее главная проекция.***

На чертеже плоскость задана двумя параллельными прямыми $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

На плоском чертеже фронтальные проекции прямых совпадают с главной проекцией этой плоскости $\boldsymbol{\Sigma}$ [сигма] – фронтально проецирующая плоскость. Плоскость $\boldsymbol{\Sigma}$ [сигма] $\perp$ $\boldsymbol{\Pi_2}$ [пи два], то есть фронтальная проекция $\boldsymbol{\Sigma_2}$ [сигма два] есть главная проекция.

Угол α [альфа] – угол наклона плоскости $\boldsymbol{\Sigma}$ [сигма] к $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один] проецируется без искажения. Прямые $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ принадлежат $\boldsymbol{\Sigma}$ [сигма], то есть

$\boldsymbol{a_2}$, $\boldsymbol{b_2}$ совпадут с $\boldsymbol{\Sigma_2}$ [сигма два]. Точка $\boldsymbol{M}$ принадлежит плоскости по условию, соответственно, $\boldsymbol{M_2}$ будет находиться на $\boldsymbol{\Sigma_2}$ [сигма два].

26 слайд

2.1.2. Плоскости уровня

Плоскости уровня – дважды проецирующие. Если плоскость перпендикулярна одновременно двум плоскостям проекций, а следовательно, параллельна третьей, то она называется плоскостью уровня.

Горизонтальная плоскость уровня – это плоскость, параллельная горизонтальной плоскости проекций.

Плоскость Δ [дельта] $/\!/$ $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один] – это горизонтальная плоскость уровня. Ее фронтальная проекция $\boldsymbol{\Delta_2}$ [дельта два] есть главная проекция, которая будет $\perp$ $\boldsymbol{A_2A_1}$, то есть линиям связи.

Графический признак: фронтальная проекция $\boldsymbol{\Delta_2}$ [дельта два] ***горизонтальной плоскости уровня есть прямая линия, перпендикулярная линиям связи в системе*** $\boldsymbol{\Pi_2}$ [пи два] – $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один]. ***Это ее главная проекция.***

Так как каждая плоскость уровня параллельна одной из плоскостей проекций, то все плоские фигуры, расположенные в плоскости уровня, проецируются на соответствующую плоскость проекций без искажений.

Фронтальная плоскость уровня – это плоскость, параллельная фронтальной плоскости проекций.

Плоскость $\boldsymbol{\Phi}$ [фи] задана $\boldsymbol{\Delta ABC}$, $\boldsymbol{\Phi}$ [фи] – фронтальная плоскость уровня.

Плоскость $\boldsymbol{\Phi}$ [фи] $/\!/$ $\boldsymbol{\Pi_2}$ [пи два]; $\boldsymbol{\Phi_1}$ [фи один] $\perp$ $\boldsymbol{A_2A_1}$, то есть линиям связи.

Треугольник ***ABC*** принадлежит ***Ф*** [фи], значит, $A_1B_1C_1$ совпадет с $Ф_1$ [фи один], следовательно, $A_2B_2C_2$ есть натуральная величина треугольника ***ABC***, то есть треугольник проецируется без искажений.

Графический признак: горизонтальная проекция $Ф_1$ [фи один] ***фронтальной плоскости уровня есть прямая линия, перпендикулярная линиям связи в системе*** $П_1$ [пи один] – $П_2$ [пи два]. ***Это ее главная проекция.***

27 слайд

2.1.3. Схема задания плоскости на чертеже

Рассмотрите схемы задания плоскостей общего и частного положения. Надо сравнить и запомнить графические признаки этих плоскостей, знать, как таблицу умножения. Графическое различие в том, что у плоскости общего положения, чем бы она ни была задана, ни одна из проекций не является прямой линией. А вот у проецирующих плоскостей одна из проекций есть прямая, но не параллельная и не перпендикулярная линиям связи. Плоскости уровня отличаются тем, что одна из проекций есть прямая, перпендикулярная линиям связи. Нужно четко различать эти графические признаки, так как в последующих темах часто придется сталкиваться с этими геометрическими фигурами. Под каждым чертежом плоскости указан ее определитель, то есть способ задания плоскости. Надо выучить эти обозначения, чтобы по определителю представить, какими геометрическими фигурами плоскость задана в пространстве.

28 слайд

2.1.4. Особые линии плоскости

Если прямая принадлежит плоскости и занимает в ней какое-то особое положение, то она называется особой линией плоскости.

К ним относятся линии уровня плоскости: горизонталь, фронталь и профильная прямая.

Горизонталь плоскости – это прямая, принадлежащая плоскости и параллельная горизонтальной плоскости проекций. Плоскость $\boldsymbol{\Gamma}$ [гамма] задана двумя параллельными прямыми. В плоскости $\boldsymbol{\Gamma}$ [гамма] построить горизонталь $\boldsymbol{h}$ [аш], то есть построить проекции горизонтали $\boldsymbol{h_1}$ [аш один] и $\boldsymbol{h_2}$ [аш два].

Проводим $\boldsymbol{h_2}$ [аш два] перпендикулярно линиям связи. Смотрите рисунок *а*.

Построение горизонтали в плоскости начинают с фронтальной проекции $\boldsymbol{h_2}$ [аш два], как еще было отмечено в модуле 1. Она всегда перпендикулярна линиям связи в системе $\boldsymbol{\Pi_2}$ [пи два] – $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один]. Ее горизонтальную проекцию $\boldsymbol{h_1}$ [аш один] находят по условию принадлежности плоскости. Так как $\boldsymbol{h}$ [аш] принадлежит плоскости, то $\boldsymbol{h_1}$ [аш один] находим по двум точкам в плоскости ***1*** и ***2***. Смотрите рисунок *б*. Горизонтальная проекция горизонтали $\boldsymbol{h_1}$ [аш один] есть натуральная величина $\boldsymbol{h}$ [аш].

Если плоскость занимает фронтально проецирующее положение, то горизонталь такой плоскости – **фронтально проецирующая прямая,** то есть единственная прямая в такой плоскости, параллельная плоскости проекций $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один].

Фронталь плоскости – это прямая, принадлежащая плоскости и параллельная фронтальной плоскости проекций.

Плоскость $\boldsymbol{\Sigma}$ [сигма] задана двумя пересекающимися прямыми $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{n}$. В плоскости $\boldsymbol{\Sigma}$ [сигма] построить фронталь $\boldsymbol{f}$, то есть построить проекции фронтали $\boldsymbol{f_1}$ и $\boldsymbol{f_2}$.

Проводим $\boldsymbol{f_1}$ перпендикулярно линиям связи. Смотрите рисунок *в*.

Построение фронтали в плоскости начинают с горизонтальной проекции $\boldsymbol{f_1}$, как еще было отмечено в модуле 1: она всегда перпендикулярна линиям связи в системе $\boldsymbol{\Pi_2}$ [пи два] – $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один]. Фронтальную проекцию фронтали $\boldsymbol{f_2}$ находят по принадлежности плоскости. Так как $\boldsymbol{f}$ принадлежит плоскости, то f_2 находим по двум точкам в плоскости ***1*** и ***2***. Смотрите рисунок *г*. Фронтальная проекция фронтали f_2 – натуральная величина f.

Если плоскость горизонтально проецирующая, то фронталь такой плоскости – **горизонтально проецирующая прямая**.

29 слайд

2.1.5 Прямая, параллельная плоскости
2.1.6. Взаимная параллельность плоскостей

Прямая параллельна плоскости, если она параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости.

Задача 1. Через точку K (K_2, K_1) провести прямую m (m_1), параллельную плоскости Σ [сигма], которая задана двумя пересекающимися прямыми. Точка K не принадлежит плоскости.

В плоскости Σ [сигма] проведём прямую n, параллельную m. Для этого сначала проведём $1_1 2_1 \parallel m_1$, затем найдём $1_2 2_2$, проведя линии связи в плоскости Σ [сигма].

Через $1_2 2_2$ проведем n_2, а через точку K_2 проведём m_2 параллельно n_2. Согласно пятому свойству параллельного проецирования прямая m параллельна прямой n, но n принадлежит Σ [сигма], следовательно, $m \parallel \Sigma$ [сигма].

Построение двух взаимно параллельных плоскостей основано на известном положении еще школьного курса геометрии, что **две плоскости взаимно параллельны, если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости.**

Задача 2. Через точку K ($K_1 K_2$) провести плоскость Δ [дельта], параллельную плоскости Γ [гамма], задана треугольником ABC. Плоскость Δ [дельта] задать пересекающимися прямыми. Точка K не принадлежит плоскости.

Алгоритм построения

Плоскость Δ [дельта] зададим пересекающимися прямыми m и n через точку K. Прямую m возьмём параллельно стороне CB треугольника. Если $m \parallel CB$, то $m_1 \parallel C_1B_1$, а $m_2 \parallel C_2B_2$.

Прямую n возьмём параллельно стороне AB треугольника. Если $n \parallel AB$, то $n_1 \parallel A_1B_1$, а $n_2 \parallel A_2B_2$.

Таким образом, плоскости Σ [сигма] и Δ [дельта] параллельны.

В заключение этого раздела можно сделать следующие выводы. В общем случае плоскость определяют три точки. Общий признак плоскостей частного положения – одна из проекций вырождается в прямую линию. Точку в плоскости находят по принадлежности какой-нибудь прямой этой плоскости. В любой плоскости можно построить прямые уровня. Через точку, лежащую вне плоскости, можно провести сколько угодно прямых, параллельных данной плоскости, но только одну плоскость, параллельную заданной.

30 слайд

2.2. Задание поверхности на чертеже

В этом разделе вы узнаете, что поверхности подразделяются на линейчатые и нелинейчатые, проецирующие и непроецирующие. Научитесь задавать и конструировать поверхности, строить точки и линии, принадлежащие поверхности.

Мы живем в мире поверхностей – многогранных и кривых, простых и сложных, созданных природой и руками человека.

В начертательной геометрии **поверхность определяется кинематически – как совокупность всех положений перемещающейся по определенному закону линии в пространстве.** Эта линия называется **образующей** l. Как правило, она скользит по некоторой неподвижной линии, называемой **направляющей – *m***. Направляющих может быть одна или несколько.

Образующая ***l***, скользя по неподвижной направляющей ***m***, создает плотную сеть линий. Такое упорядоченное множество линий поверхности называется ее **каркасом**. Каркасы бывают **непрерывными**, когда поверхность задана всем множеством образующих, или **дискретными**, когда имеется конечное число образующих.

При построении дискретного каркаса поверхности необходимо учитывать **закон каркаса**. **Закон каркаса – это закон движения образующей.**

Любое тело ограничивается своей поверхностью. Тело конечно и состоит из конкретного материала, например металла, пластмассы, древесины…

Поверхность является абстрактной фигурой, не имеющей толщины, то есть, образно говоря, это тонкая пленка, натянутая на каркас. Например, шар – это тело, которое ограничено сферой, то есть поверхностью.

На чертеже поверхность чаще всего задают с помощью **определителя**.

Определитель поверхности

Минимальная информация, необходимая и достаточная для однозначного задания поверхности в пространстве и на чертеже, есть определитель D поверхности. Определитель состоит из двух частей:

***D* = *G* + *A*.**

Геометрическая часть *G* устанавливает набор геометрических фигур или геометрических элементов, участвующих в образовании поверхности.

Алгоритмическая часть *A* устанавливает закон (характер) взаимодействия геометрических фигур в процессе образования поверхности. При построении чертежа поверхности алгоритмической частью определителя является закон каркаса поверхности.

Очерк поверхности. На чертеже (смотрите рисунок *а*) показана поверхность $\boldsymbol{\Gamma}$ [гамма], которую ортогонально проецируют на плоскость проекций $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один], (рисунок *б*). Проецирующие прямые касаются поверхности $\boldsymbol{\Gamma}$ [гамма] и образуют цилиндрическую поверхность $\boldsymbol{\Sigma}$ [сигма] $\perp$ $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один]. Эти проецирующие прямые касаются поверхности $\boldsymbol{\Gamma}$ [гамма] в точках, образующих некоторую линию $\boldsymbol{m}$, принадлежащую $\boldsymbol{\Gamma}$ [гамма], называемую **контурной линией** данной поверхности. Линия $\boldsymbol{m_1}$ (рисунок *в*) – это проекция контурной линии на горизонтальную плоскость проекций. Она может называться по-разному: очертание, линия очерка, очерковая линия. **Проекция контурной линии на плоскость проекций называется очерком проекции поверхности**. Другими словами, **очерк проекции поверхности – это линия, ограничивающая проекцию поверхности.**

Мир поверхностей велик и разнообразен. Существует много подходов к вопросу классификации поверхностей. За основу классификации чаще всего принимаются форма образующей и закон ее перемещения в пространстве.

Надо иметь в виду, что одни и те же поверхности могут быть отнесены одновременно к нескольким типам. Например, цилиндрическая поверхность вращения относится как к поверхностям вращения, так и к линейчатым; прямой геликоид – как к винтовым поверхностям, так и к линейчатым.

Перечислим поверхности, которые будут рассмотрены в данном курсе.

<u>К линейчатым поверхностям относятся:</u>

развертывающиеся поверхности: многогранные – к ним относятся призматическая, пирамидальная поверхности; кривые – к ним относятся цилиндрическая, коническая поверхности;

неразвертывающиеся: цилиндроид, коноид, косая плоскость или гиперболический параболоид.

<u>К поверхностям вращения относятся:</u>

закономерные: поверхности вращения второго порядка, например цилиндр, конус, сфера, эллипсоид, параболоид, гиперболоид однополостный, гиперболоид двуполостный; поверхности вращения четвертого порядка, к ним относятся тор открытый или кольцо, тор закрытый самосоприкасающийся, тор закрытый самопересекающийся;

поверхности вращения общего вида.

<u>**К винтовым поверхностям относятся**</u>**:** прямой геликоид, наклонный геликоид.

Алгоритм конструирования поверхности. ***Поверхность считается графически заданной на комплексном чертеже, если можно построить любое количество принадлежащих ей точек.***

Точка принадлежит поверхности, если она принадлежит какой-либо линии, лежащей на поверхности. Так какую линию лучше выбрать для построения точки на поверхности? Для линейчатых поверхностей обычно выбирают образующую. Для других поверхностей выбирают графически простые линии, к которым относят прямую и окружность.

Напомним, что основными требованиями, предъявляемыми к чертежам, является их **обратимость и наглядность**. При задании поверхности только геометрической частью определителя, то есть геометрическими элементами, можно построить, в принципе, каждую точку поверхности. Если рассмотреть пример задания замкнутой треугольной призмы проекциями геометрических элементов определителя, то можно утверждать, что поверхность действительно задана, так как имеется возможность построить недостающую проекцию точки. То есть чертеж обратим, но не является наглядным. Следовательно, необходимо дополнить чертеж поверхности ее очертаниями.

Конструирование поверхности начинается с построения дискретного каркаса, проекции которого обеспечат обратимость и наглядность чертежа поверхности. Сконструировать поверхность – это значит построить проекции поверхности, состоящие из проекций определителя и проекций характерных линий, к которым относятся линии контура и линии обреза.

Алгоритм конструирования поверхности, то есть последовательность построения чертежа любой поверхности: задать проекции геометрических элементов определителя, построить проекции дискретного каркаса, состоящего из конечного числа графически простых линий. Затем построить проекции линии обреза, которые для образования поверхности существенной роли не играют, они лишь ограничивают, обрезают поверхность. После этого определить видимость проекций поверхности и обвести видимые линии проекций поверхности сплошной толстой основной линией, невидимые – штриховой.

Такой алгоритм применяется для конструирования любой поверхности.

31 слайд

2.3. Задание линейчатых поверхностей

Развёртывающимися называются такие поверхности, которые могут совмещаться с плоскостью без складок и разрывов. К ним относятся многогранные и кривые поверхности.

Многогранные поверхности

Многогранники – геометрические тела, поверхность которых состоит из отсеков плоскостей, ограниченных многоугольниками.

Эти многоугольники называются гранями, например, ***ABS*** и ***BCS*** на рисунке *б*. Общие стороны смежных многоугольников называются ребрами, например, ***AS***, ***BS*** на рисунке *б*. Вершины многогранных углов, образованных его гранями, называются вершинами многогранника, например, ***S*** на рисунке *б*. Совокупность вершин и соединяющих их ребер называется дискретным каркасом многогранника (смотри рисунки *б, г*).

Различают два вида гранных поверхностей с одной направляющей.

Первый вид – пирамидальная поверхность общего вида, ее вы видите на рисунке *а*. Частный случай – пирамида, смотри рисунок *б*.

Второй вид – призматическая поверхность общего вида, ее вы видите на рисунке *в*. Частный случай – призма, смотри рисунок *г*.

32 слайд

2.3.1. Чертеж пирамидальной поверхности

Пирамидальная поверхность образуется в результате перемещения прямолинейной образующей *l* по ломаной направляющей *m*, причём в каждый момент движения образующая проходит через некоторую фиксированную точку *S*.

Задача 1. Сконструировать закрытую пирамидальную поверхность общего вида Φ [фи] с дискретным каркасом из трех образующих. Точка ***M*** принадлежит поверхности Φ [фи], построить $\mathbf{M_1}$.

Определитель поверхности указан на слайде.

Алгоритм построения: задать проекции элементов определителя – рисунок *а;* построить проекции поверхности или дискретный каркас – это значит провести три образующие, соединив точки ***A***, ***B***, ***C*** с точкой ***S*** – рисунок *б.* Далее построить проекции линии обреза, в данном случае это направляющая ***m*** или ***ABC***; определить видимость поверхности, то есть ребер и ломаной направляющей относительно Π_1 [пи один] и Π_2 [пи два] с помощью конкурирующих точек.

Точки ***1*** и ***2*** – фронтально конкурирующие, определяют видимость относительно Π_2 [пи два], следовательно, C_2S_2 – невидима. Однако в данном случае мы рассматриваем только боковую поверхность без основания, поэтому часть C_2S_2, не закрываемая проекцией грани $A_2B_2C_2$, видима.

Точки $\boldsymbol{3}$ и $\boldsymbol{4}$ – горизонтально конкурирующие, определяют видимость относительно $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один], поэтому $\boldsymbol{C_1S_1}$ – видима.

Точка $\boldsymbol{M}$, заданная $\boldsymbol{M_2}$, принадлежит грани $\boldsymbol{A_2B_2S_2}$. Чтобы построить $\boldsymbol{M_1}$, нужно через точку $\boldsymbol{M_2}$ провести какую-либо линию, принадлежащую $\boldsymbol{A_2B_2S_2}$, проще всего провести образующую $\boldsymbol{S_25_2}$ через $\boldsymbol{M_2}$, построить ее горизонтальную проекцию $\boldsymbol{S_15_1}$ и провести к ней линию связи из точки $\boldsymbol{M_2}$, чтобы получить $\boldsymbol{M_1}$. Точка $\boldsymbol{M_1}$ видима, так как на $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один] грань $\boldsymbol{A_1B_1S_1}$ – видима.

33 слайд

2.3.1. Чертеж пирамидальной поверхности

Задача 2. Сконструировать открытую пирамидальную поверхность общего вида $\boldsymbol{\psi}$ [пси]; *л*оманая линия $\boldsymbol{a}$ принадлежит $\boldsymbol{\psi}$ [пси]; построить $\boldsymbol{a_1}$. Определитель поверхности указан на слайде.

Алгоритм построения: задать проекции элементов определителя – рисунок *а*; построить проекции поверхности или дискретный каркас – это значит провести четыре образующие, соединив точки $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ с точкой $\boldsymbol{S}$, рисунок *б*. Затем построить проекции линии обреза, в данном случае это направляющая $\boldsymbol{m}$ или $\boldsymbol{ABCD}$; определить видимость поверхности, то есть ребер и ломаной направляющей относительно $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один] и $\boldsymbol{\Pi_2}$ [пи два] с помощью конкурирующих точек. Видимость относительно $\boldsymbol{\Pi_2}$ [пи два]: точки $\boldsymbol{1}$ и $\boldsymbol{2}$ – фронтально конкурирующие, $\boldsymbol{B_2D_2}$ будет видимая. Видимость относительно $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один]: точки $\boldsymbol{3}$ и $\boldsymbol{4}$ горизонтально конкурирующие, $\boldsymbol{B_1S_1}$ – видимая.

Проекцию ломаной линии $\boldsymbol{a_2}$ строят по точкам $\boldsymbol{5_2}$, $\boldsymbol{6_2}$, $\boldsymbol{7_2}$, $\boldsymbol{8_2}$, которые находят по принадлежности образующим, то есть ребрам, следовательно, $\boldsymbol{a_1}$ пройдет через точки $\boldsymbol{5_1}$, $\boldsymbol{6_1}$, $\boldsymbol{7_1}$, $\boldsymbol{8_1}$. Проводят $\boldsymbol{a_1}$ с учётом видимости.

34 слайд

2.3.2. Чертеж призматической поверхности

Призматическая поверхность образуется перемещением прямолинейной образующей *l* по ломаной направляющей *m*, при этом всегда оставаясь параллельной некоторому направлению *s*.

Задача. Сконструировать призматическую поверхность ***Ф*** [фи] с дискретным каркасом из трех образующих. Точка ***M*** принадлежит ***Ф***, ломаная линия ***a*** принадлежит ***Ф*** [фи]. Построить M_1 и a_2. Определитель поверхности указан на слайде.

Алгоритм построения: задать проекции элементов определителя, смотри рисунок *а.* Построить проекции поверхности или дискретный каркас. Длины ребер взять одинаковыми. Провести фронтальные проекции образующих из точек A_2, B_2, C_2 // s_2, отложить на них отрезки одинаковой длины: A_2A_2' [а два штрих], B_2B_2' [б два штрих], C_2C_2' [ц два штрих], линия A_2' [а два штрих] B_2' [б два штрих] C_2' [ц два штрих] будет фронтальной проекцией линии обреза. Затем провести горизонтальные проекции образующих из точек A_1, B_1, C_1 // s_1. Построить в проекционной связи горизонтальную проекцию линии обреза A_1' [а один штрих] B_1' [б один штрих] C_1' [с один штрих]. Только после этого можно определять видимость поверхности, рисунок *б*. Видимость относительно $П_2$ [пи два]: рассмотрим точки ***1*** и ***2*** – они фронтально конкурирующие, значит, B_2C_2 будет видимая. Видимость относительно $П_1$ [пи один]: рассмотрим точки ***3*** и ***4*** – они горизонтально конкурирующие, значит, $A_1'B_1'$ будет видимая. Обвести проекции поверхности с учетом видимости основной толстой линией.

35 слайд

2.3.2. Чертеж призматической поверхности

На этом слайде продолжаем решение задачи. Теперь надо построить горизонтальную проекцию точки $\boldsymbol{M}$, смотрите рисунок *в*. Точка $\boldsymbol{M}$ принадлежит грани $\boldsymbol{BCC'}$ [ц штрих] $\boldsymbol{B'}$ [б штрих], так как $\boldsymbol{M_2}$ задана видимой. Через $\boldsymbol{M_2}$ провести еще одну образующую $\boldsymbol{l_2}$ // $\boldsymbol{s_2}$. С помощью точки $\boldsymbol{9_2}$ находим $\boldsymbol{9_1}$. Построить $\boldsymbol{l_1}$ // $\boldsymbol{s_1}$, из точки $\boldsymbol{M_2}$ провести линию связи на $\boldsymbol{l_1}$, то есть определить положение точки $\boldsymbol{M_1}$, которая невидима, так как горизонтальная проекция грани $\boldsymbol{B_1C_1C_1'}$ [ц один штрих] $\boldsymbol{B_1'}$ [б один штрих] невидима.

Теперь выполним еще одно условие задачи, построить $\boldsymbol{a}$ ($\boldsymbol{a_2}$) по принадлежности призме $\boldsymbol{\Phi}$ [фи]. Ломаную линию $\boldsymbol{a}$ строят по принадлежности ее звеньев соответствующим граням. Для этого на $\boldsymbol{a_1}$ отмечают точки пересечения её с ребрами $\boldsymbol{5_1}$, $\boldsymbol{6_1}$, $\boldsymbol{7_1}$, $\boldsymbol{8_1}$. Из каждой точки проводят линию связи на $\boldsymbol{\Pi_2}$ [пи два] до пересечения с соответствующими ребрами.

Видимость $\boldsymbol{a_2}$ определяется видимостью граней, которым принадлежат звенья ломаной линии.

Обратите внимание на то, что у данной призмы (рисунок *в*) образующие, то есть ребра, есть прямые общего положения, поэтому призму называют наклонной, она занимает непроецирующее положение.

На рисунке *г* изображена призма, у которой образующие занимают горизонтально проецирующее положение. У данной призматической поверхности все ее образующие перпендикулярны плоскости проекций, поэтому поверхность займет **проецирующее** положение.

При этом ее ребра на $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один] спроецируются в точки $\boldsymbol{1_1}$, $\boldsymbol{2_1}$, $\boldsymbol{3_1}$, $\boldsymbol{4_1}$, а грани – в отрезки $\boldsymbol{1_12_1}$; $\boldsymbol{2_13_1}$; $\boldsymbol{3_14_1}$; $\boldsymbol{4_11_1}$.

Если ψ [пси] $\perp$ Π_1 [пи один], **то ее горизонтальная проекция** ψ_1 [пси один] **вырождается в линию, которая обладает собирательными свойствами и называется главной проекцией.**

Призма может занимать горизонтально проецирующее, фронтально проецирующее и профильно проецирующее положения.

36 слайд

2.3.3. Кривые линейчатые поверхности

Продолжаем изучение линейчатых поверхностей. Кривые линейчатые поверхности относятся к развёртывающимся. У линейчатых кривых поверхностей образующая l также является прямой линией, а направляющая m, в отличие от ломаной у гранных, кривая линия.

Различают два вида кривых линейчатых поверхностей с одной направляющей: цилиндрическая поверхность общего вида; коническая поверхность общего вида.

Цилиндрическая поверхность образуется перемещением прямолинейной образующей l **по кривой направляющей** m**, в каждый момент движения оставаясь параллельной заданному направлению** s**.**

Задача 1. Сконструировать цилиндрическую поверхность общего вида Θ [тэта]. Точка M (заданная M_2) и кривая линия a (заданная a_1) принадлежат Θ [тэта]. Построить M_1, a_2. Определитель поверхности указан на слайде.

Проекции элементов определителя уже заданы на чертеже (рисунок *а*). Строим две проекции дискретного каркаса поверхности из пяти образующих (рисунок *б*). Прямая s, определяющая направление движения образующей, занимает положение фронтали. На фронтальной проекции направляющей m_2 берут несколько точек 1_2, 2_2, 3_2, 4_2, 5_2, положение точки 4_2 определяется образующей, касательной к m_2. Из всех точек проводят линии связи, определяющие положение горизонтальных проекций этих точек 1_1, 2_1, 3_1, 4_1,

$\boldsymbol{5_1}$. Из точек $\boldsymbol{1_2}$, $\boldsymbol{2_2}$, $\boldsymbol{3_2}$, $\boldsymbol{4_2}$, $\boldsymbol{5_2}$ проводят образующие, параллельные $\boldsymbol{s_2}$. Из точек $\boldsymbol{1_1}$, $\boldsymbol{2_1}$, $\boldsymbol{3_1}$, $\boldsymbol{4_1}$, $\boldsymbol{5_1}$ проводят образующие, параллельные $\boldsymbol{s_1}$. На $\boldsymbol{\Pi_2}$ [пи два] строят линию обреза. Длина образующих выбирается одинаковой, можно задать в миллиметрах, например 45 мм. Образующие на $\boldsymbol{\Pi_2}$ [пи два] проецируются без искажения, как фронтали. Линию обреза на $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один] строят по точкам в проекционной связи.

37 слайд

2.3.4. Цилиндрическая поверхность

Продолжаем решение **задачи 1**. Определяем видимость поверхности относительно $\boldsymbol{\Pi_2}$ [пи два] с помощью конкурирующих точек ***A*** и ***B***, или рассуждая о положении образующих на $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один] относительно $\boldsymbol{\Pi_2}$ [пи два]. Образующая, проходящая через точку $\boldsymbol{1_1}$, ближе к наблюдателю, чем образующая, проходящая через $\boldsymbol{5_1}$, поэтому на $\boldsymbol{\Pi_2}$ [пи два] образующая $\boldsymbol{5_2}$ будет невидима (рисунок *в*). На горизонтальной проекции призмы нет пересечений, поэтому проекция вся видима. Теперь необходимо обвести поверхность с учетом видимости.

Чтобы построить $\boldsymbol{M_1}$, нужно через $\boldsymbol{M_2}$ провести образующую и построить ее горизонтальную проекцию, затем из точки $\boldsymbol{M_2}$ провести на нее линию связи (рисунок *г*).

Чтобы построить $\boldsymbol{a_2}$, нужно отметить точки пересечения $\boldsymbol{a_1}$ с образующими поверхности, построить на соответствующих фронтальных проекциях образующих проекции этих точек с помощью линий связи, соединить плавной кривой полученные точки с учетом видимости. Кривая от ***4*** до ***5*** образующих будет невидима на фронтальной проекции (рисунок *г*).

38 слайд

2.3.5. Коническая поверхность

Коническая поверхность образуется перемещением прямолинейной образующей *l* по кривой направляющей *m*, в каждый момент движения проходя через некоторую фиксированную точку *S*.

Задача 2. Сконструировать коническую поверхность общего вида Φ [фи]. Определитель поверхности указан на слайде. Проекции элементов определителя уже заданы на чертеже (рисунок *а*). Строим две проекции дискретного каркаса поверхности из шести образующих (рисунок *б*).

Проекциями точек 1_1, 2_1, 4_1 обозначены точки, принадлежащие очерковым образующим на горизонтальной проекции, при этом 4_1 является точкой касания очерковой к направляющей m_1.

Проекциями точек 1_2, 2_2, 3_2, 4_2 обозначены точки, принадлежащие очерковым образующим на фронтальной проекции, при этом 3_2, 4_2 являются точками касания очерковых образующих к направляющей m_2.

Определяем видимость поверхности сначала относительно Π_2 [пи два]. Здесь точки **5** и **6** являются фронтально конкурирующими, поэтому видна образующая $S_2 2_2$. Обводим ее сплошной основной линией. Определяем видимость поверхности относительно Π_1 [пи один]. Точки **7** и **8** – горизонтально конкурирующие, так как 8_2 выше 7_2, 7_1 берем в скобки. Следовательно, участок направляющей m_1 между образующими $S_1 4_1$ и $S_1 1_1$ не виден. Линию обреза не строить, так как в данном случае сама *m* является линией обреза.

Посмотрите на рисунок *в*. Чтобы построить M_1, через M_2 проводят образующую и строят ее горизонтальную проекцию с помощью линий связи. Так как горизонтальная проекция образующей является невидимой, то точка M_1 будет невидимой.

Чтобы построить $\boldsymbol{a_2}$ (рисунок *в*), на линии $\boldsymbol{a_1}$ отмечают несколько точек. Чем больше, тем точнее будет построена кривая. И строят их по аналогии с точкой $\boldsymbol{M}$, определяют видимость $\boldsymbol{a_2}$.

39 Слайд

2.3.6. Поверхности Каталана

К неразвертывающимся линейчатым поверхностям с двумя направляющими относятся поверхности с плоскостью параллелизма, или поверхности Каталана.

Это линейчатые поверхности с двумя направляющими $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{n}$**, у которых образующая прямая линия** $\boldsymbol{l}$ **в каждый момент движения, пересекая две направляющие, остается параллельной некоторой неподвижной плоскости, называемой плоскостью параллелизма.**

Различают три вида таких поверхностей. **Это цилиндроид,** если направляющими являются две кривые линии – плоские или пространственные (рисунок *а*). **Это коноид**, если одна из направляющих прямая линия, а вторая – кривая (рисунок *б*). Если обе направляющие – прямые линии, то **это гиперболический параболоид, или косая плоскость** (рисунок *в*).

Геометрическая графическая часть определителя будет состоять из следующих элементов: две направляющие и плоскость параллелизма, которая указывает направление движения прямой образующей.

Задача 1. Сконструировать поверхность коноида $\boldsymbol{T}$ [т].

Определитель поверхности указан на слайде. Построить точку $\boldsymbol{M}$ (заданную $\boldsymbol{M_2}$), принадлежащую $\boldsymbol{T}$ [т], то есть $\boldsymbol{M_1}$.

Проекции элементов определителя уже заданы на чертеже (рисунок *г*), образующие $\boldsymbol{m}$ $(\boldsymbol{m_1}, \boldsymbol{m_2})$ и $\boldsymbol{n}$ $(\boldsymbol{n_1}, \boldsymbol{n_2})$. Направляющая $\boldsymbol{n}$ – фронтально проецирующая прямая.

Сначала на $\boldsymbol{m_1}$ отметить **9** точек, чем больше, тем точнее построение поверхности, $\boldsymbol{1_1, 2_1, 3_1, \ldots 9_1}$. Через эти точки провести девять образующих $\boldsymbol{l}$ параллельно $\boldsymbol{\Pi_2}$ [пи два], все $\boldsymbol{l_1} \perp$ линиям связи, то есть образующие занимают положение фронталей по условию. Построить фронтальные проекции этих точек на $\boldsymbol{m_2}$. Затем построить фронтальные проекции образующих, соединяя все точки на $\boldsymbol{m_2}$ с фронтальной проекцией $\boldsymbol{n_2}$, которая спроецировалась в точку. Линиями обреза являются образующие ***1*** и ***9***. После построения дискретного каркаса определяется видимость поверхности. На проекциях этой поверхности отсутствуют конкурирующие точки, то есть нет пересекающихся элементов. Все образующие и направляющие видимы. Обвести проекции поверхности основной толстой линией. Для построения $\boldsymbol{M_1}$ необходимо через $\boldsymbol{M_2}$ провести дополнительную образующую, построить ее горизонтальную проекцию и провести линию связи из точки $\boldsymbol{M_2}$ для построения $\boldsymbol{M_1}$.

40 слайд

2.3.6. Поверхности Каталана

Задача 2. Сконструировать поверхность цилиндроида $\boldsymbol{\Phi}$ [фи], построить $\boldsymbol{M}$ (заданную $\boldsymbol{M_2}$) по принадлежности $\boldsymbol{\Phi}$ [фи], то есть $\boldsymbol{M_1}$.

Проекции элементов определителя уже заданы на чертеже (рисунок *а*). Строим две проекции дискретного каркаса поверхности из пяти образующих (рисунок *б*). Начинать можно с любой направляющей. На $\boldsymbol{m_2}$, например, взять **5** точек, но чем больше, тем точнее построение поверхности, $\boldsymbol{1_2, 2_2, 3_2, 4_2, 5_2}$, (рисунок *а*). Через эти точки провести пять образующих $\boldsymbol{l \parallel \Pi_1}$ [пи один], получаем $\boldsymbol{6_2, 7_2, 8_2, 9_2, 10_2}$, (рисунок *б*), все $\boldsymbol{l_2}$ перпендикулярны линиям связи, то есть образующие занимают положение горизонталей. Теперь надо построить горизонтальные проекции этих точек на $\boldsymbol{m_1}$ и $\boldsymbol{n_1}$. Построить горизонтальные проекции образующих, соединяя $\boldsymbol{1_1–10_1}$; $\boldsymbol{2_1–9_1}$; $\boldsymbol{3_1–8_1}$; $\boldsymbol{4_1–7_1}$; $\boldsymbol{5_1–6_1}$ (рисунок *б*). Линиями обреза являются образующие ***1–10***, ***5–6***.

Определить видимость поверхности (рисунок *в*). Видимость относительно Π_2 [пи два] определять не надо, так как все образующие видимы, то есть нет пересечений, нет конкурирующих точек. Видимость относительно Π_1 [пи один] можно определить двумя способами: образующая $1_2 10_2$ выше всех, поэтому она видима на Π_1 [пи один]. Другой способ: точки A и B – горизонтально конкурирующие, по их фронтальным проекциям определяется, что точка A выше, чем точка B. Обвести проекции поверхности плавной огибающей кривой, учитывая, что это линейчатая, но кривая поверхность.

Для построения M_1 необходимо провести дополнительную образующую C_2D_2 и C_1D_1, построить M_1 по принадлежности CD.

41 слайд

2.3.6. Поверхности Каталана

Задача 3. Сконструировать поверхность гиперболического параболоида, или косой плоскости Γ. Построить кривую a (заданную a_2) по принадлежности Γ [гамма], то есть a_1. Проекции гиперболического параболоида строятся аналогично цилиндроиду.

Обратите внимание на плоскость параллелизма: если у цилиндроида это горизонтальная плоскость проекций, у коноида – фронтальная плоскость проекций, то у данной косой плоскости Ψ [пси] фронтально проецирующая плоскость. В остальном алгоритм повторяется.

Начинать можно с любой направляющей. На m_2, например, взять 7 точек, но чем больше, тем точнее построение поверхности, 1_2, 2_2, $\ldots 7_2$. Через эти точки провести семь образующих l параллельно Ψ_2 [пси два], соответственно точки 8_2, 9_2 $\ldots$ 14_2. Все образующие занимают положение прямых общего положения.

Теперь построить горизонтальные проекции этих точек на $\boldsymbol{m_1}$ и $\boldsymbol{n_1}$ и горизонтальные проекции образующих, соединяя ***1₁–14₁***; ***2₁–13₁***; ***3₁–12₁***; ***4₁–11₁*** и так далее. Порядок соединения точек на горизонтальной плоскости проекций надо смотреть на фронтальной плоскости проекций. Линиями обреза являются образующие ***1–14, 7–8***.

Определить видимость поверхности. На фронтальной плоскости проекций все элементы поверхности видимы, то есть нет пересечений, значит, нет конкурирующих точек.

На горизонтальной плоскости проекций образующие пересекаются. Отмечаются горизонтально конкурирующие точки и определяется видимость горизонтальной проекции поверхности. Видимость относительно $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один] можно определить другим способом. На горизонтальной проекции образующая $\boldsymbol{7_2}$–$\boldsymbol{8_2}$ расположена выше всех, значит, на $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один] она будет видима. Обвести проекции поверхности плавной огибающей кривой, учитывая, что это линейчатая, но кривая поверхность.

Кривую ***a*** строить по точкам, каждую аналогично точке ***M*** в предыдущих задачах, то есть отметить точки пересечения $\boldsymbol{a_2}$ с образующими, из каждой точки провести линию связи на соответствующие горизонтальные проекции образующих. На чертеже это показано стрелками. Соединить все точки плавной кривой с учетом видимости, смотри чертеж.

42 слайд

2.4. Задание поверхностей вращения

Поверхности вращения широко распространены в технике, это связано с простотой их обработки.

Поверхность вращения образуется в результате вращения какой-либо линии – образующей ***l*** вокруг неподвижной оси ***i***.

Образующая $\boldsymbol{l}$ может быть как прямая, так и кривая линия – плоская или пространственная.

Свойства поверхности вращения

Каждая точка образующей $\boldsymbol{l}$ при вращении вокруг оси опишет окружность, плоскость которой перпендикулярна оси. Эти окружности называются **параллелями**. Все параллели параллельны между собой (рисунок *а*).

Самая большая параллель называется **экватором**; самая малая параллель называется **горлом**; у некоторых поверхностей вращения отмечают верхнюю $\boldsymbol{c}$ и нижнюю $\boldsymbol{d}$ параллели, часто они являются линиями обреза поверхности.

Линии, которые получаются в сечении поверхности вращения плоскостями, проходящими через ось, называются **меридианами**. Все меридианы равны между собой. Каждый меридиан рассекается этой плоскостью на два полумеридиана – правый и левый.

При изображении поверхности вращения на комплексном чертеже часто поверхность располагают так, чтобы ее ось была перпендикулярна к плоскости проекций, например, $\boldsymbol{i} \perp \boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один]. Тогда все параллели проецируются на соответствующую плоскость $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один] без искажения, причем экватор и горло на такой поверхности определяют горизонтальную проекцию поверхности.

Меридиан, расположенный во фронтальной плоскости уровня, проецируется без искажения на плоскость $\boldsymbol{\Pi_2}$ [пи два]. Этот меридиан называется **фронтальным** или **главным**, он определяет очерк проекции поверхности на фронтальной плоскости проекций и границу видимости относительно $\boldsymbol{\Pi_2}$ [пи два].

Поверхности вращения общего вида могут быть заданы различными способами. Рассмотрим подробно один из них.

43 слайд

2.4. Задание поверхностей вращения

Задача. Построить поверхность вращения общего вида ***Ф*** [фи]**.** Геометрическая часть определителя и закон каркаса заданы на чертеже.

Алгоритм построения

Проекции элементов определителя уже заданы на чертеже. Графическая часть определителя задана осью ***i*** и образующей ***l***, которая совпадает с плоскостью фронтального меридиана (рисунок *б*). Теперь надо достроить фронтальную проекцию левого полумеридиана. Провести проекции параллелей в виде отрезков прямых тонкими линиями, перпендикулярных оси ***i***: горло, экватор, нижняя и верхняя; дополнительные параллели для более точного построения кривой (рисунок *в*). После симметрично достроенного левого полумеридиана обвести основной сплошной линией очерк поверхности на $\boldsymbol{\Pi_2}$ [пи два]. Горизонтальная проекция поверхности вращения есть концентрично расположенные окружности, то есть параллели, которые проецируются без искажения на $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один]. Так как $\boldsymbol{i \perp \Pi_1}$ [пи один], то $\boldsymbol{i_1}$ спроецируется в точку, которая будет являться центром этих окружностей. Экватор, верхняя параллель, горло на $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один] видимы, нижняя параллель будет невидима, так как расположена ниже экватора, а диаметр ее больше горла (рисунок *г*).

Видимость точек, принадлежащих поверхности, относительно $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один] (рисунок *г*), определяется особыми параллелями, то есть заштрихованные зоны на фронтальной проекции поверхности; относительно $\boldsymbol{\Pi_2}$ [пи два] определяется главным меридианом, то есть заштрихованная зона на горизонтальной проекции.

Нахождение точки на любой поверхности вращения состоит из нескольких этапов. Рассмотрим это на конкретных примерах.

Пусть точки $\boldsymbol{A}$ (заданная $\boldsymbol{A_2}$) и $\boldsymbol{B}$ (заданная $\boldsymbol{B_1}$) принадлежат поверхности $\boldsymbol{\Phi}$ [фи]. Построить $\boldsymbol{A_1}$ и $\boldsymbol{B_2}$.

Для этого через точку $\boldsymbol{A_2}$ проводят проекцию параллели $\boldsymbol{n_2}$, замеряют радиус этой параллели **от оси до очерка** и строят ее горизонтальную проекцию $\boldsymbol{n_1}$. Затем из точки $\boldsymbol{A_2}$ проводят линию связи на $\boldsymbol{n_1}$, которая пересекает $\boldsymbol{n_1}$ в двух точках, выбирают ближнюю, так как $\boldsymbol{A_2}$ видима, то есть точка $\boldsymbol{A}$ должна находиться перед главным меридианом. Потом определяют видимость точки $\boldsymbol{A_1}$, она будет невидима, так как $\boldsymbol{A_2}$ расположена ниже экватора, то есть в незаштрихованной зоне.

Чтобы построить недостающую проекцию точки $\boldsymbol{B}$, через точку $\boldsymbol{B_1}$ проводят параллель $\boldsymbol{m_1}$ и отмечают точку $\boldsymbol{M_1}$ пересечения её с главным меридианом, по принадлежности которому отмечают $\boldsymbol{M_2}$, $\boldsymbol{M_2'}$ [эм два штрих], выбирают $\boldsymbol{M_2}$, так как $\boldsymbol{B_1}$ на $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один] видима, то есть ее параллель на $\boldsymbol{\Pi_2}$ [пи два] должна находиться в зоне видимости относительно $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один]. Через $\boldsymbol{M_2}$ проводят фронтальную проекцию этой параллели $\boldsymbol{m_2}$, а из точки $\boldsymbol{B_1}$ проводят линию связи до пересечения с $\boldsymbol{m_2}$ и определяют видимость $\boldsymbol{B_2}$. Она будет невидима, так как $\boldsymbol{B_1}$ находится за главным меридианом, то есть в незаштрихованной зоне.

44 слайд

2.4.1. Поверхности вращения второго порядка

Поверхность, определяемая уравнением второй степени в пространственной декартовой системе координат, называется поверхностью второго порядка. Или если кривая второго порядка вращается вокруг оси, то она образует в пространстве поверхность вращения второго порядка.

Рассмотрим **цилиндр вращения**, или прямой круговой цилиндр.

Цилиндр вращения образуется вращением образующей *l* прямой линией вокруг параллельной ей оси (рисунок *а*).

Геометрическая часть определителя и закон каркаса заданы на чертеже. Построить кривую линию ***a*** ***(***заданную ***a_2)*** по принадлежности ***Г*** [гамма], то есть построить ***a_1*** и ***a_3***.

Алгоритм построения

Если ***i*** занимает проецирующее положение относительно ***$П_1$*** [пи один], ***l // i***, то и ***l*** является горизонтально проецирующей прямой, значит, цилиндр ***Г*** [гамма] занимает **проецирующее** положение относительно ***$П_1$*** [пи один]. Фронтальная и профильная проекции цилиндра – одинаковые прямоугольники, так как у поверхностей вращения все меридианы равны.

Горизонтальная проекция ***$Г_1$*** [гамма один] есть главная проекция, которая обладает собирательными свойствами, поэтому ***a_1*** совпадает с ***$Г_1$*** [гамма один]. Проекция ***a_2*** видимая, поэтому ***a_1*** расположена перед плоскостью фронтального меридиана.

Профильную проекцию ***a_3*** строят по свойству принадлежности линии данной поверхности. Точка ***3*** расположена на профильном меридиане, поэтому точка ***3_3*** является границей видимости кривой ***a*** на ***$П_3$*** [пи три].

Рассмотрим **конус вращения**.

Конус вращения образуется вращением прямолинейной образующей *l* вокруг оси, которую она пересекает (рисунок *б*).

Здесь ***l*** – прямая линия, поэтому цилиндр и конус относят также и к линейчатым поверхностям.

На чертеже конус ***Ф*** [фи] можно задавать различными способами. Рассмотрим один из них.

Геометрическая часть определителя и закон каркаса заданы на чертеже. Построить кривую линию ***a*** (заданную ***a_2***) по принадлежности ***Г*** [гамма], то есть построить ***a_1*** и ***a_3***.

Алгоритм построения

На фронтальной проекции достраиваем левый полумеридиан симметрично правому. Строим профильную проекцию конуса, это будет тот же треугольник, так как у поверхностей вращения все меридианы равны. Обратите внимание, что главный меридиан обведен красным цветом, а профильный меридиан обведен желтым для удобства построения кривой ***a*** по принадлежности поверхности ***Ф*** [фи]. Сначала отмечают на $\boldsymbol{a_2}$ особые точки (рисунок *б*). Строят точку $\boldsymbol{1_3}$ по принадлежности параллели основания, строят точку $\boldsymbol{4_3}$ по принадлежности главному меридиану, строят точку $\boldsymbol{2_3}$ по принадлежности профильному меридиану. Затем строят промежуточные. Сначала $\boldsymbol{3_1}$ по принадлежности параллели радиусом $\boldsymbol{R_2^3}$ [эр два три], точку $\boldsymbol{2_1}$ строят по принадлежности параллели $\boldsymbol{R_2^2}$ [эр два два]. Профильные проекции точек ***1*** и ***3*** строят, как показано на чертеже, то есть по соответствующим линиям связи откладывают расстояния, которые замеряют на $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один] параллельно оси ***y*** от главного меридиана. Далее определяют видимость кривой ***a***. На $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один] кривая $\boldsymbol{a_1}$ видима, так как на $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один] видима вся поверхность конуса. На $\boldsymbol{\Pi_3}$ [пи три] границей видимости служит профильный меридиан, то есть точка $\boldsymbol{2_3}$.

45 слайд

2.4.1. Поверхности вращения второго порядка

Параболоид вращения образуется вращением параболы вокруг её оси (рисунок *а*). Параболоид применяется в прожекторах и фарах автомобилей, где используются фокальные свойства параболы. Если в фокусе параболы поместить источник света, то световые лучи, отражаясь от параболы, будут распространяться параллельно друг другу. На этом же свойстве основано и действие звукоуловителей и радиотелескопов. Точка $\boldsymbol{M}$ строится, как и в предыдущих задачах, через параллель.

Гиперболоид вращения однополостный образуется вращением гиперболы вокруг её мнимой оси (рисунок *б*).

Однополостный гиперболоид может быть образован вращением гиперболы вокруг ее мнимой оси $\boldsymbol{\Sigma}$ [сигма], причем $\boldsymbol{i} \perp \boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один]. А может быть образован и вращением прямой линии вокруг скрещивающейся с ней оси. Построение такой поверхности будет подробно рассмотрено ниже. Эту поверхность относят и к линейчатым поверхностям.

Выдающийся русский инженер Шухов в 1921 году предложил использовать однополостный гиперболоид для строительства прочных и технологичных конструкций, например радиомачт, водонапорных башен, маяков.

Только три поверхности вращения второго порядка имеют в качестве образующей прямую линию. В зависимости от расположения этой прямой относительно оси можно получить три вида линейчатых поверхностей вращения второго порядка: цилиндр, конус и однополостный гиперболоид вращения.

46 слайд

2.4.1. Поверхности вращения второго порядка

Эллипсоид образуется вращением эллипса вокруг оси. Все свойства поверхности вращения сохраняются.

Эллипсоид сжатый образуется вращением эллипса вокруг малой оси (рисунок *а*).

Эллипсоид вытянутый образуется вращением эллипса вокруг большой оси (рисунок *б*).

Точки ***А*** строятся, как и в предыдущих задачах, через параллели.

47 слайд

2.4.1. Поверхности вращения второго порядка

Рассмотрим следующую поверхность вращения второго порядка. **Сфера образуется вращением окружности *l* вокруг оси, то есть ее диаметра.** Поэтому все проекции сферы есть окружности.

Задача 1. Сконструировать поверхность сферы ***Г*** [гамма]. Построить точку ***А*** (заданную A_2) по принадлежности ***Г*** [гамма], то есть проекции точки A_1, A_3. Красным цветом показан экватор ***а*** (a_1, a_2, a_3), который определяет видимость относительно Π_1 [пи один]. Зеленым цветом показан главный меридиан ***в*** ($в_1$, $в_2$, $в_3$), который определяет видимость относительно Π_2 [пи два]. Синим цветом показан профильный меридиан ***с*** (c_1, c_2, c_3), который определяет видимость относительно Π_3 [пи три].

Алгоритм построения точек A_1, A_3 заданной фронтальной проекцией A_2. Для построения A_1 через точку A_2, которая задана как видимая, проводят параллель, замеряют радиус R_2 от оси до очерка, строят горизонтальную проекцию этой параллели. Затем проводят линию связи из точки A_2 на нее и определяют положение точки A_1. Определяют видимость A_1, эта проекция точки ***А*** будет невидима, так как фронтальная проекция точки A_2 расположена ниже экватора, то есть находится в незаштрихованной зоне. Для построения A_3 из точки A_2 проводят линию связи на Π_3 [пи три]. На Π_1 [пи один] замеряют расстояние Δy [дельта игрек] от фронтального меридиана $в_1$ параллельно оси ***y***, переносят на Π_3 [пи три], откладывая от проекции фронтального меридиана $в_3$ по линии связи параллельно оси ***y***, и отмечают точку A_3. Определяют видимость A_3. Она будет видима, так как точка A_1 на $П_1$ [пи один] расположена перед профильным меридианом, то есть на $П_1$ [пи один] находится в заштрихованной зоне.

Задача 2. Сконструировать поверхность сферы ***Ф*** [фи]. Построить недостающие проекции кривой ***a*** по принадлежности ***Ф*** [фи], то есть проекции a_1, a_3.

Строят в проекционной связи три проекции сферы, то есть окружности одного диаметра. Задают фронтальную проекцию кривой ***a*** и выстраивают ее горизонтальную и профильную проекции по точкам.

Алгоритм построения проекций кривой a_1 и a_3.

Сначала отмечают особые точки, которые находятся на особых параллелях ***1***, ***2***, ***3***, ***5***. Строят точки 2_1 и 2_3 по принадлежности экватору. Строят точки 1_1 и 1_3; 3_1 и 3_3 по принадлежности главному меридиану. Строят точки 5_3 и 5_1 по принадлежности профильному меридиану.

Промежуточные точки ***4***, ***6***, ***7*** находят с помощью параллелей, радиусы которых замеряют **от оси до очерка** на $П_2$ [пи два]. Профильные проекции точек находят аналогично точке ***A*** (рисунок *а*).

Особые параллели и точки на них являются границами видимости кривой на соответствующих проекциях сферы.

48 слайд

2.4.2. Гиперболоид вращения однополостный

Алгоритм построения главного меридиана однополостного гиперболоида. Однополостный гиперболоид вращения можно отнести и к линейчатым поверхностям, так как он образуется при вращении прямой образующей вокруг оси. Причем образующая и ось занимают скрещивающееся положение. Внимательно проследите процесс конструирования этой поверхности, так как в эпюрах она встречается часто. Построить поверхность $\boldsymbol{\Psi}$ [пси], у которой образующая есть прямая линия.

При построении однополостного гиперболоида как линейчатой поверхности главный меридиан строится по точкам. Чем больше точек, тем точнее построения. Рассмотрим алгоритм построения одной точки $\boldsymbol{E}$, взятой на образующей.

Графический алгоритм построения одной точки

Произвольно взять точку $\boldsymbol{E_1}$ на образующей (рисунок *а*). Проведя линию связи из $\boldsymbol{E_1}$, определяют ее фронтальную проекцию $\boldsymbol{E_2}$ по принадлежности образующей, проводят через нее плоскость будущей параллели (рисунок *б*). Вводят точку $\boldsymbol{E_1}$ на $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один] в плоскость фронтального меридиана и получают точку $\boldsymbol{E_1'}$ [е один штрих] по окружности, радиус которой определяется расстоянием от точки $\boldsymbol{E_1}$ до оси (рисунок *в*). Проводят линию связи до пересечения с плоскостью параллели в точке $\boldsymbol{E_2'}$ [е два штрих] (рисунок *г*).

49 слайд

2.4.2. Гиперболоид вращения однополостный

Графический алгоритм построения поверхности. Аналогично строятся все точки образующей поверхности. Построить проекции поверхности $\boldsymbol{\Psi}$ [пси]. Определитель поверхности указан на слайде.

Сначала надо распределить точки на $\boldsymbol{l_1}$, которые определят положение будущих параллелей на $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один] и $\boldsymbol{\Pi_2}$ [пи два]. Точка $\boldsymbol{1_1}$ определит положение горла, так как это ближайшая точка к оси вращения, определяют ее с помощью перпендикуляра из $\boldsymbol{i_1}$ к $\boldsymbol{l_1}$. Точка $\boldsymbol{2_1}$ определит положение верхней параллели. Точка $\boldsymbol{3_1}$ определит положение нижней параллели. Точки

$\boldsymbol{4_1}$, $\boldsymbol{5_1}$, $\boldsymbol{6_1}$ являются промежуточными. Теперь надо построить фронтальные проекции точек $\boldsymbol{1_2}$–$\boldsymbol{6_2}$.

Далее все точки нужно ввести в плоскость фронтального меридиана, используя основное свойство поверхности вращения: каждая точка вращается вокруг оси по окружности или параллели, плоскость которой перпендикулярна оси, как показано на предыдущем слайде, то есть построить точки $\boldsymbol{1_1'}$ [один один штрих] – $\boldsymbol{6_1'}$ [шесть один штрих] (рисунок *а*).

В проекционной связи строят фронтальные проекции этих точек $\boldsymbol{1_2'}$ [один два штрих] – $\boldsymbol{6_2'}$ [шесть два штрих] (рисунок *б*). Полученные точки соединяют плавной кривой, чтобы получить правый полумеридиан. Все полумеридианы поверхностей вращения равны, поэтому симметрично правому достраивают левый. Полученный главный меридиан обводят толстой сплошной линией. После этого приступают к построению горизонтальной проекции поверхности. Чтобы достроить горизонтальную проекцию поверхности, необходимо провести несколько концентрично расположенных окружностей. Определяют видимость поверхности, для этого надо рассмотреть заштрихованные зоны.

Когда проекции поверхности построены, строят недостающие проекции указанных точек по принадлежности поверхности, то есть точки $\boldsymbol{A_1}$ и $\boldsymbol{B_2}$.

Точки находят так же, как на любой поверхности вращения. Через точку $\boldsymbol{A_2}$ проводят параллель до пересечения с главным меридианом в точке $\boldsymbol{M_2}$, находят $\boldsymbol{M_1}$. Через $\boldsymbol{M_1}$ проводят горизонтальную проекцию этой параллели или замеряют радиус этой параллели на $\boldsymbol{\Pi_2}$ [пи два] и проводят на $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один]. Затем проводят линию связи из точки $\boldsymbol{A_2}$, которая пересекает построенную параллель в двух точках. Выбрать нужно ту, что дальше, так как точка $\boldsymbol{A_2}$ невидимая, значит, сама точка находится за фронтальным меридианом, то есть сзади. Точку $\boldsymbol{A_1}$ нужно взять в скобки, так как $\boldsymbol{A_2}$ не расположена в зоне видимости относительно ***П₁*** [пи один], она расположена в незаштрихованной зоне.

Для построения недостающей проекции точки ***B***, через точку $\boldsymbol{B_1}$ проводят параллель, то есть вводят точку в плоскость фронтального меридиана в точке $\boldsymbol{N_1}$**,** с помощью линии связи находят $\boldsymbol{N_2}$. Через $\boldsymbol{N_2}$ проводят фронтальную проекцию этой параллели, из $\boldsymbol{B_1}$ проводят линию связи и получают $\boldsymbol{B_2}$. Точка $\boldsymbol{B_2}$ видима, так как $\boldsymbol{B_1}$ находится перед фронтальным меридианом.

50 слайд

2.4.3. Тор – поверхность четвертого порядка

Форму тора имеют ободы маховиков и шкивов, галтели, то есть плавные переходы от одной поверхности изделия к другой, создаваемые с целью уменьшения напряжений в месте перехода.

Поверхность тора образуется при вращении окружности вокруг оси, расположенной в плоскости этой окружности, но не проходящей через ее центр.

Определитель ***Θ*** [тэта], ***l*** вращается вокруг ***i***, ***l*** – окружность. Произвольная прямая пересекает тор в общем случае в четырех точках, следовательно, это поверхность четвертого порядка.

Существует несколько разновидностей торовых поверхностей. Рассмотрите подробно пространственное и плоское изображения торовых поверхностей на слайде, прочитав название каждого.

51 слайд

2.4.3. Тор – поверхность четвертого порядка

Задача. Построить поверхность вращения тора – кольца ***Θ*** [тэта]. Геометрическая часть определителя и закон каркаса заданы на чертеже.

Алгоритм построения. Проекции геометрической части определителя уже заданы на чертеже (рисунок *а*). Сначала надо построить горизонтальную проекцию правого полумеридиана (рисунок *б*). Достроить левый полумеридиан симметрично правому, как у всех поверхностей вращения. Фронтальная проекция есть концентрично расположенные особые параллели. Красным цветом изображено горло ***a***, зеленым цветом показан экватор ***в***, дальняя ***c*** и ближняя ***d*** параллели показаны розовой линией. Теперь нужно обвести проекции поверхности основной толстой линией. Штриховка на проекциях показывает границы видимости поверхности. Значит, все точки, расположенные на горизонтальной проекции поверхности $\boldsymbol{\Theta_1}$ [тета один] в заштрихованной зоне, будут видимы на фронтальной плоскости проекций, то есть на $\boldsymbol{\Pi_2}$ [пи два]. Все точки, расположенные на фронтальной проекции поверхности $\boldsymbol{\Theta_2}$ [тэта два] в заштрихованной зоне, будут видимы на горизонтальной плоскости проекций, то есть на $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один]. На рисунке *в* изображена кривая линия ***n***, заданная своей фронтальной проекцией $\boldsymbol{n_2}$. Достроить недостающую проекцию $\boldsymbol{n_1}$, построение которой будет рассмотрено на следующем слайде.

52 слайд

2.4.3. Тор – поверхность четвертого порядка

Алгоритм построения $\boldsymbol{n_1}$ по принадлежности ***Θ*** [тэта]. Кривую $\boldsymbol{n_1}$ строят по точкам, используя свойство принадлежности точки поверхности, проводя через точку простейшую линию. Для тора, как и для всех поверхностей вращения, простейшей является параллель, то есть окружность.

Сначала выбирают особые точки (рисунок *а*). Точки $\boldsymbol{1_2}$ и $\boldsymbol{2_2}$ принадлежат экватору, точка $\boldsymbol{3_2}$ совпадает с $\boldsymbol{4_2}$, а $\boldsymbol{7_2}$ совпадает с $\boldsymbol{8_2}$, эти точки принадлежат ближней и дальней параллелям соответственно. Точка $\boldsymbol{5_2}$ совпадает с $\boldsymbol{6_2}$, обе принадлежат главному меридиану, то есть образующей $\boldsymbol{l_2}$. Точка $\boldsymbol{9_2}$ совпадает с $\boldsymbol{10_2}$, обе определяют положение точек, максимально приближенных к оси, то есть определяют кратчайшее расстояние между ветвями кривой. Эти точки будут расположены на самых малых параллелях, радиус которых определяется построением перпендикуляра из центра поверхности $\boldsymbol{i_2}$.

Все особые точки, кроме ***9***, ***10***, находят без дополнительных построений, так как они принадлежат особым линиям, которые на чертеже уже есть.

Для построения точек ***9***, ***10*** проводят через $\boldsymbol{9_2}$ и $\boldsymbol{10_2}$ параллели до пересечения с главным меридианом в точках $\boldsymbol{K_2}$ и $\boldsymbol{L_2}$. Находят положение этих точек $\boldsymbol{K_1}$ и $\boldsymbol{L_1}$ на $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один], через них проводят горизонтальные проекции параллелей, на которые проводят линии связи из соответствующих точек $\boldsymbol{9_2}$ и $\boldsymbol{10_2}$, чтобы получить точки $\boldsymbol{9_1}$, $\boldsymbol{10_1}$.

Промежуточные точки ***11***, ***12***, ***13***, ***14***, ***15***, ***16*** строят по аналогии с точками ***9***, ***10*** с помощью параллелей (рисунок *б*). Затем плавной кривой соединяют все точки.

Видимость кривой $\boldsymbol{n_1}$ определяется ближней и дальней параллелями, точками ***7*** и ***8***, поэтому кривая ***n*** на $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один] будет видима от точки $\boldsymbol{7_1}$ до точки $\boldsymbol{8_1}$ через $\boldsymbol{2_1}$, все остальные точки кривой будут невидимы, так как на $\boldsymbol{\Pi_2}$ [пи два] они находятся вне заштрихованной зоны.

53 слайд

2.5. Прямой геликоид

Винтовые поверхности имеют широкое применение в технике, искусстве, дизайне, архитектуре: болты, винты, шнеки, сверла, пружины, прессы, домкраты, лестницы.

Винтовой называется поверхность, которая описывается какой-либо линией, то есть образующей, при ее винтовом движении. Как уже отмечалось в модуле 1, винтовое движение является сложным, когда каждая точка образующей совершает одновременно два движения – вращательное и поступательное. При этом вращение происходит вокруг оси винта, а поступательное движение – вдоль оси винта.

Если образующая – прямая линия, то поверхность называется линейчатой винтовой поверхностью или **геликоидом**. Геликоид является основой образования резьбы.

Геликоиды подразделяются на прямые и наклонные в зависимости от того, перпендикулярна образующая к оси геликоида или наклонена. **Шагом** винтовой поверхности называется линейное перемещение образующей за один полный оборот.

Прямой геликоид образуется движением прямолинейной образующей *l* по двум направляющим, оставаясь в любой момент движения $\perp$ оси.

Построить прямой геликоид ***Ф*** [фи] с элементами определителя ***i, m***.

Здесь ***i*** – ось цилиндрической винтовой линии, ***m*** – цилиндрическая винтовая линия.

Закон каркаса и графическая геометрическая его часть показаны на чертеже. Построить точку ***A*** по принадлежности ***Ф*** [фи].

Прямой геликоид строят из 12 образующих (рисунок *а*). Построение винтовой линии смотри в модуле 1. На Π_1 [пи один] образующие проходят через ось. На Π_2 [пи два] они проходят $\perp$ оси. Точка **A** задана своей фронтальной проекцией A_2. Чтобы построить A_1, нужно из точки A_2 провести линию связи на соответствующую образующую $7_1\ i_1$.

54 слайд

2.6. Наклонный геликоид

Наклонный геликоид отличается от прямого тем, что его прямолинейная образующая при винтовом перемещении пересекает ось геликоида под постоянным углом, отличным от прямого. **Иначе говоря, образующая *l*, прямая линия наклонного геликоида, при винтовом движении скользит по двум неподвижным направляющим, по оси и цилиндрической винтовой линии, как и у прямого геликоида. Причем во всех своих положениях угол наклона образующей к оси не меняется.** Поэтому можно сказать, что образующая в каждый момент движения будет параллельна соответствующим образующим некоторого конуса вращения, называемого **направляющим конусом** (рисунок *а*).

Построить наклонный геликоид Φ [фи] с элементами определителя i, m, Γ [гамма], где i – ось цилиндрической винтовой линии, m – цилиндрическая винтовая линия. Γ [гамма] – направляющий конус.

Закон каркаса и графическая геометрическая его часть показаны на чертеже. Построить линию пересечения наклонного геликоида Φ [фи] плоскостью Ψ [пси], заданную ее фронтальной проекцией Ψ_2 [пси два].

Алгоритм построения

Проекции элементов определителя уже заданы на чертеже цилиндрической винтовой линией m из 12 точек, осью i и направляющим конусом Γ [гамма] (рисунки *а*, *б*). Надо построить дискретный каркас из 12 образующих, которые пройдут на Π_2 [пи два] параллельно соответствующим образующим направляющего конуса, наклон образующих которого к оси определит угол наклона образующих геликоида. Углы $\boldsymbol{\varphi}$ [фи] у образующих конуса $\boldsymbol{1_2'}$ [один два штрих] $\boldsymbol{S_2}$ на рисунке *а* и геликоида $\boldsymbol{1_2}$ на рисунке *б* не искажаются, так как эти образующие занимают положение фронталей.

Построение геликоида начинаем с горизонтальной проекции. Из точек $\boldsymbol{1_1}$ и $\boldsymbol{2_1}$ провести образующие геликоида параллельно соответствующим образующим конуса $\boldsymbol{1_1'}$ [один один штрих] и $\boldsymbol{2_1'}$ [два один штрих] до пересечения с осью $\boldsymbol{i_1}$. Затем на фронтальной проекции из точек $\boldsymbol{1_2}$ и $\boldsymbol{2_2}$ провести образующие геликоида параллельно соответствующим образующим конуса $\boldsymbol{1_2'}$ [один два штрих] и $\boldsymbol{2_2'}$ [два два штрих] до пересечения с осью $\boldsymbol{i_2}$. Остальные образующие геликоида строят таким же образом. Направляющий конус может быть соосным с наклонным геликоидом (рисунок *в*).

Определить видимость поверхности, как всегда, с помощью конкурирующих точек. Например, выбрать фронтально конкурирующие точки $\boldsymbol{A_2}$ и $\boldsymbol{B_2}$, то есть образующая $\boldsymbol{3_2}$ закрывает образующую $\boldsymbol{2_2}$, направляющая и образующие от точки $\boldsymbol{8_2}$ до точки $\boldsymbol{10_2}$ будут невидимы.

После определения видимости обвести проекцию поверхности на $\boldsymbol{\Pi_2}$ [пи два] с учетом видимости. Очертание геликоида на фронтальной проекции получается как кривая, огибающая семейство прямолинейных образующих. На горизонтальной проекции конкурирующих точек нет, значит, вся проекция поверхности видима.

Если рассечь наклонный геликоид плоскостью $\boldsymbol{\Psi}$ [пси], перпендикулярной его оси, то в сечении получается спираль Архимеда, которая легко выстраивается по точкам пересечения плоскости $\boldsymbol{\Psi}$ [пси] с образующими геликоида ***7***, ***C***, ***D*** и точки на оси ***i***.

Каркас образующих наклонного геликоида можно построить и без применения направляющего конуса. Образующие ***1M*** и ***13N*** параллельны $\boldsymbol{\Pi_2}$ [пи два], то есть занимают положение фронталей. Поэтому при заданном угле наклона образующей геликоида сразу определяют положение точек $\boldsymbol{M_2}$ и $\boldsymbol{N_2}$. Расстояние или шаг между этими точками делят на 12 равных частей и соединяют с соответствующими точками на цилиндрической винтовой направляющей.

55 слайд

3.1. Модуль 3. Позиционные задачи

В этом модуле вы научитесь находить общий элемент пересекающихся геометрических фигур в пространстве, овладеете алгоритмом построения проекций элементов пересечения геометрических фигур, занимающих различное положение относительно плоскостей проекций.

В технике детали большинства изделий имеют формы, представляющие собой поверхности, пересечённые либо плоскостями, либо другими поверхностями. Для того чтобы проектировать и изготавливать такие изделия, необходимо научиться строить линии пересечения различных геометрических фигур. В этом вам поможет данный раздел начертательной геометрии.

Позиционными называют задачи, в которых определяется взаимное расположение геометрических фигур в пространстве.

Существует три типа позиционных задач: взаимный порядок геометрических фигур, взаимная принадлежность геометрических фигур, взаимное пересечение геометрических фигур.

Два первых типа задач были рассмотрены в предыдущих разделах курса. Взаимный порядок геометрических фигур – это расположение геометрических фигур относительно плоскостей проекций и наблюдателя: «ближе или дальше», «выше или ниже», «левее или правее» и так далее. Взаимная принадлежность геометрических фигур – это «точка принадлежит...», «прямая принадлежит...» и так далее.

Рассмотрим подробнее всё многообразие решений третьего типа задач – задач на пересечение геометрических фигур.

Две геометрические фигуры, пересекаясь, дают общий элемент.

1. Прямая пересекается с прямой – общим элементом будет точка.
2. Прямая пересекается с плоскостью – общим элементом будет точка.
3. Прямая пересекается с поверхностью – общим элементом будет одна или несколько точек.
4. Плоскость пересекается с плоскостью – общим элементом будет прямая линия.
5. Плоскость пересекается с поверхностью – общим элементом будет плоская кривая или плоская ломаная.
6. Поверхность пересекается с поверхностью – общим элементом будет пространственная линия или несколько пространственных линий, которые, в свою очередь, могут состоять из плоских кривых или плоских ломаных.

Из всего многообразия этих задач выделяются две общие задачи, которые называют главными позиционными задачами (ГПЗ).

Первая главная позиционная задача, или *1-я ГПЗ,* – это пересечение линии с поверхностью, первые три задачи из шести перечисленных, то есть 1-я, 2-я, 3-я задачи.

Вторая главная позиционная задача, или *2-я ГПЗ,* – это взаимное пересечение двух поверхностей, то есть 4-я, 5-я, 6-я задачи. При этом следует помнить, что плоскость – это частный случай поверхности, поэтому условимся пересечение плоскостей или плоскости с поверхностью относить ко ***2-й ГПЗ.***

При решении ***2-й ГПЗ*** сначала необходимо выяснить, что будет являться общим элементом у двух пересекающихся поверхностей. Чаще всего бывает следующее.

Пересекаются два многогранника, у них общий элемент есть пространственная ломаная линия, состоящая из отдельных звеньев, так как каждое звено есть прямая линия – результат пересечения граней многогранников; звенья между собой соединены в точках ***A*, *B*, *C* ...**, которые представляют собой точки пересечения рёбер первого многогранника с гранями второго и наоборот (рисунок *а*).

Пересекаются многогранник с кривой поверхностью, например пирамида со сферой. Общий элемент будет пространственная линия, состоящая из отдельных звеньев. Каждое звено есть результат пересечения граней многогранника с кривой поверхностью, так как звенья ***m*, *n*, *k*** ... есть плоские кривые. Звенья между собой соединены в точках ***A*, *B*, *C*, D,** которые представляют результат пересечения рёбер многогранника с кривой поверхностью (рисунок *б*).

Пересекаются две кривые поверхности, например сфера с конусом. Общий элемент есть пространственная кривая линия (рисунок *в*).

Далее необходимо определить **количество** общих элементов пересекающихся поверхностей. Определяется оно в зависимости от **характера** пересечения поверхностей.

56 слайд

3.1. Позиционные задачи

Рассмотрим три вида характера пересечения поверхностей.

1. Например, пересекаются конус ***Ф*** [фи], окружность основания которого параллельна $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один], и фронтально проецирующий цилиндр *Δ* [дельта]. Такой характер пересечения, когда одна из поверхностей насквозь пронзает другую, называется **чистое проницание**. В этом случае линий пересечения две – это ***m*** и ***n*** (рисунок *а*).

2. Характер пересечения поверхностей, когда очерки поверхностей касаются в одной точке, является **частным случаем проницания**, когда линий пересечения две – ***m*** и ***n***, но с одной общей точкой ***A*** (рисунок *б*).

3. Характер пересечения поверхностей, когда одна из поверхностей «вдавливается» в другую, называется **вмятие**. В этом случае линия пересечения всего одна ***m*** (рисунок *в*).

57 слайд

3.1. Позиционные задачи

Алгоритмы решений главных позиционных задач. Способ решения главных позиционных задач, или алгоритм решения, зависит от расположения пересекающихся геометрических фигур относительно плоскостей проекций.

Здесь имеют место три случая.

Первый случай. Обе пересекающиеся фигуры занимают проецирующее положение. Задачи решаются по **первому алгоритму**.

Второй случай. Одна из пересекающихся фигур проецирующая, другая – непроецирующая. Задачи решаются по **второму алгоритму**.

Третий случай. Обе пересекающиеся фигуры непроецирующие. Задачи решаются по **третьему алгоритму**.

Здесь уместно вспомнить, какие фигуры могут занимать проецирующее положение. Для этого обратитесь к модулям 1, 2. **Таковыми являются прямая, плоскость. А из всех известных нам поверхностей проецирующее положение могут занимать только призматическая поверхность, частный случай – призма и цилиндрическая поверхность, частный случай – прямой круговой цилиндр**.

На слайде показаны примеры горизонтально проецирующих фигур. Напомним, что главными проекциями на этом чертеже у них являются: у прямой $\boldsymbol{a}$ – ее горизонтальная проекция, то есть точка $\boldsymbol{a_1}$. У плоскости $\boldsymbol{\Sigma}$[сигма] – ее горизонтальная проекция, то есть прямая $\boldsymbol{\Sigma_1}$ [сигма один]. У призмы Δ [дельта] – ее горизонтальная проекция, то есть треугольник Δ_1 [дельта один], а в общем случае – или ломаная линия, или любой многоугольник. У цилиндра Γ [гамма] его горизонтальная проекция, то есть окружность Γ_1 [гамма один], в общем случае – замкнутая или разомкнутая кривая. Всегда надо помнить, что любая главная проекция обладает собирательными свойствами.

58 слайд

3.2. Алгоритмы решения ГПЗ

Решение задач, когда обе пересекающиеся фигуры занимают проецирующее положение. Решение рассмотрим на конкретном примере.

Задача 1. Найти проекции точки пересечения горизонтально проецирующей плоскости, заданной $m \parallel n$, с фронтально проецирующей прямой a (рисунок *а*).

Алгоритм решения. Так как в пересечении участвует прямая линия *а*, то это будет **первая главная позиционная задача**. Обе пересекающиеся фигуры занимают проецирующее положение относительно разных плоскостей проекций, значит, задача решается по первому алгоритму. Решение начинаем с фронтальной проекции.

Плоскость Σ [сигма], пересекаясь с прямой a, дает точку K – это общий элемент.

Точка K является общим элементом плоскости Σ [сигма] и прямой a, следовательно, K принадлежит Σ [сигма] и K принадлежит a. Но если K принадлежит a, то и K_2 принадлежит a_2, а поскольку a_2 – это точка, то есть ее главная проекция, обладающая собирательными свойствами, то K_2 совпадет с a_2 (рисунок *б*).

Находим горизонтальную проекцию точки ***K***. Так как плоскость ***Σ*** [сигма] на ***$П_1$*** [пи один] проецируется в прямую линию ***$Σ_1$*** [сигма один], то ***K_1*** как общий элемент ***Σ*** [сигма] и ***a*** будет располагаться на пересечении ***$Σ_1$*** [сигма один] и ***a_1***.

Краткая алгоритмическая запись вышеизложенного есть на слайде. Еще раз просмотрите графический алгоритм решения в сочетании с символической записью.

Таким образом, решение ***1-й ГПЗ*** по первому алгоритму заключается в следующем. **Проекции общего элемента на чертеже уже присутствуют. Они совпадают с главными проекциями проецирующих фигур. Решение сводится к их нахождению и обозначению.**

59 слайд

3.2. Алгоритмы решения ГПЗ

Решение задач в случае, когда обе пересекающиеся фигуры занимают проецирующее положение. Вторую главную позиционную задачу решим в соответствии с рассмотренным алгоритмом. ***Ф*** [фи] пересекается ***Г*** [гамма] образуется общий элемент ***m***. Это ***2-я ГПЗ по 1-му алгоритму.***

Задача 2. Найти проекции линии пересечения горизонтально проецирующего цилиндра ***Ф*** [фи] с фронтально проецирующей призмой ***Г*** [гамма] (рисунок *а*).

Алгоритм. Пересекаются две поверхности, значит, это ***2-я ГПЗ***. Вначале анализируем, что должно получиться в результате пересечения. Так как характер пересечения есть вмятие, то общим элементом должна быть одна пространственная линия ***m***.

Обе фигуры проецирующие относительно разных плоскостей проекций. Следовательно, согласно 1-му алгоритму, проекции общего элемента должны совпадать с главными проекциями поверхностей. На фронтальной проекции m_2 должна совпадать с Γ_2 [гамма два]. Однако из чертежа (рисунок *а*), видно, что часть главной проекции призмы Γ_2 [гамма два] выходит за пределы цилиндра, а это означает, что совпадение проекции линии пересечения m_2 с главной проекцией призмы Γ_2 [гамма два] только частичное. Следовательно, нужно найти границы общей части.

На рисунке *б* линия m_2, совпадающая с Γ_2 [гамма два] в пределах цилиндра, выделена красным цветом – это и есть фронтальная проекция линии пересечения поверхностей.

Аналогичные рассуждения проведём для нахождения горизонтальной проекции линии пересечения m_1. Она совпадает с главной проекцией цилиндра Φ_1 [фи один] в пределах призмы.

Краткая алгоритмическая запись вышеизложенного есть на слайде. Еще раз просмотрите графический алгоритм решения в сочетании с символической записью.

Проанализируем, из чего состоит линия пересечения m. Как мы уже предполагали, это пространственная линия. Она состоит из двух плоских кривых a и b, которые на рисунке *в* показаны красным цветом. А получаются они от пересечения цилиндра двумя гранями призмы, которые на рисунке *б* обозначены плоскостями Σ [сигма] и Λ [лямбда].

Плоскость Λ [лямбда] – горизонтальная плоскость уровня. Она параллельна окружности основания цилиндра, поэтому она пересечёт цилиндр Φ [фи] тоже по окружности. Тогда линия a есть дуга окружности, которая спроецируется на Π_2 [пи два] в виде прямой a_2, а на Π_1 [пи один] – в натуральную величину, то есть в виде дуги окружности a_1.

Плоскость Σ [сигма] фронтально проецирующая и пересечёт цилиндр Φ [фи] по эллипсу. Тогда линия b есть дуга эллипса, которая спроецируется на $\boldsymbol{\mathit{П}_2}$ [пи два] в виде прямой $\boldsymbol{b_2}$, а на $\boldsymbol{\mathit{П}_1}$ [пи один] – в виде дуги окружности $\boldsymbol{b_1}$.

Таким образом, линия пересечения двух заданных поверхностей есть пространственная линия, состоящая из двух плоских кривых, то есть дуги окружности и дуги эллипса.

Скорректируем алгоритм решения позиционных задач в 1-м случае.

Проекции общего элемента на чертеже уже есть. Они совпадают с главными проекциями проецирующих фигур. Если совпадение только частичное, то находят границы общей части. Решение сводится к их нахождению и обозначению.

60 слайд

3.2. Алгоритмы решения ГПЗ

Решение задач в случае, когда одна из пересекающихся фигур проецирующая, вторая непроецирующая. Решение 1-й ГПЗ снова рассмотрим на конкретном примере.

Задача 3. Найти проекции точки пересечения плоскости общего положения $\boldsymbol{\Sigma}$ [сигма], заданной $\boldsymbol{(m \parallel n)}$, с фронтально проецирующей прямой $\boldsymbol{a}$ (рисунок *а*).

Если прямая пересекается с плоскостью, то, как вы уже должны понимать, это будет **1-я ГПЗ по 2-му** алгоритму, а общим элементом будет точка. Графическое условие этой задачи показано на слайде (рисунок *а*).

Алгоритм решения. Решение начинаем, как и в задаче 1 на слайде, с фронтальной проекции, так как прямая $\boldsymbol{a}$ в обоих случаях занимает фронтально проецирующее положение. Точно так же фронтальная проекция точки пересечения $\boldsymbol{K_2}$ совпадёт с фронтальной проекцией прямой $\boldsymbol{a_2}$, так как

$\boldsymbol{a_2}$ есть точка, то есть это главная проекция прямой $\boldsymbol{a}$ на $\boldsymbol{\Pi_2}$ [пи два] (рисунок *б*).

Горизонтальную проекцию точки пересечения $\boldsymbol{K_1}$ найти так однозначно, как в первом случае, уже невозможно. Поэтому будем находить её по признаку принадлежности плоскости $\boldsymbol{\Sigma}$ [сигма]. Помним из модуля 2, что точка принадлежит плоскости, если она принадлежит прямой, лежащей в этой плоскости. Возьмём в плоскости $\boldsymbol{\Sigma}$ [сигма] на ее фронтальной проекции $\boldsymbol{\Sigma_2}$ [сигма два] любую прямую, проходящую через точку $\boldsymbol{K_2}$, например $\boldsymbol{1_2 2_2}$, найдём её горизонтальную проекцию $\boldsymbol{1_1 2_1}$, на этой прямой будет располагаться точка $\boldsymbol{K_1}$.

Следующим этапом необходимо определить видимость прямой $\boldsymbol{a}$ на горизонтальной проекции. Для этого используем **конкурирующие точки**.

Так как плоскость $\boldsymbol{\Sigma}$ [сигма] имеет с прямой $\boldsymbol{a}$ только одну общую точку $\boldsymbol{K}$, то прямые $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{a}$ – скрещивающиеся, а точки $\boldsymbol{3}$ и $\boldsymbol{4}$ на них есть горизонтально конкурирующие. Пусть точка $\boldsymbol{3}$ принадлежит прямой $\boldsymbol{m}$, то есть плоскости $\boldsymbol{\Sigma}$ [сигма], точка $\boldsymbol{4}$ принадлежит прямой $\boldsymbol{a}$, так условимся, можно и наоборот. Посмотрим на фронтальные проекции точек. Из чертежа (рисунок *в*) видно, что точка $\boldsymbol{3_2}$ расположена выше, чем точка $\boldsymbol{4_2}$. Следовательно, на данном участке – от точки пересечения $\boldsymbol{K_1}$ до прямой $\boldsymbol{m_1}$ – прямая $\boldsymbol{a_1}$ не видна. Краткая алгоритмическая запись вышеизложенного есть на слайде. Еще раз просмотрите графический алгоритм решения в сочетании с символической записью.

61 слайд

3.2. Алгоритмы решения ГПЗ

Рассмотрим ещё одну задачу, которая решается **по 2-му** алгоритму.

Задача 4. Пересекаются прямая общего положения ***a*** с поверхностью горизонтально проецирующего цилиндра ***Г*** [гамма] (рисунок *а*). Найти проекции точек пересечения. Если прямая пересекает поверхность, значит, это ***1-я ГПЗ*** по ***2-му алгоритму.***

Алгоритм решения. Горизонтальная проекция цилиндра есть окружность $\boldsymbol{\mathit{Г}_1}$ [гамма один], следовательно, в результате пересечения получаются две точки ***M*** и ***N***, горизонтальные проекции которых $\boldsymbol{M_1}$ и $\boldsymbol{N_1}$ располагаются на пересечении $\boldsymbol{\mathit{Г}_1}$ [гамма один] и $\boldsymbol{a_1}$.

Фронтальные проекции точек пересечения $\boldsymbol{M_2}$ и $\boldsymbol{N_2}$ находим по принадлежности прямой ***a***, нужно из точек $\boldsymbol{M_1}$ и $\boldsymbol{N_1}$ провести линии связи. Видимость на $\boldsymbol{\Pi_2}$ [пи два] определяем по цилиндру. Точка $\boldsymbol{N_1}$ расположена **перед** плоскостью фронтального меридиана ***Ф*** [фи], поэтому $\boldsymbol{N_2}$ будет видимая. Точка $\boldsymbol{M_1}$ расположена за плоскостью фронтального меридиана ***Ф*** [фи], поэтому $\boldsymbol{M_2}$ будет невидимая, то есть взята в скобки на чертеже. Часть прямой ***a*** между точками ***M*** и ***N*** находится внутри цилиндра, следовательно, на $\boldsymbol{\Pi_2}$ [пи два] участок прямой между точками $\boldsymbol{M_2}$ и $\boldsymbol{N_2}$ невидимый. Участок прямой между точкой $\boldsymbol{M_2}$ и очерковой образующей цилиндра также невидим, так как находится **за** плоскостью фронтального меридиана.

Вывод. Решение задач по 2-му алгоритму сводится к следующему.

Выделяют из двух заданных фигур проецирующую и отмечают её главную проекцию. Ставят обозначение той проекции искомого общего элемента, которая совпадает с главной проекцией проецирующей фигуры. Если совпадение только частичное, то находят границы общей части. Вторую проекцию общего элемента находят по условию его принадлежности непроецирующей фигуре. Определяют видимость проекций общих элементов и пересекающихся фигур.

Рассмотрим ещё одну задачу на пересечение поверхностей, из которых одна проецирующая, вторая – непроецирующая.

Задача 5. Построить линию пересечения сферы $\boldsymbol{\Sigma}$ [сигма] и горизонтально проецирующей призмы $\boldsymbol{\Gamma}$ [гамма] (рисунок *б*). Сфера $\boldsymbol{\Sigma}$[сигма] пересекается с призмой $\boldsymbol{\Gamma}$ [гамма], общим элементом будет пространственная кривая, состоящая из трех плоских кривых ***a***, ***b***, ***c***. Призма $\boldsymbol{\Gamma}$ [гамма] занимает проецирующее положение относительно $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один], следовательно это ***2-я ГПЗ по 2-му алгоритму.***

Алгоритм решения. Вначале определяем, **что** должно получиться в результате пересечения. Определяем характер пересечения. Это частный случай вмятия – с одной общей точкой. Призма $\boldsymbol{\Gamma}$ [гамма] трёхгранная, значит, можно рассматривать пересечение сферы тремя отдельными плоскостями: $\boldsymbol{\Delta}$ [дельта], $\boldsymbol{\Phi}$ [фи] и $\boldsymbol{\Lambda}$ [лямбда]. Следовательно, линией пересечения является пространственная линия, состоящая из трёх дуг окружностей: $\boldsymbol{\Sigma}$ [сигма] пересекается с $\boldsymbol{\Phi}$ [фи] по ***a***, $\boldsymbol{\Sigma}$ [сигма] пересекается с $\boldsymbol{\Lambda}$ [лямбда] по ***b***, $\boldsymbol{\Sigma}$ [сигма] пересекается с $\boldsymbol{\Delta}$ [дельта] по ***c*** [ц].

Поскольку призма занимает горизонтально проецирующее положение, то горизонтальная проекция общего элемента совпадает с $\boldsymbol{\Gamma_1}$ [гамма один].

Фронтальную проекцию линии пересечения сферы с каждой из плоскостей строим по принадлежности сфере. Плоскость $\boldsymbol{\Delta}$ [дельта] параллельна $\boldsymbol{\Pi_2}$ [пи два], следовательно, $\boldsymbol{c_2}$ спроецируется на $\boldsymbol{\Pi_2}$ [пи два] в виде окружности без искажения, $\boldsymbol{a_2}$ и $\boldsymbol{b_2}$ в виде эллипсов.

Начнём построения с линии пересечения сферы с плоскостью $\boldsymbol{\Phi}$ [фи]. Построение начинаем с характерных точек: ***1***, ***2***, ***3***, ***4***, ***5***, ***6***, ***7***. Точка ***1*** принадлежит экватору сферы, на $\boldsymbol{\Pi_2}$ [пи два] это $\boldsymbol{1_2}$; точки ***2*** и ***5*** принадлежат фронтальному меридиану сферы и определяют видимость эллипса ***a*** относительно $\boldsymbol{\Pi_2}$ [пи два], фронтальные проекции этих точек $\boldsymbol{2_2}$ и $\boldsymbol{5_2}$; точки ***3*** и ***4*** являются конечными точками дуги эллипса ***a*** в точках $\boldsymbol{3_2}$ и $\boldsymbol{4_2}$; точки ***6*** и ***7*** есть высшая и низшая точки эллипса ***a***. Промежуточные точки, как и точки ***3***, ***4***, ***6***, ***7***, находим по принадлежности параллелям сферы. Проводим $\boldsymbol{a_2}$ с учётом видимости. Эллипс от точки $\boldsymbol{2_2}$ до $\boldsymbol{3_2}$ и от точки $\boldsymbol{5_2}$ до $\boldsymbol{4_2}$ будет видим, остальная часть эллипса находится за главным меридианом, поэтому невидима.

Аналогично строим линию пересечения сферы с плоскостью $\boldsymbol{\mathit{\Lambda}}$ [лямбда], то есть $\boldsymbol{b_2}$.

Рассмотрите рисунок *б*. Результат пересечения сферы $\boldsymbol{\mathit{\Sigma}}$ [сигма] с плоскостью $\boldsymbol{\mathit{\Delta}}$ [дельта] есть окружность $\boldsymbol{c}$ [ц], которая расположена за плоскостью фронтального меридиана, следовательно, $\boldsymbol{c_2}$ будет невидимая.

На рисунке *в* показан общий результат решения задачи с учётом видимости поверхностей.

Обратитесь еще раз к этому чертежу. Посмотрите изображение всех трех плоских кривых с учетом видимости. После построения общего элемента с учетом видимости определяется видимость поверхностей. Например, часть призмы, находящаяся за главным меридианом сферы, будет невидима. Переднее ребро между точками ***3*** и ***4*** находится внутри сферы, поэтому тоже невидимо.

62 слайд

3.3. Конические сечения

Решение **второй главной позиционной задачи** по **2-му алгоритму** рассмотрим на примере **конических сечений**. Ещё в Древней Греции был известен тот факт, что при пересечении конуса различными плоскостями можно получить прямые линии, кривые второго порядка и как вырожденный случай – точку. На чертеже показана фронтальная проекция конуса $\boldsymbol{\mathit{\Omega}_2}$ [омега два], пересечённого фронтально проецирующими плоскостями: при пересечении с плоскостью $\boldsymbol{\mathit{\Lambda}}$ [лямбда] получаются две прямые $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, с плоскостью $\boldsymbol{\mathit{\Gamma}}$ [гамма] получается окружность $\boldsymbol{c}$, с плоскостью $\boldsymbol{\mathit{\Phi}}$ [фи] получается эллипс $\boldsymbol{d}$, с плоскостью $\boldsymbol{\Delta}$ [дельта] получается парабола $\boldsymbol{m}$, с плоскостью $\boldsymbol{\Sigma}$ [сигма] получается гипербола $\boldsymbol{k}$.

Далее рассмотрим каждый случай получения конических сечений, представленных с точки зрения решения ***2-й ГПЗ*** *по* ***2-му алгоритму***.

Две образующие получатся в сечении, если плоскость, пересекая конус, проходит через его вершину. Частным случаем такого вида пересечения конуса плоскостью является такое положение, при котором плоскость $\boldsymbol{\Lambda}$ [лямбда] проходит через ось $\boldsymbol{i}$ конуса и совпадает с плоскостью фронтального меридиана. Результатом пересечения являются образующие конуса с максимальным углом между ними. Это будут очерковые образующие конуса.

Окружность получится в сечении, если плоскость, пересекая конус, параллельна окружности основания $\boldsymbol{n}$, а значит, перпендикулярна оси $\boldsymbol{i}$ конуса.

Парабола получится в сечении, если плоскость, пересекая конус, проходит параллельно только одной его образующей.

Построение параболы начинаем с характерных точек. Точка $\boldsymbol{A}$ – это вершина параболы. Фронтальная проекция точки $\boldsymbol{A_2}$ принадлежит очерковой образующей конуса, следовательно, $\boldsymbol{A}$ расположена в плоскости фронтального меридиана, это будет точка $\boldsymbol{A_1}$.

Точки $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{C}$ – низшие точки параболы, принадлежат окружности основания $\boldsymbol{n}$ конуса. На $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один] находим их с помощью линий связи тоже без дополнительных построений, получаем $\boldsymbol{B_1}$ и $\boldsymbol{C_1}$. Промежуточные точки находим по принадлежности параллелям конуса, как у всех поверхностей вращения, смотри чертеж. Соединяем точки с помощью лекала и получаем параболу.

Так как плоскость $\boldsymbol{\Delta}$ [дельта] параллельна только одной образующей конуса, то парабола имеет **одну несобственную точку**. Поэтому в частном случае, когда плоскость $\boldsymbol{\Delta}$ [дельта] касается одной образующей $\boldsymbol{SK}$ конуса, получается **вырожденный вид параболы – это будет прямая**, совпадающая с ***SK***.

63 слайд

3.3. Конические сечения

На этом слайде рассмотрим подробное построение эллипса и гиперболы.

Эллипс получится в сечении, если плоскость не перпендикулярна оси конуса и пересекает все его образующие. Эллипс можно строить двумя способами.

Можно строить его по двум осям любым из известных способов, например, приведённым в разделе «Кривые линии» модуля 1.

Можно строить эллипс по точкам, по принадлежности конусу, особенно, если в какой-либо конкретной задаче эллипс получается неполным.

Построим три проекции линии пересечения конуса с плоскостью ***Ф*** [фи]. Горизонтальные проекции точек ***A***, ***B***, ***C***, ***E*** строим так, как показано на чертеже. То есть ***A*** и ***B*** по принадлежности главному меридиану. Точки ***C*** и ***E*** по принадлежности соответствующим параллелям конуса. Остальные, промежуточные точки строим аналогично точкам ***C*** и ***E***. Радиусом параллели, на которой расположена точка, равным расстоянию от оси до очерка конуса, **из центра** S_1 делаем засечки на линиях связи от соответствующих точек. Соединяем точки с помощью лекала и получаем горизонтальную проекцию эллипса. При данном расположении конуса эллипс на $П_1$ [пи один] виден весь.

Построение эллипса на $П_3$ [пи три] начинаем также с характерных точек. Начинаем с точек ***A*** и ***B***, которые расположены в плоскости фронтального меридиана, следовательно, на Π_2 [пи два] на очерковых образующих, а на Π_3 [пи три] на оси.

Точки M и N принадлежат профильным образующим, они определяют видимость эллипса относительно Π_3 [пи три]: часть эллипса от точки B до точек M и N расположена левее профильных образующих, следовательно, на Π_3[пи три] она видна. Соответственно, часть эллипса от точек M и N до точки A на Π_3 [пи три] не видна.

Промежуточные точки на Π_3 [пи три] строим, откладывая координату по оси y для каждой точки, при этом расстояния, помеченные одной, двумя или тремя рисками, с Π_1 [пи один] переносим на Π_3 [пи три]. Соединяем точки с учётом видимости и получаем профильную проекцию эллипса.

Гипербола получится в сечении, если плоскость при пересечении с конусом параллельна одновременно **двум** образующим конуса.

Рассмотрим частный случай построения гиперболы, когда плоскость Σ[сигма] перпендикулярна Π_1 [пи один], то есть является горизонтально проецирующей. Построим три проекции линии пересечения конуса Ω[омега] с такой плоскостью.

Построение гиперболы начинаем с характерных точек. Точки M и N принадлежат окружности основания конуса, поэтому проводим линии связи из точек M_1, N_1 и получаем точки M_2, N_2 по принадлежности n_2. Точки M_3 и N_3 находим на n_3, откладывая координату по оси y этих точек, измерив её на Π_1 [пи один], расстояния отмечены двумя и одной риской соответственно.

Точка A располагается в плоскости фронтального меридиана и определяет видимость гиперболы относительно Π_2 [пи два], поэтому точка N_2 будет невидимая. Точка A_2 лежит на очерковой образующей конуса, значит, точка A_3 будет на оси.

Точка C есть вершина гиперболы. Она лежит на перпендикуляре, проведённом от S_1 к Σ_1 [сигма один]. Точку C_2 находим по принадлежности параллели конуса, проведённой через $\boldsymbol{C_1}$. Ее профильную проекцию $\boldsymbol{C_3}$ строим аналогично точкам $\boldsymbol{M_3}$ и $\boldsymbol{N_3}$.

Точка $\boldsymbol{B}$ лежит в плоскости профильного меридиана и определяет видимость гиперболы относительно $\boldsymbol{\Pi_3}$ [пи три]. Точку $\boldsymbol{B_2}$ находим по принадлежности параллели, проведённой через $\boldsymbol{B_1}$, значит, $\boldsymbol{B_3}$ лежит на очерковой образующей конуса, поэтому часть гиперболы от $\boldsymbol{B_3}$ до $\boldsymbol{M_3}$ невидимая.

Промежуточные точки на $\boldsymbol{\Pi_2}$ [пи два] находим по принадлежности соответствующим параллелям, аналогично точке $\boldsymbol{C}$, на $\boldsymbol{\Pi_3}$ [пи три] по координатам $\boldsymbol{y}$ этих точек. Соединяем точки с учётом видимости с помощью лекала и получаем фронтальную и профильную проекции гиперболы.

64 слайд

3.4. Решение 1-й ГПЗ по 3-му алгоритму

Решение задач в случае, когда обе пересекающиеся фигуры непроецирующие, усложняется тем, что на чертеже нет **главной проекции** ни у одной из пересекающихся фигур. Поэтому для решения таких задач специально вводят **вспомогательную секущую плоскость-посредник**, которая пересекает обе фигуры, выявляя общие точки. Эту **плоскость-посредник** выбирают **проецирующей**, и тогда решение задачи можно свести ко **2-му алгоритму**. Будем рассматривать решение только **1-й ГПЗ**.

Для нахождения точек пересечения прямой с поверхностью в качестве плоскости-посредника чаще всего берут **проецирующую** плоскость, которую проводят через данную прямую. Далее находят линию пересечения этой плоскости с поверхностью, используя 2-й алгоритм, и определяют точки пересечения полученной линии с данной прямой. Эти точки и будут являться точками пересечения поверхности с прямой (рисунок *а*). Рассмотрим этот алгоритм на конкретном примере.

Задача 1. Найти точку пересечения плоскости ***Г*** [гамма], заданной треугольником ***ABC***, с прямой ***a***. Определить видимость прямой. Общим элементом будет точка ***K***. Обе фигуры занимают непроецирующее положение, значит, это ***1-я ГПЗ по 3-му алгоритму***.

Рассмотрим сначала решение задачи на пространственной модели (рисунок *б*). Возьмём **плоскость-посредник** $\boldsymbol{\Sigma}$ [сигма], которая изображена красным цветом, так, чтобы она включала прямую ***a*** и была бы проецирующей, например, относительно $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один]. Тогда $\boldsymbol{\Sigma_1}$ [сигма один] совпадёт с $\boldsymbol{a_1}$. Проецирующая плоскость $\boldsymbol{\Sigma}$ [сигма] пересекается с плоскостью общего положения ***ABC***, результатом будет прямая ***m***. Задачу решаем по **2-му алгоритму**. Прямая ***m***, пересекаясь с прямой ***a***, даёт нам искомую точку ***K***.

Алгоритм решения. Теперь рассмотрим решение этой задачи на плоскости (рисунок *в*). Возьмём **плоскость-посредник** $\boldsymbol{\Sigma}$ [сигма] так, чтобы она включала прямую ***a*** и была бы проецирующей, например, относительно $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один]. Тогда $\boldsymbol{\Sigma_1}$ [сигма один] совпадёт с $\boldsymbol{a_1}$. Проецирующая плоскость $\boldsymbol{\Sigma}$ [сигма] пересекается с плоскостью общего положения ***ABC***, результатом пересечения будет прямая ***m***. Задачу решаем по **2-му алгоритму**, то есть $\boldsymbol{m_1}$ совпадает с $\boldsymbol{\Sigma_1}$ [сигма один], $\boldsymbol{m_2}$ находим по принадлежности плоскости ***ABC***, ***m*** пройдет через точки ***1*** и ***2***, значит, прямая $\boldsymbol{m_2}$ пройдет через точки $\boldsymbol{1_2}$, $\boldsymbol{2_2}$ (рисунок *в*). Следовательно, $\boldsymbol{m_2}$, пересекаясь с $\boldsymbol{a_2}$, даёт нам точку $\boldsymbol{K_2}$, достраиваем с помощью линий связи $\boldsymbol{K_1}$. Видимость прямой ***a*** определяем с помощью конкурирующих точек (рисунок *в*).

Видимость относительно $\boldsymbol{\Pi_2}$ [пи два]. Точка ***5*** принадлежит ***AB***, точка ***3*** принадлежит прямой ***a***. Точки ***5*** и ***3*** будут фронтально конкурирующими. На $\boldsymbol{\Pi_2}$ [пи два] видна точка ***3***, поэтому участок прямой ***a*** слева от точки $\boldsymbol{K_2}$ будет видимый.

Видимость относительно $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один]. Точка ***2*** принадлежит ***BC***, точка ***4*** принадлежит ***a***, значит, точки ***2*** и ***4*** будут горизонтально конкурирующими. На $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один] видна точка ***2***, поэтому участок прямой ***a*** справа от точки $\boldsymbol{K_1}$ до точки $\boldsymbol{4_1}$ будет невидимый.

Краткая алгоритмическая запись вышеизложенного есть на слайде. Еще раз просмотрите графический алгоритм решения в сочетании с символической записью.

Такой алгоритм решения приемлем для нахождения точек пересечения любой поверхности с прямой линией. Разница заключается в форме линии ***m***, которая является результатом пересечения **плоскости-посредника** с заданной поверхностью и зависит от вида поверхности. В рассмотренном примере ***m*** – это прямая линия. Если вместо плоскости ***Г*** [гамма] возьмём, например, **сферу**, то линия ***m*** будет являться **окружностью**, которая может проецироваться на какую-либо плоскость проекций в виде **эллипса**; если с прямой пересекается **многогранник**, то ***m*** – это **плоский многоугольник** и так далее. Подробнее рассмотрим один из таких примеров, используя указанный алгоритм решения.

65 слайд

3.4. Решение 1-й ГПЗ по 3-му алгоритму

Задача 2. Найти точки пересечения пирамиды ***Г*** [гамма], заданной ***(SABC)***, с прямой ***a***. Определить видимость прямой.

Пирамида ***Г*** [гамма] пересекается с прямой ***a***, общим элементом будут две точки ***K*** и ***P***. Это ***1-я ГПЗ по 3-му алгоритму.***

Рассмотрим пространственную модель решения задачи (рисунок *а*). Через прямую ***a*** проведём плоскость-посредник ***Σ*** [сигма], проецирующую относительно $\boldsymbol{\Pi_2}$ [пи два]. Плоскость ***Σ*** [сигма] пересекается с пирамидой.

Результатом является замкнутая ломаная линия ***m***, то есть треугольник ***1,2,3***. Полученный треугольник и заданная прямая лежат в одной плоскости ***Σ*** [сигма], значит пересекутся в точках ***К*** и ***Р***. Это и будут искомые точки.

Теперь рассмотрим плоский чертеж на рисунке *б*. Через прямую ***a*** проведём плоскость-посредник ***Σ*** [сигма], проецирующую относительно $\boldsymbol{\Pi_2}$ [пи два]. Проекция плоскости $\boldsymbol{\Sigma_2}$ [сигма два] совпадает с $\boldsymbol{a_2}$. Строим линию пересечения плоскости ***Σ*** [сигма] с пирамидой. Результатом пересечения является замкнутая ломаная линия ***m***, то есть треугольник $\boldsymbol{1_2,2_2,3_2}$. Согласно ***2-му алгоритму***, горизонтальную проекцию треугольника строим по принадлежности пирамиде. Точки $\boldsymbol{1_1}$ и $\boldsymbol{3_1}$ находим с помощью линий связи на соответствующих рёбрах ***SA*** и ***SC***. Точку $\boldsymbol{2_1}$ находим по принадлежности плоскости треугольника ***SBC*** с помощью вспомогательной прямой ***2,4***, параллельной ***BC***, то есть проводим $\boldsymbol{2_1 4_1}$ параллельно $\boldsymbol{B_1C_1}$. Ломаная $\boldsymbol{m_1}$, или $\boldsymbol{1_1,2_1,3_1}$, пересекаясь с $\boldsymbol{a_1}$, даёт нам искомые точки $\boldsymbol{K_1}$ и $\boldsymbol{P_1}$, в проекционной связи находим $\boldsymbol{K_2}$, $\boldsymbol{P_2}$.

Осталось определить видимость прямой на обеих проекциях (рисунок *в*). Невидимый участок прямой расположен между точками ***К*** и ***Р***, так как находится внутри призмы.

Вывод: все задачи на пересечение непроецирующей прямой с любой непроецирующей поверхностью решаются по единому третьему алгоритму с помощью плоскости-посредника.

66 слайд

3.5. Частные случаи пересечения

Две соосные поверхности вращения пересекаются по окружностям, плоскости которых перпендикулярны оси вращения. Конус ***Г*** [гамма] пересекается с тором-лимоном ***Δ*** [дельта] по окружностям ***m*** и ***n*** (рисунок *а*).

Смотри рисунок *б*. Если центр сферы находится на оси поверхности вращения, то сфера пересечёт эту поверхность по окружностям, плоскости которых перпендикулярны оси вращения: сфера $\boldsymbol{\Phi}$ [фи] пересекается с глобоидом $\boldsymbol{\Lambda}$ [лямбда] по окружностям $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{n}$.

<u>Теорема Монжа</u>. Если две поверхности вращения второго порядка описаны около третьей поверхности вращения второго порядка или вписаны в неё, то линия их пересечения распадается на две плоские кривые второго порядка. Причём плоскости кривых проходят через прямую, соединяющую точки двойного соприкосновения.

Теорема Монжа проиллюстрирована пересечением двух конусов $\boldsymbol{\Sigma}$ [сигма] и $\boldsymbol{\Gamma}$ [гамма], в которые вписана сфера $\boldsymbol{\Phi}$ [фи]. Чтобы вписать сферу, проводим перпендикуляры к очерковым образующим конуса $\boldsymbol{\Gamma_2}$ [гамма два] из точки $\boldsymbol{O_2}$ центра сферы, при этом $\boldsymbol{O_2P_2}$ равняется $\boldsymbol{O_2K_2}$ как радиусы сферы. Проводим перпендикуляры к очерковым образующим конуса $\boldsymbol{\Sigma_2}$ [сигма два] из точки $\boldsymbol{O_2}$. Отрезки $\boldsymbol{O_2C_2}$ и $\boldsymbol{O_2D_2}$ равны, так как являются радиусами сферы. Проводим параллели через точки $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ (рисунок *в*), эти параллели пересекаются в точках $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{N}$, в которых касаются все три поверхности. В результате получаются два эллипса $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, которые проходят через точки $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{N}$. На $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один] эти эллипсы построены по принадлежности конусу $\boldsymbol{\Gamma}$ [гамма] (рисунок *г*).

Выводы

Все главные позиционные задачи делятся на две:

1-я ГПЗ – пересечение линии с поверхностью или плоскостью;

2-я ГПЗ – пересечение поверхностей или плоскостей.

Выбор алгоритма решения зависит от расположения фигур относительно плоскостей проекций. Существует три случая расположения пересекающихся фигур относительно плоскостей проекций: ***1) обе фигуры проецирующие, тогда задача решается по 1-му алгоритму; 2) одна фигура проецирующая, вторая непроецирующая, тогда задача решается по 2-му***

алгоритму; 3) обе фигуры непроецирующие, тогда задача решается по 3-му алгоритму.

Решение считается выполненным, когда определена видимость общих элементов и пересекающихся фигур.

67 слайд

4.1. Модуль 4. Метрические задачи

Модуль 4 предполагает знакомство с задачами, связанными с различными измерениями: натуральных величин отрезков, углов, плоских фигур; расстояний между фигурами и так далее. Кроме того, используя знания, полученные при изучении модуле 1, 2, 3, вы научитесь решать сложные инженерные конструктивные задачи.

Метрическими называются такие задачи, в условии или решении которых присутствуют геометрические фигуры или понятия, связанные с численной характеристикой. Наиболее часто встречаются метрические задачи на взаимную перпендикулярность геометрических фигур, на определение натуральной величины заданных отрезка или угла, на построение натурального вида плоской фигуры и тому подобное.

Из всего многообразия метрических задач выделяются две основные. Первая основная метрическая задача – это задача на перпендикулярность прямой и плоскости. Вторая основная метрическая задача – на определение натуральной длины отрезка. Эта задача решается методом прямоугольного треугольника, который рассматривался в модуле 1.

Остановимся на решении первой основной метрической задачи.

Из элементарной геометрии известно, что прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости.

Задача. Через точку ***К***, принадлежащую плоскости $\boldsymbol{\Sigma}$ [сигма], которая задана двумя параллельными прямыми ***a*** и ***b***, построить прямую ***n***, перпендикулярную плоскости $\boldsymbol{\Sigma}$ [сигма]. Анализ решения задачи проведём на пространственном чертеже (рисунки *а, б*).

Чтобы провести прямую $\boldsymbol{n \perp \Sigma}$ [сигма], нужно в этой плоскости взять две прямые, например ***p*** и ***m***, пересекающиеся в точке ***К***, (рисунок *а*). Прямую ***n*** нужно строить перпендикулярно одновременно двум этим прямым.

Однако если прямые ***p*** и ***m*** будут прямыми общего положения, то прямой угол к ним ни на одной плоскости проекций не спроецируется в натуральную величину. Согласно теореме о проецировании прямого угла (смотри свойство 2 ортогонального проецирования в модуле 1), прямой угол спроецируется в натуральную величину на какую-нибудь плоскость проекций, если одна сторона прямого угла будет параллельна этой плоскости проекций. Поэтому в качестве прямых ***p*** и ***m*** необходимо взять горизонталь ***h*** [аш] и фронталь ***f*** (рисунок *б*). Тогда прямой угол между ***n*** и ***h*** [аш] спроецируется в натуральную величину на $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один], а прямой угол между ***n*** и ***f*** – на $\boldsymbol{\Pi_2}$ [пи два].

Рассмотрим теперь плоский чертёж. На рисунке *в* плоскость $\boldsymbol{\Sigma}$ [сигма] задана параллельными прямыми ***a*** и ***b***. Точка $\boldsymbol{K(K_2)}$ принадлежит этой плоскости. Нужно построить $\boldsymbol{n \perp \Sigma}$ [сигма], чтобы ***n*** прошла через точку ***К***.

Согласно приведённым выше рассуждениям, в плоскости необходимо взять горизонталь (рисунок *г*) и фронталь (рисунок *д*), затем перпендикулярно каждой из них строить ***n***. Построения начинаем с горизонтали (рисунок *е*).

Через точку K_2 проводим h_2 [аш два] $\perp$ линиям связи, находим h_1 [аш один], а на ней с помощью линии связи отмечаем K_1. Так как $n \perp h$ [аш], то $n_1 \perp h_1$ [аш один], поэтому проводим $n_1 \perp h_1$ [аш один] через точку K_1.

Аналогично находим n_2 (рисунок *е*). Через точку K_1 проводим $f_1 \perp$ линиям связи, находим f_2. Так как $n \perp f$, то $n_2 \perp f_2$, поэтому проводим $n_2 \perp f_2$ через точку K_2.

Полностью решение задачи представлено на рисунке *е*. Видимость прямой n не учитывалась.

Если плоскость Σ [сигма] занимает проецирующее положение, то прямая, перпендикулярная ей, является линией уровня.

Итак, чтобы задать на комплексном чертеже прямую n, перпендикулярную данной плоскости Σ [сигма], достаточно построить n_1 и n_2, расположив их в любом месте чертежа, чтобы $n_1 \perp h_1$ [аш один], $n_2 \perp f_2$, где h [аш] и f есть соответственно горизонталь и фронталь плоскости, при условии, что h [аш] пересекается с f в точке K.

Эту формулу надо знать, как таблицу умножения, так как она встречается почти в каждой метрической задаче.

Обратная задача. Чтобы задать на чертеже плоскость, перпендикулярную данной прямой n, достаточно задать проекции горизонтали и фронтали этой плоскости так, чтобы $f_2 \perp n_2$, а $h_1 \perp n_1$. При этом, очевидно, должно выполняться условие: h [аш] пересекается с f в точке, например, K.

Если прямая n является прямой уровня, то плоскость, перпендикулярная ей, занимает проецирующее положение и может быть задана своей главной проекцией Σ_1 [сигма один] или Σ_2 [сигма два].

68 слайд

4.2. Взаимная перпендикулярность фигур

Задача 1. Через точку ***К***, взятую на прямой общего положения ***m***, провести прямую ***n***, тоже общего положения, перпендикулярную ***m*** (рисунок *а*).

Так как прямой угол между прямыми общего положения искажается на обеих плоскостях проекций, то решение задачи на построение взаимно перпендикулярных прямых приходится сводить к задаче на построение взаимно перпендикулярных прямой и плоскости.

При этом используется известное положение, что две прямые взаимно перпендикулярны в том, и только в том случае, если через каждую из них можно провести плоскость, перпендикулярную другой прямой**.**

Алгоритм решения. Через точку ***К*** проводим плоскость $\boldsymbol{\Sigma}$ [сигма], перпендикулярную прямой ***m***. Плоскость задаём пересекающимися горизонталью и фронталью, причём $\boldsymbol{h_1}$ [аш один] $\perp$ $\boldsymbol{m_1}$, а $\boldsymbol{f_2} \perp \boldsymbol{m_2}$. Так как плоскость $\boldsymbol{\Sigma}$ [сигма], заданная пересечением ***h*** [аш] и ***f***, перпендикулярна прямой ***m***, то в этой плоскости можно взять некоторую прямую общего положения ***n*,** проходящую через точку ***К***. Она будет перпендикулярна ***m***. Задаём $\boldsymbol{n_1}$. Известно, что прямую определяют две точки. На $\boldsymbol{n_1}$, кроме $\boldsymbol{K_1}$, возьмём ещё одну точку $\boldsymbol{P_1}$. Находим $\boldsymbol{n_2}$ в плоскости $\boldsymbol{\Sigma}$ [сигма]. Для этого проводим в этой плоскости прямую $\boldsymbol{1_1}$, $\boldsymbol{2_1}$. Точка $\boldsymbol{P_1}$ принадлежит этой прямой, а следовательно, плоскости $\boldsymbol{\Sigma}$ [сигма]. Находим $\boldsymbol{P_2}$ и проводим прямую $\boldsymbol{n_2}$. Поставленное условие выполнено, две прямые общего положения ***m*** и ***n*** перпендикулярны друг другу (рисунок *б*).

Взаимная перпендикулярность двух плоскостей общего положения.

Из школьного курса геометрии вам известно, что две плоскости взаимно перпендикулярны, если в одной из них лежит прямая, перпендикулярная другой плоскости. Таким образом, построение взаимно перпендикулярных плоскостей общего положения сводится к построению взаимно перпендикулярных прямой и плоскости.

Задача 2. Через точку ***K***, взятую вне плоскости ***Г*** [гамма], заданную треугольником ***(ABC)***, провести перпендикулярную ей плоскость ***Σ*** [сигма], то есть ***Σ*** [сигма] ⊥ ***Г*** [гамма] (рисунок *в*).

Алгоритм решения. Плоскость ***Σ*** [сигма] задаём пересекающимися прямыми ***m*** и ***n***. Согласно вышесказанному, одна из них должна быть перпендикулярна плоскости ***Г*** [гамма]. Пусть это будет ***n***. В плоскости ***Г*** [гамма] строим горизонталь и фронталь. Через точку K_1 проводим $n_1 \perp h_1$, а через K_2 проводим $n_2 \perp f_2$, следовательно, ***n*** будет ⊥ ***Г*** [гамма]. Прямую ***m***, проходящую через точку ***K***, задаём произвольно. Таким образом, ***Σ*** [сигма] будет ⊥ ***Г*** [гамма], то есть получаем две взаимно перпендикулярные плоскости (рисунок *г*).

69 слайд

4.3. Задачи на определение расстояний

К таким задачам относятся: задачи на определение расстояний от точки до прямой, до плоскости, до поверхности; между параллельными и скрещивающимися прямыми; между параллельными плоскостями и тому подобное.

Все эти задачи объединяют три обстоятельства. **Во-первых**, поскольку кратчайшим расстоянием между такими фигурами является перпендикуляр, то все они сводятся к построению взаимно перпендикулярных прямой и плоскости. **Во-вторых**, в каждой из этих задач необходимо определять натуральную длину отрезка, то есть решать вторую основную метрическую задачу. **В-третьих**, это сложные по составу задачи, они решаются в несколько этапов, и на каждом этапе решается отдельная, небольшая конкретная задача. Рассмотрим решение одной из таких задач.

Задача. Определить расстояние от точки ***M*** до прямой общего положения ***a*** (рисунок *а*).

Алгоритм решения. Расстояние от точки до прямой есть перпендикуляр. Поскольку прямая ***a*** занимает общее положение, то для построения перпендикуляра к ней необходимо решить задачу, аналогичную приведённой на предыдущем слайде (рисунок *б*), то есть вначале через точку ***M*** провести плоскость ***Σ*** [сигма], перпендикулярную ***a***. Задаём эту плоскость, как обычно, двумя пересекающимися прямыми ***h*** [аш] и ***f***, при этом h_1 [аш один] $\perp a_1$, а $f_2 \perp a_2$ (рисунок *б*). Для построения перпендикуляра необходимо найти для него вторую точку. Это будет точка ***K***, принадлежащая прямой ***a***. Для её нахождения нужно решить позиционную задачу, то есть найти точку пересечения прямой ***a*** с плоскостью ***Σ*** [сигма]. Решаем ***1-ю ГПЗ по 3-му алгоритму*** (рисунок *в*), то есть вводим плоскость-посредник ***Г*** [гамма], пусть ***Г*** [гамма] проходит через прямую ***a*** и занимает проецирующее положение относительно Π_1 [пи один]. Переходим на ***2-й алгоритм*** и находим прямую ***b*** пересечения плоскостей ***Г*** [гамма] и ***Σ*** [сигма]. Прямая ***b***, пересекаясь с заданной ***a***, определит искомую точку ***K*** (рисунок *в*). Теперь надо соединить проекции точек ***M*** и ***K*** на Π_1 [пи один] и Π_2 [пи два] – это и есть проекции расстояния между точкой и прямой.

Однако отрезок ***MK*** занимает общее положение, поэтому находим натуральную величину ***MK*** методом прямоугольного треугольника. На рисунке *г* показано полное решение задачи. Проследите графическое решение задачи по последнему чертежу, чтобы сложился пространственный образ решения задачи.

Выводы. Решение всех метрических задач сводится к решению первой основной метрической задачи – на взаимную перпендикулярность прямой и плоскости. При определении расстояний между геометрическими фигурами всегда используется вторая основная метрическая задача – на определение натуральной величины отрезка.

70 слайд

4.4. Преобразование комплексного чертежа

Решение многих пространственных задач на комплексном чертеже часто бывает слишком сложным из-за того, что заданные геометрические фигуры расположены произвольно относительно плоскостей проекций и, следовательно, проецируются на эти плоскости в **искажённом** виде.

В то же время задачи решаются значительно проще в случае **частного** положения геометрических фигур относительно плоскостей проекций. При этом **наиболее выгодными частными** положениями проецируемой фигуры следует считать: положение, перпендикулярное плоскости проекций, а также положение, параллельное плоскости проекций.

Переход от **общего** положения геометрической фигуры к **частному** можно осуществить за счёт изменения взаимного положения проецируемой фигуры и плоскостей проекций.

Это достигается двумя путями.

Во-первых, перемещением **плоскостей проекций** в новое положение, по отношению к которому проецируемая фигура, не меняющая при этом своего положения в пространстве, окажется в **частном** положении.

Во-вторых, перемещением в пространстве **проецируемой фигуры** так, чтобы она заняла **частное** положение относительно плоскостей проекций, которые при этом не меняют своего положения в пространстве.

Первый путь лежит в основе **способа замены плоскостей проекций**, второй – **способа вращения вокруг проецирующих осей**. Существуют и другие способы преобразования.

Вообще, всякое построение на комплексном чертеже, которое отображает определённые построения в пространстве и приводит к образованию новых полей проекций, называется **преобразованием комплексного чертежа**.

Рассмотрим способ замены плоскостей проекций. Сущность способа состоит в том, что одна из плоскостей проекций – $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один] или $\boldsymbol{\Pi_2}$ [пи два] – заменяется новой плоскостью проекций. Заменяется так, чтобы геометрическая фигура, занимая общее положение в системе плоскостей проекций $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один] – $\boldsymbol{\Pi_2}$[пи два], в новой системе плоскостей проекций, например $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один] – $\boldsymbol{\Pi_4}$ [пи четыре], оказалась бы в частном положении. То есть меняем $\boldsymbol{\Pi_2}$ [пи два] на $\boldsymbol{\Pi_4}$ [пи четыре] (рисунок *а*). Плоскость $\boldsymbol{\Pi_4}$ [пи четыре] расположили параллельно прямой $\boldsymbol{AB}$, теперь прямая относительно $\boldsymbol{\Pi_4}$ [пи четыре] займет положение прямой уровня, то есть спроецируется без искажения, значит, $\boldsymbol{AB}$ будет равна $\boldsymbol{A_4B_4}$. При этом не должен нарушаться принцип метода Монжа, то есть новая плоскость проекций $\boldsymbol{\Pi_4}$ [пи четыре] должна быть перпендикулярна остающейся плоскости проекций $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один]. Построение отрезка на новой плоскости проекций показано на рисунке *а*. Построение точки на новой плоскости проекций показано на рисунке *б.*

При построении проекции геометрической фигуры на новую плоскость проекций $\boldsymbol{\Pi_4}$ [пи четыре] расстояние от фигуры до остающейся плоскости проекций $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один] сохраняется неизменным.

Рассмотрим построение точки на новую плоскость проекций на чертеже (рисунок *б*). В системе $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один] – $\boldsymbol{\Pi_2}$ [пи два] задана точка $\boldsymbol{A}$. Ввести новую плоскость проекций $\boldsymbol{\Pi_4}$ [пи четыре] взамен $\boldsymbol{\Pi_2}$ [пи два] и построить проекцию точки $\boldsymbol{A}$ на $\boldsymbol{\Pi_4}$ [пи четыре]. Фиксируем систему плоскостей проекций $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один] – $\boldsymbol{\Pi_2}$ [пи два], у которой базой отсчёта будет ось $\boldsymbol{x_{12}}$. Меняем $\boldsymbol{\Pi_2}$ [пи два] на $\boldsymbol{\Pi_4}$ [пи четыре], но с учетом эпюра Монжа, плоскость $\boldsymbol{\Pi_4}$ [пи четыре] должна быть $\perp$ $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один]. В системе $\boldsymbol{\Pi_1}$

[пи один] – $\boldsymbol{\Pi_4}$ [пи четыре] базой отсчёта будет ось $\boldsymbol{x_{14}}$. Проводим $\boldsymbol{AA_4 \perp \Pi_4}$ [пи четыре], но так как $\boldsymbol{\Pi_4}$ [пи четыре] $\perp$ $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один], следовательно, $\boldsymbol{AA_4 \parallel \Pi_1}$ [пи один], значит, $\boldsymbol{AA_4}$ равняется $\boldsymbol{A_12}$ и $\boldsymbol{A_12 \perp x_{14}}$, тогда $\boldsymbol{A_42 \parallel A_1A}$ и $\boldsymbol{2A_4}$ равняется $\boldsymbol{1A_2}$. Далее, используя метод Монжа, поворачиваем $\boldsymbol{\Pi_4}$ [пи четыре] вправо до совмещения её с $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один]. Получаем $\boldsymbol{\Pi_4}$ [пи четыре], совмещенную с $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один]. Точка $\boldsymbol{A_4}$ займёт положение $\boldsymbol{A_4}$ ***(совмещенная)***. Расстояние $\boldsymbol{2A_4}$ равняется $\boldsymbol{2A_4}$ ***(совмещенная)***.

Рассмотрим построение точки на новую плоскость проекций на плоском чертеже (рисунок *в*). Фиксируем имеющуюся систему плоскостей проекций, то есть проводим базу отсчёта $\boldsymbol{x_{12}}$. Ось $\boldsymbol{x_{12}}$ будет $\perp$ $\boldsymbol{A_1A_2}$, то есть линиям связи. Меняем $\boldsymbol{\Pi_2}$ [пи два] на $\boldsymbol{\Pi_4}$ [пи четыре], проводим новую базу отсчёта ось $\boldsymbol{x_{14}}$. Так как у нас пока нет конкретной цели преобразования, то новую базу отсчёта $\boldsymbol{x_{14}}$ выбираем произвольно. Например, аналогично той, что на пространственном чертеже. Фиксируем новую систему плоскостей проекций $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один] – $\boldsymbol{\Pi_4}$ [пи четыре]. Проводим в новой системе линию связи $\boldsymbol{A_1A_4 \perp x_{14}}$. Откладываем расстояние $\boldsymbol{2A_4}$, равное $\boldsymbol{1A_2}$.

Построение других фигур на новую плоскость проекций сводится к аналогичному построению стольких точек, сколько определяет данную фигуру. Например, для прямой строим две точки, для плоскости строим три точки и так далее.

Всё многообразие задач, решаемых с помощью преобразования комплексного чертежа, сводится к четырём основным.

71 слайд

4.5. Первая и вторая задачи преобразования чертежа

<u>Первая основная задача</u> преобразования комплексного чертежа. Преобразовать комплексный чертёж так, чтобы прямая общего положения в новой системе плоскостей проекций стала бы прямой уровня.

Для иллюстрации этой задачи возьмём отрезок общего положения $\boldsymbol{AB}$. На рисунке *а* дан графический алгоритм построения $\boldsymbol{A_4B_4}$. На рисунке *б* дана пространственная модель построения $\boldsymbol{A_4B_4}$ и $\boldsymbol{A_5B_5}$. На рисунке *в* дан чертеж решения первой основной задачи преобразования комплексного чертежа и второй основной задачи преобразования.

Алгоритм решения первой основной задачи

Фиксируем систему плоскостей проекций $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один] – $\boldsymbol{\Pi_2}$ [пи два], то есть проводим базу отсчёта ось $\boldsymbol{x_{12}}$ (рисунок *б*). Меняем $\boldsymbol{\Pi_2}$ [пи два] на $\boldsymbol{\Pi_4}$ [пи четыре]. Новую плоскость проекций $\boldsymbol{\Pi_4}$ [пи четыре] выбираем так, чтобы отрезок $\boldsymbol{AB}$ был параллелен ей, то есть проводим $\boldsymbol{\Pi_4}$ [пи четыре] $\perp$ $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один] и проводим $\boldsymbol{AB \parallel \Pi_4}$ [пи четыре].

Теперь рассмотрим эти действия на плоском изображении, то есть на рисунке *а*. Новую базу отсчёта $\boldsymbol{x_{14}}$ проводим параллельно $\boldsymbol{A_1B_1}$, таким образом, фиксируем систему $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один] – $\boldsymbol{\Pi_4}$ [пи четыре]. От точек $\boldsymbol{A_1}$ и $\boldsymbol{B_1}$ проводим линии связи, перпендикулярные $\boldsymbol{x_{14}}$. Откладываем расстояния: $\boldsymbol{2A_4}$, равное $\boldsymbol{1A_2}$, и $\boldsymbol{x_{14}B_4}$, равное $\boldsymbol{x_{12}B_2}$ (рисунок *г*). В системе $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один] – $\boldsymbol{\Pi_4}$ [пи четыре] отрезок $\boldsymbol{AB}$ – прямая уровня, а её проекция $\boldsymbol{A_4B_4}$ есть натуральная величина $\boldsymbol{AB}$.

<u>Вторая основная задача</u> преобразования комплексного чертежа. Преобразовать комплексный чертёж так, чтобы прямая общего положения в новой системе плоскостей проекций стала бы проецирующей.

Вторая задача решается после того, как решена первая. Поэтому одним преобразованием нельзя прямую общего положения поставить в проецирующее положение. Разбирая алгоритм решения, одновременно рассматривайте пространственную модель и плоский чертеж.

Алгоритм решения второй основной задачи. Решаем первую основную задачу преобразования комплексного чертежа на примере отрезка ***AB***, одновременно смотрим на пространственное решение, то есть рисунок *б,* и решение на плоскости – рисунок *в.*

Меняем плоскость Π_1 [пи один] на Π_5 [пи пять]. Новую плоскость проекций Π_5 [пи пять] выбираем так, чтобы отрезок ***AB*** был перпендикулярен ей, при этом Π_5 [пи пять] должна быть перпендикулярна Π_4 [пи четыре], то есть остающейся плоскости проекций (рисунок *в*).

Так как отрезок ***AB*** в новой системе плоскостей проекций Π_4 [пи четыре] – Π_5 [пи пять] должен быть проецирующим, то новую базу отсчёта x_{45} выбираем перпендикулярно A_4B_4 (рисунок *в*). Проводим линию связи. Откладываем расстояния $3A_5$, равное $2A_1$, $x_{45}B_5$, равное $x_{14}B_1$. Поскольку $x_{14} \parallel A_1B_1$, то эти расстояния равны и точки A_5 и B_5 совпадут. Отрезок ***AB*** в системе Π_4 [пи четыре] – Π_5 [пи пять] занимает проецирующее положение, а его проекция A_5B_5 – точка.

Еще раз проследите графическое решение задачи в сочетании с символической алгоритмической записью решения. Чтобы формировалось ваше пространственно-образное мышление, вы должны научиться свободно мысленно «перекодировать» пространственное изображение в плоское и наоборот.

72 слайд

4.6. Третья задача преобразования чертежа

<u>Третья основная задача</u> преобразования комплексного чертежа. Преобразовать комплексный чертёж так, чтобы плоскость общего

положения стала бы проецирующей. Рассмотрим сначала пространственное преобразование.

Алгоритм решения. Зададим плоскость треугольником $\boldsymbol{ABC}$. Фиксируем систему плоскостей проекций $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один] – $\boldsymbol{\Pi_2}$ [пи два]. Меняем $\boldsymbol{\Pi_2}$ [пи два] на $\boldsymbol{\Pi_4}$ [пи четыре], плоскость $\boldsymbol{\Pi_4}$ [пи четыре] должна быть $\perp$ $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один]. Исходя из условий задачи плоскость $\boldsymbol{ABC}$ на новую плоскость проекций $\boldsymbol{\Pi_4}$ [пи четыре] должна спроецироваться в прямую линию $\boldsymbol{A_4B_4C_4}$. Поэтому одна из линий уровня этой плоскости, в данном случае горизонталь $\boldsymbol{h}$, спроецируется на эту линию в точку на плоскости $\boldsymbol{\Pi_4}$ [пи четыре].

Если заменяется $\boldsymbol{\Pi_2}$ [пи два] на $\boldsymbol{\Pi_4}$ [пи четыре], то это будет горизонталь, если заменяем $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один] на $\boldsymbol{\Pi_4}$ [пи четыре], то это будет фронталь. Таким образом, в плоскости $\boldsymbol{ABC}$ берется горизонталь $\boldsymbol{h}$ [аш], плоскость проекций $\boldsymbol{\Pi_4}$ [пи четыре] выбирают перпендикулярно этой горизонтали, следовательно, новую базу отсчёта $\boldsymbol{x_{14}}$ проводят перпендикулярно $\boldsymbol{h}$ [аш], то есть $\boldsymbol{h_1}$ [аш один], тем самым фиксируют систему $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один] – $\boldsymbol{\Pi_4}$ [пи четыре]. Откладывают расстояния: $\boldsymbol{x_{14}A_4}$, равное $\boldsymbol{x_{12}A_2}$, затем $\boldsymbol{x_{14}B_4}$, равное $\boldsymbol{x_{12}B_2}$, и $\boldsymbol{x_{14}C_4}$, равное $\boldsymbol{x_{12}C_2}$. В новой системе $\boldsymbol{\Pi_1}$[пи один] – $\boldsymbol{\Pi_4}$[пи четыре] плоскость $\boldsymbol{ABC}$ заняла проецирующее положение, а её главная проекция $\boldsymbol{A_4B_4C_4}$ теперь прямая линия.

73 слайд

4.7. Третья и четвертая задачи преобразования чертежа

Теперь рассмотрим плоский чертеж решения **третьей задачи преобразования комплексного чертежа.** Преобразовать комплексный чертёж так, чтобы плоскость общего положения стала проецирующей.

Алгоритм решения. Зададим плоскость треугольником ABC. Фиксируем систему плоскостей проекций Π_1[пи один] – Π_2[пи два], то есть проводим базу отсчёта x_{12} (рисунок *а*). Меняем Π_2 [пи два] на Π_4 [пи четыре], значит, Π_4 [пи четыре] будет $\perp$ Π_1 [пи один]. Исходя из условий задачи плоскость ABC на новую плоскость проекций Π_4 [пи четыре] должна спроецироваться Σ [сигма] в прямую линию $A_4B_4C_4$. Поэтому одна из линий уровня этой плоскости – h или f – спроецируется на эту линию в точку.

Таким образом, мы должны в плоскости ABC взять горизонталь h, выбрать Π_4 [пи четыре] перпендикулярно этой горизонтали, следовательно, новую базу отсчёта x_{14} проводим перпендикулярно h_1, тем самым фиксируем систему Π_1 [пи один] – Π_4 [пи четыре] (рисунок *а*). Откладываем расстояния: $x_{14}A_4$, равное $x_{12}A_2$, $x_{14}B_4$, равное $x_{12}B_2$, $x_{14}C_4$, равное $x_{12}C_2$. В новой системе Π_1 [пи один] – Π_4 [пи четыре] плоскость ABC станет проецирующей, а её главная проекция $A_4B_4C_4$ есть прямая линия.

<u>Четвертая основная задача</u> преобразования комплексного чертежа. Преобразовать комплексный чертёж так, чтобы плоскость общего положения стала бы плоскостью уровня.

Алгоритм решения. Четвёртая задача одной заменой не решается, вначале нужно решить третью задачу, как на предыдущем слайде, чтобы плоскость ABC заняла положение проецирующей на Π_4 [пи четыре]**.** Теперь можно вводить Π_5 [пи пять]. Вводим новую плоскость проекций Π_5[пи пять], то есть меняем Π_1 [пи один] на Π_5 [пи пять]. Плоскость проекций Π_5 [пи пять] должна быть перпендикулярной остающейся плоскости проекций, то есть Π_4 [пи четыре]. Относительно плоскости ABC плоскость Π_5 [пи пять] выбираем так, чтобы она была параллельна ей, то есть в системе Π_4 [пи четыре] – Π_5 [пи пять] плоскость ABC должна стать плоскостью уровня (рисунок *б*). Базу отсчёта x_{45} проводим параллельно $A_4B_4C_4$. Проводим в новой системе линии связи перпендикулярно оси x_{45} от точек A_4,B_4,C_4. Откладываем от этой оси расстояния: $x_{45}A_5$, равное $x_{14}A_1$, $x_{45}B_5$, равное $x_{14}B_1$, $x_{45}C_5$, равное $x_{14}C_1$. В системе $\boldsymbol{\Pi_4}$ [пи четыре] – $\boldsymbol{\Pi_5}$ [пи пять] плоскость $\boldsymbol{ABC}$ есть плоскость уровня, а её проекция $\boldsymbol{A_5B_5C_5}$ есть натуральная величина треугольника $\boldsymbol{ABC}$.

Еще раз проследите графическое решение задачи и алгоритмическую запись решения, чтобы формировалось ваше пространственно-образное мышление. Вы должны научиться свободно мысленно «перекодировать» пространственное изображение в плоское и наоборот. Тем более что в следующих задачах вы постоянно будете использовать эти преобразования.

74 слайд

4.8. Решение метрических задач

Преобразование комплексного чертежа часто используется при решении метрических задач. В этом случае конечной целью преобразования чертежа является получение такой проекции оригинала, на которой можно было бы видеть в натуральную величину геометрический элемент, связанный с **искомой метрической характеристикой**.

Такое положение оригинала относительно некоторой плоскости проекций, при котором по проекции можно непосредственно определить нужную метрическую характеристику, называется **решающим положением оригинала.**

Задача 1. Заданы две параллельные прямые ***a*** и ***b*** (рисунок *а*). Требуется определить расстояние между ними.

В этом случае решающим положением параллельных прямых будет положение перпендикулярности к плоскости проекций. Так как прямые ***a*** и ***b*** являются фронталями, то, чтобы поставить их в проецирующее положение, потребуется только одна замена. То есть нужно решить вторую задачу преобразования комплексного чертежа. Для решения выбираем способ замены плоскостей проекций.

Алгоритм решения. Смотри рисунок *б*. Меняем Π_1 [пи один] на Π_4 [пи четыре]. Для этого ставим Π_4 [пи четыре] $\perp$ Π_2 [пи два], значит, Π_4 [пи четыре] будет $\perp$ ***a***, ***b***, на чертеже проводим ось $x_{24} \perp a_2b_2$. Откладываем расстояния $x_{24}a_4$, равное $x_{12}a_1$, и $x_{24}b_4$, равное $x_{12}b_1$. Прямые проецируются на Π_4 [пи четыре] в точки, а расстояние между ними a_4 и b_4 есть решение задачи, поэтому такое положение прямых называется решающим положением.

Таким образом, прямые ***a*** и ***b*** на Π_4 [пи четыре] проецируются в точки, и расстояние между a_4 и b_4 определяет расстояние между прямыми ***a*** и ***b***. Возвращаем это расстояние в систему Π_2 [пи два] – Π_1 [пи один], то есть 1_22_2 и 1_12_1, для этого проводим на фронтальной проекции перпендикуляр 1_22_2, так как ***а*** и ***в*** – параллельные фронтали, то есть соблюдается теорема о проецировании прямого угла, с помощью линий связи строим 1_12_1.

75 слайд

4.8. Решение метрических задач

Для нахождения натурального вида плоской фигуры решающим положением является такое, при котором плоскость, где расположена эта фигура, параллельна какой-нибудь плоскости проекций (смотри четвёртую задачу преобразования комплексного чертежа).

Несмотря на огромное разнообразие метрических задач, можно записать единый алгоритм их решения с использованием преобразования комплексного чертежа:

1. Установить наличие метрической характеристики в задаче.

2. Определить носителя этой метрической характеристики.

3. Выбрать «решающее положение» оригинала, при котором по проекции можно сразу определить натуральную величину геометрического элемента, связанного с метрической характеристикой.

Решающее положение оригинала определяется выбором одной из четырёх задач преобразования комплексного чертежа.

4. Выбрать рациональный способ преобразования.

Всё вышеизложенное рассмотрим на примере конкретной конструктивной задачи.

Задача 2. Построить проекции равностороннего треугольника ***ABC***, который принадлежит плоскости ***Г*** [гамма], заданной пересечением ***h*** [аш] и ***f***, если его сторона ***AB*** задана (рисунок *а*).

Алгоритм решения. Чтобы построить проекции треугольника ***ABC***, необходимо сначала определить его истинный вид. В этом случае решающим положением оригинала, то есть треугольника ***ABC***, является то, при котором плоскость треугольника параллельна плоскости проекций. Для этого плоскость ***Г*** [гамма] нужно поставить в положение плоскости уровня.

Чтобы сделать это, требуется решить четвёртую задачу преобразования комплексного чертежа. Выбираем способ замены плоскостей проекций. Для решения четвёртой задачи требуется выполнить две замены, то есть решить ***третью и четвертую задачи*** преобразования комплексного чертежа.

Фиксируем систему $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один] – $\boldsymbol{\Pi_2}$ [пи два], то есть проводим $\boldsymbol{x_{12}}$ (рисунок *б*). Меняем $\boldsymbol{\Pi_2}$ [пи два] на $\boldsymbol{\Pi_4}$ [пи четыре]. Проводим $\boldsymbol{\Pi_4}$ [пи четыре] $\perp$ $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один], $\boldsymbol{\Pi_4}$ [пи четыре] должна быть $\perp$ ***Г*** [гамма], значит, $\boldsymbol{\Pi_4}$ [пи четыре] будет $\perp$ ***h*** [аш], поэтому на чертеже проводим ось $\boldsymbol{x_{14} \perp h_1}$ [аш один]. Так как плоскость ***Г*** [гамма] на $\boldsymbol{\Pi_4}$ [пи четыре] спроецируется в прямую линию, то для её построения требуется всего две точки. Для этого откладываем расстояние $\boldsymbol{x_{14}1_4}$, равное $\boldsymbol{x_{12}1_2}$, $\boldsymbol{x_{14}A_4}$, равное $\boldsymbol{x_{12}A_2}$. Плоскость $\boldsymbol{\Gamma_4}$ [гамма четыре] есть главная проекция, так как спроецировалась в прямую линию $\boldsymbol{B_4C_4}$, **то есть *третья задача*** преобразования комплексного чертежа решена.

Теперь решаем ***четвертую задачу*** преобразования комплексного чертежа. Для этого меняем $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один] на $\boldsymbol{\Pi_5}$ [пи пять]. Плоскость проекций $\boldsymbol{\Pi_5}$ [пи пять] должно быть $\perp$ $\boldsymbol{\Pi_4}$ [пи четыре] и $\boldsymbol{\Pi_5}$ [пи пять] должно быть // $\boldsymbol{\Gamma_4}$ [гамма четыре], поэтому проводим ось $\boldsymbol{x_{45}}$ // $\boldsymbol{\Gamma_4}$. Теперь откладываем расстояния $\boldsymbol{x_{45}1_5}$, равное $\boldsymbol{x_{14}1_1}$, $\boldsymbol{x_{45}A_5}$, равное $\boldsymbol{x_{14}A_1}$, $\boldsymbol{x_{45}B_5}$, равное $\boldsymbol{x_{14}B_1}$.

В системе $\boldsymbol{\Pi_4}$ [пи четыре] – $\boldsymbol{\Pi_5}$ [пи пять] плоскость $\boldsymbol{\Gamma}$ [гамма] заняла положение плоскости уровня, поэтому отрезок $\boldsymbol{A_5B_5}$ есть натуральная величина $\boldsymbol{AB}$, и треугольник $\boldsymbol{ABC}$ спроецируется на $\boldsymbol{\Pi_5}$ [пи пять] в натуральную величину. Для его построения из точек $\boldsymbol{A_5}$ и $\boldsymbol{B_5}$ откладываем отрезки, равные $\boldsymbol{A_5B_5}$, и получаем точку $\boldsymbol{C_5}$. Проекция $\boldsymbol{A_5B_5C_5}$ есть натуральная величина равностороннего треугольника $\boldsymbol{ABC}$. По условию задача должна быть решена в системе $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один] – $\boldsymbol{\Pi_2}$ [пи два], поэтому необходимо вернуть треугольник $\boldsymbol{ABC}$ в систему $\boldsymbol{\Pi_1}$[пи один] – $\boldsymbol{\Pi_2}$[пи два], то есть вернуть точку $\boldsymbol{C}$ в систему $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один] – $\boldsymbol{\Pi_2}$ [пи два].

Возвращаем точку $\boldsymbol{C}$ в систему $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один] – $\boldsymbol{\Pi_2}$ [пи два] в обратном порядке. Сначала находим $\boldsymbol{C_4}$ на $\boldsymbol{\Gamma_4}$, проведя линию связи от $\boldsymbol{C_5}$ перпендикулярно $\boldsymbol{x_{45}}$. Затем от точки $\boldsymbol{C_4}$ проводим линию связи в системе $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один] – $\boldsymbol{\Pi_4}$ [пи четыре] и откладываем расстояние $\boldsymbol{x_{14}C_1}$, равное $\boldsymbol{x_{45}C_5}$. От точки $\boldsymbol{C_1}$ проводим линию связи в системе $\boldsymbol{\Pi_1}$ [пи один] – $\boldsymbol{\Pi_2}$ [пи два] и откладываем расстояние $\boldsymbol{x_{12}C_2}$, равное $\boldsymbol{x_{14}C_4}$. Задача решена, построены проекции равностороннего треугольника $\boldsymbol{ABC}$, принадлежащего плоскости $\boldsymbol{\Gamma}$ [гамма] (рисунок *б*).

76 слайд

4.9. Решение позиционных задач

Многие позиционные задачи, главным образом задачи на пересечение поверхностей с прямыми или плоскостями общего положения, удобно решать с помощью преобразования комплексного чертежа. В этом случае конечной целью преобразования является получение такой проекции оригинала, при которой участвующие в пересечении прямая или плоскость находятся в частном положении. Тогда в новом положении решение задачи значительно упрощается. При необходимости проекции общего элемента возвращают в исходный чертёж в обратном порядке.

Рассмотрим вышесказанное на конкретном примере.

Задача. Найти точки пересечения сферы с прямой ***a*** (рисунок *а*). Это позиционная задача ***1-я ГПЗ по 3-му алгоритму***, такие задачи решаются с помощью введения плоскости-посредника. Посмотрите, насколько упрощается решение такой задачи с применением способов преобразования комплексного чертежа.

Алгоритм решения. Выбираем решающее положение оригинала. Оно должно быть таким, чтобы прямая ***a*** и окружность ***b*** на сфере ***Σ*** [сигма], лежащие в одной плоскости, спроецировались бы в натуральную величину (рисунок *б*). Для этого плоскость окружности ***Г*** [гамма] должна быть плоскостью уровня. Выбираем способ замены плоскостей проекций.

Плоскость ***Г*** [гамма] занимает проецирующее положение, следовательно, требуется только одна замена. Поэтому решаем четвёртую задачу преобразования комплексного чертежа. Фиксируем систему Π_1 [пи один] – Π_2 [пи два], проводим базу, то есть ось x_{12}. Меняем Π_1 [пи один] на Π_4 [пи четыре], так как Π_4 [пи четыре] $\perp$ Π_2 [пи два], плоскость окружности Π_4 [пи четыре] будет $\parallel Г$ [гамма], значит, проводим ось $x_{24} \parallel Г_2$ [гамма два]. От точки O_2 проводим линию связи в системе Π_2 [пи два] – Π_4 [пи четыре] перпендикулярно $Г_2$ [гамма два]. На пересечении с $Г_2$ [гамма два] отмечаем центр окружности на Π_2 [пи два], то есть точку b_2. На линии связи, проведенной из точки O_2, откладываем расстояние $x_{24}O_4$, равное $x_{12}O_1$. Получаем центр O_4 окружности ***b***, проводим окружность b_4 радиусом ***R***. Теперь проецируем прямую ***a*** на Π_4 [пи четыре]. Для этого на ней отметим точки ***1*** и ***2*** и откладываем расстояния $x_{24}1_4$, равное $x_{12}1_1$, $x_{24}2_4$, равное $x_{12}2_1$. Получаем a_4. Там, где a_4 пересечётся с b_4, будут искомые точки M_4 и N_4.

Теперь, как и в предыдущих задачах, возвращаем точки ***M*** и ***N*** в систему Π_2 [пи два] – Π_1 [пи один] в обратном порядке по принадлежности прямой ***a*** (рисунок *в*).

Видимость точек можно определить так, как обычно определяют их на сфере: точка M_2 расположена выше экватора, значит, M_1 будет видимая, точка N_2 расположена ниже экватора, значит, N_2 будет невидимая. Точка M_1 расположена ближе к наблюдателю, чем плоскость фронтального меридиана, значит, M_2 будет видимая. Точка N_1 расположена дальше от наблюдателя, чем плоскость фронтального меридиана, поэтому N_2 будет невидимая, то есть на чертеже берется в скобки. Видимость этих точек можно было определить и с помощью конкурирующих точек.

Выводы

Преобразование комплексного чертежа значительно упрощает решение метрических и позиционных задач. При решении конструктивных задач важным моментом является выбор решающего положения оригинала. Несмотря на разнообразие конструктивных задач, существует единый алгоритм их решения.

Литература

1. Варенцова, Т.А. Начертательная геометрия : сборник учебно-методических материалов / Т.А. Варенцова, Г.Н. Уполовникова. – Тольятти : ТГУ, 2009. – 300 с.

2. Начертательная геометрия : практикум / Т.А. Варенцова [и др.]. Тольятти : ТГУ, 2009. – 200 с.

1.5. Интернет-ресурсы

1. *http://graph.power.nstu.ru/* – сайт Новосибирского государственного университета.

2. *http://edu1.distedu.ru/index.php –* сайт Удмуртского государственного университета.

3. *http://traffic.spb.ru/geom/begin/info.htm l –* сайт Санкт-Петербургского государственного университета.

4. *http://www.magtu.ru/* – сайт Магнитогорского государственного университета.

5. http://www.propro.ru/graphbook/ – Электронные лекции для студентов архитектурно-строительных университетов. Вольхин Константин Анатольевич.

6. http://www.twirpx.com/files/special/nig/ – Курс лекций по начертательной геометрии на базе учебника Посвянского А.Д. «Краткий курс начертательной геометрии».

7. http://window.edu.ru/window/catalog?p_rubr=2.2.75.31 – сайт «Образование в области техники и технологии». Начертательная геометрия, инженерная графика.

8. http://wwwcdl.bmstu.ru/rk1/Vol1/DescriptiveGeometry/index.html – Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана.