Курс «Сопротивление материалов»

Татьяна Федоровна Гаврилова

Кафедра «Нанотехнологии, материаловедение и механика»

e-mail: gavrilova.tatiana@gmail.com

Тема 1 Основные положения сопротивления материалов

Слайд 1

Наука о сопротивлении материалов

Современное название науки «Сопротивление материалов» - механика деформируемого твердого тела. В нем в полной мере отражены перечисленные основные задачи курса: расчет на прочность, жесткость и устойчивость элементов конструкций. В рамках решения этих задач могут быть достигнуты различные цели:

1. Определение размеров конструкции при известных нагрузках и марке материала, которые обеспечивают ее надежность.
2. Определение величин нагрузок, удовлетворяющих прочностной надежности, при известных размерах конструкции и прочностных характеристиках материала.
3. Подбор марки материала при известных нагрузках и размерах конструкции с такими возможностями, которые бы обеспечили ее надежность.
4. Оценка работоспособности конструкции, при известных ее размерах и марки материала, в новых условиях эксплуатации.

Слайд 2

Краткая историческая справка

Проблемы надежности строительных и технических сооружений, создаваемых человечеством, сопровождали всю историю развития цивилизации и стали толчком для создания системы знаний, науки о прочности, уже в пятнадцатом столетии.

Можно с гордостью назвать имя великого Леонардо да Винчи, а затем и Галилео Галилея, как основателей очень важной ее составляющей – экспериментальной части. Оба этих великих ученых занимались исследованием деформаций растяжения и изгиба и не только путем проведения натурных испытаний. Например, Галилео Галилей уже в те далекие времена ввел понятие балки равного сопротивления, установив зависимость высоты прямоугольного поперечного сечения консольной балки от ее длины.

Но, поистине, прорывом в формировании науки «Сопротивление материалов» стало открытие Робертом Гуком первого закона - закона об упругости. Им было установлено, что перемещение прямо пропорционально приложенной силе. Первоначально закон был опубликован в виде анаграммы и лишь спустя два года в своем труде об упругости он расшифровал ее в лаконичной формулировке: «Какова сила таково и удлинение».

Неоценим вклад в сопротивление материалов великого швейцарского ученого Леонардо Эйлера. Именно он положил начало в развитие очень важного раздела науки «Устойчивость». В 1757 году Леонард Эйлер получил формулу для определения критической силы, при которой происходит потеря устойчивости прямолинейной формы сжатых стержней. Он же исследовал устойчивость стержней переменного сечения. Перечисленные открытия не имели применения во времена Эйлера, но зато стали широко использоваться в следующем столетии в области создания железнодорожного транспорта и в мостостроении.

Слайд 3

Краткая историческая справка

В начале девятнадцатого столетия английский ученый Томас Юнг дополнил закон Гука введением понятия модуля упругости, как константы, характеризующей свойства материала. Он же отметил, что выполнение прямой пропорциональной зависимости между перемещением и силой наблюдается только на начальной стадии нагружения.

Начало девятнадцатого века ознаменовалось созданием теории напряженного-деформированного состояния французским ученым Огюс´теном Луи Ко´ши. Он сформулировал понятие о напряжении и разработал математический аппарат для его определения. Напряжение - это такая физическая характеристика, которая позволила оценивать прочность конструкций в численном выражении и легла в основу разрабатываемых с этой целью методов. Вскоре появилось первое руководство по сопротивлению материалов, автором которого стал сподвижник Коши Клод Навье.

Двадцатое столетие началось с богатым научным багажом в области науки о прочности, которая продолжала свое триумфальное развитие в ответ на большие запросы технической революции. Мы назовем имена лишь трех ученых из очень большого числа известных имен, внесших большой вклад в науку.

Первым из них хочется отметить немецкого ученого Августа Велера, который положил начало теории усталостной прочности. Он разработал методику экспериментального исследования поведения материалов под воздействием переменных нагрузок, в результате чего были дополнены знания о свойствах материалов.

Алексей Николаевич Крылов – величайший русский ученый внес большой вклад в развитие теории кораблестроения. В сопротивлении материалов мы до сих пор пользуемся его методом начальных параметров, теорией для расчета балок на упругом основании и математическими методами в теории устойчивости стержней.

Степан Прокофьевич Тимошенко – русский ученый, создавший кафедру «Сопротивление материалов» в Киевском политехническом институте и принявший участие в создании Украинской академии наук, считается основателем теории устойчивости оболочек. Им же был издан первый учебник по теории упругости и сопротивлению материалов.

Итак, значимые открытия в области механики сплошной среды и бурное развитие промышленности и транспорта в двадцатом столетии далеко продвинули «Сопротивление материалов» как науку. Дальнейшее ее развитие непосредственно связано с возрастающими запросами человеческой цивилизации, взаимно влияя друг на друга. В настоящее время наука о прочности лежит в основе автоматизированных систем проектирования - мощнейших программных комплексов, позволяющих создавать современные конструкции со сложными функциональными возможностями.

Слайд 4

Реальный объект и расчётная схема

Расчет любой конструкции начинается с создания расчетной схемы. Связано это с тем, что в основе любого расчета лежит математическая модель, сложность которой зависит от количества параметров, учитывающих особенности самой конструкции, свойств материала, процесса нагружения и разрушения. Обычно при схематизации реального объекта учитываются только существенные особенности. Поэтому принимается ряд допущений и упрощений применительно к форме объекта и его опорным элементам, материалу, из которого он изготовлен и условиям нагружения. Корректность схематизации реального объекта, конечно же, очень важна для получения результатов близких к истине. Поэтому требуется достаточно большой профессиональный опыт, как в вопросах схематизации, так и в вопросах анализа результатов расчета по предложенному варианту расчетной схемы. Иногда, исходя из проведенного анализа, приходится возвращаться к схематизации и уточнять некоторые элементы расчетной схемы. В результате должна использоваться такая расчетная схема, результаты расчета по которой обеспечат прочностную надежность конструкции.

Слайд 5

Основные приёмы составления расчётных схем

Рассмотрим отдельные приемы схематизации. Так, любые геометрические особенности конструкции можно свести к трем типам схем:

1. Стержни - объекты, у которых существенен только один размер.
2. Пластины и оболочки – объекты, у которых существенны два размера.
3. Объемные тела, когда необходимо учитывать все три размера.

При схематизации свойств материала пользуются допущениями называемыми гипотезами:

1. Гипотеза о сплошности материала, предполагает, что материал непрерывно заполняет весь объем конструкции.
2. Гипотеза об однородности, допускает, что материал обладает одинаковыми свойствами в любой точке конструкции.
3. Гипотеза об изотропности предполагает, что материал обладает одинаковыми свойствами в разных направлениях.
4. Гипотеза об идеальной или линейной упругости наделяет материал свойством полностью восстанавливать свои размеры и форму после снятия нагрузки.

Слайд 6

Основные приёмы составления расчётных схем

Все типы нагрузок, встречающиеся в технике, схематизируют по степени их локализации:

1. Сосредоточенные силы – это силы, которые передаются через контактные площадки малой величины по сравнению с размером объекта.
2. Линейно-распределенные – это силы, распределенные по длине, размер которой соизмерим с длиной самой конструкции.

3. Объемно-распределенные силы – это в основном силы веса, которые необходимо учитывать при расчете конструкции.

Схематизация опорных элементов показана для случая плоской задачи и основана на учете направлений, по которым запрещены перемещения закрепленных точек конструкции:

1. Шарнирно-подвижная опора ограничивает перемещение в одном направлении.
2. Шарнирно-неподвижная опора не дает перемещаться в двух направлениях.
3. Жесткая заделка кроме перемещений в двух направлениях не дает возможность поворота в закрепленной точке.

Слайд 7

Внутренние силовые факторы. Метод сечений

Итак, согласно рассмотренным приемам составляется расчетная схема реального объекта. Первым очень важным этапом работы с составленной расчетной схемой является определение внутренних силовых факторов, возникающих в материале конструкции в ответ на внешнее воздействие. Именно величины внутренних сил и характер их распределения определяет напряженно-деформируемое состояние конструкции. Напряжения и деформации являются функцией внутренних усилий, поэтому задача их определения предшествует расчету на прочность и жесткость.

Для нахождения внутренних силовых факторов в сопротивлении материалов существует метод сечений, который мы сейчас с вами рассмотрим.

Дан произвольный элемент конструкции, нагруженный самоуравновешенной системой Fn [эф`эных] внешних сил. Требуется определить величины внутренних силовых факторов в произвольном поперечном сечении данного физического объекта.

С этой целью сделаем сечение в произвольном месте, разделив элемент конструкции на две части А и В. Очевидно, что действие каждой части друг на друга можно заменить в поперечном сечении каждой из частей внутренними силами. Таким образом, каждая из частей А и В будет находиться в состоянии статического равновесия под действием оставшихся на ней внешних и возникших внутренних сил. Согласно третьему закону Ньютона, внутренние силы, находящиеся в сечении части А, по своему действию равны внутренним силам в сечении части В, но противоположны по направлению. Это позволяет для определения внутренних сил оставить для рассмотрения одну из двух частей: либо часть А, либо – В.

Слайд 8

Внутренние силовые факторы

Для дальнейшего решения задачи рассмотрим часть А. Из курса теоретической механики известно, что любую произвольную систему сил можно заменить эквивалентной системой, состоящей из главного вектора силы R [эр] и главного момента M [эм], приложенных к точке центра тяжести площади сечения. В ней же поместим начало системы координат xyz [икс, игрек, зет]. Оси x и y – оси, находящиеся в плоскости сечения, а ось z направлена по нормали к ней.

Спроецируем главный вектор силы R [эр] на координатные оси. Проекцию на ось z обозначим N [эн], проекции на оси x и y, соответственно, Qx [ку икс] и Qy [ку игрек]. N [эн] - внутренняя продольная сила, Qx [ку икс] и Qy [ку игрек] - внутренние поперечные силы.

Главный момент M [эм] разложим по действию относительно координатных осей. Момент относительно оси z Mz [эм зет] – внутренний крутящий момент, а моменты относительно осей x и y, соответственно, Mx [эм икс] и My [эм игрек] – внутренние изгибающие моменты.

Таким образом, произвольную пространственную систему внутренних сил в сечении части А мы привели к шести внутренним силовым факторам: трем силам N [эн], Qx [ку икс] и Qy [ку игрек] и трем моментам Mz [эм зет], Mx [эм икс] и My [эм игрек]. В сопротивлении материалов выражение «внутренние силовые факторы» принято коротко называть ВСФ [вэ сэ эф].

Слайд 9

Определение внутренних силовых факторов

Для определения полученных шести внутренних силовых факторов применим аппарат статики: составим уравнения равновесия для системы сил, приложенных к части А. Можно составить 6 уравнений. Три уравнения суммы проекций всех сил на оси z, x и y поперечного сечения и три уравнения суммы моментов относительно осей z, x и y.

Внутренняя продольная сила N [эн] войдет только в одно уравнение суммы проекций всех сил на ось z, поперечные силы Qx [ку икс] и Qy [ку игрек] – только в уравнения суммы проекций всех сил на оси x и y, соответственно. В результате из этих уравнений получим выражения для определения величин всех внутренних сил, на слайде обозначенные (1.1). Из этих выражений следует, что каждая из внутренних сил определяется алгебраической суммой проекций внешних сил, которые остались на рассматриваемой части A элемента конструкции, на соответствующую ось поперечного сечения. Так, чтобы определить величину N [эн] надо алгебраически сложить проекции внешних сил, приложенных к части A, на ось z. Для определения величины Qx [ку икс] надо алгебраически сложить проекции внешних сил, приложенных к части A, на ось x, а для Qy [ку игрек] – на ось y.

Внутренний момент Mz [эм зет] войдет только в одно уравнение равновесия: в сумму моментов относительно оси z. А каждый из моментов Mx [эм икс] и My [эм игрек] только в уравнение суммы моментов относительно осей x и y, соответственно. В результате из этих уравнений получим выражения для определения внутренних моментов, обозначенные номером (1.2). Итак, чтобы определить внутренний крутящий момент Mz [эм зет] надо алгебраически сложить моменты от всех внешних сил на части A относительно оси z. Для определения внутреннего изгибающего момента Mx [эм икс] необходимо алгебраически сложить моменты от внешних сил на рассматриваемой части элемента конструкции относительно оси x. А для My [эм игрек] – относительно оси y.

Алгоритм метода достаточно лаконичен и состоит всего из трех пунктов. Дополнив его при решении конкретных задач правилами знаков для проекций внешних сил на координатные оси и для моментов относительно осей, мы будем использовать метод сечений для построения эпюр внутренних силовых факторов. Эпюры – это графическое представление функций внутренних силовых факторов. Они необходимы для определения положения опасного сечения рассчитываемых элементов конструкций, и их построение является важным этапом прочностного расчета.

Слайд 10

Основные виды деформации

По тому, какие внутренние силовые факторы возникают в нагруженной конструкции, можно классифицировать виды деформации.

Если в ответ на внешнее силовое воздействие возникает только внутренняя продольная сила, то такой вид деформации называется растяжением или сжатием.

При наличии в сечениях только внутреннего изгибающего момента означает, что элемент конструкции испытывает чистый изгиб.

Возникновение только внутреннего крутящего момента в ответ на силовое воздействие приводит к деформации кручения.

И деформация сдвига сопровождается наличием в сечениях только внутренней поперечной силы.

Чаще всего в элементах конструкций строительных и технических объектов возникает сразу несколько внутренних силовых факторов. Это означает, что они испытывают более сложные виды деформаций. Так, например, при наличии поперечной силы и изгибающего момента возникает поперечный изгиб. А при наличии двух изгибающих моментов и определенной формы поперечного сечения – косой изгиб. И так далее.

Слайд 11

Понятие о напряжении

Как было отмечено выше, напряжения и деформации являются функциями внутренних силовых факторов. Возвращаясь к методу сечений и рассматривая одну из двух частей конструкции, выделим в поперечном сечении элементарную площадку dA [дэ а]. В силу ее малости, можно принять закон распределения внутренних сил на ней равномерным. Это означает, что эквивалентная система сил, которой ее можно заменить будет состоять только из главного вектора силы dR [дэ эр], а главный момент будет равен нулю. Поделив каждую из проекций главного вектора силы dN [дэ эн], dQx [дэ ку икс], dQy [дэ ку игрек] на величину площади dA, на которую они воздействуют, получим соответствующие напряжения. Таким образом, в напряженной точке элемента конструкции в общем случае могут возникнуть два типа напряжения: нормальное и касательное. Вектор нормального напряжения σ [сигма] направлен перпендикулярно плоскости сечения. Вектора касательных напряжений τzx [тау зет икс] и τzy [тау зет игрек], действуют в плоскости сечения по направлению осей x [икс] и y [игрек], соответственно.

Размерность напряжений в системе Си – паскаль, равный усилию в ньютонах, деленному на площадь поперечного сечения в метрах квадратных.

Слайд 12

Интегральные уравнения равновесия

Получим выражения, связывающие внутренние силовые факторами с напряжениями. Для этого выразим элементарные внутренние силы через напряжения. Взяв интегралы по площади от обеих частей полученных выражений (1.3), выразим внутренние силы через интегралы от соответствующих напряжений по формулам (1.4).

Элементарные внутренние моменты определяем по формулам (1.5) через внутренние силы, умноженные на соответствующие расстояния до осей координат. Затем снова берем интегралы от обеих частей выражения для каждого элементарного момента. В результате получаем три интегральных уравнения (1.6), связывающие внутренние моменты с напряжениями.

Слайд 13

Понятие о перемещении и деформации

Для того, чтобы перейти к определению деформаций и перемещений, рассмотрим физический объект, нагруженный самоуравновешенной системой Fn [эф энных] сил. Зафиксируем на нем точки B [бэ] и C [цэ] до приложения внешних сил. Под действием нагрузок положение этих точек изменится. Пусть B1 [бэ один] и C1 [цэ один] – их новое положение.

Линейным перемещением δ [дельта] называется кратчайшее расстояние между начальным и конечным положением фиксированной точки.

Соединим точки B [бэ] и C [цэ], а также точки B1 [бэ один] и C1 [цэ один]. Пусть длина полученного отрезка BC [бэцэ] будет s [эс], а длина отрезка B1C1 [бэ один цэ один] s+Δs [эс плюс дельта эс]. Величина, на которую изменилось расстояние между фиксированными точками B [бэ] и C[цэ] под действием системы внешних сил называется абсолютной линейной деформацией. Абсолютная линейная деформация имеет размерность длины. В системе СИ – это метры.

Предел отношения абсолютной линейной деформации Δs [дельта эс] к первоначальной длине отрезка s [эс] при условии, что Δs [дельта эс] стремится к нулю, называется относительной линейной деформацией. Относительная линейная деформация не имеет размерности. Часто ее величину представляют в процентах от первоначальной длины.

Если линейные деформации связаны с изменением размеров физического объекта под действием внешних сил, то изменение его формы приводит к возникновению угловых деформаций. Для понимания того, что это такое, зафиксируем в ненагруженном физическом объекте три точки B [бэ], O, C [цэ] и соединим точку O с точками B [бэ] и C [цэ]. Получим угол BOC [бэ о цэ]. В результате нагружения зафиксированные точки окажутся в новом положении, отмеченном точками B1 [бэ один], O1 [о один], C1 [цэ один]. Вновь соединим их в угол B1O1C1 [бэ один о один цэ один].

Угловой деформацией называется предел разности величин углов между двумя направлениями, определенными фиксированными бесконечно малыми отрезками после и до приложения внешних сил к физическому объекту. Угловую деформацию еще называют деформацией сдвига. В системе Си ее измеряют в градусах или радианах.

Слайд 14

Теорема Кастилиано

Чтобы получить универсальный математический аппарат для определения перемещений, рассмотрим теорему Кастилиано.

Формулировка теоремы: Частная производная от потенциальной энергии деформации системы по силе равняется перемещению точки приложения данной силы по ее направлению.

Для доказательства теоремы рассмотрим физический объект, нагруженный системой {Fn} [эф энных] сил. Определим перемещение n-ой [энной] точки под действием приложенных сил, рассмотрев два порядка приложения внешних сил к объекту и приняв за основу утверждение, что результат не зависит от порядка приложения.

Слайд 15

Первый порядок приложения внешних сил

Рассмотрим первый порядок приложения внешних сил.

1. Нагрузим тело системой {Fn} [эф энных] сил. При этом тело приобретает потенциальную энергию деформации, равную U [у].
2. Увеличим Fn [эф энную] силу на бесконечно малую величину dFn [дэ эф энную]. Потенциальная энергия получит приращение $\frac{\partial u}{\partial F_n} dF_n$ [дэ у по дэ эф энное на дэ эф энную].

Суммарную потенциальную энергию деформации определим, сложив величины полученных энергий.

Слайд 16

Второй порядок приложения внешних сил

Теперь рассмотрим второй порядок приложения внешних сил.

1. Нагрузим тело в n-ой [энной] точке силой бесконечно малой величины dFn [дэ эф энной]. При этом n-ая [энная] точка получит бесконечно малое перемещение $d\delta_n$ [дэ дельта энное]. Потенциальную энергию деформации определим как работу этой силы на полученном перемещении. По теореме Клапейрона она будет равна одной второй от произведения силы на перемещение.

2. Приложим к телу систему {Fn} [эф энных] сил. В результате n-ая [энная] точка получит дополнительное перемещение δ_n [дельта энное]. Потенциальная энергия деформации тела увеличится на величину U [у], и, кроме того, сила dFn [дэ эф энная] совершит дополнительную работу на перемещении δ_n [дельта энное].

Определим величину суммарной потенциальной энергии деформации при втором порядке приложения сил. Предполагая, что величина потенциальной энергии деформации тела не зависит от порядка приложения сил, приравняем суммарные потенциальные энергии деформации, полученные в двух вариантах нагружения.

Сократим обе части равенства на одинаковые слагаемые U [у] и примем равным нулю слагаемое, содержащее произведение двух производных, как величину второго порядка малости.

В результате получим перемещение n-ой [энной] точки, равное частной производной от потенциальной энергии деформации U [у] по силе, приложенной к n-ой [энной] точке.

Теорема доказана. Она имеет некоторые ограничения по применению, так как с ее помощью можно определять перемещения только тех точек упругой системы, к которым приложены внешние силы.

Слайд 17

Теорема Бетти

Докажем еще одну теорему, которая дает представление о некоторых свойствах перемещений, возникающих в упругих системах при нагружении их так называемыми единичными силами. Эти свойства используются в методах расчета сложных конструкций, которые называют статически неопределимыми. Терема состоит из двух частей. Первая часть была доказана итальянским математиком Эн´рико Бетти [Бэ`ти] и носит название теоремы о взаимности работ. Вторая часть «вытекает» из первой. И это теорема о взаимности единичных перемещений, которая, по сути, является частным случаем первой части при условии нагружения упругой системы единичными силами. Этот случай блестяще подметил английский ученый Джеймс Максвелл.

Рассмотрим первую часть теоремы.

Пусть дана упругая система в виде двухопорной балки. Выделим на балке две точки. Точку номер один назовем точкой первого состояния, а точку номер два - точкой второго состояния. Сформулируем теорему.

Работа силы первого состояния на перемещении, вызванном силой второго состояния, равняется работе силы второго состояния на перемещении, вызванном силой первого состояния:

Для математической формулировки теоремы введем обозначения. δ11 [дельта один один] – перемещение первой точки под действием силы, приложенной к данной точке F1 [эф один]. δ12 [дельта один два] – перемещение первой точки от силы, приложенной ко второй точке F2 [эф два]. δ22 [дельта два два] – перемещение второй точки от силы приложенной к данной точке F2 [эф два]. δ21 [дельта два один] – перемещение второй точки от силы, приложенной к первой точке F1 [эф один].

Докажем теорему, рассмотрев два порядка приложения внешних сил.

Первый порядок.

Нагрузим балку силой F1 [эф один]. Точка один получит перемещение δ11 [дельта один один], а точка два – перемещение δ21 [дельта два один]. Потенциальную энергию деформации определим как работу силы F1 [эф один] на перемещении □11 [дельта один один]. Согласно теореме Клайперона это определится половиной произведения силы на перемещение.

Добавим во вторую точку силу F2 [эф два]. Первая точка получит дополнительное перемещение δ12 [дельта один два], вторая точка перемещение δ22 [дельта два два]. Приращение потенциальной энергии произойдет на величину работы силы F2 [эф два] на перемещении δ22 [дельта два два] по теореме Клайперона и дополнительной работы силы F1 [эф один] на перемещении δ12 [дельта один два]. Причем, последняя в результате того, что сила F1 [эф один] имела конечное значение, берется без множителя одна вторая.

Слайд 18

Теорема Бетти

Второй порядок приложения внешних сил.

Нагрузим балку силой F2 [эф два]. Точка два получит перемещение δ22 [дельта два два], а точка один – перемещение δ12 [дельта один два]. Потенциальную энергию деформации определим как работу силы F2 [эф два] на перемещении δ22 [дельта два два]. Согласно теореме Клайперона это определится половиной произведения силы на перемещение.

Добавим в первую точку силу F1 [эф один]. Первая точка получит дополнительное перемещение δ11 [дельта один один], вторая точка перемещение δ21 [дельта два один]. Приращение потенциальной энергии произойдет на величину работы силы F1 [эф один] на перемещении δ11 [дельта один один] по теореме Клайперона и дополнительной работы силы F2 [эф два] на перемещении δ21 [дельта два один]. Причем, последняя в результате того, что сила F2 [эф два] имела конечное значение, берется без множителя одна вторая.

Предполагая, что от порядка приложения сил потенциальная энергия деформации не зависит, приравняем потенциальные энергии деформации, полученные при первом и втором порядке приложения сил F1 [эф один] и F2 [эф два]. Откуда получим, что работа силы первого состояния на перемещении, вызванном силой второго состояния, равняется работе силы второго состояния на перемещении, вызванном силой первого состояния. Что и требовалось доказать.

Слайд 19

Теорема Максвелла

Формулировка теоремы. Перемещение точки первого состояния под действием единичной силы второго состояния равняется перемещению точки второго состояния под действием единичной силы первого состояния.

Для доказательства достаточно в выражении теоремы Бетти [Бэ`ти] принять силы F1 [эф один] и F2 [эф два] равными единице.

Слайд 20

Принципы сопротивления материалов

Для того, чтобы перейти к конкретным расчетам элементов конструкций, необходимо знать еще некоторые правила, которые относятся к методам анализа расчетных схем и выполняются в подавляющем большинстве случаев. Такие правила в сопротивлении материалов называются принципами и позволяют значительно упростить решение сложных задач. В сопротивлении материалов существует три основных принципа. Это принцип неизменности первоначальных геометрических размеров, принцип суперпозиции и принцип Сен-Венана. Рассмотрим подробнее каждый из них.

Слайд 21

Принцип неизменности первоначальных размеров

Первый принцип неизменности первоначальных геометрических размеров базируется на малости упругих деформаций, верхний предел которых равен 0,005% [пять тысячных процента]. Используя этот принцип, мы оперируем в расчетах геометрическими параметрами, которые имеет конструкция до нагружения.

В качестве примера рассмотрим систему, состоящую из двух стержней, соединенных в узел, с приложенной к узловой точке сосредоточенной силой. Необходимо оценить прочность и жесткость конструкции, которые являются функцией внутренней продольной силы N [эн], возникающей в стержнях.

Под действием силы F [эф] первоначальный угол α [альфа] положения стержней изменяется до некоторой величины α* [альфа со звездочкой], заранее неизвестной и зависящей от величины деформации стержней. Последнюю можно определить лишь при знании внутренней силы N [эн], которая на основании метода сечения равна реакции R [эр] в точке крепления стержней. При определении реактивного усилия R [эр] из уравнения статического равновесия используется угол, определяющий новое положение стержня. Таким образом, если использовать деформируемую систему, то задача становится неразрешимой, так как не представляется возможным определить угол а* [альфа со звездочкой]. Принцип неизменности первоначальных геометрических размеров позволяет решить задачу об определении внутренней силы N [эн], используя недеформируемое состояние конструкции. Для этого составим уравнение суммы проекций сил на вертикальную ось, связывающее реактивные усилия в точках крепления стержней с внешней силой F [эф]. Так как внутренняя продольная сила N [эн] на основании метода сечений равна величине реакции R [эр] получим выражение для продольной силы через внешнюю силу F [эф].

Слайд 22

Принцип суперпозиции

Второй принцип – принцип суперпозиции также выполняется только в рамках линейной зависимости между напряжениями и деформациями и дает огромные возможности при решении сложных задач. Проиллюстрируем его на следующем примере.

Пусть дана балка, нагруженная системой сил F1 [эф один], F2 [эф два] и F3 [эф три]. Выделим на балке произвольную точку C [цэ] и определим ее перемещение под действием этих сил. Для этого рассмотрим три состояния данной балки: под действием силы F1 [эф один], под действием силы F2 [эф два] и под действием только силы F3 [эф три]. В каждом из этих состояний точка C [цэ] получала перемещение от соответствующей приложенной силы. Согласно принципу суперпозиции, перемещение точки C [цэ], происходящее под действием всех трех сил, можно определить, как сумму перемещений, полученных от каждой силы в отдельности.

Слайд 23

Принцип Сен-Венана

Третий принцип Сен-Венана так же существенно упрощает решение задач. Например, он позволяет не учитывать конструктивные особенности опорных элементов и способа передачи усилия на рассматриваемый физический объект. Все эти нюансы не оказывают влияние на напряжения и деформации уже на расстояниях, равных характерному размеру поперечного сечения. Проиллюстрируем данный принцип.

Рассмотрим три совершенно одинаковых стержня консольного типа. Каждый стержень на свободном конце нагружен одинаковой по величине силой с разным способом приложения. Первый слева подвергается действию одной сосредоточенной силы F [эф], второй нагружен двумя сосредоточенными силами по F/2 [эф пополам], а третий – нагрузкой равномерно распределенной по площади поперечного сечения интенсивностью f [эф].

Принцип Сен-Венана устанавливает, что напряжение, возникающее в поперечных сечениях стержней, в основном объеме одинаково и не зависит от характера приложения внешней нагрузки. Особенность приложения внешней силы оказывает влияние на результат ее действия лишь на расстоянии от точки ее приложения меньше характерного размера поперечного сечения.

Слайд 24

Основные виды расчётов

Вот теперь мы подошли к моменту, когда можно познакомиться с основными методами расчетов, применяемыми в сопротивлении материалов. Первый метод по допускаемым напряжениям предполагает обеспечение прочностной надежности при условии, что максимальное нормальное напряжение не превышает допускаемой величины. Левая часть первого неравенства (1.7) является расчетным напряжением, определяемым по формулам сопротивления материала. Правая – представляет собой экспериментально определяемую величину напряжения, которое называется допускаемым. Допускаемое напряжение – это предельное напряжение для данной марки материала, уменьшенное в коэффициент запаса раз. Предельное напряжение определяют путем испытания образцов на растяжение и сжатие и заносят в справочники механических характеристик материалов. Величина коэффициента запаса зависит от условий эксплуатации рассчитываемого элемента конструкции.

Второй метод по разрушающей или предельной нагрузке предполагает, что прочностная надежность будет обеспечена, если превышение величины предельной силы по сравнению с действующей нагрузкой, будет выше нормативного коэффициента запаса, формула (1.8).

И третий метод расчета по допускаемым перемещениям является оценкой жесткости конструкции. Левая часть неравенства (1.9) представляет собой величину максимального перемещения, происходящего в том или ином месте нагруженной конструкции, которая определяется по формулам сопротивления материалов. Правая часть – это допускаемое или нормативное перемещение, назначается, исходя из условий эксплуатации. Например, в строительстве допускаемая стрела прогиба балочных конструкций задается нормативным документом «Строительные нормы и правила». На машиностроительных предприятиях таким документом является стандарт предприятия.

Итак, мы познакомились с основными правилами и методами расчета, которые используются при оценке прочностной надежности конструкций, Теперь можно переходить к изучению конкретных приемов и методик отдельных этапов расчета.

Тема 2 Построение эпюр ВСФ при растяжении-сжатии, кручении изгибе.

Слайд 25

Эпюры внутренних силовых факторов

Для более наглядного представления характера изменения внутренних силовых факторов вдоль оси конструкции строят их графики.

Графики изменения внутренних силовых факторов вдоль продольной оси стержня называются эпюрами.

Эпюры внутренних силовых факторов, как правило, строят для того, чтобы наметить опасные сечения, то есть сечения, в которых существует большая вероятность наступления разрушения из-за того, что там внутренние силовые факторы достигают наибольших значений.

Каждый внутренний силовой фактор – продольная сила, поперечная сила, изгибающий и крутящий моменты – имеет свое правило знаков. Эти правила мы рассмотрим чуть позже, изучая технологию построения эпюры каждого внутреннего усилия в отдельности.

Эпюры внутренних силовых факторов строятся по определенному алгоритму.

Для простоты использования при дальнейшем изложении материала термина внутренние силовые факторы введем аббревиатуру ВСФ.

Слайд 26

Алгоритм построения эпюр ВСФ

Прежде всего необходимо разделить стержень на участки, так как в пределах каждого участка внутренние силовые факторы изменяются по одной закономерности. Границами участков являются следующие сечения:

- где приложены внешние сосредоточенные усилия – сила или момент;
- где начинается или заканчивается распределенная нагрузка;
- где имеется перелом оси стержня.

Границы участков еще называют характерными сечениями, потому что в них меняется характер изменения внутреннего усилия.

Далее, нужно применить метод сечений для произвольного сечения каждого участка стержня и получить функции изменения данного внутреннего силового фактора вдоль оси участка. На каждом участке эти функциональные зависимости будут разные. Если характер изменения ВСФ [вэ сэ эф] на каждом участке заранее известен, можно, не выводя общей зависимости, просто определить его значения методом сечений в граничных сечениях участка.

И, наконец, полученные аналитические зависимости нужно изобразить графически в виде эпюр. От обычных графиков эпюры отличатся следующими правилами их построения.

Осевую линию эпюры называют базовой линией, или просто базой, и располагают параллельно оси стержня так, чтобы по одну и по другую сторону от неё было место для изображения самой эпюры. Через граничные сечения перпендикулярно оси стержня проводятся прямые линии до пересечения с базой – границы участков.

На эпюре значения ординат указываются по абсолютной величине непосредственно в граничных сечениях рядом с самой линией эпюры.

Чтобы выделить поле эпюры, наносится штриховка на область, расположенную между базой и графиком. Линии штриховки должны быть перпендикулярны базовой линии. Они являются как бы промежуточными ординатами эпюры. Кроме того, на поле эпюры наносится соответствующий знак в кружочке – плюс в положительной области и минус в отрицательной.

Построенную эпюру необходимо обозначить рядом с базовой линией.

Далее рассмотрим технологии построения эпюр ВСФ [вэ сэ эф] при трех простейших видах нагружения – растяжении-сжатии, кручении и изгибе.

Слайд 27

Построение эпюр ВСФ при растяжении-сжатии

Растяжение-сжатие, как было указано выше, это простейший вид нагружения, при котором в поперечных сечениях стержня возникает только один внутренний силовой фактор – продольная сила N [эн]. Внутренняя сила – это реакция материала стержня на внешнее воздействие. Каков характер внешних сил, таков характер и внутренних. При растяжении-сжатии и внешние силы, и внутренние направлены вдоль оси конструкции. Прежде, чем приступать к изучению технологии построения эпюры внутренней продольной силы N [эн], сделаем некоторые обобщения. На рисунке изображена расчетная схема стержня, испытывающего деформацию растяжения-сжатия. Силы F1 [эф один] и F2 [эф два] – сосредоточенные, приложены в конкретных сечениях стержня, а равномерно распределенная нагрузка интенсивностью q [ку] действует на длине 2a [два а]. То есть, по способу приложения внешние силы делятся на сосредоточенные и распределенные. Если стержень разделить на участки в соответствие с пунктом 1 алгоритма, то они получаются двух типов: либо участки с распределенной нагрузкой, либо без нее, которые будем называть пустыми. Границы участков на рисунке показаны вертикальными линиями: 1-й участок с распределенной нагрузкой, 2-й участок пустой.

Слайд 28

Основные закономерности при построении эпюры N

Рассмотрим основные закономерности построения эпюры продольной силы, являющиеся следствием применения метода сечений.

Применение метода сечений в пределах участка стержня с распределенной нагрузкой, приводит к аналитической зависимости для продольной силы в виде линейной функции. Отсюда можно сделать вывод: если нагрузка равномерно распределена по участку, то на эпюре продольной силы на этом участке должна быть наклонная прямая. Высоту наклона можно определить, как произведение интенсивности распределённой нагрузки q [ку] на длину участка.

Пустой, ничем не загруженный участок можно рассматривать как частный случай распределённой нагрузки с интенсивностью, равной нулю. В этом случае на эпюре должна быть прямая линия без наклона, то есть горизонтальная прямая.

Ещё один случай нагружения получается, если действие нагрузки сосредоточено в одной точке. В этом случае наклонная прямая становится вертикальной. Таким образом, в месте приложения сосредоточенной силы на эпюре получается скачок, величина которого равна величине силы.

Слайд 29

Алгоритм построения эпюры продольной силы

Рассмотрим порядок построения эпюры N [эн] с учетом, как общего алгоритма построения эпюр, так и закономерностей, присущих только данному силовому фактору.

Сначала нужно провести параллельно оси стержня базовую линию, или базу эпюры. Длина этой линии должна быть равна длине стержня.

Затем нужно выделить характерные сечения стержня. Ими являются точки приложения сосредоточенных сил, а также точки, где начинается или заканчивается действие распределённой нагрузки. Характерные сечения делят базу эпюры на участки.

Эпюра строится в направлении от одного конца стержня к другому. При этом построение начинается и заканчивается на базовой линии. Для стержней, имеющих только одну опору – жёсткую заделку – следует начинать построение эпюры со свободного конца и двигаться к заделке.

В начале первого участка следует определить, есть ли на расчётной схеме в данном сечении сосредоточенная сила. Если есть, на эпюре нужно сделать скачок, величина которого равна величине этой силы.

Далее определяется состояние внутри участка до следующего характерного сечения. Если участок загружен равномерно распределённой нагрузкой, на эпюре следует провести наклонную прямую. При этом высота наклона определяется как произведение интенсивности нагрузки на длину участка. Если участок пустой, на эпюре следует провести горизонтальную прямую.

Эти действия повторяются для каждого следующего участка.

В заделке на эпюре при необходимости следует сделать скачок от последнего значения продольной силы до нуля, то есть до базовой линии. Величина этого скачка представляет собой величину силы реакции, возникающей в заделке.

Слайд 30

Правило знаков для продольной силы

Направления скачков и наклонов на эпюре продольной силы выбираются в соответствии со следующим правилом знаков.

Если внешняя сила растягивает стержень, то возникающая при этом внутренняя продольная сила считается положительной, и, наоборот, – отрицательной, если она сжимает его. При этом действие силы – растягивающее или сжимающее – нужно определять относительно заделки. Несложно догадаться, что сила, направленная от заделки, вызывает растяжение. Наоборот, сила, направленная к заделке, вызывает сжатие стержня.

Слайд 31

Пример построения эпюры продольной силы

Рассмотрим пример решения задачи. Для данного стержня требуется построить эпюру продольной силы N [эн]. При этом будем учитывать правило знаков и придерживаться приведенному выше алгоритму.

Слайд 32

Пример построения эпюры продольной силы: разбиение на участки

Проведём базовую линию параллельно продольной оси стержня.

Разделим базу на участки, опустив из характерных сечений стержня вертикальные прямые до пересечения с базой. Характерными или граничными являются сечения, где приложены сосредоточенные силы F1 [эф один], F2 [эф два], F3 [эф три], т.е. сечения A, B [бэ] и D [дэ], а также сечение C [цэ], где заканчивается действие распределенной нагрузки q [ку], и сечение K [ка], где заканчивается сам стержень. Таким образом, стержень имеет четыре участка: AB, BC, CD и DK. Причем, участок BC с распределенной нагрузкой, а участки AB, CD и DK пустые, без распределенной нагрузки. Примем направление построения эпюры от свободного конца к заделке, то есть в нашем случае справа налево.

Слайд 33

Пример построения эпюры продольной силы: участок AB

В начале первого участка AB на границе A приложена сила F1 [эф один] величиной 10 килоньютонов. Масштаб выбирается произвольный. Сила растягивает стержень, что по правилу знаков соответствует знаку «плюс» для возникающей при этом продольной силы N [эн]. Поэтому на эпюре в сечении A от базы делаем скачок вверх на 10 килоньютонов.

Поскольку первый участок AB пустой, ничем не загружен по длине, проводим на эпюре горизонтальную прямую линию на уровне 10 килоньютонов до конца участка. В начале и в конце горизонтальной прямой указываем значение продольной силы – число 10. Знак и размерность у числа не ставится. Таким образом, на пустом участке AB на эпюре получилась прямая, параллельная базе.

Слайд 34

Пример построения эпюры продольной силы: участок BC

В начале второго участка ВС, на границе В, на стержень действует сжимающая сила F2 [эф два]. Поэтому на эпюре вдоль границы В [бэ] от ординаты 10 килоньютон делаем скачок вниз на величину силы, равной шестидесяти килоньютонам. Вычитая из десяти шестьдесят, получаем на эпюре значение минус пятьдесят килоньютонов. Указываем это число 50 без знака после скачка.

Второй участок загружен растягивающей равномерно распределённой нагрузкой, поэтому на эпюре должна быть наклонная прямая, идущая вверх. Высоту наклона определяем, как произведение интенсивности нагрузки q [ку], равной 40 килоньютонам деленым на метр, на длину участка – два метра. Полученное значение, 80 килоньютонов, прибавляем к значению в начале участка, то есть минус пятидесяти килоньютонам. Получается плюс 30 килоньютонов. Это значение откладываем на эпюре в конце второго участка и подписываем. Наклонной прямой соединяем ординаты минус 50 и плюс 30.

Слайд 35

Пример построения эпюры продольной силы: участок CD

В начале третьего участка CD [цэ дэ] сосредоточенная сила отсутствует, поэтому скачка не будет, значение 30 килоньютонов не изменяется. Тип участка CD пустой, без распределенной нагрузки, поэтому на эпюре проводим горизонтальную прямую, то есть прямую, параллельную базе.

Слайд 36

Пример построения эпюры продольной силы: участок DK

В начале четвёртого участка DK [дэ ка], в сечении D, действует сжимающая сила F3 [эф три]. На эпюре от значения 30 килоньютонов откладываем скачок вниз на величину этой силы, на 40 килоньютонов. Вычитая из тридцати сорок, получаем ординату минус десять килоньютонов и указываем её на эпюре без знака.

Так как участок DK ничем не загружен, проводим до его конца горизонтальную прямую.

Слайд 37

Пример построения эпюры продольной силы: оформление эпюры

В конце стержня, в сечении К, делаем скачок от минус десяти килоньютонов до базы, получая замкнутую фигуру. Это и есть эпюра продольной силы.

Внутри эпюры ставим в кружках знаки: плюс в положительной области и минус в отрицательной, и делаем штриховку вертикальными линиями. Рядом с эпюрой указываем её обозначение, для продольной силы это N [эн], и размерность значений на эпюре – килоньютоны.

Теперь эпюра приобрела наглядный вид. Еще раз проверим выполнение закономерностей на построенной эпюре. В сечениях A, B и D, где приложены сосредоточенные силы F1, F2 и F3 на эпюре видим скачки на величину соответствующей силы в сторону знака её воздействия. На пустых участках AB, CD и DK продольная сила постоянна, на эпюре прямые, параллельные базе. На участке BC с распределенной нагрузкой q [ку] продольная сила изменяется по линейному закону, на эпюре наклонная прямая.

Таким образом, эпюра продольной силы построена.

Слайд 38

Построение эпюр ВСФ при кручении

Кручение, как было указано выше, это простейший вид нагружения, при котором в поперечных сечениях стержня возникает только один внутренний силовой фактор – крутящий момент Mz [эм зет]. При кручении и внешние и внутренние моменты или, как их еще называют, пары сил действуют в плоскости, перпендикулярной оси конструкции.

Стержень, работающий в условиях деформации кручения, принято называть валом.

Прежде, чем приступать к изучению технологии построения эпюры крутящего момента, сделаем некоторые обобщения. На рисунке изображена расчетная схема вала, испытывающего деформацию кручения. Моменты M1 [эм один] M2 [эм два] и M3 [эм три] – сосредоточенные, приложены в конкретных сечениях вала, равномерно распределенный момент интенсивностью m [эм] действует на длине ноль пять метра. То есть, по способу приложения внешние моменты, так же, как и продольные силы при растяжении-сжатии, делятся на сосредоточенные и распределенные. Если на реальный вал насажена шестеренка и через нее передается крутящий момент, то на расчетной схеме это действие показывается сосредоточенным моментом. Если на вале есть червячная передача, то её действие на расчетной схеме представляется распределенным крутящим моментом.

Если вал разделить на участки, то они также получаются двух типов: либо участки с распределенным моментом, либо без него, то есть пустые. Границы участков на рисунке показаны вертикальными линиями: 1-й участок с распределенным моментом, 2-й и 3-й участки пустые.

Таким образом, по способу приложения внешних усилий и по типу образуемых при этом участков при кручении наблюдается полная аналогия с деформацией растяжения-сжатия.

В связи с этим технология построения эпюры крутящего момента подобна технологии построения эпюры продольной силы.

Слайд 39

Основные закономерности при построении эпюры Mz

Рассмотрим основные закономерности построения эпюры крутящего момента, являющиеся следствием применения метода сечения.

Закономерности по типу участка:

- если внешний момент равномерно распределен по участку, то на эпюре крутящего момента на этом участке должна быть наклонная прямая. Высоту наклона можно определить, как произведение интенсивности распределённого момента m [эм] на длину участка.
- если участок пустой, ничем не загруженный, в этом случае на эпюре должна быть прямая линия, параллельная базе, то есть горизонтальная прямая.

Закономерности, возникающие в граничных сечениях:

- в сечении вала, где приложен сосредоточенный момент, на эпюре получается скачок, величина которого равна величине момента;
- в сечениях, где начинается или заканчивается действие распределенного момента, на эпюре скачка быть не должно.

Слайд 40

Алгоритм построения эпюры Mz

Порядок построения эпюры крутящего момента также, как и для продольной силы, учитывает, как общие правила построения эпюр, так и особенности, присущие только данному силовому фактору.

Проводится базовая линия эпюры.

Выделяются характерные сечения вала: где приложены сосредоточенные моменты, где начинается или заканчивается действие распределенного момента, где начинается или заканчивается сам вал. Через характерные сечения проводятся вертикальные линии – границы участков – до пересечения с базой.

Эпюра строится в направлении от одного конца вала к другому. Для консольных валов, имеющих только одну опору – жёсткую заделку – следует начинать построение эпюры со свободного конца и двигаться к заделке. Если вал закреплен в подшипниках, то можно выбирать произвольное направление.

В начале первого участка следует определить, есть ли на расчётной схеме в данном граничном сечении сосредоточенный момент. Если есть, на эпюре нужно сделать скачок, величина которого равна величине этого момента.

Далее определяется тип участка. Если участок загружен равномерно распределённым моментом, на эпюре следует провести наклонную прямую. При этом высота наклона определяется как произведение интенсивности момента на длину участка. Если участок пустой, на эпюре следует провести горизонтальную прямую, то есть прямую, параллельную базе.

Эти действия повторяются для каждого следующего участка.

В последнем характерном сечении эпюра заканчивается скачком до базы. Знак на поле эпюры крутящих моментов не ставится, штриховка наносится винтовая, чтобы подчеркнуть характер воздействия крутящего момента.

Слайд 41

Правило знаков для крутящего момента

Правило знаков для крутящего момента, сформулированное на слайде, требует дополнительного пояснения. Поскольку плоскость действия крутящих моментов перпендикулярна осевой линии вала, то определение их направления вращения – по часовой стрелке или против – зависит от того, с какой стороны смотреть на эту плоскость. Согласно методу сечений, необходимо мысленно рассечь вал в пределах участка, на котором нужно определить Mz [эм зет], оставить любую из полученных частей вала и посмотреть в торец сделанному сечению. Глядя с торца на плоскость действия внешнего момента, нужно определить направление его вращения и назначить знак внутреннему моменту в соответствие с приведенным правилом.

Следует отметить, что знак внутреннего момента не имеет особого физического смысла. Процессы разрушения при скручивании вала в одну либо другую сторону происходят абсолютно аналогично. Поэтому, принято знак на поле эпюры крутящего момента не ставить. И если Вы примете обратное правило знаков, это за ошибку не считается.

Важным в правиле знаков является лишь то, что при определении направления вращения внешнего момента, Вы обязательно должны смотреть со стороны сделанного сечения и применять принятое правило знаков для всех участков вала.

Слайд 42

Пример построения эпюры крутящего момента Mz

Рассмотрим пример решения задачи. Для вала, закрепленного в подшипники и нагруженного системой внешних крутящих моментов, требуется построить эпюру крутящего момента Mz [эм зет]. При этом будем учитывать правило знаков и придерживаться приведенному выше алгоритму.

Прежде, чем приступать к решению задачи, необходимо сделать некоторое пояснение относительно условий закрепления вала. Вал заключен в подшипники, которые не препятствуют его вращению. Это значит, что в них не возникает реактивных крутящих моментов. Тогда, чтобы вал находился в равновесии, система внешних крутящих моментов должна быть самоуравновешенной. То есть, сколько в сумме моментов поворачивает вал в одну сторону, столько должно поворачивать и в другую.

В данном вале это условие равновесия выполняется. Давайте убедимся. Одного направления на схеме моменты М1 [эм один], М2 [эм два] и М4 [эм четыре]. Их сумма составляет 6 килоньютонометров. Противоположно им направлен равномерно распределенный момент и момент М3 [эм три]. К значению момента М3, равному одному килоньютонометру нужно прибавить величину равнодействующего распределенного момента. Величина равнодействующего момента равна произведению интенсивности m [эм] на длину действия, то есть десять умножаем на ноль пять, получаем величину равнодействующего момента, равную 5 килоньютонометров. В сумме с моментом М3 получается также шесть килоньютонометров. Убедились, что действительно условие равновесия выполняется.

Теперь можно приступать к построению эпюры Mz [эм зет].

Слайд 43

Пример построения эпюры Mz: разбиение на участки

Сначала проведем краткий анализ данной расчетной схемы и определим количество участков, на которые надо разделить вал. Границы участков пройдут через характерные сечения, где приложены сосредоточенные моменты М1 [эм один], М2 [эм два], М3 [эм три] и М4 [эм четыре], где начинается и заканчивается действие распределенного момента m [эм]. Обозначим это сечения буквами B [бэ], C [сэ], D [дэ], L [эль] и K [ка], соответственно. В результате вал разделился на четыре участка: BC, CD, DL и LK.

Под расчетной схемой параллельно продольной оси проведем базу эпюры в границах длины BK.

Через характерные сечения вертикальными тонкими линиями проводим границы участков до пересечения с базой.

Для вала в подшипниках выбор направления построения эпюры произвольный. Выберем направление слева на право.

Слайд 44

Пример построения эпюры Mz: участок BC

Рассмотрим первый участок BC.

Левая граница участка BC [бэ цэ] точка B [бэ]: здесь находится сосредоточенный момент M1 [эм один], равный 1,5 [полтора] килоньютонометра, который на эпюре должен вызывать скачок на свою величину. Примем знак скачка положительным, так как, если рассечь вал в пределах этого участка, отбросить правую часть и посмотреть на левую с торца, то увидим направление действия момента M1 [эм один] против часовой стрелки.

Состояние по длине участка: участок ничем не загружен, т.е. на эпюре должна быть прямая, параллельная базе.

Таким образом, во всех сечениях участка BC внутренний крутящий момент имеет постоянное значение, равное 1,5 килоньютонометра.

Слайд 45

Пример построения эпюры Mz: участок CD

Рассмотрим следующий участок CD [цэ дэ].

Левая граница участка точка C: здесь находится сосредоточенный момент M2, равный 2 килоньютонометра, того же направления, что и M1. Это вызывает на эпюре скачок от значения 1,5 килоньютонометра на 2 килоньютонометра вверх. После скачка получим значение 3,5 килоньютонометра.

Состояние по длине участка: участок загружен равномерно распределенным моментом, поэтому на эпюре должна быть наклонная прямая с угловым коэффициентом, равным интенсивности момента m [эм], то есть 10 килоньютонометрам на каждый метр длины. Поскольку направление равномерно распределенного момента противоположно M1 и M2, то наклонная прямая пойдет в отрицательную сторону, т.е. знак углового коэффициента примем отрицательным. Величину наклона прямой определяем, как произведение интенсивности m на длину действия CD, то есть 10 умножаем на 0,5, получаем 5 килоньютонометров.

Величину Mz [эм зет] в точке D [дэ] вычислим, вычитая из значения Mz [эм зет] в начальной точке C [цэ] величину наклона прямой. То есть из плюс 3,5 вычитаем 5, получаем минус 1,5 килоньютонометра. Отложим на эпюре в сечении D от базы вниз ординату в 1,5 килоньютонометра. Соединяем наклонной прямой ординату в начале участка, равную 3,5 килоньютонометра, с ординатой в конце участка, равной минус 1,5 килоньютонометра. Число 1,5 указываем на эпюре без знака.

Слайд 46

Пример построения эпюры Mz: участок DL

Рассмотрим третий участок DL [дэ эль].

Левая граница участка точка D: сосредоточенный внешний момент в этой точке отсутствует, поэтому скачка на эпюре не будет, ордината минус 1,5 килоньютонометра не изменится.

Состояние по длине участка: участок пустой, распределенного момента нет, поэтому на эпюре будет прямая, параллельная базе. Проводим её до конца участка, до точки L.

Таким образом, во всех сечениях участка DL [дэ эль] внутренний крутящий момент имеет постоянное значение, равное минус 1,5 килоньютонометра.

Слайд 47

Пример построения эпюры Mz: участок LK

Рассмотрим последний участок LK [эль ка].

Левая граница участка точка L [эль]: здесь приложен сосредоточенный момент М3 [эм три] того же направления, что и равномерно распределенный момент. Поэтому он вызовет скачок на эпюре крутящего момента в отрицательную сторону на свою величину, то есть на 1 килоньютонометр. От минус 1,5 опускаемся вниз на 1, в результате после скачка получим ординату величиной минус 2,5 килоньютонометра.

Состояние по длине участка: участок пустой, ничем не загружен, поэтому на эпюре будет прямая, параллельная базе.

К последнему граничному сечению K мы пришли со значением момента, равным минус 2,5 килоньютонометра. Эпюра должна заканчиваться на базовой линии, поэтому от значения минус 2,5 делаем скачок до базы.

Величина этого скачка должна быть равной величине внешнего момента, приложенного в этом сечении вала. Момент М4 [эм четыре], действующий в сечении К, имеет именно такое значение. Значит эпюра построена верно.

Слайд 48

Пример построения эпюры Mz: оформление эпюры

Контур эпюры построен, осталось лишь правильно её оформить.

Рядом с базовой линией, например, справа, указываем обозначение внутреннего силового фактора и его размерность.

Знак внутри эпюры крутящего момента, как уже было сказано выше, не ставим, а штриховку наносим в виде спирали.

Эпюра крутящего момента для данного вала построена.

Слайд 49

Построение эпюр ВСФ при изгибе

Изгиб – это такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях стержня возникает либо только один внутренний силовой фактор – изгибающий момент, либо два – изгибающий момент и поперечная сила. В первом случае изгиб называется чистым, во втором – поперечным.

Стержень, работающий в условиях деформации изгиба, называется балкой. По способу закрепления будем рассматривать два вида балок – консольную, жестко защемленную с одного конца, и двухопорную, закрепленную с помощью шарнирных опор. В качестве примера расчетные схемы таких балок изображены на рисунках: слева консольная балка, справа – балка на двух шарнирных опорах.

Прежде, чем приступать к изучению технологии построения эпюры поперечной силы и изгибающего момента, сделаем некоторые обобщения. Перечислим внешние нагрузки, вызывающие деформацию изгиба: это сосредоточенные моменты, на расчетных схемах они обозначены буквами М [эм], сосредоточенные поперечные силы F [эф] и распределенные поперечные нагрузки интенсивностью q [ку]. От действия внешнего момента в поперечных сечениях балки возникает только внутренний изгибающий момент. От действия внешних поперечных сил возникает и внутренний изгибающий момент Mx [эм икс] и внутренняя поперечная сила Qy [ку игрек].

Два типа участков, на которые при этом разделяется расчетная схема, прежние – либо с распределенной нагрузкой, либо без неё.

Слайд 50

Дифференциальные зависимости при изгибе

Два внутренних силовых фактора, возникающие при изгибе – поперечная сила и изгибающий момент – связаны между собой и с внешней нагрузкой дифференциальными зависимостями.

Рассмотрим двухопорную балку, нагруженную произвольной нагрузкой qz [ку зэт] – левый рисунок. В окрестностях точки B [бэ] вырежем бесконечно малый участок балки длиной dz [дэ зэт] – правый рисунок. В силу малости участка можно принять значение интенсивности q [ку] постоянным.

Для выделенного участка можно записать два условия статического равновесия – силовое, в проекции на вертикальную ось y [игрек], и моментное, относительно перпендикулярной к плоскости балки оси x [икс], проходящей через точку B [бэ].

Из силового уравнения равновесия получается первая дифференциальная зависимость, обозначенная номером (2.1). Она означает, что интенсивность внешней распределенной нагрузки равна первой производной от внутренней поперечной силы по координате z [зет].

Из моментного уравнения равновесия, если пренебречь в нем бесконечно малым слагаемым с интенсивностью q [ку], получается вторая дифференциальная зависимость, обозначенная на слайде номером (2.2). Она означает, что внутренняя поперечна сила Qy [ку игрек] есть первая производная от функции внутреннего изгибающего момента Mx [эм икс] по координате z [зет].

Если подставить выражение (2.2) в выражение (2.1) получим дифференциальную связь внешней распределенной нагрузки с внутренним изгибающим моментом в виде выражения (2.3).

Слайд 51

Анализ дифференциальных зависимостей

Анализ полученных дифференциальных зависимостей помогает при построении эпюр поперечных сил и изгибающих моментов, а также при проверке правильности их построения.

1) Из зависимостей (2.1) и (2.3) предыдущего слайда следует, что на пустом участке балки, где нет распределенной нагрузки, поперечная сила Qy [ку игрек] должна быть постоянной, а на эпюре Mx [эм икс] – прямолинейная зависимость.

2) На участке с распределенной нагрузкой на эпюре Qy [ку игрек] должна быть наклонная прямая, а на эпюре Mx [эм икс] – квадратичная парабола, выпуклость которой направлена навстречу действию распределенной нагрузки. Причем, если наклонная прямая на эпюре Qy [ку игрек] пересекает базу в пределах данного участка, то в точке пересечения на эпюре изгибающего момента Mx [эм икс] у параболы будет экстремум, значение которого необходимо будет определить.
3) Из зависимости (2.2) следует, что если на данном участке поперечная сила положительна, то функция изгибающего момента здесь возрастает, и наоборот. Анализ на возрастание и убывание функции внутреннего изгибающего момента по знаку внутренней поперечной силы проводят в пределах каждого участка в направлении слева направо.

Слайд 52

Основные закономерности при построении эпюры Qy

Сначала рассмотрим основные закономерности построения эпюры поперечной силы, являющиеся следствием применения метода сечения. Здесь наблюдается полная аналогия с рассмотренными выше закономерностями при построении эпюр продольной силы и крутящего момента.

Закономерности по типу участка:

- если участок с распределенной нагрузкой, то на эпюре поперечной силы Qy [ку игрек] на этом участке должна быть наклонная прямая. Высоту наклона можно определить, как произведение интенсивности распределённой нагрузки q [ку] на длину участка.
- если участок пустой, ничем не загруженный, в этом случае на эпюре Qy [ку игрек] должна быть прямая линия, параллельная базе, то есть горизонтальная прямая.

Закономерности, возникающие в граничных сечениях:

- в сечении балки, где приложена сосредоточенная внешняя сила, на эпюре Qy [ку игрек] получается скачок, величина которого равна величине силы;

- в сечениях, где начинается или заканчивается действие распределенной нагрузки, на эпюре Qy [ку игрек] скачка быть не должно;
- в сечениях, где на балке приложен сосредоточенный момент, на эпюре поперечной силы ничего не происходит – она на него не реагирует. То есть при построении эпюры Qy [ку игрек] внешний момент просто не нужно принимать во внимание.

Слайд 53

Основные закономерности при построении эпюры Mx

Теперь рассмотрим основные закономерности построения эпюры изгибающего момента. Они вытекают из метода сечений и дифференциальной зависимости между поперечной силой и изгибающим моментом, а именно: что функция поперечной силы есть первая производная от функции изгибающего момента по координате z [зэт].

Закономерности по типу участка:

- если участок с распределенной нагрузкой, то на эпюре изгибающего момента Mx [эм икс] на этом участке должна быть парабола. Выпуклость параболы направлена навстречу действия распределенной нагрузки. Экстремум у параболы будет в том сечении, где на эпюре поперечной силы Qy [ку игрек] наклонная прямая на этом участке пересекает базу. Если наклонная прямая эпюры Qy [ку игрек] базу не пересекает, то есть полностью лежит выше или ниже нее, то на эпюре Mx [эм икс] будет монотонная ветвь параболы без экстремума.
- если участок пустой, без распределенной нагрузки, в этом случае на эпюре изгибающего момента Mx [эм икс] должна быть прямолинейная зависимость: либо наклонная прямая, либо, как частный случай, прямая, параллельная базе.

Закономерности, возникающие в граничных сечениях:

- в сечении балки, где приложен сосредоточенный момент, на эпюре Mx [эм икс] должен быть скачок, величина которого равна величине момента;

- в сечении, где приложена сосредоточенная сила, на эпюре Мх [эм икс] должен быть излом, острие которого направлено навстречу действия силы.

Слайд 54

Правило знаков для поперечной силы Qy

Направления скачков и наклона прямых на эпюре поперечной силы выбираются в соответствии со следующим правилом знаков.

Если внешняя сила поворачивает рассматриваемый участок балки относительно его конечной точки по часовой стрелке, то возникающая внутренняя поперечная сила считается положительной, и, наоборот, – отрицательной, если против часовой стрелки. Мысленно нужно балку закрепить в конце участка, подействовать внешней силой и определить направление вращения. При этом конечная точка участка определяется в соответствие с выбором направления построения эпюры: слева направо или справа налево.

Слайд 55

Правило знаков для изгибающего момента Мх

Согласно правилу знаков, ординаты на эпюре изгибающего момента откладываются в сторону сжатых волокон.

Что такое сжатое волокно? Представим мысленно слои или волокна материала балки, параллельные осевой линии. До приложения изгибных нагрузок все эти слои прямолинейны и одинаковой длины. Выделим средний слой, в котором находится осевая линия. Все остальные, параллельные ему будут находиться либо выше, либо ниже среднего. Будем называть их, соответственно, верхние или нижние волокна. Если внешние силы изгибают балку вверх, как показано на верхней части рисунка, то при этом длина всех верхних волокон уменьшается, они сжимаются. Принято называть их сжатыми волокнами. Нижние же волокна, наоборот, становятся длиннее, они растягиваются, называются растянутыми волокнами. И только средний слой, изгибаясь, не меняет своей длины. Этот слой называют нейтральным.

На нижней части рисунка, наоборот, балка изгибается вниз, здесь сжатые волокна будут снизу от нейтрального слоя, а растянутые сверху.

Как применять это правило знаков? Нужно подействовать на балку внешней силой. Если при этом балка изгибается вверх, значит сжатые волокна будут сверху от нейтрального слоя, и значит возникающий при этом внутренний изгибающий момент будет положительным, и наоборот.

Слайд 56

Алгоритм построения эпюры Qy

Для балок, работающих в условиях изгиба, строится две эпюры – поперечных сил и изгибающих моментов. Начинается построение с эпюры поперечных сил Qy [ку игрек], однако необходимо сразу предусмотреть место на странице и для второй эпюры Mx [эм икс] под эпюрой Qy [ку игрек].

Рассмотрим сначала алгоритм построения эпюры поперечных сил.

Начальные действия одинаковы для построения эпюр всех внутренних сил. Нужно выделить и обозначить характерные сечения на расчетной схеме балки, провести базовую линию эпюры, параллельно оси конструкции, разделить её на участки по характерным сечениям, обозначить эпюру рядом с базовой линией.

Дальнейшие действия требуют дополнительных пояснений. При выборе направления построения эпюры нужно учитывать способ закрепления конструкции. Для консольной балки строить эпюру нужно в направлении от свободного, незакрепленного конца к жесткой заделке. Делается это с целью экономии времени, чтобы не определять реактивные усилия в заделке, которые включают в систему внешних сил. Для балки на двух шарнирных опорах выбор направления произвольный, однако, предварительно необходимо определить реакции опор из уравнений статического равновесия. Направление и значения реактивных усилий показывается на расчетной схеме и учитывается при построении обеих эпюр наряду с действием внешних нагрузок.

Далее, в выбранном направлении переходя от участка к участку, выполняются действия пункта 4 алгоритма, согласно закономерностям построения эпюры поперечной силы, учитывая при этом её правило знаков.

Окончательное оформление эпюры Qy [ку игрек] стандартное – расставляются знаки в кружках по соответствующим зонам, наносится штриховка, перпендикулярно базе.

Слайд 57

Алгоритм построения эпюры Mx

После построения эпюры поперечной силы Qy [ку игрек] строится эпюра изгибающего момента Mx [эм икс].

Балка на участки уже разделена, характерные сечения обозначены.

Базовая линия для эпюры моментов проводится ниже эпюры Qy [ку игрек], параллельно оси балки. Границы участков продляются до пересечения с базой Mx [эм икс]. Рядом с базой наносится обозначение эпюры. Направление построения для эпюры изгибающего момента выбирается то же, что и для эпюры поперечной силы.

Далее, переходя от участка к участку в выбранном направлении, выполняются действия пункта 2 алгоритма, согласно закономерностям построения эпюры изгибающего момента, учитывая его правило знаков.

При окончательном оформлении необходимо помнить, что знак на поле этой эпюры не ставится, только наносится штриховка, перпендикулярно базовой линии.

Слайд 58

Пример построения эпюр Qy и Mx для консольной балки

Рассмотрим пример построения эпюр внутренних силовых факторов для данной консольной балки, нагруженной системой внешних поперечных сил и изгибающих моментов. Левый конец балки жестко защемлен, правый свободен от закрепления. Под действием внешних нагрузок внутри материала балки возникают два внутренних силовых фактора – поперечная сила Qy [ку игрек] и изгибающий момент Mx [эм икс].

Поперечная сила Qy [ку игрек] – это внутренняя сила, возникающая в поперечном сечении элемента конструкции в ответ на действие внешних сил, дающих проекцию на одну из осей поперечного сечения.

Изгибающий момент Mx [эм икс] – это внутренний момент, возникающий в поперечном сечении элемента конструкции в ответ на действие моментов от внешних сил относительно одной из осей x [икс] или y [игрек] поперечного сечения.

Слайд 59

Построение эпюры Qy: разбиение на участки

Начинаем построение с эпюры поперечной силы Qy [ку игрек].

Под расчетной схемой параллельно оси балки проведем базовую линию для эпюры и разделим ее на участки. Для этого обозначим буквами характерные сечения: B, C, D, L, K. Через эти сечения проведем границы участков вертикальными линиями до пересечения с базой. Таким образом, на схеме и, соответственно, на базе получилось четыре участка: BC, CD, DL и LK.

Направление построения обеих эпюр для консольной балки выбираем однозначно – от свободного конца к заделке, всегда оставляя часть со свободным концом для вычисления значений внутренних силовых факторов в характерном сечении. Почему именно так? Как уже было сказано ранее, чтобы не определять реактивных усилий в заделке, экономя время на решение задачи.

Слайд 60

Построение эпюры Qy: участок BC

Рассмотрим первый участок BC.

Правая начальная граница участка точка B. В этой точке приложена сосредоточенная сила F [эф], равная 30 килоньютонам, от которой на эпюре должен быть скачок на эту величину. Знак скачка определим, поворачивая силой участок относительно конечной точки C [цэ]. Участок поворачивается против часовой стрелки, поэтому откладываем ординату 30 килоньютонов вниз, в отрицательную сторону.

Определяем состояние по длине участка. Участок загружен распределенной нагрузкой, поэтому на эпюре будет наклонная прямая с угловым коэффициентом, равным интенсивности распределенной нагрузки q [ку]. А поскольку направление вектора q [ку] противоположно направлению силы F, наклонная прямая пойдет вверх, в положительную область значений Qy [ку игрек].

Определим величину силы, на которую произойдет изменение поперечной силы за счет действия распределенной нагрузки на участке. Для этого умножим q [ку] на длину участка 1 метр, получим 20 килоньютонов. Величина поперечной силы в точке C [цэ] определится как алгебраическая сумма значения силы в начале участка и её изменения за счет наклонной прямой. В результате получим минус 10 килоньютонов. Отложим это значение в точке C [цэ] вниз от базы. Соединим ординаты на левой и правой границе участка наклонной прямой.

Слайд 61

Построение эпюры Qy: участок CD

Рассмотрим второй участок CD.

На правой начальной границе участка в точке C [цэ] сосредоточенная сила отсутствует, а на сосредоточенный момент M [эм] поперечная сила не реагирует. Следовательно, значение поперечной силы минус 10 килоньютонов не изменится, скачка в точке C [цэ] делать не нужно.

Оценим состояние по длине участка. Участок пустой, ничем не загружен, поэтому на эпюре должна быть прямая, параллельная базе. Проведем ее до левой границы участка, до точки D [дэ].

Таким образом, значение Qy [ку игрек] в точке D [дэ] такое же, как и на правой границе, то есть минус 10 килоньютонов.

Слайд 62

Построение эпюры Qy: участок DL

Рассмотрим третий участок DL.

На правой начальной границе участка в точке D [дэ] сосредоточенная сила отсутствует, поэтому значение поперечной силы минус 10 килоньютонов не изменится.

Оценим состояние по длине участка. Участок загружен равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью 2q [два ку]. Поэтому на эпюре должна быть наклонная прямая с угловым коэффициентом, равным плюс 2q [два ку], то есть сорока килоньютонам деленым на метр. Почему плюс? Потому, что распределенная нагрузка поворачивает участок относительно его конечной точки L [эль] по часовой стрелке.

Определим величину силы, на которую произойдет изменение Qy [ку игрек] за счет действия распределенной нагрузки на участке. Для этого умножим 2q [два ку] на длину участка 1 метр, получим 40 килоньютонов. Величину поперечной силы в точке L [эль] определим, как алгебраическую сумму значения силы в начале участка и её изменения за счет наклонной прямой. В результате получим плюс 30 килоньютонов. Отложим это значение в точке L [эль] вверх от базы, то есть со знаком плюс. Соединим ординаты на левой и правой границе участка наклонной прямой.

Слайд 63

Построение эпюры Qy: участок LK

Рассмотрим четвертый участок LK [эль ка].

На правой начальной границе участка в точке L [эль] сосредоточенная сила отсутствует, следовательно, значение поперечной силы плюс 30 килоньютонов не изменится, скачка в точке L [эль] делать не нужно.

Оценим состояние по длине участка. Участок пустой, ничем не загружен, поэтому на эпюре должна быть прямая, параллельная базе. Проведем ее до левой границы участка, до точки K [ка].

Таким образом, значение поперечной силы Qy [ку игрек] в точке K [ка] такое же, как и на правой границе, то есть плюс 30 килоньютонов.

Участок LK [эль ка] последний, поэтому делаем завершающий скачок от значения плюс 30 килоньютонов до базы эпюры.

Слайд 64

Построение эпюры Qy: оформление эпюры

Контур эпюры построен, осталось её оформить.

Расставляем в соответствующих зонах эпюры знаки в кружочках и наносим штриховку, перпендикулярно базовой линии.

Эпюра поперечной силы Qy [ку игрек] построена.

Слайд 65

Построение эпюры Mx: разбиение на участки

Теперь построим эпюру изгибающего момента Mx [эм икс].

Для этого прежде всего проведем базовую линию для эпюры Mx [эм икс] ниже построенной эпюры Qy [ку игрек] параллельно оси балки. Границы участков продлим вниз до пересечения с базой. Направление построения эпюры изгибающего момента такое же, как и для эпюры поперечной силы – справа налево, то есть от свободного незакрепленного конца балки к жесткой заделке.

Слайд 66

Построение эпюры Mx: участок BC

Рассмотрим первый участок BC [бэ цэ].

На правой границе участка в его начальной точке B [бэ] отсутствует сосредоточенный внешний момент, поэтому скачка в начале участка не будет. Начинаем эпюру момента с нуля.

Оценим состояние по длине участка. Участок загружен равномерно распределенной нагрузкой, поэтому на эпюре будет квадратичная парабола, выпуклостью вверх, навстречу действию распределенной нагрузки. Для определения наличия экстремума анализируем эпюру поперечной силы этого участка. Наклонная прямая на эпюре Qy [ку игрек] не пересекает базу, т.е. внутри участка не принимает нулевое значение. Это говорит о том, что экстремума на параболе не будет. Такие параболы строят по двум значениям в граничных точках участка.

Определим значение внутреннего изгибающего момента в конце участка в точке C [цэ] методом сечений. Мысленно разрежем балку по сечению C [цэ] и отбросим левую часть с жесткой заделкой. Внутренний момент в сечении C [цэ] создают внешние силы, оставшиеся в правой части балки, то есть сосредоточенная сила F [эф] и распределенная нагрузка q [ку].

Сосредоточенный момент, приложенный непосредственно в точке С [цэ] учитывать пока не будем, потом сделаем на него скачок.

Знаки моментов от каждой силы будем определять по правилу знаков для Мх [эм икс]. Сосредоточенная сила F [эф] гнет балку относительно конечной точки С [цэ] вверх, при этом сжиматься будут верхние волокна, значит знак её момента будет положительным. Распределенная нагрузка гнет балку вниз, следовательно, её момент будет отрицательным. На слайде показано вычисление момента в точке С [цэ]. Его значение равно плюс 20 килоньютонометров. При этом использовались правила теоретической механики вычисления момента от действия сил.

На эпюре в точке С [цэ] откладываем полученное значение момента 20 килоньютонометров от базовой линии вверх и соединяем его с нулем в начале участка параболой без экстремума выпуклостью вверх.

Слайд 67

Построение эпюры Мх: участок CD

Рассмотрим участок CD [цэ дэ].

На правой границе участка в его начальной точке С [цэ] находится сосредоточенный момент М [эм], который вызовет на эпюре скачок, равный его величине, то есть 20 килоньютонометрам. Знак скачка определим по направлению действия момента. По ходу построения эпюры внешний момент направлен в сторону верхних волокон, поэтому откладываем скачок вверх и получим 40 килоньютонометров.

Оценим состояние по длине участка. Участок пустой, ничем не загружен, поэтому на эпюре момента должна быть наклонная прямая с угловым коэффициентом, равным значению поперечной силы Qy [ку игрек] этого участка, то есть 10 килоньютонометрам.

Величину внутреннего момента на левой границе участка в точке D [дэ] определим методом сечений. Разрежем балку по сечению D [дэ], отбросим левую часть с жесткой заделкой. Оставшиеся в правой части внешние силы: F [эф], q [ку] и М [эм] создают внутренний момент в сечении D [дэ]. Найдем величину этого момента как алгебраическую сумму моментов внешних сил правой части относительно точки D [дэ]. Соответствующие вычисления представлены на слайде. Значение внутреннего момента в точке D [дэ] равно плюс 50 килоньютонометров.

На эпюре в точке D [дэ] откладываем полученное значение момента 50 килоньютонометров от базовой линии вверх и соединяем его со значением 40 килоньютонометров в начале участка наклонной прямой.

Слайд 68

Построение эпюры Mx: участок DL

Рассмотрим участок DL [дэ эль].

На правой границе участка в его начальной точке D [дэ] отсутствует сосредоточенный внешний момент, поэтому скачка в начале участка не будет, значение момента 50 килоньютонометров в этой точке не изменится.

Оценим состояние по длине участка. Участок загружен равномерно распределенной нагрузкой, поэтому на эпюре будет квадратичная парабола, выпуклостью вверх, навстречу действию распределенной нагрузки. Для определения наличия экстремума анализируем эпюру поперечной силы этого участка. Наклонная прямая на эпюре Qy [ку игрек] пересекает базу, то есть, внутри участка принимает нулевое значение. Это говорит о том, что у параболы будет экстремум. Такие параболы строят по трем значениям в точке экстремума и в граничных точках участка.

Определим значение внутреннего изгибающего момента в экстремальной точке. Обозначим её на расчетной схеме буквой S [эс]. Определим расстояние от точки D [дэ] до точки экстремума по эпюре Qy [ку игрек]. Для этого значение поперечной силы в точке D [дэ] поделим на интенсивность распределенной нагрузки 2q [два ку]. То есть 10 делим на 40 получится 0,25 метра. Вычислим величину экстремума по части балки BS [бэ эс], используя метод сечений. Вычисление представлено на слайде. Значение внутреннего момента в сечении S [эс] равно 51,25 килоньютонометров.

Аналогично методом сечений определим величину внутреннего момента в точке L [эль] по части балки BL [бэ эль]. Вычисление также представлено на слайде. Значение внутреннего момента в сечении L [эль] равно 40 килоньютонометрам.

Через полученные три точки проводим параболу.

Слайд 69

Построение эпюры Mx: участок LK

Рассмотрим участок LK [эль ка].

На правой границе участка в его начальной точке L [эль] отсутствует сосредоточенный внешний момент, поэтому скачка в начале участка не будет, значение момента 40 килоньютонометров в этой точке не изменится.

Оценим состояние по длине участка. Участок пустой, ничем не загружен, поэтому на эпюре момента должна быть наклонная прямая с угловым коэффициентом, равным значению поперечной силы Qy [ку игрек] этого участка, то есть 30 килоньютонометрам.

Величину внутреннего момента на левой границе участка в точке K [ка] определим методом сечений по всей длине балки BK. Вычисление представлено на слайде. Значение внутреннего момента в сечении K [ка] равно плюс 10 килоньютонометрам.

На эпюре в точке K [ка] откладываем полученное значение момента 10 килоньютонометров от базовой линии вверх и соединяем его со значением 40 килоньютонометров в начале участка наклонной прямой.

Участок LK [эль ка] последний, поэтому делаем завершающий скачок от значения плюс 10 килоньютонов до базы эпюры.

Слайд 70

Построение эпюры Mx: оформление эпюры

Контур эпюры построили, осталось её оформить.

Знаки на поле эпюры моментов не ставим, только наносим штриховку, перпендикулярно базовой линии.

Эпюра изгибающего момента Mx [эм икс] построена.

Слайд 71

Пример построения эпюр Qy и Mx для двухопорной балки

Рассмотрим пример построения эпюр внутренних силовых факторов для данной двухопорной балки, нагруженной системой внешних нагрузок.

Обе опоры шарнирные, одна из них подвижная, а другая неподвижная. В нашем примере левый конец балки опирается на шарнирно-подвижную опору, правый на шарнирно неподвижную.

Для таких балок прежде, чем строить эпюры поперечной силы и изгибающего момента, необходимо определить реактивные силы в опорах. Реактивные силы также учитываются при построении эпюр наряду с внешними активными усилиями.

Слайд 72

Определение реакции опоры P

Обозначим буквами опоры: шарнирно неподвижную P [пэ], шарнирно подвижную B [бэ].

Определим реактивную силу в опоре P [пэ]. Для этого составим моментное уравнение равновесия относительно точки опоры B [бэ]. В общем виде оно представлено формулой (2.4). Распишем его подробно, используя правило знаков для моментов, принятое в Теоретической механике в разделе «Статика»: момент против часовой стрелки принимаем положительным и наоборот. В развернутом виде это уравнение равновесия на слайде обозначено номером (2.5). Выразим из уравнения реактивную силу RP [эр пэ] и, подставив численное значение всех входящих величин, найдем её значение. Это выражение обозначено номером (2.6).

Таким образом, реактивная сила в опоре P [пэ] равна 27,28 килоньютонов.

Слайд 73

Определение реакции опоры B

Определим реактивную силу в опоре B [бэ]. Для этого составим моментное уравнение равновесия относительно точки опоры P [пэ]. В общем виде оно представлено формулой (2.7). Распишем его подробно, также используя правила Теоретической механики. В развернутом виде это уравнение равновесия на слайде обозначено номером (2.8). Выразим из уравнения реактивную силу RB [эр бэ] и, подставив численное значение всех входящих величин, найдем её значение. Это выражение обозначено номером (2.9).

Таким образом, реактивная сила в опоре P [пэ] равна 17,72 килоньютонов.

Слайд 74

Построение эпюры Qy: разбиение на участки

Теперь можно приступать к построению эпюр.

Начинаем построение с эпюры поперечной силы Qy [ку игрек].

Под расчетной схемой параллельно оси балки проведем базовую линию для эпюры и разделим ее на участки. Для этого обозначим буквами характерные сечения: B [бэ], C [цэ], D [дэ], L [эль], S [эс], P [пэ]. Через эти сечения проведем границы участков вертикальными линиями до пересечения с базой. Таким образом, на схеме и, соответственно, на базе получилось пять участков: BC [бэ цэ], CD [цэ дэ], DL [дэ эль], LS и SP.

Направление построения эпюр для двухопорной балки произвольное, так как мы знаем значение и направление реактивных сил с обеих сторон балки. Выберем направление слева направо.

Слайд 75

Построение эпюры Qy: участок BC

Рассмотрим первый участок BC [бэ цэ].

Левая граница участка начальная точка B [бэ]. В этой точке действует реактивная сосредоточенная сила RB [эр бэ], равная 17,72 килоньютонам, от которой на эпюре должен быть скачок на эту величину. Знак скачка определим, поворачивая силой участок относительно конечной точки C [цэ]. Участок поворачивается против часовой стрелки, поэтому откладываем ординату 17,72 килоньютонов вниз, в отрицательную сторону.

Определяем состояние по длине участка. Участок загружен распределенной нагрузкой, поэтому на эпюре будет наклонная прямая с угловым коэффициентом, равным интенсивности распределенной нагрузки q [ку]. А поскольку направление вектора q [ку] совпадает с направлением силы RB [эр бэ], наклонная прямая пойдет вниз, в отрицательную область значений Qy [ку игрек].

Определим величину силы, на которую произойдет изменение поперечной силы за счет действия распределенной нагрузки на участке. Для этого умножим q [ку] на длину участка 1 метр, получим 10 килоньютонов. Величина поперечной силы в точке C [цэ] определится как алгебраическая сумма значения силы в начале участка и её изменения за счет наклонной прямой. В результате получим минус 27,72 килоньютонов. Отложим это значение в точке C [цэ] вниз от базы. Соединим ординаты на левой и правой границе участка наклонной прямой.

Слайд 76

Построение эпюры Qy: участок CD

Рассмотрим второй участок CD [цэ дэ].

На левой границе участка в начальной точке C [цэ] сосредоточенная сила отсутствует, следовательно, значение поперечной силы минус 27,72 килоньютонов не изменится, скачка в точке C [цэ] делать не нужно.

Оценим состояние по длине участка. Участок пустой, ничем не загружен, поэтому на эпюре должна быть прямая, параллельная базе. Проведем ее до правой границы участка, до точки D [дэ].

Таким образом, значение Qy [ку игрек] в точке D [дэ] такое же, как и на левой границе, то есть минус 27,72 килоньютонов.

Слайд 77

Построение эпюры Qy: участок DL

Рассмотрим третий участок DL [дэ эль].

На левой границе участка в начальной точке D [дэ] приложена сосредоточенная сила F [эф], равная 25 килоньютонам, от которой на эпюре должен быть скачок на эту величину. Знак скачка определим, поворачивая участок силой F [эф] относительно конечной точки D [дэ]. Участок поворачивается по часовой стрелке, поэтому от значения минус 27,72 килоньютонов делаем скачок на 25 килоньютонов вверх, в положительную сторону. После скачка получаем значение минус 2,72 килоньютонов.

Оценим состояние по длине участка. Участок пустой, ничем не загружен, поэтому на эпюре должна быть прямая, параллельная базе. Проведем ее до правой границы участка, до точки L [эль].

Таким образом, значение Qy [ку игрек] в точке L [эль] такое же, как и на левой границе, то есть минус 2,72 килоньютонов.

Слайд 78

Построение эпюры Qy: участок LS

Рассмотрим четвертый участок LS [эль эс].

На левой границе участка в начальной точке L [эль] сосредоточенная сила отсутствует, а на сосредоточенный момент M поперечная сила не реагирует. Следовательно, значение поперечной силы минус 2,72 килоньютонов не изменится, скачка в точке L [эль] делать не нужно.

Оценим состояние по длине участка. Участок пустой, ничем не загружен, поэтому на эпюре параллельная прямая предыдущего участка DL [дэ эль] продолжится до правой границы участка, до точки S [эс].

Таким образом, значение Qy [ку игрек] в точке S [эс] такое же, как и на левой границе, и на всем предыдущем участке, то есть минус 2,72 килоньютонов.

Слайд 79

Построение эпюры Qy: участок SP

Рассмотрим пятый участок SP [эс пэ].

На левой границе участка в начальной точке D [дэ] сосредоточенная сила отсутствует, поэтому значение поперечной силы минус 2,72 килоньютонов не изменится.

Оценим состояние по длине участка. Участок загружен равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью 2q [два ку]. Поэтому на эпюре должна быть наклонная прямая с угловым коэффициентом, равным минус 2q [два ку], то есть минус двадцати килоньютонам на метр. Почему минус? Потому, что распределенная нагрузка поворачивает участок относительно его конечной точки P [пэ] против часовой стрелки.

Определим величину силы, на которую произойдет изменение Qy [ку игрек] за счет действия распределенной нагрузки на участке. Для этого умножим 2q на длину участка 1,5 метра, получим 30 килоньютонов. Величину поперечной силы в точке L определим, как алгебраическую сумму значения силы в начале участка и её изменения за счет наклонной прямой. В результате получим плюс 27,28 килоньютонов. Отложим это значение в точке P [пэ] вверх от базы, то есть со знаком плюс. Соединим ординаты на левой и правой границе участка наклонной прямой.

Граница P [пэ] последняя, поэтому от значения плюс 27,28 килоньютонов делаем скачок до базовой линии эпюры.

Слайд 80

Построение эпюры Qy: оформление эпюры

Контур эпюры построен, осталось её оформить.

Расставляем в соответствующих зонах эпюры знаки в кружочках и наносим штриховку, перпендикулярно базовой линии.

Эпюра поперечной силы Qy [ку игрек] построена.

Слайд 81

Построение эпюры Mx: разбиение на участки

Теперь построим эпюру изгибающего момента Mx [эм икс].

Для этого прежде всего проведем базовую линию для эпюры Mx [эм икс] ниже построенной эпюры Qy [ку игрек] параллельно оси балки. Границы участков продлим вниз до пересечения с базой. Направление построения эпюры изгибающего момента выберем сначала такое же, как и для эпюры поперечной силы – слева направо, а последний участок SP [эс пэ] рассмотрим в обратном направлении, чтобы сократить расчеты.

Слайд 82

Построение эпюры Mx: участок BC

Рассмотрим первый участок BC [бэ цэ].

На левой границе участка в его начальной точке B [бэ] отсутствует сосредоточенный внешний момент, поэтому скачка в начале участка не будет. Начинаем эпюру момента с нуля.

Оценим состояние по длине участка. Участок загружен равномерно распределенной нагрузкой, поэтому на эпюре будет квадратичная парабола, выпуклостью вверх, навстречу действию распределенной нагрузки. Для определения наличия экстремума анализируем эпюру поперечной силы этого участка. Наклонная прямая на эпюре Qy [ку игрек] не пересекает базу, т.е. внутри участка не принимает нулевое значение. Это говорит о том, что экстремума на параболе не будет. Такие параболы строят по двум значениям в граничных точках участка.

Определим значение внутреннего изгибающего момента в конце участка в точке С [цэ] методом сечений. Мысленно разрежем балку по сечению С [цэ] и отбросим правую часть. Внутренний момент в сечении С [цэ] создают внешние силы, оставшиеся в левой части балки, то есть сосредоточенная реактивная сила RB [эр бэ] и распределенная нагрузка q.

Знаки моментов от каждой силы будем определять по правилу знаков для Мх [эм икс]. Реактивная сила RB [эр бэ] гнет балку относительно конечной точки С [цэ] вниз, при этом сжиматься будут нижние волокна, значит знак её момента будет отрицательным. Распределенная нагрузка также гнет балку вниз, следовательно, и её момент будет отрицательным. На слайде показано вычисление момента в точке С [цэ]. Его значение равно минус 22,72 килоньютонометров.

На эпюре в точке С [цэ] откладываем полученное значение момента 22,72 килоньютонометра от базовой линии вниз и соединяем его с нулем в начале участка параболой без экстремума выпуклостью вверх.

Слайд 83

Построение эпюры Мх: участок CD

Рассмотрим второй участок CD [цэ дэ].

На левой границе участка в его начальной точке С [цэ] сосредоточенного момента нет, поэтому скачка в начале участка не будет и значение момента в этой точке минус 22,72 килоньютонометра не изменится.

Оценим состояние по длине участка. Участок пустой, ничем не загружен, поэтому на эпюре момента должна быть наклонная прямая с угловым коэффициентом, равным значению поперечной силы Qy [ку игрек] этого участка, то есть минус 27,72 килоньютонометров.

Величину внутреннего момента на правой границе участка в точке D [дэ] определим методом сечений. Разрежем балку по сечению D [дэ], отбросим правую часть. Оставшиеся в левой части силы: RB и q создают внутренний момент в сечении D [дэ]. Найдем величину этого момента как алгебраическую сумму моментов этих сил относительно точки D [дэ]. Соответствующие вычисления представлены на слайде. Значение внутреннего момента в точке D [дэ] равно минус 44,896 [сорок четыре целых восемьсот девяносто шесть тысячных] килоньютонометров.

На эпюре в точке D [дэ] откладываем полученное значение момента минус 44,896 килоньютонометров от базовой линии вниз и соединяем его со значением минус 27,72 килоньютонометров в начале участка наклонной прямой.

Слайд 84

Построение эпюры Mx: участок DL

Рассмотрим третий участок DL [дэ эль].

На левой границе участка в его начальной точке D [дэ] отсутствует сосредоточенный внешний момент, поэтому скачка в начале участка не будет, значение момента минус 44,896 килоньютонометров в этой точке не изменится.

Оценим состояние по длине участка. Участок пустой, ничем не загружен, поэтому на эпюре момента должна быть наклонная прямая с угловым коэффициентом, равным значению поперечной силы Qy [ку игрек] этого участка, то есть минус 2,72 килоньютонометра.

Величину внутреннего момента на правой границе участка в точке L [эль] по части DL [дэ эль] определим методом сечений, при этом внешний сосредоточенный момент приложенный в конечной точке L [эль] не учитывается. Вычисление представлено на слайде. Значение внутреннего момента в сечении L [эль] равно минус 47,072 килоньютонометров.

На эпюре в точке L [эль] откладываем полученное значение момента минус 47,072 килоньютонометров от базовой линии вниз и соединяем его со значением минус 44,896 килоньютонометров в начале участка наклонной прямой.

Слайд 85

Построение эпюры Mx: участок LS

Рассмотрим участок LS [эль эс].

На левой границе участка в его начальной точке L [эль] находится сосредоточенный момент M [эм], который вызовет на эпюре скачок, равный его величине, то есть 30 килоньютонометрам. Знак скачка определим по направлению действия момента. По ходу построения эпюры внешний момент изгибает участок LS [эль эс] относительно его конечной точки S [эс] кверху, при этом сжимаются верхние волокна, следовательно, откладываем скачок от значения минус 44,896 килоньютонометров вверх. После скачка получим значение минус 17,072 [семнадцать целых семьдесят две тысячные] килоньютонометров.

Оценим состояние по длине участка. Участок пустой, ничем не загружен, поэтому на эпюре момента должна быть наклонная прямая с угловым коэффициентом, равным значению поперечной силы Qy [ку игрек] этого участка, то есть минус 2,72 килоньютонометрам.

Величину внутреннего момента на правой границе участка в точке S определим по части BS [бэ эс] методом сечений. Соответствующие вычисления представлены на слайде. Значение внутреннего момента в точке S [эс] равно минус 18,42 килоньютонометров.

На эпюре в точке S [эс] откладываем полученное значение момента минус 18,42 килоньютонометров от базовой линии вниз и соединяем его со значением минус 17,072 килоньютонометров в начале участка наклонной прямой.

Слайд 86

Построение эпюры Mx: участок SP

Рассмотрим последний участок SP [эс пэ].

Изменим здесь направление построения эпюры на противоположное, то есть справа налево. Это упростит вычисление момента в конечной точке участка.

На правой границе участка в его начальной точке P [пэ] отсутствует сосредоточенный внешний момент, поэтому скачка в начале участка не будет. Начинаем эпюру момента с нуля.

Оценим состояние по длине участка. Участок загружен равномерно распределенной нагрузкой, поэтому на эпюре будет квадратичная парабола, выпуклостью вниз, навстречу действию распределенной нагрузки. Для определения наличия экстремума анализируем эпюру поперечной силы этого участка. Наклонная прямая на эпюре Qy [ку игрек] пересекает базу, то есть, внутри участка принимает нулевое значение. Это говорит о том, что у параболы будет экстремум. Такие параболы строят по трем значениям в точке экстремума и в граничных точках участка.

Определим значение внутреннего изгибающего момента в экстремальной точке. Обозначим эту точку буквой E. Определим расстояние от точки P [пэ] до точки экстремума по эпюре Qy [ку игрек]. Для этого значение поперечной силы в точке P [пэ] поделим на интенсивность распределенной нагрузки 2q [два ку]. То есть, 27,28 поделить на 20 получится 1,364 [одна целая триста шестьдесят четыре тысячных] метра. Вычислим величину экстремума по части балки PE [пэ е], используя метод сечений. Вычисление представлено на слайде. Значение внутреннего момента в сечении E равно минус 18,6 килоньютонометров.

Величину внутреннего момента на левой границе участка в точке S [эс] мы уже определили, рассматривая участок LS [эль эс] с другой стороны. Внешний момент в этом сечении не приложен, поэтому скачка быть не может. Значение внутреннего момента в сечении S [эс] равно минус 18,42 килоньютонометрам.

Через полученные три точки проводим параболу.

Слайд 87

Построение эпюры Mx: оформление эпюры

Контур эпюры построили, осталось её оформить.

Знаки на поле эпюры моментов не ставим, только наносим штриховку, перпендикулярно базовой линии.

Эпюра изгибающего момента Mx [эм икс] построена.

Тема 3 Расчет на прочность и жесткость при растяжении-сжатии

Слайд 88

Напряжения при растяжении-сжатии

На рисунке 1 изображён стержень, работающий на растяжение. В произвольном по длине стержня месте сделаем поперечное сечение и разделим стержень на две части. При этом, как показано на рисунке 2, в сечении каждой части возникает только продольная сила N [эн]. Все остальные внутренние силовые факторы равны нулю. Отметим, что сказанное верно только в том случае, если внешние силы приложены к центрам тяжести сечений стержня.

Определим напряжения, возникающие в поперечных сечениях стержня. С этой целью рассмотрим три стороны данной задачи.

Первая сторона задачи – статическая. Воспользуемся одним из полученных ранее интегральных уравнений равновесия (1.3). В частности, для продольной силы справедливо уравнение (3.1). Из формулы (3.1) следует, что при растяжении-сжатии в поперечных сечениях возникают только нормальные напряжения, тогда как касательные, очевидно, равны нулю.

Чтобы решить уравнение (3.1), нужно знать закон распределения напряжений по плоскости поперечного сечения. Исходя из того, что моментная нагрузка в сделанном сечении отсутствует, можно утверждать лишь то, что это распределение является симметричным относительно оси стержня. Этому условию удовлетворяет большое количество вариантов распределения напряжений, например, любой из вариантов, показанных на рисунках 3, 4 и 5.

Слайд 89

Напряжения при растяжении-сжатии

Вторая сторона задачи – геометрическая. Введём следующую гипотезу: сечения стержня, плоские и перпендикулярные его оси до нагружения, остаются такими же и после приложения внешней силы. Эта гипотеза известна как гипотеза плоских сечений, или гипотеза Бернулли.

В соответствии с данным предположением, стержень можно представить как набор жёстких пластинок – сечений, соединённых упругими стерженьками, которые называются волокнами. Видно, что после нагружения растягивающими силами поперечные сечения остаются параллельными друг другу. Это означает, что каждое продольное волокно стержня удлиняется на одну и ту же величину Δl [дельта эль]. Определим относительную деформацию ε [э́псилон] как отношение удлинения стержня к его начальной длине. Следовательно, в соответствии с формулой (3.2), относительная деформация воло́кон также является постоянной величиной.

Слайд 90

Напряжения при растяжении-сжатии

Третья сторона задачи – физическая. Чтобы соединить статическую и геометрическую части задачи, воспользуемся законом Гука. Запишем его через нормальное напряжение и относительную деформацию в соответствии с выражением (3.3). Коэффициент пропорциональности E в этой формуле называется модулем упругости первого рода или модулем Юнга. Он представляет собой физическую константу материала.

Закон Гука справедлив для большинства материалов в пределах упругих деформаций.

Далее рассмотрим все три стороны задачи совместно. Из постоянства относительных линейных деформаций ε [э́псилон] следует, в соответствии с законом Гука, постоянство нормальных напряжений σ [сигма]. Это даёт возможность решить интегральное уравнение равновесия (3.1). Вынесем напряжение за знак интеграла и получим выражение для продольной силы. Откуда следует формула (3.4): нормальное напряжение, возникающее в поперечном сечении при растяжении-сжатии, можно определить как отношение величины продольной силы к площади этого сечения.

Полученная формула справедлива не только при растяжении, но и при сжатии, при условии, что длина стержня не очень велика по сравнению с поперечными размерами.

Знак нормального напряжения совпадает со знаком продольной силы. Таким образом, растягивающие напряжения считаются положительными, а сжимающие – отрицательными.

Слайд 91

Удлинение стержня при растяжении-сжатии

Рассмотрим стержень, жёстко заделанный одним концом, а на другом конце нагруженный растягивающей силой F. До нагружения его длина равна l [эль], а после нагружения она становится больше на Δl [дельта эль].

Найдём величину удлинения стержня. Для этого воспользуемся законом Гука. Подставим в формулу (3.3) выражения для нормального напряжения (3.4) и для относительной деформации (3.2). В результате получим формулу (3.5) для определения удлинений. Эта формула применима только в том случае, когда величина возникающей продольной силы постоянна по длине стержня, то есть при отсутствии распределённой нагрузки. В противном случае абсолютную деформацию нужно определять по интегральной формуле (3.6). Функция N(z) [эн от зет], которая стоит в формуле (3.6) под знаком интеграла в числителе, представляет собой закон изменения продольной силы по длине стержня.

Произведение модуля Юнга материала на площадь поперечного сечения стержня EA, стоящее в формулах (3.5) и (3.6) в знаменателе, принято называть жёсткостью поперечного сечения при растяжении-сжатии.

Очевидно, что перемещение любого сечения стержня при растяжении-сжатии можно определить как величину удлинения той части стержня, которая находится между заделкой и рассматриваемым сечением. Если продольная сила или площадь сечения меняется по длине стержня, то стержень делится на участки, и перемещение вычисляется как сумма удлинений участков стержня.

Слайд 92

Образцы для испытания на растяжение

При выполнении практических расчётов конструкций на прочность и жёсткость требуется учитывать свойства материала, из которого они изготовлены. А именно нужны значения некоторых величин, которые характеризуют прочность и деформируемость материала. Эти величины называются механическими характеристиками материалов. Их определение производится экспериментально, путём испытания в лабораторных условиях специальных образцов, изготовленных из исследуемого материала. Полученные характеристики фиксируются в справочниках.

Основным и наиболее распространенным способом определения механических свойств материалов является испытание на растяжение. Это можно объяснить тем, что при растяжении значительный объём материала находится в одинаковых условиях, испытывая одни и те же напряжения и деформации. Это даёт возможность определять величины напряжений и деформаций просто и точно. Кроме того, при испытании на растяжение можно получить наибольшее количество механических характеристик.

Образец для испытания на растяжение представляет собой стержень с утолщениями на концах, так называемыми головками. Утолщения нужны для того, чтобы закрепить образец в захватах испытательной машины. Средняя часть образца называется рабочей. Она может иметь круглое или прямоугольное поперечное сечение. Предпочтение отдаётся цилиндрическим образцам. Переход от рабочей части к головкам выполняется со скруглением, иначе образец будет разрушаться в этой области. При этом некоторые определяемые характеристики будут недостоверными.

До испытания измеряются поперечные размеры рабочей части образца: для цилиндрического образца – диаметр, для плоского – ширина и толщина. Кроме того, по краям рабочей части наносят риски на определённом расстоянии друг от друга l0 [эль нулевое], которое называется начальной расчётной длиной образца.

Рекомендуется использовать образцы с определённым соотношением между расчётной длиной и поперечными размерами. Так, для цилиндрических образцов отношение расчётной длины к диаметру поперечного сечения должно быть равно 10 или 5. Короткие, пятикратные, образцы считаются предпочтительными. Для плоских образцов используется диаметр круга, площадь которого равна площади сечения. Таким образом, для плоских образцов соответствующие соотношения можно выразить через квадратный корень из площади сечения образца A0 [а нулевое].

Слайд 93

Диаграмма растяжения малоуглеродистой стали

В процессе испытания образец растягивается с постоянной скоростью до разрыва. При этом записывается график, показывающий изменение растягивающей силы F [эф] с ростом удлинения образца Δl [дельта эль]. Этот график называется рабочей или машинной диаграммой растяжения.

На рисунке показан вид диаграммы растяжения для малоуглеродистой стали, например, марки Ст3 [эс тэ три]. Рассмотрим основные участки диаграммы.

Первый участок диаграммы OB [о бэ] называется участком упругости. Он представляет собой наклонную прямую линию, что указывает на пропорциональную зависимость между силой и удлинением, то есть на выполнение закона Гука. Если остановить нагружение в пределах этого участка и разгрузить образец, то он полностью восстанавливает свои первоначальные размеры. Такая деформация, исчезающая после разгрузки, называется упругой. Упругая деформация возникает за счёт изменения расстояний между атомами.

В конце участка упругости диаграмма искривляется и затем переходит в почти горизонтальный участок BC [бэ цэ], который называется площадкой текучести. С началом этого участка на поверхности образца появляется сетка линий, направленных под углом приблизительно 45º [сорок пять градусов] к оси растяжения – линии Чернова-Лю́дерса. Эти линии особенно хорошо видны на полированной поверхности плоского образца. Они свидетельствуют о появлении нового механизма деформации, который заключается в сдвиге атомных слоёв друг относительно друга. После разгрузки образец уже не возвращается в исходное состояние, приобретая пластическую, или остаточную, деформацию.

Пластическая деформация изменяет внутреннюю структуру материала, в результате чего образец снова приобретает способность сопротивляться деформированию. На диаграмме при этом наблюдается увеличение растягивающей силы. Соответствующий участок CD [цэ дэ] называется участком упрочнения.

При достижении точки D [дэ] в самом слабом месте образца появляется локальное сужение, которое называется шейкой. Дальнейшая деформация образца сосредотачивается в этой области. Из-за уменьшения площади сечения образца сила, необходимая для растяжения, снижается. Участок DK [дэ ка] называется участком местной текучести, или участком образования шейки.

Точка K [ка] соответствует разделению образца на части. Разрыв происходит в самом тонком месте шейки.

Слайд 94

Диаграммы условных и истинных напряжений

Значения, как силы, так и удлинения образца существенно зависят от геометрических размеров образца. Поэтому рабочую диаграмму нельзя использовать для определения механических характеристик материала. Её нужно перестроить в координатах «напряжение – относительная деформация». Для этого растягивающее усилие нужно разделить на начальную площадь поперечного сечения образца A0 [а нулевое], а удлинение образца – на его начальную длину l0 [эль нулевое]. Поскольку обе величины являются константами, новая диаграмма имеет ту же форму, что и рабочая диаграмма. Относительные деформации, как правило, малы по величине, поэтому обычно их выражают в процентах.

Полученную диаграмму принято называть условной из-за того, что при вычислении напряжения не учитывается изменение площади поперечного сечения в процессе растяжения. Если определять напряжение как отношение растягивающего усилия к действительной площади сечения образца, получим истинную диаграмму растяжения. Поскольку при растяжении поперечные размеры образца постоянно уменьшаются, истинные напряжения всегда больше условных. Наибольшее расхождение между условной и истинной диаграммой наблюдается на стадии образования шейки, когда условные напряжения уменьшаются, а истинные продолжают расти.

Построение истинной диаграммы является достаточно сложной задачей, поэтому обычно в технике для определения механических характеристик материалов используется условная диаграмма растяжения.

Слайд 95

Деформации образца в упруго пластической области

Остановим нагружение образца в некоторой точке G [же], находящейся за пределами участка упругости, и снимем нагрузку. Процесс разгрузки будет происходить по линии GO1 [же о один], параллельной прямолинейному участку диаграммы. После разгрузки часть деформации образца, соответствующая длине отрезка OO1 [о о один], остаётся.

Такое поведение образца можно объяснить следующим образом. За пределами участка упругости полная деформация образца складывается из двух составляющих – упругой и пластической. В ходе разгрузки упругая деформация исчезает. При этом для неё по-прежнему выполняется закон Гука, о чём говорит параллельность линий разгрузки и упругого участка диаграммы. Следовательно, отрезок O1O2 [о один о два] определяет величину упругой деформации образца, а отрезок OO1 [о о один] – величину пластической деформации.

Таким образом, после окончания участка упругости и появления пластических деформаций упругие деформации не исчезают. Наоборот, они продолжают расти по мере увеличения напряжений, в соответствии с законом Гука. Наибольшей величины упругие деформации достигают к началу образования шейки.

Слайд 96

Характеристики упругих свойств

Механические характеристики материалов, определяемые при растяжении, можно разделить на три группы.

К первой группе относятся характеристики упругих свойств – модуль Юнга и коэффициент Пуассона.

Модуль Юнга E представляет собой коэффициент пропорциональности между напряжением и относительной деформацией на участке упругости диаграммы растяжения. Модуль Юнга является физической константой материала, характеризующей его жёсткость, то есть сопротивление упругой деформации. Модуль Юнга материала тем больше, чем больше угол наклона упругого участка диаграммы к оси абсцисс.

Для того, чтобы дать определение коэффициента Пуассона, рассмотрим следующий опыт. Цилиндрический стержень до нагружения имеет длину l [эль] и диаметр d [дэ]. В результате растяжения его длина увеличивается на величину Δl [дельта эль], а диаметр уменьшается на величину Δd [дельта дэ]. Величины приращения размеров стержня представляют собой абсолютные деформации продольную и поперечную, соответственно. Разделив их на начальные размеры стержня, получим относительные деформации продольную и поперечную. За коэффициент Пуассона μ [мю] принимают модуль отношения поперечной деформации к продольной, взятый в пределах упругого участка. Эта величина так же, как и модуль Юнга, является константой материала. Значения коэффициента Пуассона могут изменяться в пределах от 0 [нуля] до 0,5 [нуля целых пяти десятых].

Слайд 97

Характеристики прочности

Следующая группа механических характеристик – это характеристики прочности. Их величины определяются непосредственно по условной диаграмме растяжения как значения напряжений, которые соответствуют характерным её точкам.

Точке B [бэ] окончания прямолинейного участка диаграммы соответствует напряжение, обозначаемое $\sigma_{пц}$ [сигма пэ цэ]. Это предел пропорциональности – максимальное напряжение, до которого всё ещё выполняется закон Гука.

Окончанием участка упругости является точка B1 [бэ один], после разгрузки от которой образец полностью восстанавливает свои размеры. Этой точке соответствует напряжение $\sigma_у$ [сигма у], которое называется пределом упругости. Предел упругости представляет собой максимальное напряжение, до которого в материале не возникает пластических деформаций.

Наименьшее напряжение на площадке текучести ВС [бэ цэ] называется физическим пределом текучести σт [сигма тэ].

Самой верхней точке диаграммы D [дэ] соответствует напряжение σв [сигма вэ]. Это временное сопротивление – максимальное напряжение, которое выдерживает перед разрывом. Часто данную характеристику называют также пределом прочности. Строго говоря, это справедливо только в том случае, когда точка D [дэ] является точкой разрушения, то есть когда разрыв происходит без образования шейки.

В большинстве случаев разницей между пределами пропорциональности, упругости и текучести пренебрегают. Таким образом, основными расчётными характеристиками прочности являются пределы текучести и прочности.

Слайд 98

Условный предел текучести

Наличие на диаграмме растяжения площадки текучести является скорее исключением, чем правилом. Кроме малоуглеродистой стали, она наблюдается у латуни и некоторых бронз.

На рисунке показан начальный участок диаграммы растяжения низколегированной стали. Видно, что переход от прямолинейного участка к участку упрочнения происходит плавно, без какого-либо перегиба. Подобная ситуация наблюдается также для алюминия и меди.

Чтобы определить величину предела текучести, в таких случаях применяется следующий способ. Задаются некоторой величиной допуска на пластическую деформацию. Обычно он равен 0,2% [двум десятым процента]. Откладывают это значение на оси относительной деформации. Из полученной точку проводят наклонную прямую, параллельную участку упругости. Напряжение, соответствующее точке пересечения этой прямой с линией диаграммы, называется условным пределом текучести σ0,2 [сигма ноль два].

В курсе сопротивления материалов не делается разницы между физическим и условным пределом текучести. И тот, и другой обозначаются как σт [сигма тэ].

Наряду с условным пределом текучести используется также понятие условного предела упругости. В этом случае допуск на величину пластической деформации составляет от 0,005 [пяти тысячных] до 0,05% [пяти сотых процента].

Слайд 99

Характеристики пластичности

Третья группа механических характеристик – характеристики пластических свойств. К ним относятся относительное удлинение и относительное сужение после разрыва.

Относительное удлинение после разрыва определяется по формуле (3.7). Для определения расчётной длины образца после разрыва l1 [эль один], входящей в формулу (3.7), используются риски, нанесённые на поверхность рабочей части образца до испытания. Разрушенный образец аккуратно складывают по месту разрыва и измеряют расстояние между рисками с помощью штангенциркуля.

Относительное удлинение после разрыва можно определить также и по диаграмме растяжения. Для этого из точки разрыва нужно провести линию, параллельную участку упругости, до пересечения с осью деформации. Точка пересечения соответствует искомой величине.

Недостатком этой характеристики является её зависимость от кратности образца, то есть от отношения его длины к диаметру. С увеличением этого отношения величина относительного удлинения после разрыва уменьшается. Это объясняется тем, что длина шейки у образцов одного и того же диаметра одинакова и не зависит от длины. Таким образом, у длинных образцов шейка занимает относительно меньшее место, чем у коротких. Кроме того, данная характеристика зависит и от положения шейки на образце. Её величина оказывается меньше в тех случаях, когда шейка образуется ближе к концам рабочей части образца.

Относительное сужение после разрыва определяется по формуле (3.8). Считается, что эта величина более точно описывает пластические свойства, чем относительное удлинение. Её недостаток – сложность точного определения для плоских образцов. Это связано с тем, что прямоугольное поперечное сечение в месте образования шейки искажается.

По диаграмме растяжения величину относительного сужения после разрыва можно оценить лишь качественно. Чем больше снижается напряжение после предела прочности, тем больше эта величина.

Слайд 100

Пластичные и хрупкие материалы

По величине относительного остаточного удлинения при разрыве принято делить материалы на пластичные и хрупкие.

Пластичные материалы способны получать без разрушения большие остаточные деформации, превышающие 10% [десять процентов].

Характерным примером пластичного материала является малоуглеродистая сталь. Высокой пластичностью обладают также медь и алюминий.

Хрупкие материалы разрушаются без образования заметных остаточных деформаций, относительное остаточное удлинение не превышает 5% [пять процентов]. Диаграмма растяжения для хрупких материалов часто состоит из одного участка упругости, в конце которого происходит разрушение. Примерами хрупких материалов являются закаленная сталь, дюралюминий, серый и белый чугун, строительные материалы – камень, кирпич, бетон, стекло.

Пластичные и хрупкие материалы отличаются также по характеру разрушения. Пластичные материалы перед разрывом образуют заметную шейку. Поверхность их разрушения наклонена под углом примерно 45° [сорок пять градусов] к оси растяжения. Это хорошо видно на тонких плоских образцах. Хрупкие материалы разрушаются по плоскости, перпендикулярной к оси растяжения. Шейка при этом практически не образуется.

Слайд 101

Особенности испытания на сжатие

При испытании на сжатие металлических материалов используются цилиндрические образцы с отношением высоты к диаметру в пределах от единицы до трёх. Для строительных материалов используются кубические образцы с длиной грани 100 или 150 миллиметров.

В процессе испытания образец, как показано на рисунке 1, помещается между плитами испытательной машины и сжимается.

Недостатком испытания на сжатие является трение между плитами испытательной машины и торцевыми поверхностями образцов. Из-за этого при больших деформациях образец приобретает бочкообразную форму, как показано на рисунке 2. В результате характеристики прочности получаются существенно завышенными, и их нельзя использовать в расчётах на прочность. Чтобы устранить влияние сил трения, применяют смазочные материалы.

Кроме того, испытание на сжатие весьма чувствительно к непараллельности торцевых поверхностей образцов или плит испытательной машины. Это может приводить к искривлению оси образца, как показано на рисунке 3. В этом случае характеристики прочности получаются заниженными. Искривление оси образца наблюдается также при использовании слишком длинных образцов, когда отношение высоты к диаметру образца превышает 3.

Слайд 102

Пластичные и хрупкие материалы

Сравним результаты испытаний на растяжение и сжатие для пластичных и хрупких материалов.

Для пластичных материалов диаграммы испытания до площадки текучести совпадают. Таким образом, можно считать, что пределы текучести при растяжении и сжатии для пластичных материалов равны друг другу.

После площадки текучести диаграммы растяжения и сжатия существенно отличаются. На диаграмме сжатия наблюдается резкий рост напряжения. Довести до разрушения образцы из пластичных материалов при сжатии не удаётся, так как они просто сплющиваются, приобретая бочкообразную форму. Площадь сечения образца при этом растёт, что и вызывает рост сжимающей силы. Из-за того, что разрушение не происходит, нельзя определить предел прочности и характеристики пластичности образца. По этим причинам испытание на сжатие для пластичных материалов применяется очень редко.

Для хрупких материалов диаграмма сжатия подобна диаграмме растяжения. Так же, как и при растяжении, образцы из хрупких материалов при сжатии разрушаются. При этом разрушение происходит путём сдвига одной части образца относительно другой. Плоскость сдвига наклонена к оси сжатия образца. Для металлических материалов, таких как чугун, дюралюминий, образцы перед разрушением приобретают слегка бочкообразную форму.

Разрушение при сжатии хрупких материалов происходит при значительно большем значении напряжения. Например, для серого чугуна расхождение пределов прочности на сжатие $\sigma_{вс}$ [сигма вэ эс] и на растяжение $\sigma_{вр}$ [сигма вэ эр] может достигать четырёх-пяти раз.

Для хрупких материалов испытание на сжатие является основным видом механических испытаний.

Слайд 103

Диаграммы сжатия для древесины

Обычно в сопротивлении материалов рассматриваются изотропные материалы, свойства которых одинаковы во всех направлениях. Прочность древесины зависит от ориентации волокон при испытании, то есть она является анизотропным материалом.

На рисунке представлены диаграммы сжатия древесины вдоль и поперёк волокон.

При сжатии вдоль волокон древесина разрушается путём сдвига по наклонной плоскости. На диаграмме сжатия при этом наблюдается снижение нагрузки. Разрушение может сопровождаться также образованием продольных трещин.

При сжатии поперёк волокон древесина сминается без разрушения. На диаграмме сжатия наблюдается быстрый рост деформации без заметного увеличения напряжений. Характеристики прочности при сжатии вдоль волокон существенно ниже, чем при сжатии поперёк волокон.

Подобное поведение наблюдается и для других волокнистых материалов.

Слайд 104

Допускаемое напряжение

В машиностроении наиболее часто используется метод расчёта на прочность по допускаемым напряжениям. Согласно этому методу максимальное рабочее напряжение, возникающее в опасном сечении и определяемое расчётным способом, не должно превышать допускаемого напряжения.

Величину допускаемого напряжения можно найти как отношение опасного напряжения к коэффициенту запаса. Опасное напряжение определяется по результатам испытания на растяжение или на сжатие. Коэффициент запаса представляет собой некое число, большее единицы.

Для пластичных материалов опасным напряжением принято считать предел текучести. Это вызвано тем, что в случае превышения предела текучести возникают пластические деформации, которые могут нарушить работу конструкции или машины. Поскольку предел текучести при растяжении и сжатии для пластичных материалов одинаков, одинаковы и допускаемые напряжения.

Для хрупких материалов опасным напряжением является предел прочности. Так как пределы прочности при растяжении и сжатии для хрупких материалов различны, отличаются и допускаемые напряжения: хрупкие материалы лучше сопротивляются сжатию, чем растяжению.

Существует также группа материалов, которые способны при растяжении воспринимать большие нагрузки, чем при сжатии. Это в основном волокнистые материалы, а из металлов к этой группе относится магний.

Коэффициент запаса зависит от многих факторов. Для хрупких материалов его величина всегда больше, чем для пластичных. Из других факторов можно упомянуть неоднородность материала, неточность составления расчётной схемы и неточность расчётных формул, реальные условия работы конструкции, а также её долговечность и значимость.

Слайд 105

Влияние предварительного нагружения

Рассмотрим влияние на механические характеристики материалов предварительного нагружения.

Возьмём два одинаковых образца из малоуглеродистой стали. Один из них подвергнем растяжению до разрыва. Диаграмма растяжения этого образца показана на рисунке 1. Второй образец нагрузим до точки G [же], находящейся выше предела текучести, а затем снимем нагрузку. Разгрузка будет происходить по прямой линии GO1 [же о один]. Если теперь повторно испытать второй образец до разрыва, то диаграмма растяжения пойдёт по пути O1GK [о один же ка], как это показано на рисунке 2.

Сравнивая рисунки 1 и 2, видно, что в результате предварительного нагружения повышаются прочностные свойства – предел текучести σт [сигма тэ], но снижаются пластические – относительное удлинение после разрыва δ [дельта]. Это явление называется наклёпом или деформационным упрочнением.

В некоторых случаях наклёп создают специально, например, для упрочнения тросов грузоподъёмных машин, проводов, арматуры железобетона. В других случаях наклёп является вредным явлением. Например, при обработке металлов давлением или резанием, когда материал охрупчивается и становится склонным к образованию трещин.

Наклёп можно частично или полностью устранить с помощью термической обработки.

При сжатии нагружение выше предела текучести так же, как и при растяжении, вызывает явление наклёпа. Однако небольшой наклёп, вызванный растяжением, снижает пределы пропорциональности и текучести при сжатии. То же самое справедливо и при растяжении после предварительного сжатия. Это явление называется эффектом Бауши́нгера.

Если рассматривать диаграмму растяжения при большом разрешении по оси деформаций, то станет заметно, что линии разгрузки GO1 [же о один] и нагрузки O1G [о один же] не совпадают друг с другом, а образуют петлю. Это явление называется гистере́зисом. Площадь петли гистерезиса характеризует ту часть энергии деформации, которая рассеивается в виде тепловой энергии. При многократном повторении нагружения и разгрузки, например, при свободных колебаниях потери энергии становятся значительными. Поэтому колебательный процесс постепенно затухает.

При анализе диаграмм растяжения и сжатия явлением гистерезиса пренебрегают.

Слайд 106

Влияние скорости деформации

Нормальными условиями при проведении механических испытаний считаются температура 20ºС и скорость растяжения порядка 10 мм/мин [миллиметров в минуту]. Условия эксплуатации реальных конструкций могут существенно отличаться от указанных.

Рассмотрим поведение малоуглеродистой стали при разных скоростях деформации.

Сравнение диаграмм растяжения показывает, что при быстром нагружении предел текучести и предел прочности становятся выше, а относительное удлинение после разрыва снижается. Это объясняется тем, что при быстром нагружении пластические деформации не успевают полностью развиться. В результате пластичный материал по свойствам приближается к хрупкому.

Модуль Юнга при изменении скорости деформации практически не изменяется.

Слайд 107

Влияние на механические характеристики температуры

На графиках представлены зависимости механических характеристик от температуры для углеродистой стали.

Видно, что повышение температуры приводит к снижению величины предела текучести σт [сигма тэ] и модуля Юнга E. Это можно объяснить тем, что при нагреве увеличивается расстояние между атомами и соответственно ослабевают силы межатомного взаимодействия.

При температуре около 250ºС на поверхности углеродистых сталей образуется окалина. В результате происходит резкое снижение относительного удлинения после разрыва δ [дельта] и повышение предела прочности σв [сигма вэ]. В этом отношении углеродистые стали уникальны. Для легированных сталей и цветных металлов при нагреве наблюдается монотонное возрастание пластических свойств и снижение прочностных свойств.

При отрицательных температурах углеродистая сталь становится хрупкой. Это явление называется хладноломкостью.

Слайд 108

Влияние длительности нагружения

Если материал испытывает длительное силовое воздействие, то возникает явление, называемое ползучестью. Под ползучестью понимается рост пластической деформации во времени при постоянном напряжении.

Существенное влияние на процесс ползучести оказывает величина действующего напряжения и температура. Повышение и того, и другого фактора приводит к увеличению скорости ползучести. От этих двух факторов зависит, прекратится ли с течением времени рост деформаций ползучести или этот процесс продолжится до разрушения материала. Первому случаю соответствует кривая ползучести 1, второму – кривая 2.

Для некоторых материалов, например, для свинца, бетона, древесины, ползучесть наблюдается при комнатной температуре. Для сталей ползучесть становится заметной только при повышенных температурах. В таких условиях работают лопатки турбин, тепловыделяющие элементы атомных реакторов.

Ползучести сопутствует явление релаксации напряжений – постепенное снижение напряжения при постоянной деформации. При повышенных температурах напряжение может убывать практически до нуля. Это явление особенно характерно для болтовых соединений. Именно из-за релаксации напряжений болты нужно периодически подтягивать.

Явление релаксации напряжений можно объяснить следующим образом. Полная деформация состоит из двух частей – упругой и пластической. Рост пластической деформации в результате ползучести вызывает уменьшение доли упругой деформации. А это, в соответствии с законом Гука, приводит к снижению напряжений.

Слайд 109

Схематизация диаграмм испытания

В сопротивлении материалов используют три типа схематизации диаграмм испытания.

При расчёте по допускаемым напряжениям используется модель идеально упругого материала. При этом предполагается, что материал работает в упругой стадии, а затем происходит его разрушение.

В случае использования метода расчёта по разрушающим нагрузкам применяется модель идеально упруго-пластичного материала. В соответствии с этой моделью материал до предела текучести ведёт себя упруго, а при его достижении начинается неограниченная площадка текучести.

Ещё ближе к реальному материалу стоит модель идеально упругого упрочняющегося материала. Здесь после окончания упругой стадии следует стадия упрочнения, которая завершается разрушением.

Слайд 110

Напряжения на наклонных площадках

Рассмотрим стержень, нагруженный растягивающими силами. Обозначим площадь поперечного сечения A. Определим величины напряжений в сечении, наклонённом к поперечному сечению под углом α [альфа]. Площадь наклонного сечения можно определить в соответствии с выражением (3.11).

Напомним, что в поперечном сечении при растяжении-сжатии возникает только один внутренний силовой фактор – продольная сила N [эн].

В наклонном сечении возникает внутренняя сила R [эр], такая же по величине и по направлению, как и сила N [эн]. Разложим силу R [эр] на две составляющие, по направлениям осей n [эн] и t [тэ]. Получим величины внутренних силовых факторов на наклонной площадке: продольную силу $N\alpha$ [эн альфа] и поперечную силу $Q\alpha$ [ку альфа]. Их значения определяются по формулам (3.12).

Таким образом, на наклонной площадке возникают нормальные и касательные напряжения, величины которых определяются по формулам (3.13).

Исследуем напряжённое состояние при растяжении-сжатии. Для этого вычислим, пользуясь выражениями (3.13), значения напряжений для трёх значений угла α [альфа]: 0, 45^o и 90^o.

Анализируя результаты расчёта, можно сделать следующие выводы:

1. Максимальное нормальное напряжение возникает в поперечных сечениях.
2. Максимальное касательное напряжение возникает на площадках, наклонённых под углом 45 к оси растяжения.
3. Продольные волокна стержня не давят друг на друга в направлении осей поперечного сечения.

На основе этих выводов можно объяснить особенности деформации и разрушения материалов при испытаниях на растяжение. Так, пластическая деформация на начальной стадии, связанной с образованием полос Чернова-Людерса, а также разрушение пластических материалов происходят по плоскостям действия максимальных касательных напряжений. Для хрупких материалов сдвиговый механизм деформации затруднён, поэтому их разрушение происходит по плоскости действия максимальных нормальных напряжений.

Слайд 111

Задача

Рассмотрим пример решения задачи.

Задан ступенчатый стержень, работающий на растяжение-сжатие. Известно соотношение площадей сечения на разных участках. Материал стержня – сталь Ст3 [эст тэ три], для которой известны величина предела текучести и модуль Юнга. Заданы коэффициент запаса по текучести и формула для расчёта допускаемого перемещения.

Требуется:

- определить требуемую величину площади поперечного сечения;
- выполнить проверку на жёсткость;
- спроектировать равнопрочный стержень.

Слайд 112

Построение эпюры продольной силы

Выделим характерные сечения стержня. Напомним, что при построении эпюры продольной силы ими являются начало и конец стержня, точки приложения сосредоточенных сил, начало и конец распределённой нагрузки. Поскольку нам придётся строить эпюру нормальных напряжений, к этому перечню следует добавить точки, в которых происходит изменение площади поперечного сечения. Обозначим характерные сечения цифрами 0, 1, 2, 3.

Проведём базовую линию эпюры параллельно оси стержня. Примем положительное направление слева от базы, а отрицательное – справа.

Выберем направление построение эпюры от свободного конца к заделке. В сечении «3» приложена сосредоточенная сила F1 [эф один], равная 20 кН [двадцати килоньютонам], сжимающая стержень. На эпюре от базы делаем скачок на 20 кН [килоньютонов] вправо от базы.

На участке между сечениями «3» и «2» действует растягивающая распределённая нагрузка интенсивностью 20 кН/м [килоньютонов на метр]. Находим её равнодействующую. Для этого умножим интенсивность на длину участка: $20 \cdot 0{,}5 = 10$кН [двадцать на ноль целых пять десятых равно десять килоньютонов]. Прибавляем эту величину к полученному ранее значению на эпюре, то есть к -20 кН [минус двадцати килоньютонам]. Получаем значение продольной силы в конце участка, равное -10 кН [минус десять килоньютонов].

В сечении «2» приложена сжимающая сила F2 [эф два] величиной 15 кН [пятнадцать килоньютонов].

На эпюре делаем скачок от -10 кН [минус десяти килоньютонов] на 15кН [пятнадцать килоньютонов] в отрицательную сторону. Получаем -25 кН [минус двадцать пять килоньютонов].

Участок между сечениями «2» и «1» пустой, ничем не нагруженный. На эпюре проводим линию, параллельную базе, на уровне -25 кН [минус двадцать пять килоньютонов].

В сечении «1» приложена растягивающая сила F3 [эф три], равная 40 кН [сорока килоньютонам]. На эпюре делаем скачок от -25кН [минус 25 килоньютонов] в положительную сторону, то есть вправо на 40 кН [сорок килоньютонов]. Получаем 15 кН [пятнадцать килоньютонов].

Участок между сечениями «1» и «0» пустой, без распределённой нагрузки. На эпюре проводим линию, параллельную базе, на уровне 15 кН [пятнадцати килоньютонов].

В сечении «0» делаем скачок до базы, замыкая эпюру. Этот последний скачок вызван действием силы реакции в заделке.

Внутри поля эпюры ставим знаки. Штрихуем эпюру линиями, перпендикулярными базе.

Слайд 113

Построение эпюры напряжений

Вычислим нормальные напряжения в характерных сечениях на выделенных участках стержня. Так как площадь по условию задачи неизвестна, значения напряжений будем определять в общем виде, в долях параметра А.

Во всех сечениях участка 0-1 [ноль один] в силу постоянства значения продольной силы и площади поперечного сечения нормальное напряжение будет одинаковым. Берём с эпюры N [эн] значение продольной силы на этом участке, равное 15 кН [пятнадцати килоньютонам] и делим на площадь поперечного сечения А.

На участке 1-2 [один два] напряжение также постоянно по величине. Берём значение продольной силы -25 кН [минус двадцать пять килоньютонов], делим его на площадь поперечного сечения 0,5А [ноль целых пять десятых а].

На участке 2-3 [два три] продольная сила меняется по линейному закону. Соответственным образом будет вести себя и напряжение. Рассчитаем для этого участка два значения напряжения. Для сечения «2» берём с эпюры N значение -10 кН [минус десять килоньютонов], для сечения «№» -20 кН [минус двадцать килоньютонов]. Оба значения делим на площадь А.

По полученным значениям строим эпюру напряжений, откладывая их от базы. При построении нужно обратить внимание на следующее. Во-первых, знак напряжения должен совпадать со знаком продольной силы. Во-вторых, на каждом участке на обеих эпюрах должен совпадать характер прямолинейной зависимости.

Слайд 114

Расчёт на прочность

Выполним расчёт на прочность. Подставим в условие прочности максимальное по модулю напряжение 50 кН/А [пятьдесят килоньютонов делённое на А]. Из полученного неравенства выражаем интересующую нас величину площади поперечного сечения А.

Чтобы вычислить площадь, не хватает значения допускаемого напряжения. Найдём его в соответствии с формулой (3.9), разделив величину предела текучести на коэффициент запаса.

Наконец, вычисляем необходимую величину площади поперечного сечения. При этом, заменим знак неравенства на равенство, а площадь А заменим на [А] [а в квадратных скобках], что означает в данном случае минимально необходимую величину.

Слайд 115

Определение удлинений участков

Рассчитаем удлинения участков стержня. Для участков 0-1 [ноль один] и 1-2 [один два] с постоянным значением продольной силы берём с эпюры N значение продольной силы, умножаем на длину участка и делим на модуль Юнга и на площадь поперечного сечения. Удобно вычислить удлинения перемещений в общем виде, не раскрывая знаменателя ЕА.

На участке 2-3 [два три] продольная сила меняется по линейному закону, и удлинение определяется по интегральной формуле. Для её составления нужно записать закон изменения продольной силы по длине участка. Примем нулевое значение координаты z [зет] в сечении «2». Тогда начальное значение продольной силы берём с эпюры в этом сечении, то есть -10 кН [минус десять килоньютонов]. От этого значения эпюра идёт в отрицательную область значений, поэтому из -10 [минус десяти] вычитаем произведение интенсивности распределённой нагрузки на координату z [зет]. Полученный закон подставляем под знак интеграла и вычисляем удлинение участка.

Слайд 116

Определение перемещений характерных сечений

Определим перемещения характерных сечений стержня. Перемещение закреплённого сечения «0» примем равным нулю. Далее последовательно к перемещению предыдущего сечения каждый раз прибавляем удлинение участка между сечениями.

По полученным значениям строим эпюру перемещений. Для этого на эпюре от базовой линии откладываем вычисленные значения перемещений. Затем полученные точки соединяем линиями. На участках без распределённой нагрузки 0-1 и 1-2 проводим прямые линии. На участке с распределённой нагрузкой 2-3 проводим параболу. Направление выпуклости параболы можно определить следующим образом. Если распределённая нагрузка действует на растяжение, то выпуклость направлена в положительную сторону, если на сжатие – то в отрицательную. В нашем случае распределённая нагрузка направлена от заделки, то есть действует на растяжение. Поэтому выпуклость параболы направляем в сторону положительных значений перемещений, в нашем случае вправо.

Слайд 117

Проверка на жёсткость

Проведём проверку жёсткости.

Вычислим максимальное перемещение. Для этого возьмём с эпюры перемещений наибольшую по модулю величину, подставим значение модуля Юнга и рассчитанное значение площади поперечного сечения.

Вычислим допускаемое перемещение согласно заданной по условию задачи формуле. Видно, что величина максимального перемещения меньше допускаемого, следовательно, условие жёсткости выполняется.

Слайд 118

Расчёт равнопрочного стержня

Спроектируем стержень равного сопротивления. У такого стержня напряжение на всех участках одинаково по абсолютной величине и равно допускаемому значению. Подставим в формулу для напряжений площадь круга, выразив её через диаметр сечения. Получим формулу для диаметров сечения равнопрочного стержня.

Для участков 0-1 и 1-2 значения продольной силы постоянны по длине участка. Поэтому стержень на этих участках имеет цилиндрическую форму. Подставляем в полученную формулу значения продольной силы с эпюры и получаем значения диаметров.

На участке 2-3 в силу того, что продольная сила носит переменный характер, для осуществления условия равной прочности форма участка должна быть криволинейной выпуклой. Для упрощения технологии изготовления стержня примем цилиндрическую форму участка, а диаметр рассчитаем, подставляя в полученную ранее формулу максимальное значение продольной силы на данном участке.

По полученным значениям диаметров построим схему стержня равного сопротивления.

Тема 4 Геометрические характеристики плоских сечений

Слайд 119

Классификация геометрических характеристик

Знание геометрических характеристик плоских сечений нам будет необходимо в дальнейшем при изучении более сложных видов деформации. Рассмотрение геометрических характеристик начнем с наиболее простых из них.

Для этого рассмотрим произвольную плоскую фигуру площадью А в системе координат xy [икс игрек]. Выделим в области фигуры бесконечно малую по величине площадку dA [дэ а] с координатами x и y [икс и игрек]. Тогда площадь фигуры определится формулой (4.1) интегралом по площади А от dA [дэ а]. В системе Си площадь измеряется в метрах в квадрате.

На порядок выше по сравнению с площадью является такая геометрическая характеристика, как статический момент площади.

Статическим моментом относительно оси x [икс] называется интеграл по площади от произведения величины площадки dA [дэ а] на расстояние y [игрек] от нее до оси x [икс], формула (4.2).

Статическим моментом относительно оси y [игрек] называется интеграл по площади от произведения величины площадки dA [дэ а] на расстояние x [икс] от нее до оси y [игрек], формула (4.3).

Размерность статических моментов в системе Си метры в кубе. Величина статического момента может быть как положительной, так и отрицательной.

К статическим моментам может быть применена теорема о моменте равнодействующей, известной из курса теоретической механики. То есть, если известно положение точки центра тяжести фигуры в системе координат xy [икс игрек], то статические моменты можно определить величиной произведения площади фигуры на соответствующую координату точки центра тяжести формулы (4.4).

Отсюда, во-первых, следует, что статические моменты относительно осей, проходящих через центр тяжести фигуры, равны нулю. А, во-вторых, полученные формулы (4.4) можно использовать для решения задачи об определении положения центра тяжести сложных фигур, которая нередко является составляющей частью при оценке прочности и жесткости конструкций. Поэтому рассмотрим алгоритм решения такой задачи.

Слайд 120

Алгоритм определения координат ЦТ сложной фигуры

Любую сложную фигуру необходимо разделить на простые фигуры с известным положением их точек центров тяжести.

Затем выбрать вспомогательную систему координат xy [икс игрек] для того, чтобы в ней определить координаты точек центров тяжести простых фигур. Для рациональности решения рекомендуется вспомогательные оси совместить с центральными осями одной из простых фигур. Лучше с той, которая располагается в нижней части общей фигуры. Тогда координаты точки центра тяжести этой фигуры будут равны нулю.

Затем необходимо определить статические моменты инерции простых фигур относительно осей вспомогательной системе координат по формулам (4.4).

Если центр тяжести сложной фигуры обозначить буквой C [цэ], то координата yC [игрек цэ] будет определяться отношением алгебраической суммы статических моментов простых фигур относительно вспомогательной оси x [икс] к сумме их площадей. Соответственно координата xC [икс цэ] может быть найдена, как отношение алгебраической суммы статических моментов простых фигур относительно вспомогательной оси y [игрек] к сумме их площадей.

Откладывая от вспомогательных осей xy [икс игрек] величины найденных координат yC [игрек цэ] и xC [икс цэ] с учетом их знаков, на их пересечении получим точку C [цэ] – центр тяжести сложной фигуры.

Слайд 121

Задача об определении положения центра тяжести

На основании разобранного алгоритма рассмотрим пример. Пусть дана фигура в виде тавра с заданными размерами в долях от характерного размера «а». Определим положение точки центра тяжести «С» этой фигуры.

Перед началом решения проанализируем особенности данной фигуры. Очевидно, что она имеет вертикальную ось симметрии. Это означает, что центр тяжести должен находиться на ней. Значит, нам нужно будет найти только положение этой точки на вертикальной оси. Проведем ось симметрии и обозначим ее y [игрек]. Задача будет сводиться к определению только одной координаты yC [игрек цэ].

1. Разделим фигуру на два прямоугольника с центрами тяжести CI [цэ один] и CII [цэ два].
2. Выберем вспомогательную систему координат, совместив ее с центральными осями нижнего прямоугольника $x_{C_{II}}$y [икс цэ два игрек].
3. Определим статические моменты каждого прямоугольника относительно вспомогательной оси $x_{C_{II}}$ [икс цэ два]. Статический момент первого прямоугольника будет равен произведению его площади равной 12a2 [двенадцать а в квадрате] на расстояние от точки CI до точки CII. Из рисунка следует, что это расстояние равно 4a [четыре а]. Статический момент второго прямоугольника относительно оси $x_{C_{II}}$[икс цэ два] равен нулю, так как это его центральная ось.
4. Воспользуемся формулой для определения координаты yC [игрек цэ], в результате вычисления по которой получим величину 1,71a [одну целую семьдесят одну сотую а]. Отложим полученную координату от оси $x_{C_{II}}$ [икс цэ два] вверх по оси y [игрек], так как значение получено со знаком плюс. Это и будет положение точки центра тяжести «С» [цэ] данной фигуры.

Слайд 122

Классификация геометрических характеристик

Следующая группа геометрических характеристик – это моменты инерции. Характеристики еще более высокого уровня, чем статические моменты площадей.

Для их определения так же рассмотрим плоскую фигуру произвольной формы в системе декартовых координат, на которой выделим элементарную площадку dA [дэ а]. Добавим к координатам x и y [икс и игрек] этой площадки координату в виде радиуса - вектора ρ [ро], который соединяет центр системы координат с площадкой dA [дэ а].

Моменты инерции относительно осей x и y [икс и игрек] представляют собой интегралы по площади от произведения квадрата расстояния от dA [дэ а] до соответствующей оси на величину площадки dA [дэ а]. Их называют осевыми моментами инерции, формула (4.5).

Центробежным моментом инерции называется интеграл по площади от произведения координат x и y [икс и игрек] на величину площадки dA [дэ а], формула (4.6).

Полярный момент инерции представляет собой интеграл по площади от произведения квадрата радиуса – вектора ρ [ро] на величину площадки dA [дэ а], формула (4.7).

В силу того, что квадрат радиуса – вектора ρ [ро] равен сумме квадратов координат x и y [икс и игрек], полярный момент инерции равен сумме осевых, формула (4.8).

Важной геометрической характеристикой являются радиусы инерции относительно осей x и y [икс и игрек]. Их можно определить как корень квадратный из отношения соответствующего осевого момента инерции к площади фигуры по формулам (4.9).

Слайд 123

Теоремы о моментах инерции

Рассмотрим теоремы о свойствах моментов инерции. Одним из них является свойство увеличиваться при переходе от центральных осей фигуры к параллельным осям. Центральными осями называют оси, проходящие через точку центра тяжести фигуры.

Для иллюстрации этого свойства примем за центральные оси, оси x и y [икс и игрек]. Проведем параллельно им оси x1y1 [икс один игрек один]. Расстояние между осями обозначим a и b. В центральной системе координат элементарная площадка dA [дэ а] имеет координаты x и y [икс и игрек], а в параллельной ей – координаты x1 и y1 [икс один и игрек один]. Выразим координаты x1, y1 [икс один игрек один] через x, y [икс игрек] и расстояния a и b, формулы (4.10).

Для примера выведем формулу для момента инерции относительно оси x1 [икс один]. Расстояние y1 [игрек один] заменим через сумму y [игрек] и a. Раскладывая формулу квадрата суммы y [игрек] и a получим три слагаемых в правой части формулы (4.11). Интеграл в среднем слагаемом представляет собой статический момент площади относительно центральной оси x [икс], который на основании известного нам свойства равен нулю. Отсюда момент инерции относительно оси x1 [икс один] равен моменту инерции относительно центральной оси x [икс] увеличенному на квадрат расстояния между осями, умноженному на площадь данной фигуры, формула (4.12).

Применим тот же прием вывода формулы для момента инерции относительно оси y1 [игрек один] и для центробежного момента инерции.

Получим идентичный эффект для момента инерции относительно оси y1 [игрек один] тому, что получили для оси x1 [икс один], формула (4.13). А центробежный момент инерции относительно осей параллельных центральным становится больше на величину равную произведению расстояний между осями a и b на площадь фигуры, формула (4.14).

Используем рассмотренную теорему на примере определения моментов инерции для простых фигур.

Слайд 124

Вычисление моментов инерции простых фигур

Первой фигурой пусть будет прямоугольник с основанием, равным b [бэ] и высотой h [аш]. Зададим систему координат x1y1 [икс один игрек один], связанную со сторонами прямоугольника, и систему xy [икс игрек], проведенную через точку центра тяжести и совпадающую с осями симметрии.

Сначала определим моменты инерции прямоугольника относительно осей x1 и y1. Для определения момента инерции относительно оси x1 [икс один] выделим на расстоянии y1 [игрек один] от оси x1 [икс один] элементарную площадку dA высотой dy1 [дэ игрек один] и шириной, равной ширине прямоугольника b [бэ]. И запишем выражение для момента инерции в соответствие с определением, как интеграл по площади от произведения квадрата расстояния y1 [игрек один] на величину площадки dA [дэ а]. Сделаем замену площадки dA [дэ а] на произведение основания b [бэ] на высоту dy1 [дэ игрек один]. Пределы интегрирования по площади A сменим на пределы интегрирования по высоте h [аш]. В результате получим момент инерции прямоугольника относительно оси x1 [икс один].

Аналогичные рассуждения позволяют получить выражение для момента инерции относительно оси y1 [игрек один].

Моменты инерции относительно центральных осей x и y определим, пользуясь теоремой о моментах инерции относительно осей, параллельных центральным. Однако в данном случае мы будем делать параллельный переход от осей параллельных центральным к центральным осям. Поэтому для получения момента инерции относительно оси x [икс] вычтем из момента инерции относительно оси x1 [икс один] квадрат расстояния между осями $\frac{h}{2}$

[аш деленое на два], умножив его на площадь прямоугольника, формула (4.15).

Применим аналогичный прием для определения момента инерции относительно оси y [игрек] и получим формулу(4.16).

Слайд 125

Вычисление моментов инерции простых фигур

В качестве второй фигуры рассмотрим прямоугольный треугольник с высотой h [аш] и основанием b [бэ]. Оси x1y1 [икс один игрек один] совместим со сторонами треугольника, а систему координат xy [икс игрек] поместим в точку центра тяжести треугольника. Зная, что центр тяжести треугольника находится в точке пересечения медиан и делит высоту на части одна треть и две трети, становится очевидным, что расстояние между осями x [икс] и x1 [икс один] будет h/3 [аш деленое на три]. А между осями y [игрек] и y1 [игрек один] b/3 [бэ деленое на три].

Определим момент инерции относительно оси x1 [икс один]. Для этого выделим на расстоянии y1 [игрек один] от оси x1 [икс один] элементарную площадку dA [дэ а] высотой dy1 [дэ игрек один]. Выразим ширину элементарной площадки b_{y_1} [вэ игрек один] из подобия треугольников, формула (4.17).

Запишем выражение для момента инерции в соответствие с определением, как интеграл по площади от произведения квадрата расстояния y1 [игрек один] на величину площадки dA [дэ а]. Сделаем замену площадки dA [дэ а] на произведение основания b_{y1}[вэ игрек один] на высоту dy1 [дэ игрек один]. Пределы интегрирования по площади A сменим на пределы интегрирования по высоте h [аш]. В результате получим момент инерции прямоугольника относительно оси x1 [икс один], формула (4.18).

Аналогичные рассуждения позволяют получить выражение для момента инерции относительно оси y1 [игрек один].

Моменты инерции относительно центральных осей x и y определим, пользуясь теоремой о моментах инерции относительно осей, параллельных центральным. Однако в данном случае мы будем делать параллельный переход от осей параллельных центральным к центральным осям. Поэтому для получения момента инерции относительно оси x [икс] вычтем из момента инерции относительно оси x1 [икс один] квадрат расстояния между осями h/3 [аш деленое на три], умножив его на площадь треугольника. Получим формулу (4.19) для центрального момента инерции треугольника относительно оси x [икс].

Применим аналогичный прием для определения момента инерции относительно оси y [игрек] и получим формулу (4.20).

Слайд 126

Теоремы о моментах инерции

Рассмотрим второе свойство моментов инерции свойство изменяться при повороте системы координат. Для этого проведем систему координат x1y1 [икс один игрек один] повернутую по отношению к исходной системе xy [икс игрек] на некоторый угол α [альфа]. Покажем координаты элементарной площадки dA [дэ а] в обеих системах координат. Выразим координаты x1 и y1 [икс один и игрек один] через x, y [икс игрек] и угол α [альфа]. Получим выражения (4.21). В формулы для осевых моментов инерции вместо координат x1 и y1 подставим полученные для них выражения (4.21). Раскладывая формулы квадрата разности и квадрата суммы, полученные под интегралами, придем к выражениям (4.22) для моментов инерции относительно осей повернутой системы координат через моменты инерции относительно исходной. Примечательно то, что осевые моменты инерции относительно повернутой системы координат зависят не только от осевых моментов инерции в исходной системе, но и от центробежного момента инерции.

Запишем выражение для центробежного момента инерции относительно осей x1y1 [икс один игрек один], заменяя координаты x1 и y1 [икс один игрек один] по формулам (4.21).

Итак, мы получили выражения (4.22) и (4.23) для моментов инерции в повернутой системе координат, которые будут использоваться нами при дальнейшем рассмотрении геометрических характеристик плоских фигур.

Слайд 127

Свойства моментов инерции

И последнее свойство.

Если дана сложная по форме фигура, состоящая из нескольких простых, то ее моменты инерции относительно осей заданной системы координат могут быть определены путем сложения моментов инерции простых фигур относительно тех же осей, формулы (4.24).

Слайд 128

Главные оси и главные моменты инерции

Знания о моментах инерции, позволяют обосновать существование системы координат для плоского сечения, обладающей особыми свойствами. Так, если взять точку центра тяжести фигуры за начало прямоугольной плоской системы координат и начать поворачивать эту систему относительно данной точки. Окажется, что можно найти такое ее положение, при котором центробежный момент инерции фигуры будет равен нулю. Такая система координат называется главной центральной.

Положение главной центральной системы координат можно определить, приравнивая нулю выражение для центробежного момента инерции относительно повернутых осей x1y1 [икс один игрек один]. Оттуда получаем тангенс двойного угла α [альфа] по формуле (4.25).

Особым свойством главных осей является то, что осевые моменты инерции относительно них принимают экстремальные значения: один из них имеет минимальную величину, а другой максимальную.

Если хотя бы одна из осей координат, в которых рассматривается плоская фигура, является осью ее симметрии, то такая система обязательно является главной, так как центробежный момент инерции в этом случае равен нулю.

Если два главных центральных момента инерции сечения равны между собой, то у этого сечения любая центральная ось является главной и все главные центральные моменты инерции одинаковы. Это относится к фигурам, которые имеют более двух осей симметрии, например, равносторонний треугольник, квадрат и другие правильные многоугольники, а так же круг и кольцо.

Слайд 129

Геометрические характеристики простейших сечений

В таблице представлены осевые моменты инерции некоторых простых фигур, которые обычно составляют сложные сечения элементов конструкций. Они считаются справочными и используются при расчете геометрических характеристик сложных по форме сечений, которые можно представить как совокупность простых.

Слайд 130

Геометрические характеристики сложного сечения

Рассмотрим на примере решения конкретной задачи применение полученных знаний.

Дано сечение произвольной формы с размерами в долях от характерного размера a. Для данного сечения требуется определить:

1) положение точки центра тяжести;

2) главные центральные моменты инерции.

Слайд 131

Определение положения центра тяжести сечения

Решение первого пункта начнем с деления сложного сечения на простые фигуры. Как вариант, можно выделить три простые фигуры:

1) прямоугольник синего цвета;
2) квадратный вырез красного цвета;
3) полукруг зеленого цвета.

Обозначим точками C1 [цэ один], C2 [цэ два] и C3 [цэ три] центры тяжести этих фигур. Выберем вспомогательную систему координат. Так как данная фигура имеет вертикальную ось симметрии, ось y [игрек] совместим с ней. А за горизонтальную ось примем центральную ось первой фигуры x1 [икс один]. Поскольку центр тяжести сложной фигуры должен находиться на вертикальной оси симметрии, достаточно определить только одну его координату yC [игрек цэ].

Для этого вычислим расстояния y1 [игрек один], y2 [игрек два] и y3 [игрек три] от точек центров тяжести простых фигур до вспомогательной оси x1 [икс один], получив выражения (4.26). Обращаем внимание, что расстояние y3 [игрек три] берем со знаком минус, так как точка C3 [цэ три] находится ниже оси x1 [икс один]. Определим площади простых фигур A1 [а один], A2 [а два] и A3 [а три], получив выражения (4.27).

Следующим этапом определим статические моменты площадей простых фигур относительно вспомогательной оси x1 [икс один], умножив площадь каждой простой фигуры на расстояние от ее центра тяжести до оси x1 [икс один] и получим выражения (4.28). Статический момент третьей фигуры получился со знаком минус в силу отрицательного значения координаты y3 [игрек три].

Применим формулу для определения координаты yC [игрек цэ] и получим величину -1,22a [минус одну целую и двадцать две сотых а]. Отложим это значение в масштабе от оси x1 [икс один] по оси y [игрек] и обозначим полученную точку буквой «C» [цэ]. Мы получили положение центра тяжести сложной фигуры. Через точку «C» [цэ] проведем горизонтальную ось x [икс], которая и является главной центральной осью всего сечения, образуя с осью y [игрек] главную центральную систему координат.

Слайд 132

Моменты инерции простых фигур

Следующим пунктом расчета является определение осевых моментов инерции простых фигур относительно их центральных осей x1 [икс один], x2 [икс два], x3 [икс три] и вертикальной оси y [игрек], общей для всех фигур. Для этого воспользуемся справочными формулами для прямоугольника и полукруга и вычислим центральные моменты инерции каждой простой фигуры.

Слайд 133

Главные центральные моменты инерции простых фигур

Для определения моментов инерции простых фигур относительно главной центральной оси x [икс] сложного сечения нам понадобятся расстояния между этой осью и центральными горизонтальными осями каждой простой фигуры. Это отрезки CC1 [цэ цэ один], CC2 [цэ цэ два] и CC3 [цэ цэ три]. Обозначим эти отрезки соответственно буквами b1 [бэ один], b2 [бэ два] и b3 [бэ три] и получим их значения в долях от характерного размера «a».

Воспользуемся свойством осевых моментов инерции, которое проявляется при параллельном переносе осей, и определим моменты инерции для каждой простой фигуры относительно главной центральной оси x [икс] сложного сечения. Для этого прибавим к центральному моменту инерции каждой простой фигуры относительно осей x1 [икс один], x2 [икс два], x3 [икс три] квадрат расстояния b1 [бэ один], b2 [бэ два] и b3 [бэ три], умноженный на площадь соответствующей фигуры. В результате получим три значения моментов инерции для простых фигур в долях от характерного размера «a» в четвертой степени.

Слайд 134

Главные центральные моменты инерции сложного сечения

Последним этапом расчета является определение главных центральных моментов инерции сложного сечения. Воспользуемся еще одним свойством моментов инерции. Осевой момент инерции сложного сечения, состоящего из набора простых, равен алгебраической сумме осевых моментов инерции простых фигур, вычисленных относительно той же самой оси.

Так как вторая простая фигура в виде квадрата является вырезом, его момент инерции включаем в сумму со знаком минус. Таким образом, при вычислении главного центрального момента инерции относительно оси x [икс] момент инерции первой и третьей фигуры взяты со знаком плюс, а второй – со знаком минус. Выражение на слайде (4.29).

Очень просто определяется главный центральный момент инерции всего сечения относительно оси y [игрек], так как она является так же главной центральной осью для каждой простой фигуры. Воспользуемся справочными формулами для момента инерции прямоугольника, квадрата и полукруга относительно оси y [игрек], а затем сложим полученные выражения, ставя знак минус перед формулой для квадрата, с учетом, что это вырез. Обратите внимание на то, что момент инерции полукруга относительно вертикальной оси взят как момент инерции круга поделенный пополам. Получили выражение (4.30).

Решение задачи завершено. Главные центральные моменты инерции мы определили.

Слайд 135

Пример расчета геометрических характеристик

Для закрепления материала рассмотрим еще одну задачу.

Для данного сложного сечения, которое имеет вертикальную ось симметрии, требуется определить главные центральные моменты инерции, если его размеры заданы в долях от характерного размера a.

Слайд 136

Разбиение сложной фигуры и выбор осей координат

Определим положение центра тяжести сложного сечения, который будет находится на вертикальной оси симметрии. Для этого:

- разобьем сложное сечение на простые, его составляющие: прямоугольник (1), два одинаковых треугольника (2) и полукруг (3);
- отметим центры тяжести простейших сечений точками C1 [цэ один], C2 [цэ два], и C3 [цэ три], соответственно. Центр тяжести прямоугольника лежит на пересечении его диагоналей, у треугольников на расстоянии одной трети от основания, а у полукруга он смещен от его основания на расстояние, равное $\frac{4R}{3\pi}$ [четыре эр, деленое на три пи]. Проведем горизонтальные оси x1 [икс один], x2 [икс два], x3 [икс три] через точки C1 [цэ один], C2 [цэ два] и C3 [цэ три], соответственно. Эти оси являются главными центральными осями простых фигур;
- выберем вспомогательную систему координат, относительно которой будем находить положение центра тяжести всего сечения. Свяжем её,

например, с центром тяжести прямоугольника, т.е. x1C1y [икс один цэ один игрек] – вспомогательная система координат;

- определим положение точек C1 [цэ один], C2 [цэ два], и C3 [цэ три] в выбранной системе координат. Обратите внимание, что координата точки C3 [цэ три] отрицательна, так как точка лежит ниже оси x1 [икс один].
- найдем площадь прямоугольника A1 [а один], треугольника A2 и полкруга A3. Выражения на слайде.

Слайд 137

Статические моменты площадей и центр тяжести

Найдем статические моменты прямоугольника, треугольника и полукруга относительно вспомогательной оси x1 [икс один].

Координату точки центра тяжести определяем, поделив алгебраическую сумму статических моментов простых фигур на алгебраическую сумму площадей. Площадь полукруга берем с минусом, так как он является вырезом из прямоугольника.

Отложим по оси y [игрек] от вспомогательной оси x1 [икс один] вверх отрезок, равный 0,79a [ноль целых семьдесят девять сотых а], и нанесем точку C [цэ] – общий центр тяжести сложного сечения. Проведем через точку C [цэ] ось x [икс] – вторую главную центральную ось сложного сечения. Таким образом, мы определили положение главных центральных осей сложного сечения.

Слайд 138

Моменты инерции простых фигур

Теперь можно приступить к определению главных центральных моментов инерции. Сначала определим момент инерции относительно главной центральной оси x [икс].

Для этого вычислим по справочным формулам моменты инерции прямоугольника, треугольника и полукруга относительно их центральных осей x1 [икс один], x2 [икс два], x3 [икс три] соответственно.

Слайд 139

Определение главных центральных моментов инерции

Найдем расстояния между главной центральной осью x [икс] и параллельной ей осью каждой простой фигуры x1 [икс один], x2 [икс два], x3 [икс три] соответственно, т.е. длины отрезков CC1 [цэ цэ один], CC2 [цэ цэ два] и CC3 [цэ цэ три]. Обозначим их буквами b1 [бэ один], b2 [бэ два] и b3 [бэ три] соответственно.

Вычислим моменты инерции простых фигур относительно главной центральной оси x [икс], используя их свойство при параллельном переносе осей. Для этого прибавим к центральному моменту инерции каждой простой фигуры относительно осей x1 [икс один], x2 [икс два], x3 [икс три] квадрат расстояния b1 [бэ один], b2 [бэ два] и b3 [бэ три], умноженный на площадь соответствующей фигуры. В результате получим три значения моментов инерции для простых фигур в долях от характерного размера «а» в четвертой степени.

Сложим найденные моменты инерции алгебраически, согласно теореме о сложении моментов инерции. Таким образом, главный центральный момент инерции сложного сечения относительно оси x [икс] равен 219 а4 [двести девятнадцать а в четвертой степени].

Слайд 140

Определение главных центральных моментов инерции

Найдем теперь главный центральный момент инерции относительно оси y [игрек]. Здесь расчеты будут несколько проще, поскольку центры тяжести прямоугольника и полукруга лежат на этой оси, и она является главной центральной осью, как для этих простых фигур, так и всей сложной. То есть оси y1 [игрек один], y3 [игрек два] и y [игрек] совпадают, а следовательно не нужно применять теорему о параллельном переносе осей.

Однако, центральные оси треугольников y2 [игрек два] удалены от оси y [игрек], значит, нужно определить расстояние между ними. Оно определяется отрезком $C_2'C_2$ [цэ два штрих цэ два]. Обозначим его с2.

По справочным формулам вычислим центральные моменты инерции треугольников относительно осей y2 [игрек два].

Используем свойство моментов инерции при параллельном переносе осей и найдем значения главных центральных моментов треугольников относительно оси y [игрек]. На слайде выражение (4.31).

Складывая алгебраически главные центральные моменты инерции прямоугольника, треугольников и полукруга, определим главный центральный момент инерции сложного сечения относительно оси y [игрек].

Задача решена.

Тема 5 Расчет на прочность и жесткость при изгибе

Слайд 141

Нормальные напряжения при чистом изгибе

Чистым изгибом называется такой вид изгиба, при котором возникает только один внутренний силовой фактор: изгибающий момент.

Для случая чистого изгиба справедлива гипотеза Бернулли: сечения, плоские до приложения внешней силы, остаются такими же и после нагружения, поворачиваясь друг относительно друга на некоторый угол.

Рассмотрим балку, нагруженную двумя симметрично приложенными силами F [эф], представленную на рисунке 1. По построенным эпюрам поперечной силы и изгибающего момента видно, что средний участок балки испытывает чистый изгиб, так как здесь поперечная сила отсутствует, действует только изгибающий момент.

Определим, какие напряжения возникают при чистом изгибе. Для этого рассмотрим три стороны задачи.

Первая статическая сторона задачи. Воспользуемся интегральными уравнениями равновесия (5.1).

Вторая геометрическая сторона задачи. Вырежем из балки в зоне чистого изгиба элемент длиной dz [дэ зет]. После приложения нагрузки он выглядит, как показано на рисунке 2. Здесь ρ [ро] – радиус нейтральной линии. Нейтральной линией называется след нейтрального слоя, разделяющего балку на области растяжения и сжатия. dθ [дэ тетта] – угол поворота сечения. Сама нейтральная линия на рисунке обозначена ab [а бэ], её длина равна dz [дэ зет] – длине выбранного элемента балки.

Выделим волокно a1b1 [а один бэ один] на расстоянии y [игрек] от нейтральной линии. До деформации его длина равнялась ab [а бэ]. Относительное изменение длины этого волокна можно вычислить по формуле (5.2).

Слайд 142

Нормальные напряжения при чистом изгибе

Рассмотрим третью, физическую сторону задачи. Запишем закон Гука в напряжениях и деформациях по формуле (5.3). Подставив выражение (5.2) в формулу (5.3), получим выражение для напряжения (5.4). Далее в интегральное уравнение (5.1) для момента Mx [эм икс] подставим формулу (5.4), получим выражение этого момента в виде (5.5), в котором интеграл представляет собой осевой момент инерции Jx [жи икс]. Тогда справедлива формула (5.6). Преобразовав её к виду (5.7) и подставив в формулу (5.4) получим окончательное выражение (5.8) для вычисления напряжения при чистом изгибе, где y [игрек] – координата произвольного волокна относительно нейтральной линии.

Таким образом, абсолютная величина напряжения тем выше, чем больше расстояние от нейтральной линии.

Очевидно, что максимальное напряжение в этом случае можно вычислить по формуле (5.9), где умах [игрек максимум] – расстояние от нейтральной линии до наиболее удаленной точки сечения. Точки сечения, наиболее удаленные от нейтральной линии, называются опасными точками. В выражении (5.9) отношение осевого момента инерции Jx [жи икс] к расстоянию умах [игрек максимум] называется осевым моментом сопротивления и обозначается Wx [дубль вэ икс]. Момент сопротивления – это геометрическая характеристика, которая зависит от формы и размеров поперечного сечения, а также от положения опасных точек в нем.

Тогда условие прочности при чистом изгибе можно записать в виде (5.10).

Слайд 143

Нормальные напряжения при чистом изгибе

Для определения положения нейтральной линии в области поперечного сечения привлечем два оставшихся интегральных уравнения равновесия (5.1).

В интегральное уравнение с продольной силой N [эн] подставим выражение для напряжения (5.4). Его математическое преобразование показано в формуле (5.11), из которой следует, что статический момент Sx [эс икс] должен быть равен нулю, так как продольная сила в данном случае отсутствует. Это, в свою очередь, означает, что ось x [икс], совпадающая с нейтральной линией, является центральной осью.

В последнее интегральное уравнение равновесия для момента My [эм игрек] также подставим выражение для напряжения (5.4) и математически преобразуем. Это показано в выражении (5.12), из которого следует, что центробежный момент инерции Jxy [жи икс игрек] должен быть равен нулю, так как и My [эм игрек] в данном случае отсутствует. Это означает, что ось x [икс] является главной осью.

Таким образом, нейтральная линия является главной центральной осью поперечного сечения.

Для случая прямоугольного сечения можно утверждать, что его ось симметрии x [икс] является нейтральной линией, если внешние силы действуют по оси y [игрек]. Ось y [игрек] в этом случае называется силовой линией. Вид изгиба, при котором одна из главных центральных осей является силовой линией, а вторая нейтральной линией, называется прямым изгибом.

Таким образом, нормальное напряжение при прямом чистом изгибе по ширине сечения не изменяется, а по высоте сечения изменяется по линейному закону. Причем, оно равно нулю в точках нейтральной линии и принимает максимальное значение в точках, наиболее удаленных от нейтральной линии. Для сравнения отметим, что при деформации растяжения-сжатия напряжение постоянно в любой точке поперечного сечения.

Эпюра распределения нормального напряжения по высоте прямоугольного сечения показана на рисунке.

Слайд 144

Особенности расчета на прочность

При расчете на прочность балок, работающих в условиях изгиба необходимо учитывать, из какого материала они изготовлены: хрупкого или пластичного. Эти два вида материалов по-разному реагируют на напряжения растяжения и сжатия. Рассмотрим особенности расчета для каждого вида материала.

Пластичный материал одинаково сопротивляется напряжениям растяжения и сжатия, поэтому, для конструкций из пластичных материалов допускаемое напряжение принимается единое, и условие прочности записывается в виде (5.13). Для таких материалов рационально использовать симметричные профили, например, прямоугольный или круглый, как показано на рисунке 1. При этом, на эпюре напряжений $\sigma_{\max p}$ [сигма максимум растяжения] равно $\sigma_{\max c}$ [сигма максимуму сжатия]. Для бо́льшей экономичности профили делают полыми. Сечение следует располагать таким образом, чтобы силовой фактор действовал в плоскости максимальной жесткости. На рисунке 2 второй вариант ориентации профиля предпочтительней первого.

Хрупкий материал лучше сопротивляется напряжениям сжатия и хуже напряжениям растяжения, поэтому допускаемые напряжения здесь в зонах растяжения и сжатия разные. Для таких материалов целесообразно использовать несимметричные относительно нейтральной линии профили, например, тавровый, показанный на рисунке 3. Размеры поперечного сечения для таких профилей должны удовлетворять двум условиям прочности: (5.14) и (5.15). Анализируя пропорции для сторон двух подобных треугольников эпюры напряжений для тавра, представленной на рисунке 3, нетрудно выбрать из двух условий прочности (5.14) и (5.15) одно более опасное. Если выполняется условие (5.16), то опасными являются сжатые волокна, и расчет на прочность следует вести по формуле (5.14). Если выполняется условие (5.17), то опасными являются растянутые волокна, и расчет на прочность следует вести по формуле (5.15).

Слайд 145

Алгоритм расчета балок из пластичных материалов

Проведя подробный анализ особенностей расчета на прочность конструкций, изготовленных из пластичных и хрупких материалов, сформулируем теперь четкий порядок действий в виде алгоритмов. Начнем с балок, изготовленных их пластичных материалов.

Итак, чтобы рассчитать на прочность пластичную балку, необходимо:

1. Определить положение опасного сечения балки, построив эпюры поперечной силы Qy [ку игрек] и изгибающего момента Mx [эм икс]. Опасное сечение будет там, где значение изгибающего момента максимально по абсолютной величине.
2. Определить положение опасных точек в опасном сечении. Для этого сначала нужно указать положение нейтральной линии – это главная центральная ось сечения, которая является осью изгиба. Затем определить точки, наиболее удаленные от нейтральной линии. Это и будут опасные точки опасного сечения. Учитывая размеры сечения и положение нейтральной линии, необходимо найти умах [игрек максимум] – расстояние от нейтральной линии до наиболее опасных точек.
3. Определить момент сопротивления Wx [дубль вэ икс], предварительно вычислив главный центральный момент инерции сечения Jx [жи икс].
4. И последнее – подставить все найденные величины в условие прочности для пластичных материалов и решить его, согласно поставленной задаче: либо определить характерный размер сечения, либо найти параметр внешней нагрузки, либо просто провести проверочный расчет.

Слайд 146

Алгоритм прочностного расчета хрупких балок

Теперь сформулируем порядок действий при расчете на прочность балок, изготовленных из хрупких материалов.

1. Начало расчета здесь аналогичное: необходимо построить эпюры поперечной силы Qy [ку игрек] и изгибающего момента Mx [эм икс] и по эпюре Mx [эм икс] определить положение опасного сечения.

2. Для опасного сечения определить положение точки центра тяжести и провести через нее главные центральные оси, одна из которых является силовой линией, а вторая, ей перпендикулярная – нейтральной линией. Относительно нейтральной линии найти главный центральный момент инерции Jx [жи икс].
3. Для решения вопроса о рациональности расположения сечения требуется:
   - определить по эпюре Mx [эм икс] расположение зон растяжения и сжатия в опасном сечении: с какой стороны от базы эпюры расположена ордината максимального момента, с той стороны от нейтральной линии в сечении находится зона сжатия;
   - в зонах растяжения и сжатия опасного сечения найти расстояния y_{MAXp} [игрек максимум растяжения] и y_{MAXc} [игрек максимум сжатия], учитывая размеры сложного сечения и координату точки центра тяжести;
   - установить сечение так, чтобы расстояние y_{MAXc} [игрек максимум сжатия] было больше расстояния y_{MAXp} [игрек максимум растяжения]. Если при заданном положении сечения это соответствие не выполняется, значит сечение расположено не рационально, и его нужно повернуть на 180 градусов.
4. Выбрать наиболее опасное волокно, проведя анализ отношений (5.16) и (5.17), представленных выше.
5. Для более опасного волокна надо записать соответствующее условие прочности и проверить его выполнение или найти из него требуемую величину.

Слайд 147

Касательные напряжения при поперечном изгибе

Изгиб называется поперечным, если кроме изгибающего момента в сечениях элемента конструкции возникает поперечная сила.

От действия изгибающего момента в точках поперечного сечения балки возникают нормальные напряжения σ [сигма], а от действия поперечной силы – касательные напряжения τ [тау]. Исследования показали, что закон изменения касательных напряжений гораздо сложнее, чем нормальных, однако, при этом, наибольшие значения τ [тау] примерно на два порядка меньше, чем наибольшие значения σ [сигма]. Поэтому расчет на прочность при поперечном изгибе чаще всего ведется только по нормальным напряжениям, как и при чистом изгибе.

Тем не менее, необходимо знать, как распределяются касательные напряжения по сечению. Итак, касательные напряжения от действия поперечной силы по ширине сечения не изменяются, а по высоте сечения изменяются по формуле Журавского (5.18). Здесь: S_x^* [эс икс со звездочкой] – статический момент части площади поперечного сечения, отсекаемой на том уровне относительно оси изгиба, где определяется величина касательного напряжения τ [тау]. В формулу также входит Jx [жи икс] – момент инерции всего сечения относительно оси изгиба и ширина поперечного сечения b^* [бэ со звездочкой] того слоя, где определяется касательное напряжение τ [тау].

На рисунке для прямоугольного сечения отсекаемая часть, расположенная на расстоянии у [игрек] от оси изгиба х [икс], выделена штриховкой. Для этой формы сечения формула Журавского имеет вид (5.19), то есть по высоте прямоугольного сечения, касательные напряжения изменяются по квадратичному закону. На рисунке показаны эпюры распределения нормальных и касательных напряжений. Как видно, максимальное значение касательного напряжения в прямоугольном сечении возникает в точках оси изгиба и вычисляется по формуле (5.20).

Для сравнения укажем, что в круглом сечении касательное напряжение по высоте изменяется по кубическому закону, а наибольшее его значение вычисляется по формуле (5.21).

Слайд 148

Пример расчета на прочность при изгибе

Рассмотрим пример расчета на прочность балки на двух шарнирных опорах, изображенной на рисунке 1. Задача формулируется следующим образом.

Двухопорная балка постоянного поперечного сечения нагружена заданной системой внешних сил и изгибающих моментов. Требуется произвести расчет на прочность в двух вариантах.

1. Для данной балки, изготовленной из пластичного материала с допускаемым напряжением, равным 160 мегапаскалей, подобрать из условия прочности минимально допустимые размеры двутаврового, прямоугольного и круглого сечений. Дать заключение о рациональности формы сечения по расходу материала.
2. Для данной балки, изготовленной из хрупкого материала, определить из условия прочности допускаемый характерный размер а [а] сложного поперечного сечения, предварительно решив вопрос о его рациональном положении. Принять допускаемые напряжения, равные: в зоне растяжения 100 мегапаскалей, а в зоне сжатия 150 мегапаскалей. Форма сложного сечения показана на рисунке 2.

Слайд 149

Первая часть расчета: пластичный материал

Рассмотрим первый случай, когда балка изготовлена из пластичного материала.

Построим эпюры поперечной силы Q_y [ку игрек] и изгибающего момента M_x [эм икс]. Для данной балки подробное описание построения эпюр, приведенных на рисунке, было сделано в Теме 2.3, во втором примере.

По эпюре M_x [эм икс] определяем положение опасного сечения – сечение L [эль] наиболее опасно, так как в этом сечении возникает самый большой по абсолютной величине момент, равный 47,06 килоньютонометров.

Запишем условие прочности для опасного сечения в виде (5.22). Отсюда выразим величину допускаемого момента сопротивления Wx [дубль вэ икс] и, подставив значения максимального момента и допускаемого напряжения, найдем его величину. Эти вычисления показаны в выражении (5.23). В формуле (5.24) представлен результат вычислений – величина допускаемого момента сопротивления равна 294 кубическим сантиметрам.

Таким образом, какими бы не были размеры и форма поперечного сечения балки, значение момента сопротивления этого сечения относительно оси изгиба должно быть не меньше допускаемой величины.

Слайд 150

Подбор трех форм сечений

Подберем из условия прочности размеры трех форм сечений: двутаврового, прямоугольного и круглого. Для каждой из трех форм сечений выразим момент сопротивления с геометрической точки зрения, то есть через характерный размер сечения, и, приравняв его к расчетному, равному 294 кубическим сантиметрам, определим характерный размер. Для того, чтобы из трех форм выбрать наиболее рациональную по затратам материала, вместе с размерами будем определять и площадь каждого сечения.

а) Двутавровое сечение. Тонкостенные профили: двутавры, швеллеры, уголки выпускаются промышленностью определенных стандартных размеров. Номер профиля соответствует его высоте, выраженной в сантиметрах. Все характерные размеры таких профилей, а также их геометрические характеристики, в том числе и момент сопротивления W_x, [дубль вэ икс] сведены в таблицы, которые называются «Сортаментом прокатных профилей». Они приводятся в соответствующих ГОСТах, а также в справочниках, учебниках и задачниках по сопротивлению материалов. Нам остается лишь по сортаменту определить номер двутавра, у которого момент сопротивления ближайший больший к расчетному. По сортаменту, взятому из ГОСТа 8239-89, подходит двутавр №24а, у которого момент сопротивления Wx [дубль вэ икс] равен 317 кубических сантиметров, а площадь равна 37,5 квадратных сантиметра. На слайде, в качестве примера, представлен фрагмент сортамента по указанному ГОСТу. Красным цветом выделены данные для двутавра №24а.

Слайд 151

Подбор трех форм сечений

b) Прямоугольное сечение с соотношением сторон h/b [аш к бэ], равным двум. Нейтральная линия прямоугольника – главная центральная ось x [икс]. Расстояние от нейтральной линии до наиболее удаленных точек сечения ymax [игрек максимум] равно половине высоты прямоугольника – h/2 [аш деленное на два]. Тогда, согласно определению, момент сопротивления Wx [дубль вэ икс] можно определить по формуле (5.25). Через размеры прямоугольника он равен bh2/6 [бэ аш в квадрате деленное на шесть]. Учитывая, что $h = 2b$ [аш равно двум бэ], в формуле (5.25) продолжаем преобразовывать момент сопротивления прямоугольника через характерный размер b: он равен 2b3/3 [два бэ в кубе деленное на три]. Приравняв его к расчетному значению, равному 294 кубических сантиметров, находим минимально допустимый размер прямоугольника b [бэ] по формуле (5.26) Таким образом, принимаем значение основания прямоугольника b [бэ], равное 7,6 сантиметра. Тогда его площадь, согласно формуле (5.27), равна 115,5 квадратных сантиметра.

c) Круглое сечение. Здесь все аналогично. Нейтральная линия – ось x [икс], расстояние от нейтральной линии до наиболее удаленных точек сечения ymax [игрек максимум] равно половине диаметра круга – d/2 [дэ деленное на два]. Тогда, согласно определению, момент сопротивления Wx [дубль вэ икс] можно определить по формуле (5.28). Через диаметр круга он равен πd^3 / 32 [пи дэ в кубе деленное на 32]. Приравняв его к расчетному допускаемому значению момента сопротивления, находим допускаемый диаметр круглого сечения d [дэ] по формуле (5.29). Используем найденное значение диаметра для определения площади круглого сечения по формуле (5.30).

Сравнивая площади трех подобранных форм профилей, приходим к выводу, что самым рациональным из них является двутавр, так как его использование обеспечит минимальный вес конструкции.

Слайд 152

Вторая часть расчета: хрупкий материал

Рассмотрим балку из хрупкого материала и подберем из условия прочности характерный размер а заданного сложного сечения, у которого положение центра тяжести и геометрические характеристики были определены в Теме 4.

Нейтральная линия сечения – главная центральная ось x [икс], проходящая через центр тяжести. Она делит всё сечение на две зоны – растянутых и сжатых волокон. Учитывая правило знаков для эпюры изгибающих моментов M_x [эм икс], что она строится на сжатых волокнах, легко определить расположение соответствующих зон в опасном сечении. На эпюре M_x [эм икс] в опасном сечении L [эль] ордината момента, равная 47,06 килоньютонометров, расположена ниже осевой линии, следовательно, в этом сечении снизу от нейтральной линии расположены сжатые волокна, а сверху – растянутые. Определим расстояния от нейтральной линии до наиболее удаленных точек сечения в зонах растяжения и сжатия. В формуле (5.31) показано вычисление расстояния y_{MAXp} [игрек максимум растяжения] от нейтральной линии до наиболее удаленных верхних волокон, расположенных в растянутой зоне. С учетом заданных размеров сложного сечения и найденной в теме 4 координаты точки центра тяжести, оно равно 3,21а [три целых двадцать одна сотая а]. Аналогично, в формуле (5.32) показано вычисление расстояния y_{MAXc} [игрек максимум сжатия] от нейтральной линии до наиболее удаленных нижних волокон, расположенных в сжатой зоне. Оно равно 4,79a [четыре целых, семьдесят девять сотых a].

Решим вопрос о рациональности расположения сечения. Поскольку и допускаемое напряжение в зоне сжатия и расстояние y_{MAXc} [игрек максимум сжатия] больше соответствующих значений в зоне растяжения, то есть одновременно выполняются условия (5.33), значит сечение расположено рационально.

Слайд 153

Вторая часть расчета: хрупкий материал

Определим положение опасного волокна в опасном сечении. Для этого составляем и сравниваем отношение расстояний в зонах сжатия и растяжения с соответствующим отношением допускаемых напряжений. В нашем примере выполняется условие (5.34), следовательно, растянутое волокно более опасно, чем сжатое. Если знак неравенства в условии (5.34) будет обратным, в этом случае сжатое волокно считается более опасным.

Запишем условие прочности для опасного растянутого волокна и подставим в него значения входящих величин. Это действие обозначено (5.35). Здесь значение момента инерции Jx [жи икс], равное 219a4 [двести девятнадцать a в четвертой степени], было найдено для данного сечения в теме 4. Выразим из условия прочности (5.35) допускаемую величину характерного размера сложного сечения a [a]. Математически это представлено выражением (5.36).

Таким образом, минимально допустимое значение характерного размера сложного сечения равно 19 миллиметрам.

Задача решена полностью.

Слайд 154

Перемещения при изгибе

Согласно гипотезе Бернулли поперечные сечения балки при изгибе не искривляются, а лишь вертикально смещаются, поворачиваясь при этом относительно нейтральной линии на некоторый угол. Таким образом, поперечные сечения балки при изгибе получают два вида перемещений: линейное вертикальное перемещение δ [дельта] и угол поворота θ [тетта]. Вертикальное перемещение сечений принято называть прогибом балки.

Осевая линия балки, прямолинейная до приложения изгибных нагрузок, становится криволинейной после их приложения. Функцию изогнутой оси балки или иначе функцию прогибов принято обозначать y(z) [игрек от зет]. Функция углов поворота $\theta(z)$ [тэта от зет] связана с функцией прогибов $y(z)$ [игрек от зет] дифференциальной зависимостью (5.37), из которой можно сделать вывод, что из двух функций перемещений основной является функция прогибов.

Для того, чтобы рассчитать балку на жесткость, необходимо определить её максимальный прогиб $\delta_{\max}$ [дельта максимум] и сравнить его с допускаемой величиной, то есть проверить выполнение условия жесткости (5.38). Допускаемая величина перемещения, заключенная здесь в квадратные скобки, обычно назначается из условий эксплуатации.

Далее рассмотрим методы определения перемещений при изгибе, которые делятся на две группы. К первой относятся методы, позволяющие установить функциональные зависимости y(z) [игрек от зет] и $\theta(z)$ [тета от зет]. Ко второй группе относятся методы определения перемещений в конкретных, наперед заданных сечениях балки.

Слайд 155

Дифференциальное уравнение упругой линии балки

Определим связь функции изогнутой оси балки y(z) [игрек от зет] с её внутренним изгибающим моментом.

Из дифференциальной геометрии известно, что для плоской кривой существует связь между её радиусом кривизны $\rho(z)$ [ро от зет] и самой функцией y(z) [игрек от зет] в виде зависимости (5.39).

Очевидно, что в области упругого деформирования угол наклона касательной к изогнутой оси балки $\theta \to 0$ [тета стремится к нулю], то есть справедливо соотношение (5.40). Тогда в формуле (5.39) величиной производной от перемещения y'^2 [игрек штрих в квадрате] можно пренебречь, и она примет вид (5.41).

С другой стороны, выражение, стоящее в левой части формулы (5.41) связано с внутренним изгибающим моментом Mx [эм икс] формулой (5.42), которая была получена при определении напряжений при чистом изгибе. Приравняв правые части формул (5.41) и (5.42) получим уравнение (5.43), которое называется дифференциальным уравнением изогнутой оси балки.

В это уравнение входит вторая производная функции изогнутой оси балки. Проинтегрировав его один раз, приходим к уравнению (5.44) для углов поворота $\theta(z)$ [тета от зет]. При повторном интегрировании получаем функцию изогнутой оси балки (5.45). Это выражение называется универсальным уравнением изогнутой оси балки. А сам метод определения функций $\theta(z)$ [тета от зет] и y(z) [игрек от зет] называется методом непосредственного интегрирования дифференциального уравнения изогнутой оси балки. В формулах (5.44) и (5.45) постоянные интегрирования C [цэ] и D [дэ] определяются из граничных условий задачи.

Слайд 156

Метод непосредственного интегрирования

Определим методом непосредственного интегрирования вертикальное перемещение среднего сечения S [эс] консольной балки длиной l [эль] при нагружении её сосредоточенной силой F [эф].

Выберем начало координат в незакрепленном сечении балки, направив ось z [зет] к жесткой заделке. Тогда, согласно методу сечений, функция изменения внутреннего изгибающего момента Mx [эм икс] имеет вид (5.46). Подставив её в дифференциальное уравнение (5.43), получим вид этого уравнения непосредственно для заданной балки – (5.47).

Проинтегрировав это уравнение один раз, получим функцию угла поворота сечений балки (5.48). Интегрируя полученное уравнение еще раз, приходим к уравнению упругой линии балки (5.49). Константы интегрирования C [цэ] и D [дэ] найдем из двух граничных условий задачи, а именно: из условий закрепления балки. Левый конец её жестко защемлен, следовательно, в этом сечении угол поворота и вертикальное перемещение равны нулю. Учитывая, что в выбранной системе координата закрепленного сечения z=l [зет равна эль], сформулируем математически граничные условия задачи. Первое: $y'(z=l)=0$ [игрек штрих при зет, равном эль, равен нулю]. Второе: вертикальное перемещение $y(z=l)=0$ [игрек при зет, равном эль, равно нулю].

Подставив первое граничное условие в (5.48), получим уравнение, из которого находим значение постоянной интегрирования C [цэ]. Подставив второе граничное условие и найденное значение C [цэ] в уравнение упругой линии (5.49), находим значение второй постоянной интегрирования D [дэ].

Подставив найденные значения постоянных интегрирования в уравнение (5.49), получим окончательный вид функции перемещений поперечных сечений заданной балки (5.50).

Осталось найти искомое значение вертикального перемещения среднего сечения балки S [эс], подставив его координату z=l/2 [зет, равную эль пополам] в полученную функцию перемещений (5.50).

Таким образом, вертикальное перемещение среднего сечения балки равно $\frac{5Fl^3}{48EJ_x}$ [5 эф эль куб деленное на 48 е жи икс]. Задача решена.

Слайд 157

Потенциальная энергия деформации при изгибе

Прежде чем переходить ко второй группе методов определения перемещений, получим выражение для потенциальной энергии деформации при изгибе.

Рассмотрим на рисунке 1 консольную балку, нагруженную в свободном сечении сосредоточенной парой сил M [эм]. Под действием этой пары сил осевая линия балки изогнется с радиусом кривизны □□[ро]□□а свободное сечение повернется на угол Θ [тета].

Составим уравнение энергетического баланса. Здесь: I [и] – работа внешних сил, приложенных к балке, U [у] – потенциальная энергия деформации, K [ка] – кинетическая энергия.

Для случая статического нагружения кинетическая энергия равна нулю, поэтому потенциальная энергия деформации равна работе внешних сил балки.

Работу внешних сил, графически представленную на рисунке 2, определим по теореме Клапейрона (5.51). Выразив угол Θ [тета] через радиус кривизны осевой линии по формуле (5.52) и используя уже известную нам формулу (5.53), получим выражение (5.54) для работы внешних сил.

Тогда получим, что потенциальная энергия упругой деформации балки при изгибе определяется по формуле (5.55).

Слайд 158

Интеграл Мора для случая изгиба

Из второй группы методов определения перемещений при изгибе рассмотрим метод Мора и его численные приложения. Начнем с основного метода Мора.

Определим перемещение произвольного сечения C [цэ] консольной балки, нагруженной в свободном сечении сосредоточенной силой F [эф]. На рисунке – вариант а) [а].

Приложим в точке C [цэ] фиктивную силу Ф [фи]. Вариант б) на рисунке. Это даст возможность использовать для определения искомого перемещения теорему Кастилиано. Функция внутреннего изгибающего момента с учетом обеих сил имеет вид (5.56), где M1 [эм один] – коэффициент пропорциональности.

Для определения физического смысла коэффициента M1 [эм один] разгрузим балку от внешней силы F [эф], а фиктивную силу Ф [фи] приравняем к единице, получим выражение (5.57).

Таким образом, M1 [эм один] – это внутренний изгибающий момент, возникающий при разгрузке балки от внешних сил и нагружении ее единичной безразмерной силой, приложенной в направлении искомого перемещения.

Запишем выражение для потенциальной энергии деформации с учетом обеих сил в виде (5.58).

Применяя теорему Кастилиано, определим искомое перемещение по формуле (5.59). Так как в исходной системе фиктивная сила отсутствует, приравняем её в этой формуле к нулю. Получим выражение (5.60).

Обобщая рассмотренный случай нагружения на k [ка] рабочих участков, приходим к выражению (5.61), которое называется интегралом Мора для случая изгиба.

Слайд 159

Пример применения Интеграла Мора

Рассмотрим двухопорную балку, нагруженную равномерно распределенной нагрузкой интенсивности q [ку]. Определим прогиб балки в среднем сечении C [цэ] с помощью интеграла Мора.

В силу симметрии нагружения, реакции в опорах будут равны между собой, направлены вверх и равны половине равнодействующей распределенной нагрузки, то есть ql/2 [ку эль пополам]. Построим эпюры внутренних силовых факторов Qy [ку игрек] и Mx [эм икс]. Найдем методом сечений функцию внутреннего изгибающего момента Mx(z) [эм икс от зет] от действия внешних сил. Она имеет вид (5.62).

Разгрузим балку от внешней нагрузки и приложим в сечении C [цэ] в вертикальном направлении фиктивную единичную безразмерную силу. Определим реакции опор. В силу симметрии нагружения реакции будут одинаковыми по величине, равными 1/2 [одной второй] и направлены вверх. Построим от действия этой единичной силы единичную эпюру изгибающих моментов M1 [эм один]. Балка с единичной силой имеет два участка. Выразим методом сечений функцию единичного изгибающего момента

M1(z) [эм один от зет] на левом участке в направлении слева направо. Она имеет вид (5.63). На правом участке в силу симметрии функция M1(z) [эм один от зет] будет точно такой же в направлении справа налево.

Подставим функции грузового и единичного моментов (5.62) и (5.63) в интеграл Мора (5.61). На двух симметричных участках балки обе подинтегральные функции будут симметричные, поэтому пределы интегрирования определяем по длине одного участка – от нуля до l/2 [эль пополам], а результат удваиваем. Вычисление этого интеграла представлено в выражении (5.64).

Таким образом, вертикальное перемещение среднего сечения балки δ_C [дельта цэ] равно $\dfrac{5ql^4}{384EJ_x}$ [5 ку эль в четвертой, деленное на 384 е жи икс].

Слайд 160

Метод Симпсона

Интеграл Мора можно решить и с помощью численных методов. Одним из них является трехточечный метод Симпсона. Рассмотрим его.

В интеграле Мора функция единичного момента M1 [эм один] всегда является линейной, а функция грузового момента M(F) [эм от эф] в общем случае при равномерно распределенной нагрузке является квадратичной параболой. Это показано на рисунке 1. Произведение этих функций, таким образом, в общем случае есть кубическая парабола, интеграл от которой можно вычислить по формуле Симпсона (5.65). Для этого нужно определить значения грузового и единичного моментов в трех точках: на левой границе, в средней точке и на правой границе участка и подставить их в формулу (5.65). Если участков взаимодействия несколько, то, как и в интеграле Мора, формула Симпсона применяется отдельно для каждого участка, а результаты алгебраически складываются.

Рассмотрим вычисление интеграла Мора по методу Симпсона в ранее рассмотренном примере, все необходимые графические данные для которого изображены на рисунке 2. На единичной эпюре моментов два участка, а грузовая эпюра моментов симметрична относительно среднего сечения, поэтому результаты применения формулы Симпсона на обоих участках будут одинаковы. Значения моментов в средней точке левого участка показаны на обеих эпюрах моментов. Вычисление перемещения сечения С [цэ] по формуле Симпсона представлено в формуле (5.66). Результат тот же самый.

Слайд 161

Способ Верещагина

Рассмотрим второй способ вычисления интеграла Мора, способ Верещагина.

Пусть на участке длиной l [эль] грузовая эпюра ограничена функцией $f_1(z)$ [эф один от зет], единичная эпюра – функцией $f_2(z)$ [эф два от зет]. Рассмотрим интеграл вида (5.67). Поскольку функция $f_2(z)$ [эф два от зет] всегда является линейной, общий вид которой с математической точки зрения можно представить в виде (5.68), тогда интеграл (5.67) можно преобразовать к виду (5.69). Учитывая, что площадь грузовой эпюры может быть вычислена по формуле (5.70), интеграл (5.69) примет вид (5.71). В данном выражении интеграл, входящий во второе слагаемое, представляет собой статический момент площади грузовой эпюры относительно оси y [игрек] и может быть вычислен по формуле (5.72). Здесь $z_{ц.т.}$ [зет це тэ] – абсцисса точки центра тяжести грузовой эпюры.

Окончательно исходный интеграл принимает вид (5.73).

Если теперь от абстрактных функций f_1 и f_2 [эф один и эф два] перейти к функциям грузового и единичного моментов, то интеграл Мора можно вычислить с помощью формулы Верещагина (5.74).

Таким образом, по правилу Верещагина интеграл Мора определяется как отношение произведения площади грузовой эпюры моментов на расположенную под её центром тяжести ординату единичной эпюры к жесткости поперечного сечения EJx [е жи икс]. Если грузовая эпюра является линейной, то произведение в формуле Верещагина обладает свойством коммутативности.

Слайд 162

Пример применения способа Верещагина

Определим по формуле Верещагина перемещение среднего сечения консольной балки, показанной на рисунке – вариант а).

Построим грузовую эпюру изгибающих моментов Mx [эм икс] от действующей силы F [эф]. Вариант б) на рисунке.

Разгрузим балку от внешней силы и приложим в сечении C [цэ] единичную безразмерную сосредоточенную силу. Вариант в) на рисунке.

Построим единичную эпюру изгибающих моментов M1 [эм один] от действия единичной силы. Вариант г) на рисунке.

В силу того, что обе эпюры моментов линейные, запишем формулу Верещагина с использованием свойства коммутативности, то есть площадь будем определять у единичной эпюры, и под её центром тяжести найдем ординату грузовой эпюры моментов.

Площадь единичной эпюры, представляющей собой прямоугольный треугольник, равна половине произведения его катетов, то есть l2/8 [эль квадрат деленное на восемь]. Центр тяжести у треугольника расположен на расстоянии, равном две трети длины катета от вершины, как показано на рисунке. Над точкой центра тяжести единичной эпюры определяем ординату эпюры грузового момента, соблюдая пропорции. Она равна 5Fl/6 [пять эф эль деленное на шесть].

Подставляя найденные значения в формулу Верещагина, находим искомую величину прогиба балки в сечении C [цэ], равную $\frac{5Fl^3}{48EJ_x}$ [5 эф эль куб деленное на 48 ежи икс]. Задача решена.

Анализируя все рассмотренные выше способы решения интеграла Мора, можно сделать вывод, что метод Симпсона является наиболее простым для применения. Поэтому в последующих примерах при определении перемещений интеграл Мора будем вычислять с помощью формулы Симпсона.

Слайд 163

Алгоритм расчета на жесткость при изгибе

Рассмотрев некоторые методы определения перемещений при изгибе, определим теперь последовательность действий при расчете конструкции на жесткость.

Прежде всего необходимо построить так называемую грузовую эпюру изгибающих моментов от действия заданной нагрузки.

Затем нужно методом Мора с использованием фиктивной единичной силы определить прогибы граничных сечений балки, в которых она не закреплена. При этом, для вычисления соответствующих интегралов Мора рекомендуется использовать простейшую формулу Симпсона.

Далее нужно провести прямолинейную ось балки, отложить от нее в выбранном масштабе найденные значения прогибов в соответствующих сечениях и через полученные точки изобразить приближенный вид изогнутой оси балки. При этом необходимо учесть, что закрепленные сечения не смещаются, их перемещения равны нулю. По виду изогнутой оси нетрудно определить величину максимального прогиба $\delta_{\max}$. [дельта максимум].

И последнее, сравнив величину $\delta_{\max}$. [дельта максимум] с допускаемой величиной перемещения, нужно сделать вывод о выполнении условия жесткости.

Слайд 164

Пример расчета на жесткость при изгибе

Рассмотрим двухопорную балку ВР [бэ пэ], для которой эпюры внутренних силовых факторов мы построили в теме 2.3, а расчет на прочность произвели в теме 5.3 для двух вариантов материала балки: пластичного и хрупкого.

Рассчитаем данную балку на жесткость, выбрав пластичный вариант материала с модулем Юнга E [е], равным 2 на 10 в пятой мегапаскалей. Из трех симметричных форм, подобранных нами из условия прочности, выберем наиболее рациональную – двутавр номер 24а с моментом инерции Jx [жи икс], равным 3800 см4 [сантиметров в четвертой степени].

Примем величину допускаемого прогиба равной тысячной доли от длины пролета балки l [эль]. Пролетом называется расстояние между опорами, в нашем случае оно равно всей длине балки, то есть 4,6 метрам. Тогда величина допускаемого прогиба равна 4,6 миллиметрам.

Чтобы рассчитать балку на жесткость, нужно найти её максимальный прогиб и сравнить с допускаемой величиной.

Для этого, согласно алгоритма, нужно, прежде всего, найти прогибы в незакрепленных граничных сечениях балки, то есть в сечениях C [цэ], D [дэ], L [эль], и K [ка]. Все перемещения будем определять методом Мора с использованием простейшей формулы Симпсона.

Слайд 165

Построение единичной эпюры моментов M1C

Начнем с определения перемещения в незакрепленном сечении C [цэ].

Согласно алгоритму, сначала нужно построить грузовую эпюру изгибающего момента Mx [эм икс]. Эту эпюру мы уже построили в теме 2.3, на рисунке – вариант а) [а].

Далее, разгрузим балку от внешней нагрузки и приложим в сечении C [цэ] единичную безразмерную сосредоточенную силу в вертикальном направлении, как показано в варианте б) [бэ] на рисунке. Построим от её действия единичную эпюру изгибающих моментов M_{1C} [эм один цэ], определив предварительно из уравнений равновесия реакции в опорах.

Из моментного уравнения равновесия, записанного относительно опорной точки B [бэ], найдем единичную реакцию R1P [эр один пэ]. Вычисления представлены группой формул (5.75). Значение реакции в относительных единицах равно 0,22.

Из силового уравнения равновесия в проекции на вертикальную ось y [игрек] найдем вторую единичную реактивную силу R1B [эр один бэ]. Вычисления представлены группой формул (5.76). Значение реакции в относительных единицах равно 0,78.

Методом сечений построим единичную эпюру M1C [эм один цэ] с учетом найденных реакций и единичной безразмерной силы, как показано на рисунке – вариант в) [вэ].

И на грузовой эпюре Mx [эм икс] и на единичной эпюре M1C [эм один цэ] значения ординат определены как в граничных сечениях, так и в средних точках участков. Средние значения выделены красным цветом. Они потребуются при применении формулы Симпсона.

Слайд 166

Определение прогиба в сечении C

Перемещение δ_C [дельта цэ] найдем, «перемножив» грузовую эпюру моментов M_x [эм икс] на единичную M_{1C} [эм один цэ], используя формулу Симпсона. Количество участков перемножения k=5 [ка равно пяти]: BC [бэ цэ], CD [цэ дэ], DL [дэ эль], LK [эль ка] и KP [ка пэ].

Формулу Симпсона применяем на каждом участке с учетом его длины, а результаты алгебраически суммируем. Поскольку вся грузовая эпюра расположена выше базовой линии, значит все её ординаты положительные. Единичная эпюра лежит ниже базовой линии, все её ординаты – отрицательные. В результате в формуле Симпсона во всех слагаемых на всех участках получаются отрицательные значения.

Жесткость поперечного сечения EJx [е жи икс], которая входит в знаменатель формулы Симпсона, при предварительных вычислениях выносится за скобку, а в окончательном вычислении значения модуля Юнга E [е] и момента инерции Jx [жи икс] подставляются с учетом перевода единиц.

Таким образом, перемещение δ_C [дельта цэ] равно минус 6,7 миллиметра. Знак минус говорит о том, что, выбирая направление единичной силы, мы не угадали истинное направление перемещения.

Подводя итог, делаем вывод: при действии заданной нагрузки сечение С [цэ] балки перемещается вверх на 6,7 миллиметра.

Слайд 167

Определение прогиба в сечении D

Определим прогиб балки в сечении D [дэ]. Все действия при этом аналогичны тем, что выполнялись для сечения С [цэ].

Сначала разгрузим балку от внешней нагрузки и приложим в сечении D [дэ] единичную безразмерную сосредоточенную силу в вертикальном направлении. Построим от её действия единичную эпюру изгибающих моментов M1D [эм один дэ], определив предварительно из уравнений равновесия реакции в опорах. Подробно вычисление реактивных единичных сил было показано для сечения С [цэ], здесь лишь приведем полученные значения. Значение реакции R1B [эр один бэ] в относительных единицах равно 0,609, а значение реактивной силы R1P [эр один пэ] равно 0,391.

На единичной эпюре M1D [эм один дэ] также вычисляем и показываем значения ординат в граничных и в средних сечениях всех участков.

Перемещение δ_D [дельта дэ] найдем, «перемножив» грузовую эпюру моментов M_x [эм икс] на единичную M_{1D} [эм один дэ], используя формулу Симпсона. Участки перемножения те же: BC [бэ цэ], CD [цэ дэ], DL [дэ эль], LK [эль ка] и KP [ка пэ]. Вычисления аналогичны, они подробно по участкам расписаны на слайде. Замечания по знакам прежние. Направление единичной силы выбрали вниз, результат получили отрицательный, следовательно, сечение перемещается в противоположную сторону.

Таким образом, сечение D [дэ] нагруженной балки смещается вверх на 10 миллиметров.

Слайд 168

Определение прогиба в сечении L

Точно также определим перемещение следующего незакрепленного сечения L [эль].

Разгрузим балку от внешней нагрузки и приложим в сечении L [эль] единичную безразмерную сосредоточенную силу в вертикальном направлении. Построим от её действия единичную эпюру изгибающих моментов M1L [эм один дэ], определив предварительно из уравнений равновесия реакции в опорах. В результате вычислений получим значение реакции R1B [эр один бэ] в относительных единицах равное 0,435, а значение реактивной силы R1P [эр один пэ] равное 0,565.

На единичной эпюре M1L [эм один эль] также вычисляем и показываем значения ординат в граничных и в средних сечениях всех участков.

Перемещение δ_L [дельта эль] найдем, «перемножив» грузовую эпюру моментов M_x [эм икс] на единичную M_{1L} [эм один эль], используя формулу Симпсона. Участки перемножения те же: BC [бэ цэ], CD [цэ дэ], DL [дэ эль], LK [эль ка] и KP [ка пэ]. Вычисления аналогичны, они также подробно по участкам расписаны на слайде. Замечания по знакам прежние. Направление единичной силы выбрали вниз, результат получили отрицательный, следовательно, сечение перемещается в противоположную сторону.

Таким образом, сечение L [эль] нагруженной балки смещается вверх на 9,8 миллиметров.

Слайд 169

Определение прогиба в сечении K

И последнее незакрепленное граничное сечение К [ка]. Определим его вертикальное перемещение.

Разгрузим балку от внешней нагрузки и приложим в сечении К [ка] единичную безразмерную сосредоточенную силу в вертикальном направлении. Построим от её действия единичную эпюру изгибающих моментов M1K [эм один ка], определив предварительно из уравнений равновесия реакции в опорах. В результате вычислений получим значение реакции R1B [эр один бэ] в относительных единицах равное 0,326, а значение реактивной силы R1P [эр один пэ] равное 0,674.

На единичной эпюре M1K [эм один ка] также вычисляем и показываем значения ординат в граничных и в средних сечениях всех участков.

Перемещение δ_K [дельта ка] найдем, «перемножив» грузовую эпюру моментов M_x [эм икс] на единичную M_{1K} [эм один ка], используя формулу Симпсона. Участки перемножения те же: BC [бэ цэ], CD [цэ дэ], DL [дэ эль], LK [эль ка] и KP [ка пэ]. Вычисления аналогичны, они показаны на слайде. Замечания по знакам прежние. Направление единичной силы выбрали вниз, результат получили отрицательный, следовательно, сечение перемещается в противоположную сторону.

Таким образом, сечение K [ка] нагруженной балки смещается вверх на 8,1 миллиметра.

Слайд 170

Определение прогиба в сечении С

Итак, перемещения всех незакрепленных сечений найдены, теперь изобразим приближенный вид изогнутой оси балки.

Для этого проведем сначала прямолинейную осевую линию балки, какой она была до приложения внешних сил. Затем в масштабе отложим от нее найденные значения перемещений в незакрепленных граничных сечениях. В закрепленных сечениях B [бэ] и P [пэ] перемещения равны нулю, отметим их точками на осевой линии. Соединим все полученные таким образом точки плавной кривой. На рисунке она показана красной пунктирной линией. Это и есть приближенный вид изогнутой оси балки, по которой нетрудно определить максимальный прогиб балки.

Наибольшее вертикальное перемещение возникает в сечении D [дэ] и равно 10 миллиметрам. Это больше допускаемой величины, равной 4,6 миллиметров. Следовательно, условие жесткости не выполняется.

В задаче требовалось только проверить выполнение этого условия, что мы и сделали. Если потребуется его удовлетворить, то для этого необходимо либо пропорционально уменьшить внешнюю нагрузку, либо увеличить размер поперечного сечения, то есть взять двутавр большего номера.

Задача решена.

Слайд 171

Косой изгиб

Косым изгибом называется такой вид деформации, при котором силовая линия не совпадает ни с одной из главных центральных осей сечения. Силовая линия – это след плоскости действия внутреннего изгибающего момента. В рассмотренных выше примерах силовая линия совпадала с одной из главных центральных осей сечения, а вторая, ей перпендикулярная, являлась нейтральной линией. Такой вид деформации называется прямым изгибом.

Давайте вспомним, как определить положение главных центральных осей сечения по простейшим признакам, отвлекаясь от точных определений. Если сечение имеет ось симметрии, то она всегда является главной центральной осью. Вторая же главная центральная ось, перпендикулярна первой и проходит через центр тяжести сечения.

В связи с вышеизложенным, косой изгиб можно представить, как сумму двух прямых изгибов, как показано на рисунке. Слева изображена балка, нагруженная сосредоточенной парой сил М [эм], линия действия которой наклонена под углом α [альфа] к главной центральной оси y [игрек]. Это случай косого изгиба. Справа показана балка, где действующий момент М [эм] разложен на проекции Mx [эм икс] и My [эм игрек], каждый из которых поворачивает сечение вокруг соответствующей главной центральной оси x [икс] или y [игрек] и определяется по формулам (5.77). Это сочетание двух прямых изгибов. Действие на балку в этих двух случаях равноценно. Это следует из принципа независимости действия сил.

Тогда, согласно тому же принципу, напряжения при косом изгибе в любой произвольной точке поперечного сечения определяются как алгебраическая сумма нормальных напряжений от каждого изгибающего момента, создающего прямой изгиб. Математически это выражено в формуле (5.78). Здесь x [икс] и y [игрек] – координаты точки сечения, в которой определяется величина суммарного напряжения; Jx [жи икс] и Jy [жи игрек] – главные центральные моменты инерции поперечного сечения.

Косой изгиб достаточно часто встречается в реальных конструкциях, и он опаснее прямого. Поэтому, если условия работы элемента конструкции приводят к возникновению именно косого изгиба, то абсолютно очевидно, что надо уметь корректно оценивать прочность, учитывая особенности данного вида деформации.

Слайд 172

Положение нейтральной линии при косом изгибе

При прямом изгибе нейтральная линия перпендикулярна силовой линии. Так ли это будет при косом изгибе? Давайте выясним.

Обозначим координаты точек нейтральной линии xн.л. [икс эн эл] и yн.л. [игрек эн эл], соответственно. Из условия равенство нулю напряжения в точках нейтральной линии и с учетом выражения для напряжений при косом изгибе (5.78) получим уравнение нейтральной линии (5.79). Это прямая линия, проходящая через начало координат, наклон которой к оси x [икс] определяется тангенсом угла β [бетта].

Выразим $tg\beta$ [тангенс бетта] через координаты точек нейтральной линии как отношение yн.л. [игрек эн эл] к xн.л. [икс эн эл]. Это же отношение найдем из уравнения нейтральной линии (5.79). Подставив вместо моментов Mx [эм икс] и My [эм игрек] их выражения из формул (5.77), получим соотношение между углом наклона нейтральной линии β [бетта] к оси x [икс] и углом наклона силовой линии α [альфа] к оси y [игрек]. Все эти преобразования показаны в формуле (5.80). Из полученного соотношения можно сделать вывод, что, при $J_x \neq J_y$ [жи икс не равном жи игрек] угол α [альфа] не равен углу β [бетта]. А это, в свою очередь, означает, что нейтральная линия при косом изгибе не перпендикулярна силовой линии. Этот факт и объясняет название данного вида деформации – косой изгиб.

Слайд 173

Условие прочности при косом изгибе

При косом изгибе, также, как и при прямом, максимальное напряжение возникает в точках опасного сечения, наиболее удаленных от нейтральной линии. Эти точки называются опасными точками. Для сечения рассматриваемой балки наиболее опасной является точка К [ка], показанная на рисунке 1.

Условие прочности при изгибе в двух плоскостях для опасной точки К с координатами xK [икс ка], yK [игрек ка], определяемыми относительно главных центральных осей сечения, имеет вид (5.81).

Если форма сечения такова, что опасная точка имеет координаты, максимальные сразу относительно обеих осей, как показано на рисунке 2, то условие прочности можно записать через моменты сопротивления в виде (5.82). Это справедливо для таких сечений, например, как прямоугольник, двутавр, швеллер.

Слайд 174

Случаи исключения

Для таких форм поперечного сечения, как круг и все правильные многоугольники, у которых все центральные оси – главные, случай косого изгиба невозможен. Для таких сечений изгиб всегда прямой, так как нейтральная линия всегда перпендикулярна силовой линии. Если при этом внешняя нагрузка представляет собой сочетание двух прямых изгибов, то вид деформации называют прямым пространственным изгибом. Условие прочности для сечений исключений можно записать в виде (5.83), где суммарный момент определяется как геометрическая сумма моментов Мх [эм икс] и Му [эм игрек].

Для круглого и квадратного сечений условие прочности можно записать через момент сопротивления, как показано в формуле (5.84). Здесь моменты сопротивления для круга и квадрата, вычисленные по определению через размеры сечений, приведены в формулах (5.85) и (5.86), соответственно. В формуле (5.85) b бэ[] – сторона квадрата, в формуле (5.86) d [дэ] – диаметр круга.

Слайд 175

Алгоритм расчета на прочность при косом изгибе

Подводя итог вышесказанному, перечислим последовательность действий при расчете конструкции на прочность в случае косого изгиба.

Прежде всего необходимо построить эпюры внутренних изгибающих моментов Mx [эм икс] и My [эм игрек] от действия внешних нагрузок, по которым, затем, определить положение опасного сечения. Опасным будет сечение, где суммарный момент, равный геометрической сумме моментов Mx [эм икс] и My [эм игрек] принимает наибольшее по абсолютной величине значение.

Далее в опасном сечении нужно определить положение силовой линии. Для этого необходимо в плоскости сечения по осям x [икс] и y [игрек] отложить в масштабе ординаты внутренних моментов в сторону, соответствующую положению ординат на эпюрах изгибающих моментов в опасном сечении. При этом, Mx [эм икс] откладывать по оси y [игрек], а My [эм игрек] по оси x [икс]. Ордината суммарного момента, построенная как геометрическая сумма ординат моментов Mx [эм икс] и My [эм игрек] определяет положение силовой линии.

Третьим шагом необходимо определить положение опасных точек в опасном сечении. Для сечения прямоугольной формы и подобной ему, такой, как двутавр или швеллер, опасные точки – это угловые точки в силовых четвертях. Они равноопасны, так как находятся на одинаковых расстояниях от главных центральных осей сечения.

И последним действием нужно выбрать правильную форму условия прочности, записать его и решить согласно требованиям поставленной задачи. Для форм сечений общего вида используется условие (5.81), для «зеркальных» форм, таких, как прямоугольник или двутавр, используется «зеркальная» формула (5.82).

Для случаев исключений алгоритм отличается лишь выбором формы условия прочности. Условие (5.81) заменяется на (5.83), а условие (5.82) на (5.84).

Слайд 176

Пример расчета на прочность при косом изгибе

В качестве примера рассмотрим консольный стержень прямоугольного сечения, нагруженный на свободном конце сосредоточенной силой F [эф], равной 10-ти кН [килоньютонам]. Вектор силы проходит через центр тяжести сечения под углом 30˚ к вертикальной оси y [игрек]. Длина стержня l [эль] равна 1 метру, а соотношение сторон прямоугольного сечения h/b=2 [аш к бэ равно двум]. Стержень изготовлен из стали Ст3 [эс тэ три] с допускаемым напряжением [σ]=160МПа [сигма равным 160 мегапаскалей].

Для данного стержня требуется:

1. Определить из условия прочности по допускаемым напряжениям величину характерного размера прямоугольного сечения b [бэ].
2. Заменив прямоугольное сечение стержня круглым, определить величину диаметра круглого сечения d [дэ] из условия прочности.
3. Сравнить металлозатраты для стержней прямоугольного и круглого поперечных сечений.

Слайд 177

Положение опасного сечения и опасных точек

Решение задачи начнем, согласно алгоритму, с определения положения опасного сечения в стержне. Для этого спроектируем силу F [эф] на главные центральные оси x [икс] и y [игрек] поперечного сечения. Проекции Fx [эф икс] и Fy [эф игрек] найдем с учетом угла наклона силы F [эф] к оси y [игрек], как показано на слайде. Таким образом, сила Fx [эф икс] равна 5-ти кН [килоньютонам], а сила Fy [эф игрек] – 8,66 кН [килоньютонам]. Затем от каждой из этих сил на одной базе построим эпюры изгибающих моментов

Mу [эм игрек] и Mх [эм икс], соответственно, как показано на рисунке 1. Опасное сечение будет в заделке, то есть в том сечении, где оба момента достигают своего максимального значения.

Теперь, согласно второму шагу алгоритма, определим положение силовой линии в опасном сечении. Для этого изобразим сечение, в плоскости которого отложим в масштабе значения изгибающих моментов Mу [эм игрек] и Mх [эм икс] в ту же сторону, что на эпюрах соответствующих моментов: Mу [эм игрек] отложим влево, а Mх [эм икс] отложим вниз. Описанное действие показано на рисунке 2. Так как эпюры построены на сжатых волокнах, то сжаты левые волокна стержня относительно оси у [игрек] от действия момента Mу [эм игрек] и, соответственно, там поставим знаки «–» [минус] во II и III четвертях сечения, а в противоположных I и IV знаки «+» [плюс]. Нумерация четвертей прямоугольника показана на рисунке 2 слева. Также сжаты нижние волокна стержня относительно оси х [икс] от момента Mх [эм икс] и, соответственно, поставим знаки «–» [минус] нормального напряжения в Ш и IV четвертях, а в верхних – I и II четвертях знаки «+» [плюс]. Тогда ордината суммарного момента пройдет через I и III четверти и определит положение силовой линии. В этих же четвертях совпадают знаки нормальных напряжений от изгибающих моментов Mх [эм икс] и Mу [эм игрек].

Далее определим положение опасных точек в опасном сечении. Это будут угловые точки в силовых четвертях, то есть точки В [бэ] и С [цэ]. Они являются равноопасными точками, так как величины напряжений в них будут одинаковыми по абсолютной величине и противоположны по знаку. В точке С [цэ] – угловой точке третьей четверти с двумя знаками «–» [минус] возникает максимальное сжимающее напряжение. Противоположная ей точка В [бэ] попала в область растяжения, и напряжение в ней будет положительным.

Слайд 178

Определение размеров прямоугольного сечения

Запишем условие прочности для опасных точек B [бэ] и C [цэ] и определим из него величину характерного размера b [бэ] прямоугольного поперечного сечения.

Прямоугольник – зеркально симметричное сечение, поэтому форму условия прочности выбираем «зеркальную» – (5.87).

Предварительно выразим моменты сопротивления поперечного сечения, входящие в условие прочности, через характерный размер b [бэ], как показано в формулах (5.88). Здесь учитывается заданное соотношение сторон прямоугольника.

Подставим в условие прочности численные значения изгибающих моментов в опасном сечении и выражения (5.88) для моментов сопротивления. Получим неравенство, из которого определим минимально допускаемую величину характерного размера прямоугольника. Все эти преобразования представлены формулами (5.89).

Таким образом, при действии на стержень заданной силы, минимально допустимая величина основания прямоугольного сечения b [бэ] равна 56 миллиметрам. Соответственно, высота прямоугольника должна быть в два раза больше – 112 миллиметров.

Слайд 179

Определение размеров круглого сечения

Решим вторую часть задачи. Предположим, что заданный стержень имеет не прямоугольную форму поперечного сечения, а круглую. Найдем минимальный размер диаметра круглого сечения из условия прочности.

Для этого определим прежде всего максимальное значение внутреннего изгибающего момента в заделке, как показано в формуле (5.90). Максимальный момент равен 10-ти килоньютонометрам.

В плоскости опасного сечения проведем ординату максимального момента под углом 30° к оси y [игрек] и продлим ее до пересечения с контуром сечения, как показано на рисунке. Это и будет силовой линией. Нейтральная линия проходит перпендикулярно силовой линии. Опасными точками будут точки, расположенные на максимальном расстоянии от нейтральной линии. Это точки К [ка] и L [эль], находящиеся на концах диаметра, совпадающего с силовой линией. Направление вектора внешней силы F [эф] указывает на сжатую зону. То есть, половина сечения выше нейтральной линии растянута, и точка К [ка] испытывает положительные напряжения. Соответственно, точка L [эль] – отрицательные напряжения.

Так как круглое сечение относится к сечениям-исключениям, запишем условие прочности по формуле прямого изгиба (5.91).

Для круглого сечения момент сопротивления через диаметр определяется по формуле (5.92).

Подставим в условие прочности значение максимального изгибающего момента из (5.91) и выражение для момента сопротивления из (5.92). Из полученного неравенства по формуле (5.93) определим минимально допустимое значение диаметра круглого сечения. Оно равно 86 миллиметрам.

Осталось сравнить стержни прямоугольного и круглого сечений по металлозатратам. Для этого определим площади сечений по формулам (5.94). Площадь прямоугольного сечения оказалась больше площади круглого, следовательно, по металлозатратам стержень круглого профиля экономически более выгодный.

Задача решена.

Слайд 180

Косой изгиб с растяжением-сжатием

Рассмотрим более сложный вид нагружения, добавив к действию косого изгиба действие продольной силы. Такой вид деформации называется сочетанием косого изгиба с растяжением-сжатием.

В качестве примера на рисунке изображен стержень, испытывающий именно такой вид деформации. Одна из сил, направленная вдоль оси стержня, вызывает деформацию растяжения, а вторая, линия действия которой составляет угол α [альфа] с главной центральной осью поперечного сечения y [игрек], деформацию косого изгиба.

Чтобы научиться оценивать прочность конструкции в случае косого изгиба с растяжением-сжатием, необходимо учитывать следующие моменты.

1. Оценка напряжений в опасной точке элемента конструкции ведется отдельно от каждого внутреннего силового фактора, возникающего при данном виде деформации.
2. Поскольку присутствует косой изгиб, то в первую очередь определяют положение опасных точек от косого изгиба.
3. В зависимости от того, что добавляется к косому изгибу – растяжение или сжатие – в опасные точки от действия изгибающих моментов будет добавляться, соответственно, положительное или отрицательное напряжение от продольной силы.
4. Условие прочности при косом изгибе с растяжением-сжатием имеет вид формулы (5.95).
5. Если материал элемента конструкции пластичный, т.е. имеет одинаковые пределы текучести при растяжении и сжатии, то расчет напряжений в опасной точке сжатой зоны ведется по модулю.

Слайд 181

Прямой изгиб с растяжением-сжатием

Совокупность прямого изгиба, при котором силовая линия совпадает с одной из главных центральных осей сечения, с одновременным силовым воздействием в направлении продольной оси элемента конструкции приводит к данному случаю деформации.

На рисунке изображен консольный стержень круглого сечения, испытывающий прямой изгиб с растяжением.

При оценке прочности элемента конструкции в данном случае нагружения необходимо знать следующее:

1. Что по сути это частный случай косого изгиба с растяжением-сжатием. Если косой изгиб представляют два изгибающих момента, то в данном случае присутствует один из них: Mx [эм икс] или My [эм игрек]. Поэтому все методические приемы оценки прочности остаются такими же, как и для случая косого изгиба с растяжением-сжатием.
2. Вид условия прочности для прямого изгиба с растяжением-сжатием определяется в зависимости от особенностей нагружения и формы сечения, а именно:
   - При наличии внутреннего изгибающего момента Mx [эм икс] и продольной силы N [эн] оно имеет вид (5.96);
   - При наличии внутреннего изгибающего момента My [эм игрек] и продольной силы N [эн] условие прочности записывается в виде (5.97);
   - При наличии моментов Mx [эм икс] и My [эм игрек] и продольной силы N [эн], но для форм сечений, исключающих косой изгиб, таких как круг и правильные многоугольники, вид условия прочности определяется формулой (5.98). Здесь суммарный момент находится как геометрическая сумма моментов Mx [эм икс] и My [эм игрек], а Woc [дубль вэ ос] – осевой момент сопротивления поперечного сечения относительно оси изгиба.

Слайд 182

Пример расчета на прочность при изгибе со сжатием

Рассмотрим консольную балку, нагруженную силами, создающими изгиб в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, и сжимающей силой, приложенной к свободному концу. Материал балки Ст3 [сталь три] с допускаемым напряжением [σ]=160 МПа [сигма, равным 160 мегапаскалей].

Определим величину [F] [допускаемой силы эф] для двух случаев поперечного сечения: прямоугольного с отношением сторон $h/b=2$ [аш к бэ, равным двум] и круглого с диаметром d. Известно, что основание прямоугольника $b=4\cdot10^{-2}\,м$ [бэ равно 4 на 10 в минус второй степени метров] или 4 сантиметра, а диаметр круглого сечения $d = 6 \cdot 10^{-2}\, м$. [дэ равен 6 на 10 в минус второй степени метров] или 6 сантиметров.

Здесь две разных формы поперечного сечения выбраны не случайно. Для прямоугольного сечения изгибные нагрузки в двух взаимно перпендикулярных плоскостях вызывают деформацию косого изгиба. Круглое сечение, которое относится к сечениям-исключениям, при таком нагружении испытывает деформацию прямого изгиба. Проследим особенности расчета на прочность для обоих случаев деформации: косого изгиба со сжатием и прямого изгиба со сжатием.

Слайд 183

Определение положения опасного сечения

Расчет на прочность начинаем с определения положения опасного сечения стержня, то есть сечения, где возникает наибольшее по абсолютной величине напряжение. Для стержня, у которого размеры поперечного сечения по длине не изменяются, положение опасного сечения определяется по эпюрам внутренних силовых факторов.

Построим эпюры внутренних изгибающих моментов Mx [эм икс] и My [эм игрек] и эпюру продольной силы N [эн]. Все эпюры представлены на рисунке. Они построены методом сечений на базах, параллельных осевой линии стержня, причем эпюры изгибающих моментов представлены на одной базе в разных плоскостях, соответствующих плоскостям действия вертикальных и горизонтальных сил.

Эпюра продольной силы N [эн] постоянна по всей длине стержня. Из эпюр изгибающих моментов видно, что предположительно опасными могут быть два сечения: «C» [цэ] или «D» [дэ].

Дальнейший анализ зависит уже не только от величины внутренних усилий, но и от формы и размеров поперечного сечения. Рассмотрим поочередно прямоугольную и круглую форму сечений заданных размеров.

Слайд 184

Прямоугольная форма: сечение C

Для стержня прямоугольного профиля выберем из двух подозреваемых сечений – «C» [цэ] или «D» [дэ] – наиболее опасное. Какое сечение более опасно в данном случае мы сможем сказать только после определения величин напряжений в опасных точках каждого сечения.

Рассмотрим сначала сечение C. Оно испытывает прямой поперечный изгиб со сжатием.

Определим положение опасных точек в сечении «C» [цэ]. Для этого в плоскость сечения перенесем с эпюры ординату внутреннего изгибающего момента Mx [эм икс], равную 3F [три эф], как показано на рисунке. Установим положение силовой линии. В сечении «C» [цэ] она совпадает с осью «y» [игрек], а ось «x» [икс] является нейтральной от действия момента Mx [эм икс]. Опасными являются точки верхней и нижней стороны сечения. Нижние волокна испытывают напряжение сжатия, на это указывает ордината момента, расположенная по оси y [игрек] ниже центра тяжести. Поэтому в области нижних волокон мы ставим знак «–», а в области верхних «+», так как они испытывают напряжение растяжения. Добавляя к каждому знаку напряжений от действия изгибающего момента знак «–» от действия сжимающей продольной силы, видим, что опасными в сечении «C» [цэ] являются точки, расположенные на нижней стороне прямоугольника.

Определим величину максимального напряжения, возникающего в опасных точках от действия момента Mx [эм икс], пренебрегая при этом напряжением от продольной силы N [эн] в силу его малости. Вычисление максимального напряжения приведено в формуле (5.97).

Слайд 185

Прямоугольная форма: сечение D

Рассмотрим второе подозреваемое сечение D [дэ]. Оно испытывает косой поперечный изгиб со сжатием.

Определим положение опасных точек в сечении «D» [дэ].

Здесь силовая линия определяется по положению ординаты суммарного момента MΣ [эм сигма] и пересекает II и IV четверти поперечного сечения, как показано на рисунке. Опасными от изгиба будут угловые точки «К» [ка] и «L» [эль]. Положение ординаты суммарного изгибающего момента указывает на то, что точка «L» [эль] испытывает напряжение сжатия и рядом с ней мы ставим два знака «–» от действия моментов Мх [эм икс] и Му [эм игрек], а рядом с точкой «К» [ка] два знака «+», т.к. в ней возникают напряжения растяжения. Добавляя к каждому знаку напряжений от действия изгибающих моментов знак «–» от действия сжимающей продольной силы, видим, что опаснее будет точка «L» [эль], где все три знака одинаковые.

Для сечения «D» [дэ] максимальное напряжение в опасной точке «L» [эль] от действия моментов Мх [эм икс] и Му [эм игрек] находится по формуле (5.98).

Видно, что максимальные напряжения в опасных точках сечений «С» [цэ] и «D» [дэ] равны между собой, следовательно, оба сечения стержня равноопасны.

Слайд 186

Грузоподъемность балки прямоугольного профиля

Определим величину [F] [допускаемой силы эф] из условия прочности, подставив в него значение максимального напряжения, вычисленного в равноопасных точках сечений «С» [цэ] и «D» [дэ], как показано в формулах (5.99). Подставляя сюда известные значения размера прямоугольника и допускаемого напряжения, получаем по формуле (5.100) величину допускаемой силы, равную 2,88 кН [килоньютонов].

Проведем проверку прочности в опасных точках сечения «С» [цэ] и «D» [дэ] с учетом перенапряжения от действия продольной силы N [эн], которую предварительно мы не учитывали. Убедимся, что это действие было правомерно. Вычисление максимального напряжения с учетом и изгибающих моментов и продольной силы показано в формуле (5.101). Видно, что напряжение от действия изгибающих моментов почти на два порядка больше, чем от действия продольной силы. И хотя величина полного напряжения несколько превышает допускаемой величины, равной 160 мегапаскалей, но всего лишь на 0,64%, что меньше допустимых 5% перегруза.

Слайд 187

Круглая форма: сечение C

Рассмотрим теперь стержень круглого сечения и проведем анализ напряженного состояния в опасных точках сечений «C» [цэ] и «D» [дэ].

Круглое сечение «C» [цэ] также, как и при прямоугольной форме, испытывает прямой поперечный изгиб со сжатием. Определим в нем положение опасных точек.

В сечении «C» [цэ] силовая линия совпадает с осью «y» [игрек], нейтральная – с осью «x» [икс], как показано на рисунке. Опасными являются точки «G» [же] и «P» [пэ] на пересечении силовой линии с контуром круглого сечения, находящиеся на максимальном расстоянии от нейтральной линии. Нижняя точка «P» [пэ] испытывает напряжение сжатия, и около нее мы поставим знак «–». Здесь объяснение аналогичное, что и для прямоугольного профиля – ордината момента Mx [эм икс] расположена со стороны сжатых волокон. Верхняя точка «G» [же], соответственно, попала в область растяжения, и около нее мы поставим знак «+». Добавляя знак «–» от напряжений, возникающих под действием сжимающей продольной силы, получаем максимальное по модулю напряжение в точке «P» [пэ].

Вычисление максимального напряжения в сечении «C» [цэ] в его опасной точке «P» [пэ] от действия момента Mx [эм икс] представлено формулой (5.102). При этом, напряжением от действия продольной силы пренебрегаем в силу его малости.

Слайд 188

Круглая форма: сечение D

Рассмотрим второе подозреваемое сечение D [дэ]. Оно, в отличие от одноименного сечения прямоугольного профиля, испытывает прямой пространственный изгиб со сжатием, так как круглая форма является сечением-исключением.

Определим положение опасных точек в сечении «D» [дэ].

Для этого необходимо определить положение силовой линии. Она должна проходить через ординату суммарного момента MΣ [эм сигма]. Ординаты внутренних моментов Mx [эм икс] и My [эм игрек] откладываем в ту же сторону, что и на эпюрах соответствующих моментов. В силу равенства моментов Mx [эм икс] и My [эм игрек], ордината суммарного момента, а значит, и силовая линия, проходит под углом в 45° через II и IV четверти поперечного сечения, как показано на рисунке. Опасными от изгиба будут точки «R» [эр] и «H» [аш] – точки пересечения силовой линии с контуром круга. Нейтральная линия проходит перпендикулярно силовой, разделив плоскость сечения на области растяжения и сжатия. Точка «R» [эр] попала в область растяжения, а точка «H» [аш] в область сжатия. Соответственно, около точки «R» [эр] поставим знак «+», а около точки «H» [аш] – знак «–». Добавляя к каждой точке по знаку «–» нормального напряжения от действия сжимающей продольной силы, делаем вывод о том, что опасной точкой сечения «D» [дэ] является точка «H» [аш].

Вычисление максимального напряжения в сечении «D» [дэ] в его опасной точке «H» [аш] от действия моментов Mx [эм икс] и My [эм игрек] представлено формулой (5.103).

Сравнивая напряжения в точках «P» [пэ] и «H» [аш], приходим к выводу, что самой опасной точкой на балке круглого сечения является точка «P» [пэ], а наиболее опасным является сечение «C» [цэ].

Слайд 189

Грузоподъемность балки круглого профиля

Определим для балки круглого сечения величину [F] [допускаемой силы эф] из условия прочности (5.104), подставив в него значение максимального напряжения, вычисленного в опасной точке «P» [пэ] сечения «C» [цэ]. Подставляя сюда известные значения размера прямоугольника и допускаемого напряжения, получаем по формуле (5.105) величину допускаемой силы, равную 1,13 кН [килоньютонов].

Проведем проверку прочности в опасной точке «P» [пэ] с учетом перенапряжения от действия продольной силы N [эн], которую предварительно мы не учитывали. Вычисление максимального напряжения с учетом и изгибающего момента и продольной силы показано в формуле (5.106). Видно опять, что напряжение от действия изгибающего момента на много больше, чем от действия продольной силы. Величина перенапряжения составляет всего лишь 0,21%, что существенно меньше допустимых 5% перегруза.

Задача полностью решена.

Слайд 190

Внецентренное растяжение-сжатие

Внецентренное растяжение-сжатие – это случай нагружения, когда линия действия внешней растягивающей или сжимающей силы не совпадает с осью стержня, а параллельна ей, и имеет эксцентриситеты xF [икс эф] и yF [игрек эф]. Случай внецентренного сжатия стержня прямоугольного сечения силой F [эф] показан на рисунке 1.

Перенесем по правилам теоретической механики силу F [эф] параллельно самой себе в центр тяжести прямоугольного сечения, добавив при этом моменты от параллельного переноса Mx [эм икс] и My [эм игрек], как показано на рисунке 2. Получим эквивалентный случай нагружения, который представляет собой сочетание косого изгиба с центральным сжатием.

Таким образом, внецентренное растяжение-сжатие эквивалентно сочетанию косого изгиба с центральным сжатием и является его частным случаем.

В поперечных сечениях стержня, представленного на рисунке 1, возникают внутренние силовые факторы, выражения для которых обозначены на слайде номером (5.107). Внутренняя продольная сила N [эн] равна внешней сжимающей силе F. Внутренние изгибающие моменты Mx [эм икс] и My [эм игрек] равны моментам, которые создает внешняя сила F [эф] относительно главных центральных осей сечения x [икс] и y [игрек] с учетом эксцентриситетов, соответственно. Поскольку значения внутренних усилий от положения поперечного сечения не зависят, а размер сечения по длине стержня не изменяется, делаем вывод, что все поперечные сечения данного стержня равноопасны.

Слайд 191

Положение нейтральной линии

Найдем положение нейтральной линии при внецентренном растяжении-сжатии. Для этого рассмотрим произвольное поперечное сечение стержня, так как мы выяснили, что они все равноопасны.

Напряжение, возникающее в произвольной точке сечения с координатами x [икс] и y [игрек] относительно главных центральных осей, найдем по принципу независимости действия сил, как показано в формуле (5.108). Оно равно алгебраической сумме напряжений от совместного действия продольной силы N [эн] и изгибающих моментов Mx [эм икс] и My [эм игрек]. Функция напряжений (5.108) линейная относительно координат x [икс] и y [игрек], значит напряжение в сечении изменяется по линейному закону.

Точки, принадлежащие нейтральной линии, принадлежат и поперечному сечению, а значит напряжение в них можно определить по формуле (5.108). Обозначим координаты точек нейтральной линии xн.л. [икс эн эл] и yн.л. [игрек эн эл], соответственно, и подставим их выражение (5.108). Учитывая, что в нейтральном слое напряжение равно нулю, получим выражение (5.109). Здесь коэффициент F/A [эф деленное на а] вынесен за скобку. Нулю он равен быть не может по физическому смыслу, значит должно равняться нулю выражение, стоящее в скобках.

Таким образом, уравнение нейтральной линии при внецентренном растяжении-сжатии имеет вид (5.110). Здесь знаменатели, стоящие в выражении (5.109) заменены квадратами радиусов инерции, что вполне справедливо согласно определению геометрических характеристик.

С геометрической точки зрения уравнение нейтральной линии (5.110) представляет собой уравнение прямой, не проходящей через начало координат, и отсекающей от осей x [икс] и y [игрек] отрезки, которые можно определить по формулам (5.111). Они обозначены x0 [икс ноль] и y0 [игрек ноль], соответственно.

Слайд 192

Ядро сечения

Из уравнения нейтральной линии (5.110) видно, что её положение зависит от координат точки приложения внешней силы F [эф]. Изменяя эти координаты соответствующим образом, можно добиться такого положения нейтральной линии, при котором она бы вышла за пределы контура поперечного сечения. В этом случае все сечение будет работать в зоне одного знака напряжения – положительного, при действии растягивающей силы F [эф] и отрицательного при её сжимающем действии. Это обстоятельство особенно важно при проектировании внецентренно сжатых стержней, изготовленных из хрупких материалов, у которых допускаемые напряжения в зонах растяжения и сжатия существенно различаются. К таким материалам относятся, например, дюраль, чугун, бетон, кирпичная кладка. Необходимо обеспечить такие условия, при которых в поперечных сечениях не появлялись нежелательные растягивающие напряжения.

Определим область точки приложения внешней сжимающей силы F [эф], для которой эти условия бы выполнялись.

Область в окрестности точки центра тяжести сечения, при приложении в которую внешней продольной силы, в сечении будут возникать нормальные напряжения одного знака, называется ядром сечения.

Построим ядро прямоугольного сечения при внецентренном растяжении-сжатии. На рисунке контур прямоугольника очерчен четырьмя прямыми линиями: 1-1, 2-2, 3-3 и 4-4.

Определим такую точку приложения силы, чтобы нейтральная линия совпадала с линией 1-1. Подставляя координаты точек нейтральной линии 1-1 в уравнение (5.110), найдем соответствующие координаты точки приложения силы F [эф] по формулам (5.112). На рисунке эта точка обозначена номером 1.

Рассуждая аналогичным образом, получаем, что для совмещения нейтральной линии с линией 2-2, силу F [эф] необходимо приложить в точку 2 с координатами, определяемыми формулами (5.113).

Для линии 3-3 получаем точку 3 с координатами, определяемыми формулами (5.114), а для линии 4-4 симметричную точку 4.

Соединяя полученные точки, получим ядро сечения.

Тема 6 Расчет на прочность и жесткость при кручении

Слайд 193

Чистый сдвиг и его особенности

Рассмотрим тонкостенную трубку, нагруженную скручивающими моментами, показанную на рисунке 1. Нанесем на поверхность трубки до нагружения сетку с прямоугольными ячейками. После нагружения ячейки станут параллелограммами.

На рисунке 2 показан выделенный из стенки трубы элементарный параллелепипед. На горизонтальных площадках выделенного элемента действуют касательные напряжения τzx [тау зэт икс], образующие пару сил, стремящиеся сдвинуть горизонтальные площадки относительно друг друга. Исходя из условий статического равновесия, на смежных вертикальных площадках должны возникнуть напряжения τxz [тау икс зэт]. Составим уравнение равновесия, приравняв нулю сумму моментов относительно оси игрек. Откуда следует, что касательные напряжения, возникающие на смежных взаимно перпендикулярных площадках, равны между собой и противоположно направлены. Данное утверждение известно в сопротивлении материалов как закон парности касательных напряжений.

Напряженное состояние, при котором на гранях элемента действуют только касательные напряжения, называется чистым сдвигом.

Результатом действия касательных напряжений является появление смещения Δs [дельта эс], называемого абсолютным сдвигом и угла сдвига γ [гамма]. В силу малости деформаций можно принять тангенс угла сдвига равным самому углу и равным отношению $\Delta s/h$ [дельта эс к аш]. Поэтому угол сдвига называется также относительным сдвигом.

Слайд 194

Механические испытания при сдвиге

Испытание материалов в условиях чистого сдвига проводят при кручении тонкостенных трубчатых образцов. По результатам испытания строят диаграмму сдвига в координатах касательное напряжение относительный сдвиг τ-γ [тау гамма]. Диаграмма сдвига качественно сходна с диаграммами растяжения и сжатия. На начальном участке диаграммы наблюдается линейная зависимость между касательным напряжением и углом сдвига, подчиняющаяся закону Гука. Коэффициент пропорциональности в выражении (6.1) G [же] называется модулем сдвига или модулем упругости второго рода.

Установлено, что характеристики сдвига связаны с характеристиками растяжения. Так, для изотропных материалов между модулями упругости выполняется соотношение, представленное на слайде формулой (6.2). Кроме того, для большинства материалов предел текучести при сдвиге τт [тау тэ] может быть выражен через предел текучести при растяжении $\sigma_т$ [сигма тэ], согласно выражению (6.3).

Слайд 195

Кручение стержней круглого профиля

Кручение стержней круглого профиля достаточно часто встречающаяся задача при оценке прочности элементов конструкций технических объектов. Кручение испытывают валы редукторов, двигателей, автомобильные оси и многие другие элементы конструкций. Поэтому оценка напряжений, возникающих при кручении, является актуальной. Рассмотрим ее.

На рисунке 1 представлен консольный стержень круглого поперечного сечения, нагруженный в концевом сечении моментом Mz [эм зэт]. Свободное сечение стержня поворачивается на угол φ [фи], который называется абсолютным углом закручивания и измеряется в градусах или радианах. Выведем формулы для определения напряжений и перемещений сечений стержня, рассмотрев три стороны задачи.

Статическая сторона задачи заключается в привлечении интегрального уравнения равновесия, которое включает внутренний крутящий момент. Это уравнение (6.4), представляющее собой интегральную зависимость между крутящим моментом и касательным напряжением.

Слайд 196

Кручение стержней круглого профиля

Теперь рассмотрим геометрическую сторону задачи.

Все последующие выкладки будут сделаны на предположении, основанном на гипотезе Бернулли. Напомним ее. Эта гипотеза, носящая название гипотезы плоских сечений утверждает, что сечения плоские до приложения крутящего момента остаются таковыми и после, поворачиваясь, относительно друг друга, на некоторые углы.

Построив геометрическую модель стержня, испытывающего кручение, н опираясь на эту гипотезу, выделим их исходного стержня на рисунке 1 элемент длиной dz [дэ зэт], показанный на рисунке 2. В результате кручения торцевые сечения этого элемента поворачиваются, причем точки B [вэ] и C [цэ] переходят в положения B1 [вэ один] и C2 [цэ два]. Вынесем из элементарного стержня часть B1O1O2C1C2 [вэ один о один о два цэ один цэ два] отдельно на рисунок 3. Выделим на нем дугу D1D2 [дэ один дэ два] на расстоянии ρ [ро] от центра тяжести сечения O2 [о два].

Из треугольника O3D2D1 [о три дэ два дэ один] выразим длину дуги D1D2 [дэ один дэ два] через угол сдвига γ [гамма] и длину элемента dz [дэ зэт]. Из треугольника O2D2D1 [о два дэ два дэ один] ту же самую дугу выразим через элементарный угол закручивания dφ [дэ фи] и радиус вектор ρ [ро]. В формуле (6.5) оба полученных выражения для дуги D1D2 [дэ один дэ два] приравнены друг другу. Это дает возможность получить зависимость (6.6) между углом сдвига γ [гамма] и относительным углом закручивания Θ [тэта].

Слайд 197

Кручение стержней круглого профиля

Рассмотрим физическую сторону задачи. Для этого привлечем закон Гука, описывающий процесс упругого деформирования в условиях кручения.

А теперь произведем синтез трех сторон задачи.

Подставим выражение (6.6) для относительного угла сдвига γ [гамма] в формулу закона Гука, выразив касательное напряжение через относительный угол закручивания Θ [тэта] формула (6.7). Затем подставим в интегральное уравнение равновесие, рассмотренное в статической стороне задачи, полученное выражение (6.7) для τ [тау]. Проинтегрировав правую часть преобразованного интегрального уравнения, получим зависимость внутреннего крутящего момента от относительного угла закручивания. Оттуда выразим относительный угол закручивания через отношение внутреннего крутящего момента к произведению полярного момента инерции, умноженного на модуль сдвига по формуле (6.8).

Основываясь на том, что относительный угол закручивания равен $\frac{d\varphi}{dz}$ [дэ фи по дэ зет], получим интегральное выражение (6.9) для абсолютного угла закручивания φ [фи].

Произведение полярного момента инерции поперечного сечения вала на модуль сдвига называется жесткостью поперечного сечения при кручении.

Формулу (6.8) подставим в преобразованный закон Гука (6.7), откуда получим выражение (6.10) для касательного напряжения, возникающего в точках круглого поперечного сечения вала, испытывающего деформацию кручения. Из полученной формулы (6.10) очевидно, что величина касательного напряжения зависит от текущего радиуса ρ [ро], который изменяется от нуля до значения радиуса поперечного сечения r [эр]. Следовательно τ [тау] будет меняться по линейному закону в любом радиальном направлении круглого сечения от нуля в точке центра круга до некоторой максимальной величины, в точке, лежащей на окружности и определяться по формуле (6.11). Таким образом, самыми напряженными точками любого сечения вала являются точки окружности, максимально удаленные от центра кручения.

Слайд 198

Условие прочности и жесткости при кручении

Сформулируем условие прочности по допускаемому напряжению при кручении. Очевидно, что для этого необходимо знать величину ´самого большого напряжения, возникающего во всем объеме элемента конструкции и выставить условие его ограничения допускаемым напряжением.

Для этого сначала преобразуем формулу (6.11). Заменим в ней отношение полярного момента инерции к величине радиуса поперечного сечения Wρ [дубль вэ полярным], называемым полярным моментом сопротивления. Тогда максимальное касательное напряжение можно получить, как максимальную величину отношения внутреннего крутящего момента к полярному моменту сопротивления и условие прочности может быть записано в виде выражения (6.12). Модуль величины отношения в формуле означает, что оно не зависит от направления внутреннего крутящего момента и его значение определяется самой большой ординатой эпюры крутящего момента не зависимо от ее положения относительно базы эпюры.

Перейдем к формулировке условия жесткости. Оно заключается в ограничении максимальной деформации допускаемым значением. Используется условие жесткости и по абсолютному, и по относительному или погонному углу закручивания.

Для определения максимальной величины абсолютного угла закручивания задаются началом координат, по отношению к которому определяют углы поворота характерных поперечных сечений вала. Обычно за начало отсчета принимают любой конец элемента конструкции и определяют, какое из последующих сечений по длине вала повернется по отношению к нему на самый большой угол, используя формулу (6.9). Тогда условие жесткости по абсолютному углу закручивания может быть представлено в виде выражения (6.13), левая часть которого является расчетной величиной, а правая задается исходя из конструктивных условий или условий эксплуатации. В случае, когда задана допускаемая величина погонного угла закручивания, условие жесткости записывают в виде выражения (6.14). Здесь длина L [эль] – это расстояние от начала координат до сечения вала, повернувшегося на максимальный угол φ [фи].

Слайд 199

Потенциальная энергия деформации при кручении

Рассмотрим на рисунке 1 консольный стержень, нагруженный на свободном конце крутящим моментом Mz [эм зэт]. Закон статического нагружения стержня представлен на рисунке 2 графиком линейной зависимости между величиной внешнего момента и абсолютным углом закручивания. Работа внешнего момента определяется по закону Клайперона и равна половине произведения крутящего момента на абсолютный угол закручивания. При статическом нагружении в уравнении энергетического баланса кинетическая энергия равна нулю в силу того, что масса тела не получает ускорения. Тогда вся работа внешней силы тратится на потенциальную энергию деформации, которая определяется по формуле (6.15). Заменим в этом выражении абсолютный угол закручивания φ [фи] по формуле (6.9), тогда потенциальная энергия определится интегральным выражением (6.16).

Слайд 200

Интеграл Мора для случая кручения

Интеграл Мора является математическим аппаратом для определения перемещений при различных видах деформации. Выведем формулу интеграла Мора для случая кручения на примере конкретной задачи.

На рисунке 1 представлен консольного типа вал круглого поперечного сечения, длиной равной l [эль], нагруженный на свободном конце крутящим моментом. Требуется определить абсолютный угол поворота произвольного сечения С [цэ].

Внутренний крутящий момент, возникающий в сечениях вала, является функцией внешнего. Для определения угла поворота воспользуемся теоремой Кастилиано. Так как она применима лишь для сечений, в которых есть внешние нагрузки, приложим на рисунке 2 к сечению С [цэ] фиктивный крутящий момент Ф [фи]. Тогда внутренний крутящий момент будет определяться по формуле (6.17). Для определения коэффициента пропорциональности M1z [эм один зэт] разгрузим стержень от внешней нагрузки, а фиктивный момент Ф [фи] приравняем к единице, как это показано на рисунке 3. При этом внутренний крутящий момент будет равным коэффициенту пропорциональности M1z [эм один зэт]. Таким образом, M1z [эм один зэт] – внутренний крутящий момент, возникающий в сечениях элемента конструкции, если разгрузить его от внешних факторов, а к сечению, угол поворота которого определяется, приложить единичный безразмерный момент.

Подставим в формулу для потенциальной энергии деформации при кручении выражение (6.17). Затем применим теорему Кастилиано, взяв частную производную от потенциальной энергии деформации по фиктивной силе Ф [фи] при условии, что она равна нулю. В результате получаем формулу интеграла Мора (6.18) для случая кручения.

Слайд 201

Пример решения задачи

Для стержня, у которого левый конец жестко защемлен, подобрать диаметр поперечного сечения из условия прочности, если известно допускаемое напряжение. Провести проверку жесткости, если известен допускаемый погонный угол закручивания.

Слайд 202

Определение величины диаметра

Решение начинаем с построения эпюры внутреннего крутящего момента с целью определения положения опасного сечения. Из анализа полученной эпюры следует, что все сечения участка 1-2 [один два] равноопасны и испытывают внутренний крутящий момент равный 50 кНм [килонютонометров]. Запишем условие прочности по допускаемому касательному напряжению, в которое вместо полярного момента сопротивления подставим его выражение для круглого профиля через диаметр. Это позволило выразить величину допускаемого диаметра через максимальный внутренний крутящий момент и допускаемое касательное напряжение. При подстановке численных значений величин, входящих в полученное выражение, вычисляем величину диаметра.

Слайд 203

Построение эпюры углов закручивания

Для проведения проверки жесткости вала построим эпюру углов закручивания и, таким образом, определим величину максимальной деформации. Выберем начало координат в жесткой заделке, сечении под номером 0 [ноль]. Определим величины абсолютных углов закручивания на каждом из участков вала: 0-1 [ноль один], 1-2 [один два], 2-3 [два три].

Так как на участке 0-1 [ноль один] внутренний крутящий момент изменяется по закону наклонной прямой, угол поворота сечения номер один по отношению к нулевому сечению определим по интегральной формуле (6.8) и в результате получим ноль. Как видно из формулы (6.19) изменение угла закручивания по длине участка 0-1 [ноль один] происходит по квадратичной функции. Очевидно, что посередине участка, там, где эпюра внутреннего крутящего момента пересекает базу, угол закручивания принимает экстремальное значение. Для его определения подставим в выражение (6.19) координату этого сечения z=0,5 [зэт равное ноль пять] метра и получим угол закручивания среднего сечения участка 0-1 [ноль один] по отношению к нулевому сечению.

Затем определяем абсолютный угол закручивания сечения номер два по отношению к первому сечению. На этом участке внутренний крутящий момент имеет постоянное значение по всей длине участка. Поэтому вычисление угла поворота можно произвести по формуле (6.20), умножив внутренний крутящий момент данного участка на его длину и поделив на жесткость поперечного сечения при кручении.

Аналогично, в силу тех же самых причин определяем абсолютный угол закручивания сечения 3 по отношению ко второму сечению.

Затем определяем углы закручивания каждого характерного сечения по отношению к неподвижному нулевому сечению, последовательно складывая углы закручивания, полученные в пределах каждого участка. Так, чтобы определить поворот второго сечения к нулевому, надо к углу закручивания первого сечения прибавить угол поворота второго по отношению к первому. Чтобы определить поворот третьего сечения по отношению к нулевому, прибавляем к углу поворота второго сечения по отношению к началу отсчета угол поворота третьего по отношению ко второму сечению.

По полученным результатам строим эпюру углов закручивания в долях от угла φ [фи] умноженному на жесткость поперечного сечения GJρ [жэ на жи полярное].

Слайд 204

Проверка выполнения условия жесткости

Максимальный абсолютный угол закручивания по отношению к заделке получило третье сечение. Так как допускаемая величина деформации задана в виде относительного угла поворота, определим максимальный погонный угол закручивания, поделив абсолютный на расстояние от заделки до третьего сечения, которое равно трем метрам. Подставив значения всех физических величин в выражение для относительного угла закручивания получим 0,57 град/м [ноль целых пятьдесят семь целых градусов на метр]. Это меньше допускаемого относительного угла закручивания, следовательно, диаметр вала, который мы определили из условия прочности, обеспечивает жесткость конструкции. Задача решена.

Слайд 205

Кручение стержней некруглого профиля

На рисунке 1 рассмотрим стержень прямоугольного сечения, с приложенными к торцевым сечениям крутящими моментами.

Определение напряжений и перемещений сечений такого стержня является сложной задачей, которая не может быть решена методами сопротивления материалов. Связано это с тем, что при кручении стержней некруглого профиля гипотеза плоских сечений Бернулли неприменима. Поперечные сечения депланируют, то есть искривляются. На рисунке 2 представлена примерная картина депланации прямоугольного поперечного сечения стержня.

Кручение называется свободным, если депланация сечений одинакова по всей длине стержня, и стесненным, если депланация разных сечений различна. Стесненное кручение можно создать, если жестко защемить один из торцов стержня, а к свободному концу приложить крутящий момент.

В рамках курса «Сопротивление материалов» мы рассмотрим лишь самые простые аспекты прочности таких конструкций. Например, докажем, что при кручении в угловых точках прямоугольного сечения стержня касательное напряжение отсутствует. Доказательство проведем от обратного.

Для этого на рисунке 3 рассмотрим стержень прямоугольного сечения, испытывающий свободное кручение. Предположим, что в ближайшей к нам угловой точке возникает вектор касательного напряжения τ [тау]. Разложим этот вектор на две составляющие τzx [тау зэт икс] и τzy [тау зэт игрек]. Так как боковые стороны стержня свободны от силового воздействия, то касательные напряжения на площадках, смежных с рассматриваемой, τxz и τyz [тау икс зэт и тау игрек зэт] равны нулю. Это означает, что, согласно закону парности касательных напряжений, τzy иτzx [тау зэт икс и тау зэт игрек] также равны нулю, а, следовательно, и вектор τ [тау] равен нулю. Таким образом, при кручении в угловых точках прямоугольного сечения касательных напряжений не возникает.

Слайд 206

Кручение стержней некруглого профиля

Выводом формул для определения касательных напряжений при кручении стержней некруглого профиля занимается математическая теория упругости. Здесь мы приведем уже известные результаты для случая прямоугольного сечения, у которого b размер основания, а h [аш] – высота. На рисунке показан закон распределения касательных напряжений от центра кручения, находящегося в точке центра тяжести сечения, по направлениям главных центральных осей и по сторонам прямоугольника.

Из графика видно, что максимальное касательное напряжение возникает посередине длинной стороны сечения и определяется по формуле (6.21). Момент сопротивления при кручении прямоугольника определяется по формуле (6.22), в которой коэффициент α [альфа] является табличной функцией и определяется исходя из соотношения сторон h/b [аш к бэ].

Касательное напряжение, возникающее посередине короткой стороны, может быть найдено по формуле (6.23), где γ [гамма] - табличный коэффициент, так же зависящий от отношения h/b [аш к бэ].

Относительный угол закручивания определяется по формуле (6.24), полностью аналогичной той, которую мы получили для круглого профиля, за исключением величины момента инерции сечения при кручении. Эту геометрическую характеристику в данном случае надо определять по формуле (6.25), в которой β [бета] - табличный коэффициент, зависящий от отношения h/b [аш к бэ].

Слайд 207

Расчет цилиндрических пружин

Цилиндрические пружины являются довольно распространенным элементом конструкций и подвергаются действию в основном осевой внешней нагрузки. Не смотря на это, их разрушение происходит в результате деформации среза. Вызвано это тем, что в поперечных сечениях проволоки пружины возникают такие внутренние силовые факторы, как поперечная сила и крутящий момент. Рассмотрим подробнее данную проблему.

На рисунке 1 представлена цилиндрическая винтовая пружина, навитая из проволоки диаметром d [дэ маленькое], с диаметром витка D [дэ большое] и относительно малым шагом навивки. Определим внутренние силы, возникающие в пружине при её сжатии силами F [эф]. Для этого воспользуемся методом сечений. Сделаем сечение в произвольном месте пружины, разделив ее на две части. Оставим для рассмотрения верхнюю часть и запишем уравнения равновесия. Из условия равенства нулю суммы проекций всех сил на вертикальную ось заштрихованного сечения проволоки пружины получим выражение (6.26) для возникающей в нем внутренней поперечной силы. А из условия равенства нулю суммы моментов относительно оси z [зэт] сечения получим формулу (6.27) для определения внутреннего крутящего момента. Таким образом, от действия на пружину сжимающих сил в поперечных сечениях проволоки возникают два внутренних силовых фактора: поперечная сила и крутящий момент.

Каждый из этих силовых факторов является обобщением касательных напряжений. Графическая иллюстрация сказанного представлена эпюрой касательных напряжений от поперечной силы на рисунке 6.7 и эпюрой касательных напряжений от крутящего момента на рисунке 6.8.

Слайд 208

Расчет цилиндрических пружин

Будем считать, что поперечная сила Qy [ку игрек] равномерно распределена по сечению, как показано на рисунке 1. Тогда касательное напряжение от нее можно определить по формуле (6.28).

От действия внутреннего крутящего момента закон изменения касательных напряжений, представленный на рисунке 2, соответствует уже известному нам выражению (6.29) для максимального касательного напряжения при кручении стержней круглого профиля.

Из эпюр касательных напряжений на рисунках 1 и 2 видно, что опасной точкой сечения является точка С [цэ] на внутренней стороне пружины, так как в ней возникает бóльшое напряжение от крутящего момента. Складывая величины напряжений от поперечной силы и крутящего момента, возникающие в точке С [цэ], получим суммарное напряжение по формуле (6.30).

Слайд 209

Условие прочности для пружин

Обычно для практических расчетов пренебрегают сомножителем в скобке формулы (6.30) и используют приближенную формулу (6.31). Для более точных расчетов вводят коэффициент k [ка] и расчет делают по формуле (6.32). Для определения поправочного коэффициента k [ка] используют выражение (6.33), в которое входит параметр Сп [цэ пэ], который называется индексом пружины и представляет собой отношение диаметра проволоки к диаметру витка пружины. В зависимости от величины индекса пружины, из представленной на слайде таблицы, выбирают поправочный коэффициент k [ка]. Условие прочности для пружины заключается в ограничении максимального касательного напряжения величиной допускаемого напряжения.

Слайд 210

Определение осадки пружины

Для расчета пружины на жесткость определим ее осадку под действием сжимающих сил. Для этого запишем уравнение энергетического баланса (6.34). В условиях статического нагружения пружины вся работы внешней силы будет потрачена на потенциальную энергию деформации.

Левую часть равенства (6.34) заменим одной второй произведения сжимающей силы F [эф] на величину осадки пружины λ [лямбда] на основании теоремы Клайперона. Правую часть равенства заменяем формулой для потенциальной энергии деформации при кручении стержней круглого профиля. Заменяем под интегралом правой части крутящий момент по формуле (6.27), полярный момент инерции для случая круглого профиля и интегрируя по длине всей пружины, получим формулу (6.35) для вычисления осадки пружины. Условие жесткости заключается в ограничении величины осадки пружины допускаемым значением, которое определяется условиями эксплуатации.

Слайд 211

Практические расчеты на срез

Соединить внахлест два или более листов можно с помощью шва из заклепок. Под действием продольных внешних сил F [эф] каждая заклепка работает на срез, так как в ее поперечных сечениях возникают внутренние поперечные силы. Учитывая, что в момент среза касательные напряжения равномерно распределены по поперечному сечению заклепки, условие прочности на срез можно записать в виде выражения (6.35), поделив силу среза на срезаемую площадь сечения. Чтобы определить площадь среза необходимо умножить площадь поперечного сечения одной заклепки на количество срезаемых заклепок i [и] количество плоскостей m [эм], по которым происходит срез. На рисунке 1 показано односрезное соединение, а на рисунке 2 – двух срезное.

Допускаемое касательное напряжение в правой части условия прочности (6.35) определяется в долях от предела текучести материала заклепок.

Аналогично заклепочным соединениям рассчитываются болтовые соединения. Рассмотренные формулы можно использовать также для шпоночных и шлицевых соединений.

Слайд 212

Практические расчеты на смятие

Кроме деформации среза, которую испытывает сам крепежный элемент: заклепка или болт, может произойти смятие стенок отверстия под крепеж в соединяемых элементах, приводящее к разрушению соединения. Расчет на смятие проводят по формуле (6.36), в которой площадь смятия определяется произведением диаметра заклепки или болта на толщину скрепляемых листов δ [дельта] и на количество заклепок i [и].

Допускаемое напряжение на смятие зависит от типа стали. Так для малоуглеродистых сталей его величина находится в диапазоне от ста до ста десяти мега Паскалей. А для среднеуглеродистых сталей – от ста сорока до ста семидесяти.

Слайд 213

Расчет сварных соединений

Соединение листов может осуществляться с помощью сварки.

Существует различные виды сварных соединений. Так на рисунке 1 показано стыковое соединение. Такие типы соединений работают под действием внешних сил F [эф] на разрыв. В данном случае в поперечном сечении сварного шва возникают нормальные напряжения, которые можно определить как отношение силы, работающей на разрыв к площади поперечного сечения сварного шва. Последняя равна произведению длины шва на толщину соединяемых листов. Условие прочности на разрыв представлено на слайде формулой (6.37).

Второй тип соединения внахлест показан на рисунке 6.2 и характеризуется тем, что сварной шов работает на срез в плоскости максимальной слабины, совпадающей с биссекторной плоскостью шва. Эта плоскость показана на рисунке 3. Там возникают максимальные касательные напряжения, которые можно определить по формуле (6.38). Сила среза в ней делится на величину площади биссекторной плоскости. Коэффициент 0,7 [ноль целых семь десятых] – это синус угла в сорок пять градусов, на который умножается величина катета равнобокого сварного шва для определения стороны биссекторной плоскости.

В правых частях обоих условий прочности присутствуют допускаемые напряжения для основного материала, то есть материала соединяемых элементов. Это говорит о том, что прочность самого сварного шва не уступает прочности основного металла.

Тема 7 Устойчивость сжатых стержней

Слайд 214

Понятие об устойчивости и критической силе

Применение в технике материалов повышенной прочности позволяет создавать элементы конструкции с небольшими размерами поперечного сечения. Однако такие элементы при сжимающих воздействиях могут внезапно выпучиваться или сминаться. При этом несущая способность конструкции резко падает. Таким образом, в дополнение к расчётам на прочность и жёсткость требуется расчёт на устойчивость.

Понятие устойчивости широко применяется в разных отраслях знания и в повседневной жизни. Так мы называем способность какой-либо системы сохранять своё состояние при внешних воздействиях.

В механике используются понятия устойчивого и неустойчивого равновесного состояния. Если малые внешние воздействия вызывают малые отклонения системы от положения равновесия, её состояние является устойчивым. Если малым внешним воздействиям соответствуют большие отклонения, система находятся в неустойчивом состоянии.

В сопротивлении материалов под устойчивостью понимается свойство элемента конструкции сохранять заданную форму упругого равновесия под внешним воздействием.

Рассмотрим изображённый на рисунке 1 стержень, шарнирно закреплённый на концах и нагруженный сжимающей силой, действующей вдоль его оси. В процессе нагружения по мере роста величины силы F [эф] стержень до некоторого предела остаётся прямолинейным, а затем внезапно искривляется, как показано на рисунке 2. Такой вид деформации называется продольным изгибом.

Величина силы, при которой возникает отклонение от первоначальной формы равновесия, называется критической.

Продольный изгиб является одним из самых простых видов потери устойчивости. Вместе с тем, этот случай очень важен при анализе работы многих конструкций. К ним относятся строительные колонны, стойки подъёмных кранов, ходовые винты станков, пружины сжатия, домкраты.

Слайд 215

Задача Эйлера

Рассмотрим стержень, нагруженный центрально приложенной сжимающей силой. При достижении силой значения Fкр [эф критическое] возникает искривление стержня. Определим величину этой силы.

Пусть размеры поперечного сечения стержня одинаковы по всей его длине. Примем также, что после появления прогиба материал стержня находится в упругом состоянии.

Воспользуемся приближённым дифференциальным уравнением упругой линии (7.1), полученным ранее для случая изгиба. Внутренний изгибающий момент, возникающий в произвольном сечении стержня, можно определить как произведение силы Fкр [эф критическое] на величину прогиба этого сечения y [игрек]. Минус в выражении (7.2) означает, что при изгибе стержня вверх сжимаются его нижние волокна. С учётом этого выражения дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня можно записать в виде (7.3). Из курса высшей математики известно, что решение таких уравнений имеет вид (7.4).

Слайд 216

Задача Эйлера

Для определения величины критической силы из уравнения (7.4) рассмотрим граничные условия.

Первое условие – отсутствие прогиба y [игрек] на левом конце стержня, то есть при координате z = 0 [зет равное нулю]. Подставив нулевые значения для z [зет] и y [игрек] в выражение (7.4), находим, что постоянная интегрирования D = 0 [дэ равна нулю], и уравнение изогнутой оси стержня упрощается до (7.6). Таким образом, упругая линия стержня представляет собой синусоиду.

Второе граничное условие – это отсутствие прогиба y [игрек] на правом конце стержня, то есть при координате z [зет равное нулю], равной длине стержня l [эль]. Подставим эти значения в уравнение (7.6). Постоянная интегрирования C [цэ] не может быть равной нулю, так как в этом случае получится уравнение прямой линии. Поэтому результатом применения второго граничного условия является выражение (7.7).

Полученное выражение имеет бесконечное множество решений. Ограничимся рассмотрением положительных корней. Они удовлетворяют условию (7.8).

Слайд 217

Задача Эйлера

Из формулы (7.8) выразим коэффициент k [ка] в виде (7.9). Используя подстановку (7.5), получим выражение (7.10) для критической силы.

Попробуем определить, какой смысл имеет величина n [эн], входящая в полученную формулу. Для этого подставим выражение (7.9) в уравнение изогнутой оси стержня (7.6). Построим графики полученного уравнения (7.11) для разных значений коэффициента n [эн]. Как видно из представленного рисунка, n [эн] – это число полуволн синусоиды, возникающих при изгибе стержня.

Таким образом, существует бесконечное множество значений критической силы, каждому из которых соответствует своя форма изогнутой оси стержня. На практике упругие формы второго и более высокого порядка можно наблюдать только при ограничении прогибов стержня. Например, если стержень заключён в трубку. В связи с этим наибольший практический интерес имеет минимальное значение критической силы, которое получим для $n = 1$ [эн равного единице]. Формула (7.12) была впервые получена Леонардом Эйлером.

Слайд 218

Коэффициент приведения длины

Формула Эйлера была выведена для стержня, шарнирно закреплённого по концам. Такой стержень часто называется стержнем Эйлера. С поправкой на условия закрепления формула Эйлера принимает вид (7.13). Коэффициент приведения длины μ [мю] в этой формуле показывает, во сколько раз нужно увеличить длину стержня с данными условиями закрепления, чтобы привести его к условиям деформации стержня Эйлера, то есть к одной полуволне синусоиды.

Коэффициент приведения длины можно определить из геометрических соображений как часть длины стержня, которую занимает одна полуволна синусоиды при потере устойчивости прямолинейной формы стержня.

Очевидно, что для стержня Эйлера, показанного на рисунке (а), коэффициент приведения длины равен единице.

Стержень на рисунке (б) жёстко закреплён нижним концом и свободен в верхнем сечении. Поэтому верхний конец при потере устойчивости свободно перемещается, а жёсткая заделка препятствует возникновению угла поворота нижнего конца стержня. В результате при потере устойчивости стержень изгибается по одной четверти волны синусоиды. Чтобы получить полуволну, длину стержня нужно увеличить в два раза. Следовательно, коэффициент $\mu = 2$ [мю равен двум].

У стержня на рисунке (в) нижний конец закреплён жёстко, а верхний – шарнирно. Поэтому верхнее сечение при потере устойчивости может поворачиваться, а нижнее – не может. Изогнутая ось содержит примерно 1,5 [полторы] полуволны синусоиды. Точное значение коэффициента приведения длины 0,7 [ноль целых семь десятых].

Стержень с шарнирными закреплениями концов и промежуточной шарнирной опорой показан на рисунке (г). При потере устойчивости он изгибается по целой волне синусоиды. Поэтому коэффициент $\mu = 0{,}5$ [мю равен нулю целых пяти десятым].

У стержня, показанного на рисунке (д), обе опоры препятствуют появлению угловых перемещений. Поэтому при потере устойчивости изогнутая ось содержит целую волну синусоиды. Коэффициент приведения длины, как и в предыдущем случае, равен 0,5 [ноль целых пять десятых].

Слайд 219

Равноустойчивость

Определяя критическую силу по формуле Эйлера, необходимо предусмотреть, в какой главной плоскости инерции стержень потеряет устойчивость. Это зависит от формы и размеров поперечного сечения и от способа закрепления стержня.

Для стержня, показанного на рисунке 1, значения критических сил потери устойчивости в двух главных плоскостях инерции xz [икс зет] и yz [игрек зет] определяются по формулам (7.14). Потеря устойчивости будет происходить в той плоскости, в которой значение критической силы будет меньше.

При проектировании стержня обычно стремятся, чтобы он был равноустойчив в обеих главных плоскостях инерции, то есть чтобы выполнялось условие (7.15). В общем случае, когда условия закрепления стержня в плоскостях xz [икс зет] и yz [игрек зет] различны, условие равноустойчивости можно преобразовать к виду (7.16). Если же стержень закреплён так, что имеет одинаковую форму потери устойчивости в двух главных плоскостях инерции, то условие равноустойчивости упрощается до выражения (7.17). То есть до равенства главных центральных моментов инерции.

Таким образом, равноустойчивыми формами поперечного сечения являются такие формы, для которых выполняется условие (7.17). Примеры таких сечений показаны на рисунке 2.

Слайд 220

Критическое напряжение

Введём понятие критического напряжения, определив его как отношение критической силы к площади поперечного сечения стержня А. Применяя формулу Эйлера, критическое напряжение можно определить в соответствии с выражением (7.18).

Воспользуемся понятием радиуса инерции поперечного сечения (7.19). Это даёт возможность переписать формулу (7.18) в виде (7.20). Обозначим отношение приведённой длины стержня μl [мю эль] к радиусу инерции его сечения i [и] буквой λ [лямбда]. Эта величина называется гибкостью стержня. С учётом выражения (7.21), формулу для вычисления критического напряжения по Эйлеру можно записать в виде (7.22).

Формула Эйлера была получена для случая, когда материал стержня находится в упругом состоянии. Это справедливо, если выполняется закон Гука, то есть критическое напряжение не превышает предела пропорциональности материала σпц [сигма пэ цэ]. Подставим в условие (7.23) выражение для критического напряжения (7.22). Тогда условие применимости формулы Эйлера примет вид (7.24). Выразим из полученного неравенства гибкость стержня. Она должна быть не менее, чем некоторое значение λпред [лямбда предельное]. Как видно из формулы (7.25), предельная гибкость зависит только от свойств материала стержня.

Слайд 221

Зависимость критического напряжения от гибкости

На рисунке показана диаграмма зависимости критического напряжения от гибкости стержня для пластичного материала.

Если гибкость стержня превышает величину λпред [лямбда предельное], критическое напряжение определяется по формуле Эйлера. Эта часть диаграммы называется областью большой гибкости. График на этом участке имеет форму гиперболы.

В случае, когда гибкость стержня принимает значения между λ0 [лямбда нулевое] и λпред [лямбда предельное], также может наблюдаться потеря устойчивости. При этом критическое напряжение оказывается существенно меньше, чем предсказывает формула Эйлера. Эта область называется областью средней гибкости. Критическое напряжение определяется по формулам Ясинского: (7.26) для стали или (7.27) для чугунов. Величины a, b [бэ] и c [цэ], входящие в эти формулы, представляют собой эмпирические коэффициенты, зависящие от марки материала. Их значения можно найти в справочниках. То же самое можно сказать и о гибкости λ0 [лямбда нулевое].

Если гибкость стержня меньше некоторой величины λ0 [лямбда нулевое], повышение нагрузки приводит не к потере устойчивости, а к возникновению пластических деформаций. В этом случае проводится расчёт на прочность, а не на устойчивость. Условно критическое напряжение принимается равным пределу текучести σт [сигма тэ]. Эта область диаграммы называется областью малой гибкости. Величина λ0 [лямбда нулевое] определяется экспериментально. Её можно найти в справочниках в зависимости от вида и марки материала.

Слайд 222

Условие устойчивости

Практический расчёт на устойчивость выполняется с использованием условия устойчивости. Существует две формы его записи.

В машиностроении условие устойчивости формулируется в виде (7.28), то есть через силу, действующую на стержень. При этом допускаемая сила [F] [эф в квадратных скобках] определяется как отношение критической силы к нормативному коэффициенту запаса по устойчивости.

С увеличением гибкости возрастает вероятность начального кривизны стержня. Поэтому величина нормативного коэффициента запаса по устойчивости зависит от гибкости стержня и назначается в соответствии с формулами (7.29).

Слайд 223

Условие устойчивости

В строительстве условие устойчивости принято записывать через напряжения, в виде неравенства (7.30). Допускаемое напряжение при расчете на устойчивость значительно меньше допускаемого напряжения на обычное сжатие и определяется выражением (7.31), где φ [фи] – коэффициент продольного изгиба. Величина φ [фи] изменяется в пределах от 0 [нуля] до 1 [единицы]. Она зависит от гибкости стержня и от прочностных характеристик материала и является справочной величиной.

Таким образом, допускаемая сила при расчёте на устойчивость можно определить по формуле (7.32).

Условие устойчивости (7.30) используется также в некоторых отраслях машиностроения, например, при расчёте стоек подъёмных кранов. В этом случае коэффициент φ [фи] называют коэффициентом снижения основного допускаемого напряжения. Этот метод используется и в нашем курсе.

Слайд 224

Пример проектного расчёта на устойчивость

Рассмотрим пример решения задачи.

Задана показанная на рисунке 1 стойка, нагруженная сжимающей силой. Поперечное сечение стойки изображено на рисунке 2. Материал стойки – сталь марки Ст3 [эс тэ три] с характеристиками, указанными на слайде.

Требуется подобрать величину размера а поперечного сечения стойки, обеспечив ее устойчивость. Для спроектированной стойки определить величину критической силы и коэффициент запаса устойчивости.

Данная задача относится к классу проектировочных и решается методом последовательных приближений.

Слайд 225

Геометрические характеристики поперечного сечения

Выразим предварительно необходимые для расчёта геометрические характеристики поперечного сечения стойки через характерный размер а.

Площадь сечения А определим как разность площадей круга и прямоугольного выреза. По такому же принципу определим моменты инерции сечения относительно осей х [икс] и у [игрек].

Момент инерции Jx [жи икс] получился меньше, чем Jy [жи игрек], то есть ось х [икс] является осью наименьшей жёсткости. Именно эту величину и возьмём для определения минимального радиуса инерции сечения.

Слайд 226

Итерация №1

Зададим первое значение коэффициента продольного изгиба φ1 [фи один], равное 0,5.

Определим допускаемую величину площади поперечного сечения А. Это даёт возможность определить характерный размер а, радиус инерции imin [и минимальное] и гибкость стойки λmax [лямбда максимальное].

Из таблицы коэффициентов продольного изгиба по найденной гибкости и марке материала выпишем уточнённый коэффициент φ_1' [фи один штрих]. Полученная гибкость попала по таблице в интервал значений от 90 до 100. Фрагмент таблицы для стали Ст3 [эс тэ три] представлен на слайде. Для определения значения φ_1' [фи один штрих] воспользуемся методом линейной интерполяции.

Определим процент расхождения коэффициентов φ1 [фи один] и φ_1' [фи один штрих]. Оно превышает 3% [три процента], то есть является существенным, что требует продолжения расчёта.

Слайд 227

Итерация №2

Для второй итерации зададимся новым значением коэффициента продольного изгиба φ2 [фи два]. Определяем его как среднее значение коэффициентов на предыдущей итерации, то есть коэффициентов φ1 [фи один] и φ_1' [фи один штрих].

Вычисляем новые значения площади поперечного сечения, характерного размера, радиуса инерции и гибкости стойки.

Гибкость попала в интервал значений от 100 до 110. Фрагмент таблицы для этого интервала представлен на слайде. И вновь проведём линейную интерполяцию для определения φ_2' [фи два штрих]. Оценим процент расхождения между φ2 [фи два] и φ_2' [фи два штрих], и это уже небольшое расхождение, позволяющее выйти из итерационного процесса.

Слайд 228

Определение критической силы и коэффициента запаса

Определим величину расчётного напряжения в конце второй итерации и рассчитаем процент его расхождения с допускаемым напряжением. Так как процент расхождения не превышает 3% [три процента], подбор размера поперечного сечения стойки закончен. За величину размера а принимаем его значение, полученное на второй итерации.

Определим величину критической силы и коэффициент запаса по устойчивости.

Для определения величины критической силы узнаем, к какому типу относится данная стойка. С этой целью сравним значение гибкости на последней итерации, равное 104, с предельными значениями для Ст3 [эс тэ три], равными 61 и 100. Так как рассчитанная гибкость превышает λпред [лямбда предельное], равное 100, значит, спроектированная стойка обладает большой гибкостью. Следовательно, расчёт критической силы нужно провести по формуле Эйлера. Коэффициент запаса по устойчивости определяется как отношение критической силы к заданной по условию.

Задача решена.

Слайд 229

Пример расчёта на грузоподъёмность

На рисунке 1 задана стойка, нагруженная осевой сжимающей силой F [эф]. Условия закрепления в плоскостях xoz [икс о зет] и yoz [игрек о зет] одинаковы. Стойка, имеющая поперечное сечение в виде двух швеллеров №12 [номер двенадцать], показанное на рисунке 2.

Требуется определить расстояние X [икс] между ветвями стойки, обеспечивающее равноустойчивость конструкции, величины и критической силы, коэффициент запаса устойчивости.

Слайд 230

Обеспечение равноустойчивости стойки

Выпишем из таблицы сортамента прокатных профилей моменты инерции швеллера №12 [номер двенадцать] относительно его главных центральных осей Ix [и икс] и Iy [и игрек], площадь A и расстояние x0 [икс нулевое].

Для определения расстояния X [икс], при котором стойка будет равноустойчивой, воспользуемся условием равноустойчивости. В данном случае оно сводится к равенству моментов инерции. Момент инерции относительно оси Y [игрек] вычислим, учитывая, что ось Yшв [игрек швеллера] отстоит от неё на расстояние, равное сумме половины расстояния X [икс] и x0 [икс нулевое].

Приравнивая друг к другу моменты инерции, определим расстояние X [икс].

Слайд 231

Определение допускаемой и критической нагрузки

Определим величину допускаемой нагрузки. Для этого вычислим гибкость стойки. Так как конструкция равноустойчива, то можно использовать для этой цели гибкость относительно оси x [икс]. Коэффициент приведения длины μ [мю] для данных условий закрепления равен 0,5. Радиус инерции ix [и икс] из таблицы сортамента для швеллера №12 [номер 12] равен 4,78 см.

По таблице коэффициентов продольного изгиба определим величину φ [фи] в соответствии с гибкостью и маркой материала. Гибкость попала в интервал значений от 70 до 80. Фрагмент таблицы для этого интервала представлен на слайде.

Определим коэффициент φ [фи] для значения гибкости 73,22 путём линейной интерполяции.

Применим формулу для вычисления допускаемой нагрузки.

Определим величину критической силы. Гибкость стойки попала в интервал между значениями λ_0 [лямбда нулевое] и $\lambda_{пред}$ [лямбда предельное], следовательно, стойка относится к области средней гибкости. Величина критической силы рассчитывается по формуле Ясинского.

Коэффициент запаса устойчивости находим как отношение величин критической и допускаемой силы.

Задача решена.

Тема 8 Выносливость

Слайд 232

Понятие об усталости и выносливости

До сих пор были рассмотрены вопросы прочности при статическом нагружении, то есть предполагалось, что напряжение медленно возрастает от нуля до некоторого значения и затем сохраняется постоянным. Вместе с тем, многие детали машин работают в условиях переменных напряжений.

Известно, что детали машин, подвергаемые действию повторно-переменных нагрузок, могут внезапно разрушиться при напряжениях, меньших предела текучести без заметных остаточных деформаций. То есть циклическое напряжение является более опасным, чем статическое.

Действие переменной нагрузки на начальной стадии связано с процессами пластической деформации, протекающими в отдельных, наименее удачно ориентированных зернах. Пластическое деформирование то в одном, то в другом направлении сопровождается некоторыми разрушениями и приводит к возникновению микротрещин. В результате роста и слияния микротрещин образуется магистральная трещина, вызывающая разрушение.

Слайд 233

Напряжения при вращении изогнутого вала

Для возникновения переменных нагрузок совсем не обязательно, чтобы внешние силы, действующие на элемент конструкции, менялись по величине и по направлению. Рассмотрим в качестве примера работу показанного на рисунке 1 вращающегося вала, нагруженного поперечными силами.

Рассмотрим сечение вала в средней его области, то есть области чистого изгиба. Распределение нормальных напряжений по высоте сечения изображено на рисунке 2. Выделим на границе сечения точку 1. Она находится в области сжатия. Через четверть оборота эта точка окажется в положении 2, на нейтральной линии. Еще через четверть оборота – в положении 3, в области растяжения. Затем наша точка снова переходит через нейтральную линию, в положении 4 и смещается в область сжатия.

Зависимость напряжения от времени для рассматриваемой точки представлена на рисунке 3. Таким образом, при постоянстве внешних сил за счет вращения оси вала создаются переменные напряжения. В аналогичных условиях работают все валы зубчатых передач.

Слайд 234

Характеристики цикла напряжений

Реальную зависимость напряжения от времени принято заменять синусоидой. При этом предполагается, что усталостное разрушение определяется только максимальным σmax [сигма максимальное] и минимальным σmin [сигма минимальное] напряжением цикла.

Более удобными для расчетов являются значения среднего σm [сигма эм] и амплитудногоσa [сигма а] напряжений цикла. Они рассчитываются соответственно по формулам (8.1) и (8.2).

Ещё одна характеристика цикла – коэффициент асимметрии Rσ [эр сигма], определяемый по формуле (8.3) как отношение минимального напряжения цикла к максимальному.

Слайд 235

Классификация циклов напряжений

Принято различать знакопеременные и знакопостоянные циклы.

На рисунке 1 показаны примеры знакопеременных циклов. Видно, что максимальное и минимальное напряжения имеют разный знак, поэтому коэффициент асимметрии для этих циклов отрицательный. Наиболее важным из знакопеременных циклов является симметричный цикл, график которого показан на рисунке 1б. Для этого цикла максимальное и минимальное напряжения равны по величине, но противоположны по знаку. Коэффициент асимметрии симметричного цикла равен -1 [минус единице].

Примеры знакопостоянных циклов приведены на рисунке 2. Видно, что с течением времени знак напряжения не меняется, поэтому коэффициент асимметрии этих циклов положительный. Наиболее важными из знакопостоянных циклов являются пульсационные. Для одного из них равно нулю минимальное напряжение, то есть коэффициент асимметрии равен нулю. Соответствующий график показан на рисунке 2б. Такой цикл называется также отнулевым. График второго пульсационного цикла показан на рисунке 2в. У него равно нулю максимальное напряжение, поэтому коэффициент асимметрии равен –∞ [минус бесконечность].

Слайд 236

Предел выносливости

Для испытаний на выносливость изготавливается партия совершенно одинаковых стержневых образцов, которые подвергают переменному растяжению-сжатию, изгибу или кручению. Форма образцов зависит от вида деформации.

Наиболее распространены испытания на переменный изгиб при симметричном цикле. Первый образец из партии испытывается при максимальном напряжении, составляющем от 50 до 70% от предела прочности. Для второго задаётся несколько меньшее напряжение и так далее, пока очередной образец не выдержит базового числа циклов нагружения.

Под базовым числом понимается число циклов, до которого ведется испытание. Для углеродистых сталей и чугунов это 107 (десять миллионов) циклов, для цветных металлов и высокопрочных сталей в 5…10 раз больше.

Обработка результатов испытаний состоит в построении диаграммы в координатах максимальное напряжение – число циклов до разрушения. Такая диаграмма называется кривой усталости или кривой Велера. Примерный вид её показан на рисунке 1. Каждому разрушенному образцу соответствует точка на диаграмме.

Если кривую усталости перестроить в двойных логарифмических координатах, то для углеродистых сталей и чугунов она будет представлена двумя прямыми линиями, как показано на рисунке 2.

Величина напряжения, соответствующая горизонтальному участку диаграммы, называется пределом выносливости. Предел выносливости – это наибольшее значение напряжения, при котором образцы не разрушаются при любом, сколь угодно большом числе циклов нагружения.

Для цветных металлов и высокопрочных сталей горизонтального участка, как правило, не наблюдается. Этот случай показан на рисунке 3. При этом определяется условный предел выносливости. Условный предел выносливости – это наибольшее напряжение, при котором образцы не разрушаются, достигнув заданного числа циклов.

Предел выносливости обозначается буквой σ [сигма] с индексом, соответствующим коэффициенту асимметрии цикла. Таким образом, для симметричного цикла предел выносливости обозначается σ–1 [сигма минус один], для пульсационного – σ0 [сигма ноль].

Слайд 237

Диаграмма предельных амплитуд

Определим для некоторого множества значений коэффициентов асимметрии Rσ [эр сигма] значения предела выносливости σR [сигма эр], каждый из которых представим в виде суммы (8.4).

Нанесем в координатах амплитуда – среднее напряжение точки с координатами $\sigma_{m\,\text{пр}}, \sigma_{a\,\text{пр}}$ [сигма эм предельное, сигма а предельное]. В результате получим график, называемый диаграммой предельных амплитуд.

Точка А на диаграмме соответствует симметричному циклу напряжений, точка В [бэ] – статическому нагружению.

Луч, проведенный из начала координат, является геометрическим местом точек, характеризующих подобные циклы, то есть циклы с одинаковым коэффициентом асимметрии. Это свойство можно доказать с помощью выражения (8.5)

Пусть цикл характеризуется известными значениями σm [сигма эм] и σa [сигма а], которые можно рассматривать как координаты рабочей точки С [цэ]. По положению этой точки на диаграмме можно определить величину коэффициента запаса циклической прочности образца по формуле (8.6).

Кривая предельных амплитуд существует и в области сжимающих напряжений. Для сталей с уменьшением среднего напряжения амплитуды пределов выносливости быстро возрастают, поэтому усталостные разрушения при знакопостоянных напряжениях сжатия, как правило, отсутствуют.

Слайд 238

Схематизированные диаграммы предельных амплитуд

Построение диаграммы предельных амплитуд является очень трудоемким процессом, поэтому обычно ее схематизируют. Рассмотрим два простейших способа схематизации.

На рисунке 1 представлена схематизация по Кинасошвили.

Верхняя часть диаграммы заменяется прямой, проходящей через точку А и точку, соответствующую пределу выносливости при отнулевом цикле.

Угловой коэффициент этой прямой $\Psi\sigma$ [пси сигма] называется коэффициентом чувствительности материала к асимметрии цикла. Правая часть диаграммы заменяется прямой, которая для пластичных материалов проходит через точку, соответствующую пределу текучести, и составляет с осями координат угол 45°.

Схематизация по Гудману показана на рисунке 2.

Диаграмма предельных амплитуд заменяется прямой, соединяющей точки A и D [дэ].

Слайд 239

Влияние различных факторов на предел выносливости

Установлено, что при переменном растяжении-сжатии предел выносливости меньше, чем при переменном изгибе. Это связано с тем, что при продольном нагружении всё сечение подвергается одинаковым напряжениям, а при изгибе максимальное напряжение достигается в крайних волокнах.

Сравним напряженное состояние, возникающее в растягиваемой пластине на рисунке 1 в сечении, ослабленном отверстием, и в сплошном сечении.

Во втором случае напряжение распределено равномерно по сечению, а в первом – неравномерно, резко увеличиваясь по мере приближения к отверстию.

Подобное явление наблюдается при растяжении стержня с выточками, при изгибе ступенчатого стержня, при прессовой посадке втулки на вал. Эти случаи показаны на рисунках 2, 3 и 4.

Явление увеличения напряжений в окрестностях мест резкого изменения формы тела, а также в зоне контакта соприкасающихся тел, называется концентрацией напряжений. Факторы, вызывающие концентрацию напряжений, называются концентраторами напряжений.

Для пластичных материалов при статическом нагружении концентрация напряжений неопасна, а при повторно-переменной нагрузке она способствует зарождению усталостной трещины.

Для учета влияния концентрации напряжений в расчетной практике вводятся эффективные коэффициенты концентрации напряжений. Они определяются в соответствии с формулами (8.7) и (8.8) как отношение пределов выносливости, полученных на гладких образцах и на образцах с концентраторами.

Эффективные коэффициенты концентрации напряжений тем больше, чем острее концентратор, чем прочнее материал и чем жестче вид напряженного состояния.

Слайд 240

Влияние различных факторов на предел выносливости

Экспериментально установлено, что с увеличением размеров образца предел выносливости снижается.

Масштабный эффект связан с двумя факторами. Первый фактор технологический. Известно, что материал больших заготовок хуже по качеству, чем материал малых. Второй фактор статистический. С увеличением размеров поперечного сечения повышается вероятность появления дефектов и опасно ориентированных зерен.

Масштабный эффект учитывается коэффициентами масштабного фактора. Они определяются по формулам (8.9), как отношение пределов выносливости, полученных на образцах заданного диаметра и на образцах стандартного размера.

Усталостная трещина во многих случаях зарождается у поверхности, поэтому состояние поверхностного слоя оказывает существенное влияние на выносливость изделия.

Бороздки шероховатости поверхности являются микроконцентраторами напряжений. Коэффициент влияния шероховатости поверхности определяется по формуле (8.10), как отношение пределов выносливости, полученных на образцах с заданной шероховатостью и на полированных образцах.

Совместное влияние всех факторов учитывается коэффициентом снижения предела выносливости, который можно определить по формуле (8.11).

Слайд 241

Коэффициент запаса при циклическом нагружении

Вернемся к диаграмме предельных амплитуд.

Область OABC [о а бэ цэ] является областью допустимых режимов работы для образца. Для реального изделия из-за влияния концентрации напряжений, масштабного фактора и состояния поверхности амплитуды предельных циклов уменьшаются, и областью допустимых режимов является OA1B1C [о а один бэ один цэ].

Пусть известны предел текучести материала σт [сигма тэ], его предел выносливости при симметричном цикле σ–1 [сигма минус один] и коэффициент чувствительности к асимметрии цикла ψσ [пси сигма]. Элемент конструкции работает при переменном изгибе с коэффициентом снижения предела выносливости $K_{\sigma д}$ [ка сигма дэ] и характеристиками рабочего цикла $\sigma_m^{\text{раб}}$ [сигма эм рабочее], $\sigma_a^{\text{раб}}$ [сигма а рабочее]. Определим коэффициенты запаса по выносливости nσ [эн сигма] и текучести nт [эн тэ].

Графический способ определения коэффициентов запаса заключается в следующем. Нанесем на диаграмму рабочую точку D [дэ] с координатами $\sigma_m^{\text{раб}}$ [сигма эм рабочее], $\sigma_a^{\text{раб}}$ [сигма а рабочее]. Проведем из начала координат луч через эту точку до пересечения с линией диаграммы. Точка пересечения E характеризует предельный цикл. Определим искомый коэффициент запаса по формуле (8.12).

Определение коэффициентов запаса расчетным способом осуществляется следующим образом.

Коэффициент запаса по текучести, определяется выражением (8.13) как отношение предела текучести к максимальному напряжению цикла. Коэффициент запаса по выносливости определяется по формуле (8.14).

Слайд 242

Пример расчёта на циклическую прочность

Участок вала с концентратором напряжений в виде выточки подвергается действию переменного изгиба. Значение изгибающего момента изменяется в диапазоне (8.15). Заданы значения геометрических размеров вала (8.16). Вал изготовлен из стали 40ХН с указанными механическими характеристиками.

Требуется определить коэффициент запаса по усталостной прочности и по текучести. Сделать выводы о наиболее вероятном механизме разрушения.

Слайд 243

Характеристики цикла напряжений

Определим характеристики цикла нормальных напряжений, возникающих в опасном сечении участка вала, которым является сечение выточки диаметром d [дэ малое].

Вычислим коэффициент асимметрии цикла как отношение минимального значения изгибающего момента к максимальному.

Определим максимальное напряжение цикла как отношение максимального значения изгибающего момента к осевому моменту сопротивления сечения. В данном случае момент сопротивления определяется по формуле круга диаметром d [дэ малое].

Минимальное напряжение цикла рассчитаем как произведение максимального напряжения на коэффициент асимметрии.

Вычислим амплитуду и среднее напряжение цикла соответственно как полуразность и полусумму максимального и минимального напряжения.

Слайд 244

Определение коэффициента запаса

Определим по справочным таблицам коэффициенты, влияющие на предел выносливости по нормальным напряжениям.

Определим коэффициенты запаса вала по усталостной прочности и по текучести, используя формулы 8.13 и 8.14.

Сравнивая полученные коэффициенты, можно сделать вывод, что в материале рассматриваемого вала при данном режиме нагружения механизм развития усталостных трещин работает интенсивнее, чем механизм развития пластической деформации.

Задача решена.

Тема 9 Колебания упругих систем

Слайд 245

Классификация механических колебаний

Первое, что важно знать при исследовании колебательных движений упругих систем – число степеней свободы, т.е. число независимых переменных, необходимых и достаточных для описания состояния системы в любой момент времени.

В простейших случаях положение системы можно определить только одной координатой. Например, груз, подвешенный на пружине и изображенный на рисунке 1, имеет число степеней свободы n=1, так как его положение определяется одной вертикальной координатой.

Двумя степенями свободы обладает невесомая балка, несущая две массы показанная на рисунке 2 и ее положение определяется двумя координатами этих масс.

Балка на рисунке 3, с распределенной по всей длине массой, обладает бесконечным числом степеней свободы, так как ее положение определяется координатами бесконечно большого количества точек распределенной массы.

Различают следующие типы колебаний:

1. Свободные (собственные) – колебания, возникающие вследствие начального отклонения системы от положения равновесия, и происходящие только под действием сил упругости системы.
2. Вынужденные – колебания, происходящие под действием внешних периодически изменяющихся сил.
3. Параметрические – колебания, в процессе которых периодически изменяются параметры системы (например, при кручении стержня прямоугольного профиля, при потере устойчивости при пульсирующей нагрузке).
4. Автоколебания – колебания, возбуждаемые внешними силами, характер воздействия которых определяется самим колебательным процессом (например, колебания деформируемых тел в потоке жидкости или газа – флаттер).

Колебания классифицируют также по виду деформации. Так, для стержней различают продольные, поперечные и крутильные колебания.

Слайд 246

Упругая система с одной степенью свободы

Пусть тележка массой m [эм], прикрепленная к стенке пружиной жесткостью c [цэ], выводится из состояния равновесия кратковременным возмущением, действующим вдоль оси z [зэт].

На рассматриваемую систему действуют сила упругости cz [цэ умноженная на зэт] и сила инерции $m\ddot{z}$ [эм умноженная на зэт с двумя точками]. Здесь, z [зэт] – величина смещения тележки от положения равновесия, $\ddot{z}$ [зэт с двумя точками] – ускорение. В соответствии с принципом Даламбера запишем уравнение равновесия (10.1) в виде суммы проекций сил на ось z [зэт], куда и войдут перечисленные силы. Поделив оба слагаемых на величину массы m [эм], приведем уравнение к виду (10.2). Обозначим $\frac{c}{m} = \omega^2$ [цэ деленое на эм омега в квадрате].

Таким образом, дифференциальное уравнение, описывающее свободные колебания упругой системы с одной степенью свободы без учета сил сопротивления будет иметь вид (10.3).

Слайд 247

Упругая система с одной степенью свободы

Решение полученного дифференциального уравнения (10.3) можно представить в виде (10.4), где C1 [цэ один] и C2 [цэ два] постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий. Представленный на рисунке график колебательного процесса иллюстрирует решение в виде (10.5), в которое входит начальная фаза φ [фи] и собственная частота колебательного процесса ω [омега].

Таким образом, свободные (собственные) колебания представляют собой простые гармонические колебания.

Запишем жесткость пружины с [цэ] как обратную величину податливости упругой системы δ11 [дельта один один], тогда частота собственных колебаний может быть вычислена по формуле (10.6).

Слайд 248

Учет сил сопротивления

Рассмотрим упругие колебания упругой системы с одной степенью свободы с учетом сил сопротивления. Для этого добавим на нашем примере еще одну силу - силу сопротивления пропорциональную скорости колебательного процесса $\propto \cdot \dot{z}$ [альфа на зэт с точкой]. Коэффициент α [альфа] является коэффициентом пропорциональности, а $\dot{z}$ [зэт с точкой] - скорость колебательного процесса.

Снова составим уравнение равновесия (10.7) в виде суммы проекций всех сил на ось z [зэт]. Поделив каждое слагаемое на массу, приведем данное уравнение к виду (10.8). Полученное дифференциальное уравнение описывает процесс колебания упругой системы с одной степенью свободы с учетом сил сопротивления. Множитель n [эн] у второго слагаемого является коэффициентом затухания колебаний.

Слайд 249

Учет сил сопротивления

Общее решение данного дифференциального уравнения представлено формулой (10.9). Если в начальный момент времени при t [тэ] равное нулю z [зэт] равно нулю, то коэффициент C2 [цэ два] равен нулю, и уравнение колебательного процесса принимает вид (10.10), описывающее синусоиду с уменьшающейся амплитудой. На графике колебательного процесса, соответствующего полученному решению видно, что за счет действия сил сопротивления происходит затухание колебаний, и амплитуда падает по экспоненциальному закону. Под периодом T [тэ] таких колебаний понимают время между двумя максимальными отклонениями. Отношение двух последовательных максимальных амплитуд Ai [а итое] и Ai+1 [а итое плюс один] равно экспоненте в степени nT [эн тэ]. Логарифм этого отношения называется логарифмическим декреме́нтом колебательного процесса и является основной характеристикой затухания колебаний.

Слайд 250

Природа сил сопротивления

Рассмотрим природу сил сопротивления.

Различают силы внешнего сопротивления: трение в опорах, аэро- и гидродинамическое сопротивление, силы внутреннего сопротивления, например, внутреннее трение, а также силы трения в сочленениях. К числу сил внешнего сопротивления относятся также специально создаваемые для гашения колебаний демпфирующие устройства.

По характеру зависимости сил сопротивления от обобщенных скоростей различают силы линейного сопротивления, кулоново трение и сухое трение. На слайде графически представлены все три типа сил сопротивления в зависимости от скорости колебательного процесса.

Если произведение силы сопротивления на скорость колебаний больше нуля, то такая сила совершает отрицательную работу, и происходит рассеивание энергии. Она называется диссипативной.

Если произведение силы сопротивления на скорость колебаний меньше нуля, то происходит приток энергии в механическую систему, и сила называется силой отрицательного сопротивления.

Любой материал обладает демпфирующим свойством, которое можно характеризовать коэффициентом демпфирования, определяемым в условиях свободных крутильных колебаний цилиндрических образцов. В начале испытания образец закручивают на некоторый угол θ_{max} [тэта максимум] и оставляют в состоянии свободного колебательного процесса. После 25 циклов колебаний замеряют угол закручивания образца θ_{25} [тэта двадцать пять] и определяют коэффициент демпфирования $\boldsymbol{\eta}$ [эта] по формуле (10.11).

Слайд 251

Вынужденные колебания

Добавим к числу сил, которые действуют на упругую систему, вынуждающую силу, изменяющуюся по синусоидальному закону с частотой Ω [омега большое], направленную в сторону движения. Вновь составим уравнение равновесия (10.12) в виде суммы проекций всех сил на ось z [зэт]. Разделим каждое слагаемое уравнения на величину массы m [эм] и заменим F_0/m [эф нулевое деленое на эм] f [эф маленьким]. В результате получим уравнение вида (10.13), описывающее вынужденные колебания упругой системы с одной степенью свободы с учетом сил сопротивления.

Примем частное решение данного уравнения в виде (10.14) . Возьмем первую и вторую производную от выражения (10.14) и подставим в уравнение (10.13). Сгруппируем слагаемые, содержащие множитель в виде $\sin \Omega t$ [синуса омега тэ] и слагаемые, содержащие множитель $\cos \Omega t$ [косинус омега тэ]. Запишем условие выполнения равенства правой и левой частей преобразованного уравнения (10.13) в виде системы уравнений (10.15).

Слайд 252

Вынужденные колебания

Из второго уравнения системы уравнений (10.15) выразим постоянную интегрирования С2 [цэ два] через С1 [цэ один] и, подставив его в первое уравнение, получим выражение для С1 [цэ один] через параметры колебательного процесса и упругой системы в виде (10.16).

Затем формулу (10.16) подставим в выражение для С2 [цэ два] через С1 [цэ один], чтобы получить зависимость коэффициента С2 [цэ два] от параметров колебательного процесса и упругой системы (10.17).

Введем обозначения (10.18) для С1 [цэ один] и С2 [цэ два], которые подставим в выражение для z* [зэт со звездочкой]. В результате получим формулу (10.19), откуда видно, что Авын [а вынужденное]– амплитуда вынужденных колебаний, ψ [пси]– фазовый сдвиг между вынуждающей силой и вызываемыми ею колебаниями.

Слайд 253

Амплитуда вынужденных колебаний

На основании введенных обозначений (10.18) квадрат амплитуды вынужденных колебаний можно определить как сумму квадратов коэффициентов С1 [цэ один] и С2 [цэ два]. При замене коэффициентов полученными для них выражениями (10.16) и (10.17) с последующим приведением суммы к общему знаменателю получим формулу (10.20) для амплитуды вынужденных колебаний. Выразим массу из формулы собственных колебаний (10.6) и получим формулу (10.21).

Слайд 254

Амплитуда вынужденных колебаний

Подставим формулу (10.21) в формулу (10.20) и поделим числитель и знаменатель на квадрат частоты собственных колебаний. Тогда выражение для амплитуды вынужденных колебаний примет вид (10.22). Произведение $F_0\delta_{11}$ [эф нулевое на дельта один один] в формуле (10.22) есть не что иное как статическое перемещение точки упругой системы, в которой сосредоточена масса m [эм] за колебанием которой мы наблюдаем. Обозначим это произведение δст [дельта статическим] и введем его в формулу. Получим выражение (10.23), в котором множитель при статическом перемещении δст [дельта статическое] заменим коэффициентом КД, называемом коэффициентом динамичности или коэффициентом усиления колебаний.

Слайд 255

Коэффициент динамичности

Итак, коэффициент динамичности КД [ка дэ] определяется по формуле (10.24). Если частота собственных колебаний ω [омега маленькое] значительно больше частоты вынужденных колебаний Ω [омега большое] или коэффициент затухания колебаний n [эн] стремится к нулю, вторым слагаемым в формуле (10.24) можно пренебречь. Тогда КД [ка дэ] можно вычислить по упрощенной формуле (10.25), то есть получить зависимость только от отношения частот.

Слайд 256

График коэффициента динамичности

Рассмотрим график коэффициента динамичности, построенный по зависимости (10.25). Он состоит из двух ветвей. Левая ветвь располагается в до резонансной зоне, в которой отношение частот изменяется от нуля до единицы. При отношении частот равном единице коэффициент динамичности стремится к бесконечности и наступает явление резонанса. Амплитуда вынужденных колебаний принимает очень большое значение, практически резонансное, в диапазоне отношения частот от 0,75 до 1,25. Правая ветвь графика асимптотически приближается к оси отношения частот, то есть коэффициент динамичности и амплитуда вынужденных колебаний с ростом величины отношения частоты вынужденных колебаний к частоте собственных - стремится к нулю.

Слайд 257

Динамические напряжения и перемещения

Амплитуду вынужденных колебаний можно назвать динамическим перемещением, так как это максимальное отклонение от положения равновесия упругой системы под действием динамической силы, изменяющейся во времени по гармоническому закону. Тогда выражение (10.23) можно представить в виде (10.26). В соответствии с законом Гука напряжение прямо пропорционально деформации, то есть справедливо формула (10.27).

Для того чтобы воспользоваться этими формулами, необходимо:

1. Статически приложить к точке упругой системы, за колебанием которой мы наблюдаем, амплитудное значение вынуждающей силы F0 [эф нулевое].
2. Определить максимальную величину статического напряжения и перемещения, которое возникает в упругой системе под действием статически приложенной силы F0 [эф нулевое].
3. Определить коэффициент динамичности.
4. Определить максимальное динамическое напряжение и перемещение по формулам (10.26) и (10.27).

Слайд 258

Пример решения задачи

На двухопорной балке, изготовленной из двух равнобоких уголков №4, установлен электродвигатель, вес которого F=0,4 кН [эф равно ноль четыре килоньютонов]. Число оборотов электродвигателя N=500 об/мин [эн равно пятьсот оборотов в минуту], амплитудное значение центробежной силы, возникающей при вращении ротора, F0=0,05 кН [эф нулевое равно ноль ноль пять килоньютонов]. Произвести проверочный расчет на прочность подмоторной балки и определить значение длины ℓ [эль], при котором возможно наступление резонанса. Сопротивлением среды пренебречь. Допускаемое напряжение [σ] [сигма] принять равным 160 МПа.

Слайд 259

Постановка задачи

Прежде, чем приступить к решению задачи, давайте сначала разберемся, что происходит с балкой при заданном нагружении.

До установки двигателя балка находилась в прямолинейном равновесном состоянии, показанном на рисунке 1.

После установки двигателя в выключенном режиме, который можно рассматривать как сосредоточенную массу, балка испытывает деформацию изгиба от силы веса и принимает новое изогнутое равновесное состояние, как это изображено на рисунке 2.

При включенном двигателе к его весу добавляется действие центробежной силы $F_0 \sin \Omega t$ [эф нулевое на синус омега тэ], которая возникает при вращении ротора в силу неуравновешенности его массы. Эта сила инициирует вынужденные колебания балки относительно изогнутого равновесного состояния, как это видно из рисунка 3. Направление колебательного движения перпендикулярно осевой линии балки, поэтому колебания являются поперечными, а сама балка представляет собой упругую систему с одной степенью свободы.

Напряжение, возникающее в поперечных сечениях балки, вызвано двумя силами: статической силой веса электродвигателя, а так же динамической, изменяющейся во времени, центробежной силой и может быть определено по формуле (10.28).

Слайд 260

Геометрические характеристики сечения

Начнем решение задачи с определения геометрических характеристик сечения балки: осевого момента инерции и момента сопротивления, которые необходимы для определения напряжений.

Поперечное сечение сложной формы, состоит из двух гостовских равнобоких уголков №4. Из сортамента прокатной стали выпишем необходимые размеры и момент инерции относительно центральной оси x [икс] для одного уголка. Для сечения из двух уголков момент инерции будет в два раза больше. Осевой момент сопротивления Wx [дубль вэ икс] находим, как отношение момента инерции сечения к расстоянию от главной центральной оси x [икс] до максимально удаленной точки ymax [игрек максимум].

Слайд 261

Определение напряжения от веса двигателя

Найдем максимальное напряжение от статического действия силы, равной весу двигателя $F = mg$ [эф равное эм жэ]. Для этого построим грузовую эпюру изгибающего момента M_F [эм эф], по которой определим положение опасного сечения. Как видно из эпюры, максимальный изгибающий момент возникает в сечении C [цэ], следовательно, оно наиболее опасно. По формуле (10.29) вычислим величину максимального напряжения в сечении C [цэ].

Слайд 262

Напряжение от центробежной силы

Найдем максимальное напряжение $\sigma_{cm\max}(F_0)$ от статически приложенной силы F_0 [эф нулевое], равной амплитудному значению центробежной силы. Для этого к балке приложим силу F0 [эф нулевое] к сечению C [цэ], где установлен электродвигатель. Эпюра изгибающих моментов от этой силы будет аналогична грузовой эпюре от силы веса электродвигателя и опасное сечение будет также находиться в сечении C [цэ]. Максимальное статическое напряжение вычислим по формуле (10.30). Чтобы перейти к определению динамического максимального напряжения. определим коэффициент динамичности.

Слайд 263

Коэффициент динамичности

С этой целью определим податливость упругой системы δ_{11} [дельта один один]. Учитывая, что это единичное перемещение, определим его методом Мора. Для этого приложим в точке C [цэ] в направлении колебательного движения единичную безразмерную сосредоточенную силу и построим единичную эпюру изгибающего момента M_1 [эм один]. Очевидно, что она будет пропорциональна грузовой эпюре M_F [эм эф] с коэффициентом пропорциональности равным силе F [эф].

Единичная эпюра имеет два участка: AC и CB. Применяя формулу Симпсона для вычисления интеграла Мора на каждом участке, получим искомую величину δ_{11} [дельта один один].

Слайд 264

Коэффициент динамичности

Вычислим частоту собственных колебаний ω [омега маленькое] по формуле (10.31), учитывая, что масса двигателя $m = \dfrac{F}{g}$ [эм равна эф деленое на жэ], и принимая ускорение свободного падения $g \approx 10\, м/сек^2$ [же равным десяти метрам деленым на секунду в квадрате].

Вычислим частоту вынужденных колебаний Ω [омега большое] по заданному числу оборотов электродвигателя N [эн] по формуле (10.32).

Коэффициент динамичности найдем по упрощенной формуле (10.33).

Слайд 265

Проверка прочности балки

Для определения максимального напряжения в опасном сечении C [цэ] от статической силы веса и динамической центробежной силы сложим напряжения от каждой из этих сил. Второе слагаемое в формуле (10.34) представим как произведение напряжения от статически приложенной силы F0 [эф нулевое] на коэффициент динамичности. При сравнении полученного максимального напряжения с величиной допускаемого можно сделать вывод о том, что условие прочности выполняется. Более того, балка значительно недогружена, так как максимальное напряжение в два с лишним раза меньше допускаемого.

Слайд 266

Резонансная длина

Определим значение параметра длины балки lp [эль резонансное], при котором возможно наступление резонанса.

Условие резонанса, как отмечалось выше – это совпадение частот вынужденных и собственных колебаний упругой системы. Частота вынужденных колебаний Ω [омега большое] не зависит от значения параметра l [эль], а частота собственных колебаний ω [омега маленькое] связана с параметром l [эль] полученной ранее зависимостью.

Возведем обе части условия резонанса в виде (10.34) в квадрат и выразим величину резонансной длины через параметры упругой системы и частоту вынужденных колебаний.

Таким образом, при значении параметра длины балки l [эль] равном 0,66 метра система войдет в резонанс, амплитуда вынужденных колебаний и напряжения будут стремительно возрастать, что неминуемо приведет к разрушению конструкции.

Задача решена.

Тема 10 Удар

Слайд 267

Ударное нагружение

Ударом называется взаимодействие тел, при котором силы взаимодействия резко нарастают или ослабевают за короткий промежуток времени. Удар относится к динамическим видам нагружения.

Можно выделить три вида задач об ударе:

1. Задачи об изменении параметров движения взаимодействующих тел, решаемые аппаратом механики недеформируемого твердого тела.
2. Задачи о напряжениях и деформациях, возникающих во взаимодействующих телах, решаемые аппаратом механики деформируемого твердого тела.
3. Задачи об определении свойств материалов при ударе.

В курсе «Сопротивление материалов», как разделе механики деформируемого твердого тела, решаются ударные задачи только второго вида: производится расчет на прочность и жесткость элементов конструкций при ударном нагружении. При этом элемент конструкции, обычно неподвижный и воспринимающий удар, принято называть ударяемым телом, а внешний объект, производящий удар, соответственно, ударяющим телом.

Виды удара обычно классифицируют и по направлению ударного воздействия, и по виду деформации, возникающей при этом в ударяемом элементе конструкции. На рисунке 1 показан пример горизонтального продольного удара, на рисунке 2 – вертикального поперечного, а на рисунке 3 – пример вертикального скручивающего удара.

Слайд 268

Основные допущения теории удара Лепина

В известных учебниках и учебных пособиях по сопротивлению материалов разбираются методы расчета на прочность и жесткость при ударных нагрузках на примерах частных случаев удара. Более общий подход к решению таких задач был предложен доктором технических наук, основателем кафедры «Сопротивление материалов» Тольяттинского политехнического института Георгием Ивановичем Лепиным в семидесятых годах прошлого века.

Рассмотрим теорию удара Лепина. На слайде приведены основные гипотезы, на базе которых строится сама теория. Сделаем некоторые замечания к ним.

В первой гипотезе предполагается, что, учитывая деформацию ударяемого элемента конструкции, само ударяющее тело будем считать абсолютно жестким, то есть недеформируемым.

Во второй гипотезе указывается, что весь процесс ударного взаимодействия должен проходить в зоне упругости, так как величина допускаемого напряжения обычно меньше предела пропорциональности.

Понятие степени свободы элемента конструкции мы вводили в теме «Колебания». В третьей гипотезе предполагается, что вся масса ударяемого тела сосредоточена в точке удара либо этой массой вообще можно пренебречь.

Четвертая гипотеза означает, что в момент удара ударяющее тело не отскакивает, а слипается с ударяемым телом, и дальнейшее их движение происходит совместно.

Пятая гипотеза предполагает, что можно пренебречь контактными явлениями, то есть незначительной долей энергии, которая рассеивается при ударе.

Ну и наконец, шестая гипотеза позволяет пренебречь волновыми явлениями, то есть конечной скоростью распространения деформаций по длине элемента конструкции.

Слайд 269

Постановка задачи

Сформулируем общую постановку задачи.

Рассмотрим, как показано на рисунке, упругую систему в виде пружины длиной l [эль] и жесткостью с [цэ], к которой прикреплен груз весом F1 [эф один]. Пружина образует с горизонтом угол α [альфа] и под действием веса груза имеет начальную деформацию δ0 [дельта нулевое]. Абсолютно жесткое тело весом F [эф] движется со скоростью V [вэ] под углом β [бетта] к горизонту. В некоторый момент времени происходит столкновение, то есть удар. Согласно четвертой гипотезе в момент удара массы двух тел слипаются и продолжают дальнейшее совместное движение в направлении а [а] до полной остановки, после чего, за счет сил упругости пружины, совершают колебательные движения. Временем ударного взаимодействия считается промежуток от момента соприкосновения до момента первой остановки системы. В этот момент груз F1 [эф один] получает максимальное перемещение от точки его прикрепления. Назовем его динамическим перемещением. На рисунке оно обозначено δд [дельта дэ].

Определим динамическое перемещение упругой системы δд [дельта дэ] за время удара.

Слайд 270

Законы сохранения импульса и энергии

В соответствии с физическим законом сохранения импульса, количество движения системы до и после удара одинаково. Проецируя количество движения на ось а [а], данный закон для нашей системы можно записать в виде (10.1). Здесь в левой части равенства стоит количество движения ударяющего тела до момента удара, в правой – количество движения системы, получившей скорость V1 [вэ один], после соударения. Из этого закона можно выразить по формуле (10.2) скорость движения системы после соударения V1 [вэ один].

Теперь воспользуемся теоремой о кинетической энергии (10.3). Смысл её для нашей задачи заключается в том, что изменение кинетической энергии за время ударного взаимодействия равно работе всех внешних сил на перемещении, совершенном за это время.

Кинетическую энергию системы в начале взаимодействия T1 [тэ один] можно вычислить по формуле (10.5). Кинетическая энергия системы T2 [тэ два] в момент полной остановки равна нулю, как показано в формуле (10.4).

Выражение для кинетической энергии в начале взаимодействия T1 [тэ один] распишем и преобразуем с учетом выражения для скорости V1 [вэ один] из формулы (10.2). Это преобразование представлено формулой (10.6), в которой выделена кинетическая энергия ударяющего тела до момента удара T0 [тэ нулевое]. Её выражение представлено формулой (10.7).

Теперь разберемся с правой частью теоремы (10.3).

Слайд 271

Работа внешних сил

Работа внешних сил складывается из работы силы тяжести и силы упругости пружины, согласно формуле (10.8).

Работа силы тяжести системы на перемещении, вызванном ударом вычисляется по формуле (10.9).

Рассмотрим зависимость силы упругости Fу [эф у] от перемещения δ [дельта]. По закону Гука сила упругости прямо пропорциональна перемещению, причем коэффициентом пропорциональности является жесткость пружины, как показано в формуле (10.10). Графическая иллюстрация этого закона показана на рисунке. А заштрихованная площадь под наклонной прямой иллюстрирует работу силы упругости на перемещении δд–δ0 [дельта дэ минус дельта нулевое.]. Математически значение этой силы упругости вычисляется по формуле (10.11).

Представим жесткость пружины с [цэ] в виде (10.12), то есть через обратную величину δ11 [дельта одиннадцать], которая называется податливостью упругой системы. По физическому смыслу эта величина означает перемещение точки соударения под действием единичной силы, приложенной по направлению перемещения во время ударного взаимодействия.

Подставим в теорему о кинетической энергии (10.3) выражения (10.4), (10.6), (10.9) и (10.11) с учетом выражения (10.12). В результате получим равенство (10.13), которое относительно динамического перемещения δд [дельта дэ] представляет собой квадратное уравнение.

Слайд 272

Перемещения и напряжения при ударе

Преобразуем квадратное уравнение (10.13) к нормальному виду. Для этого сначала раскроем скобки относительно перемещений и перенесем все слагаемые в левую часть уравнения, как показано в формуле (10.14).

Здесь дважды встречающееся произведение податливости системы δ11 [дельта одиннадцать] на суммарный вес грузов F+F1 [эф плюс эф один] представляет собой статическое перемещение δст [дельта эс тэ]. Это обозначение приведено в формуле (10.15). По физическому смыслу δст [дельта статическое] – это перемещение точки соударения под действием силы тяжести взаимодействующих тел, приложенной статически по направлению перемещения во время ударного взаимодействия.

Окончательно нормальный вид квадратного уравнения представлен формулой (10.16).

Решая это уравнение и выбирая из двух его корней только положительный, получаем выражение (10.17) для динамического перемещения δд [дельта дэ]. Здесь Кд – коэффициент динамичности, который вычисляется по громоздкой формуле (10.18). Его значение определяет, во сколько раз динамическое перемещение вследствие удара будет больше соответствующего статического перемещения.

Согласно закону Гука, который устанавливает пропорциональность между напряжениями и перемещениями, можно сделать вывод, что и динамические перемещения при ударе будут отличаться от соответствующих статических во столько же раз, то есть справедливо равенство (10.19).

Как уже отмечалось выше, выражение (10.18) для коэффициента динамичности достаточно громоздкое, поскольку сама постановка задачи довольно общая. Для более простых случаев удара, это выражение существенно упрощается.

Рассмотрим некоторые из них.

Слайд 273

Частные случаи: вертикальный удар

В качестве первого частного случая удара рассмотрим вертикальный удар с учетом массы ударяемой системы. На рисунке эта масса обозначена m1 [эм один].

На вертикально расположенную пружину с сосредоточенной массой m1 [эм один] с высоты H [аш] падает абсолютно жесткое тело массой m [эм].

В этом случае углы α [альфа] и β [бетта] из общей постановки задачи принимают конкретное значение 90°. Выражения для начального перемещения δ0 [дельта ноль] и статического перемещения δст [дельта эс тэ] можно записать через соответствующие массы и ускорение свободного падения g [жэ]. Кинетическую энергию T0 [тэ нулевое] падающей массы здесь лучше определить через высоту H [аш]. Все эти упрощения показаны в группе формул (10.20).

Тогда выражение для коэффициента динамичности принимает вид (10.21), что несколько проще исходного выражения (10.19).

Слайд 274

Частные случаи: вертикальный удар

Второй вариант – вертикальный удар без учета массы упругой системы – в свою очередь можно рассматривать как частный случай первого. Если можно не учитывать массу упругой ударяемой системы, то есть к предыдущим предположениям добавить m1=0 [эм один равное нулю], то получим данный случай ударного нагружения.

В связи с нулевой массой m1 [эм один] в группе формул (10.22) по сравнению с группой формул (10.20) предыдущего случая изменяются лишь выражения для начального и статического перемещений.

Само же выражение для коэффициента динамичности существенно упрощается и принимает вид (10.23).

Если же высота падения груза намного больше величины статического перемещения, что на практике чаще всего и случается, то в формуле (10.23) можно пренебречь обеими единицами, и она принимает вид (10.24).

Слайд 275

Частные случаи: мгновенное нагружение

Следующий частный случай ударного нагружения – внезапное приложение нагрузки.

Этот случай реализуется, когда высота падения груза H [аш] равна нулю. Представленный рисунок иллюстрирует данный случай нагружения.

Вернемся к предыдущему случаю вертикального удара без учета массы упругой системы и добавим дополнительное допущение H=0 [аш равное нулю]. Тогда в группе формул (10.22) кинетическая энергия T0 [тэ нулевое] становится равной нулю, как показано в соответствующей группе (10.25).

Коэффициент динамичности в этом случае, согласно формуле (10.26), принимает конкретное числовое значение, равное двум.

Таким образом, при внезапном приложении нагрузки динамические напряжения и перемещения в упругой системе в два раза больше, чем при соответствующем статическом нагружении.

Слайд 276

Частные случаи: горизонтальный удар

Рассмотрим теперь случай горизонтального удара с учетом массы упругой системы, представленный на рисунке.

Пусть горизонтальная пружина с податливостью $\delta 11$ [дельта одиннадцать] и сосредоточенной массой $m1$ [эм один] воспринимает удар абсолютно жесткой массы m [эм], которая движется горизонтально со скоростью V [вэ].

Здесь будут справедливы предположения, отмеченные в группе формул (10.27). Углы наклона α [альфа] и β [бетта] из общей постановки задачи принимают значение, равное нулю. Начальное перемещение $\delta 0$ [дельта нулевое] отсутствует, поскольку сила тяжести груза $m1$ [эм один] перпендикулярна горизонтальному направлению движения. Выражение для статического перемещения δст [дельта эс тэ] включает обе массы, так как, моделируя соответствующее статическое нагружение, мы полагаем, что в направлении удара статически прикладывается сила, равная суммарному весу обеих масс. Выражение для кинетической энергии T0 [тэ нулевое] определяется через скорость V [вэ].

Тогда для данного случая удара выражение для коэффициента динамичности (10.18) принимает вид (10.28).

Слайд 277

Частные случаи: горизонтальный удар

Если же при горизонтальном ударе пренебречь массой упругой системы, то есть принять значение $m1$ [эм один], равное нулю, получим упрощенный случай предыдущего. На рисунке здесь вместо массы m1 [эм один] изображен буфер.

В группе формул (10.29), в связи с равенством нулю массы m1 [эм один], изменяется лишь выражение для статического перемещения по сравнению с соответствующей группой формул (10.27) предыдущего случая.

Тем не менее, выражение для коэффициента динамичности при этом существенно упрощается и принимает вид (10.30).

В ориентировочных практических расчетах при горизонтальном ударе для определения коэффициента динамичности чаще всего используется именно простая формула (10.30).

Аналогично можно получить выражения для коэффициента динамичности и для других частных случаев ударного нагружения.

Слайд 278

Расчет на прочность и жесткость при ударе

Таким образом, при ударном нагружении условие прочности имеет вид (10.31), а условие жесткости записывается в виде (10.32). Динамические напряжения и перемещения определяются через соответствующие статические и увеличиваются в коэффициент динамичности раз.

Тогда алгоритм расчета на прочность и жесткость при ударе заключается в следующем.

Сначала решается статическая часть задачи, то есть ударное нагружение заменяется соответствующим статическим. Для этого в точку удара в его направлении статически прикладывается сила, равная суммарному весу ударяющего и ударяемого тела, и определяются возникающие при этом максимальные статические напряжения и перемещения.

Затем находится коэффициент динамичности по формуле, соответствующей данному виду удара.

После чего уже решается динамическая задача. То есть найденные значения максимальных статических напряжений и перемещений и коэффициента динамичности подставляются в условие прочности (10.31) и в условие жесткости (10.32), которые решаются в соответствии с поставленной задачей.

Слайд 279

Пример расчета на прочность и жесткость при ударе

Рассмотрим пример расчета на прочность и жесткость балки, представленной на рисунке, испытывающей вертикальный поперечный удар.

Задача ставится следующим образом. На заданную балку с высоты H=0,5м [аш, равной ноль целых пять десятых метра] свободно падает абсолютно жесткое тело массой m [эм]. Поперечное сечение балки составное – состоит из четырех стальных равнобоких уголков №10, сваренных между собой.

Требуется определить допустимую величину массы падающего тела [m] [эм], при которой будет обеспечена прочность балки, если допускаемое напряжение [σ]=160МПа [сигма равно 160 мегапаскалей], а модуль Юнга E=2·105МПа [е равен два на десять в пятой мегапаскалей]. Проверить выполнение условия жесткости, приняв $[\delta]=3мм$ [дельта допускаемое, равное трем миллиметрам]. Массой балки пренебречь.

Слайд 280

Ударное нагружение

Определим геометрические характеристики поперечного сечения балки: осевой момент инерции Jx [жи икс] и осевой момент сопротивления Wx [дубль вэ икс], которые нам потребуются при прочностном и деформационном расчетах.

Поперечное сечение балки, представленное на рисунке, сложное – состоит из четырех равнобоких уголков №10. Оси x [икс] и y [игрек] – главные центральные оси сечения, причем ось y [игрек] – силовая линия, а ось x [икс] – нейтральная линия. По сортаменту для одного равнобокого уголка №10 определяем необходимые параметры: сторону уголка b [бэ], момент инерции J_{x_1} [жи икс один], площадь A1 [а один], расстояние от центра тяжести до стороны уголка z0 [зет нулевое]. Значения этих величин показаны на слайде в группе формул (10.33).

Применяя теорему о суммировании моментов инерции и теорему о параллельном переносе осей, найдем осевой момент инерции Jx [жи икс] всего сложного сечения. Его вычисление показано в формуле (10.34).

Осевой момент сопротивления Wx [дубль вэ икс] найдем по определению, как отношение момента инерции Jx [жи икс] к расстоянию от нейтральной линии до наиболее удаленных точек сечения ymax [игрек максимум]. Вычисление момента сопротивления представлено формулой (10.35).

Слайд 281

Статическая прочностная часть задачи

В данной задаче необходимо определить массу падающего тела из условия прочности. Поэтому сначала придется полностью произвести прочностной расчет, рассмотрев последовательно статическую и динамическую части задачи, а затем уже, с учетом найденного значения массы m [эм], проверить выполнение условия жесткости.

Решим статическую прочностную часть задачи, смоделировав статическое нагружение балки, соответствующее заданному ударному нагружению. Для этого приложим к балке в точке удара «U» [у] в направлении удара статическую силу F [эф], равную весу падающего тела mg [эм же]. На рисунке статическое нагружение отмечено вариантом а) [а]. При этом в подвижной опоре «B» [бэ] возникает реактивная сила RB [эр бэ], которая определяется из моментного уравнения равновесия, записанного относительно врезанного шарнира «C» для правой части балки. Это уравнение и определение из него величины реакции RB [эр бэ] последовательно показано в группе формул (10.36).

Построим грузовую эпюру изгибающих моментов MF [эм эф] от действия силы F [эф] и определим положение опасного сечения балки.

Эпюру строим в направлении от свободного края к жесткой заделке методом сечений с учетом действия силы F [эф] и реакции RB [эр бэ]. На рисунке грузовая эпюра отмечена вариантом б) [бэ]. Опасное сечение балки – сечение «D» [дэ], где возникает максимальный момент $M_{\max} = 2mg$ [эм максимум, равный два эм же].

Определим максимальное статическое напряжение $\sigma_{cm\max}$ [сигма статическое максимум] в долях массы m [эм]. Примем при этом ускорение свободного падения $g \approx 10\, м/сек^2$ [жэ, приблизительно равное 10 метрам на секунду в квадрате]. Вычисление максимального статического напряжения, возникающего в сечении «D» [дэ], приведено в формуле (10.37).

Слайд 282

Определение коэффициента динамичности

Найдем коэффициента динамичности для данного случая удара. Балка испытывает вертикальный удар, причем, в условии задачи сказано, что массой балки можно пренебречь. Следовательно, для определения коэффициента динамичности выбираем формулу (10.24), соответствующую случаю вертикального удара без учета массы упругой системы. Выбираем более короткий вариант формулы, при условии, что высота падения H намного больше величины статического перемещения в точке удара. Учитывая, что статические деформации очень малы, это условие практически всегда выполняется.

В формулу (10.24) входит податливость упругой системы δ11 [дельта одиннадцать]. Для её определения построим единичную эпюру изгибающих моментов M_1 [эм один] от действия единичной силы, приложенной статически в точке удара «U». Правила её построения те же, что и для грузовой эпюры MF [эм эф], представленной на рисунке вариантом а) [а]. Эпюра M_1 [эм один] обозначена вариантом б) [бэ] на рисунке. Очевидно, что единичная эпюра отличается от грузовой эпюры лишь тем, что значения моментов в соответствующих сечениях будут в mg [эм же] раз меньше.

Определим податливость упругой балки δ_{11} [дельта одиннадцать] методом Мора, «умножив» единичную эпюру M_1 [эм один] саму на себя. Будем использовать при этом формулу Симпсона. Участков перемножения два: UB [у бэ]и BD [бэ дэ]. На рисунке значения моментов в средних точках этих участков на единичной эпюре отмечены красным цветом. Вычисление податливости δ_{11} [дельта одиннадцать] по формуле Симпсона представлено в выражении (10.38).

Вычисление коэффициента динамичности в долях массы m [эм] с учетом найденного значения податливости показано в формуле (10.39).

Слайд 283

Динамическая прочностная часть задачи

Запишем условие прочности при ударе в виде (10.40).

Подставим в него значение допускаемого напряжения и выражения для коэффициента динамичности $K_д$ [ка дэ] и максимального статического напряжения $\sigma_{ст\max}$ [сигма эс тэ максимум] в долях параметра m [эм]. Получим неравенство (10.41). Если в неравенстве оставить только знак равенства, то значение параметра массы m [эм] будет максимально допустимым. Решим полученное таким образом уравнение относительно $[m]$ [эм допускаемого]. Сначала выразим и найдем корень из $[m]$ [эм допускаемого] по формуле (10.42). Затем, возведя полученное значение в квадрат, получим величину допускаемой массы.

Таким образом, согласно выражению (10.43), на данную балку с высоты полуметра можно бросить груз массой не более 34,4 килограмма.

Определим по формуле (10.44) численное значение коэффициента динамичности Кд [ка дэ] с учетом найденной массы. Коэффициент динамичности равен 75. Это означает, что если бы ударяемое тело массой 34,4 килограмма не бросить, а спокойно положить на балку в точку удара, то все напряжения и перемещения, возникающие в поперечных сечениях балки, были бы в 75 раз меньше.

Прочностная часть задачи полностью решена.

Слайд 284

Приближенный вид изогнутой оси балки

Решим деформационную часть задачи – проверим выполнение условия жесткости с учетом найденного значения массы ударяющего тела.

Определим, прежде всего, в каком сечении балки возникает максимальный статический прогиб. Для этого изобразим приближенный вид изогнутой оси балки, учитывая условия её закрепления и вид грузовой эпюры изгибающих моментов, обозначенной буквой а) [а] на рисунке.

Сечения B [бэ] и D [дэ] закреплены, поэтому сместиться не могут – они остаются на месте. Согласно правилу знаков, эпюра моментов построена на сжатых волокнах. Это позволяет нам определить направление выпуклости изогнутой оси балки на участках постоянного знака грузовой эпюры моментов. На участке DC [дэ цэ] эпюра расположена выше базовой линии, значит этот участок балки изогнется выпуклостью вниз, при этом сжатые волокна будут сверху. Аналогично рассуждая, делаем вывод, что на участке CU [цэ у] балка изогнется выпуклостью вверх. На последнем участке UK [у ка] момент равен нулю, значит на этом участке балка не изгибается, а остается прямолинейной. Также учитываем, что сечение D [дэ] балки жестко закреплено, то есть изогнутая ось должна отойти от этого сечения с нулевым углом поворота. Изогнутая ось балки – это упругая плавная линия, она не может иметь резких изломов, кроме как во врезанном шарнире.

Учитывая все перечисленные обстоятельства, изображаем приближенный вид изогнутой оси балки. На рисунке она выделена красным цветом и обозначена буквой б) [бэ].

Очевидно, что максимальное статическое перемещение $\delta_{cm\max}$ [дельта эс тэ максимум] возникает в сечении «К» [ка]. На рисунке б) [бэ] также показано статическое перемещение в точке удара, оно обозначено δ_{cm*} [дельта эс тэ со звездочкой].

Слайд 285

Статическая деформационная часть задачи

Определим максимальное статическое перемещение, возникающее в сечении «К» [ка], методом Мора. Для этого необходимо в сечении «К» приложить единичную безразмерную силу и построить от её действия единичную эпюру изгибающих моментов M_{1K} [эм один ка]. Эпюра строится методом сечений, проходя через ноль во врезанном шарнире. На рисунке она обозначена буквой в) [вэ].

«Умножив» единичную эпюру M_{1K} [эм один ка] на грузовую M_F [эм эф], согласно методу Мора, получим искомое перемещение $\delta_{cm\max}$ [дельта эс тэ максимум]. Однако, как вы видите, на рисунке вместо грузовой эпюры M_F [эм эф] изображена под буквой а) [а] единичная эпюра M1 [эм один]. В силу пропорциональности этих двух эпюр, что было отмечено выше, можно заменить в методе Мора грузовую эпюру на единичную M1 [эм один]. В этом случае коэффициент пропорциональности mg [эм же] выступает дополнительным множителем, как показано в формуле (10.45). Перемножение эпюр здесь производится по простейшей формуле Симпсона. Участков перемножения два: UB [у бэ] и BD [бэ дэ]. Ординаты моментов на обеих перемножаемых единичных эпюрах, расположенные посередине каждого участка, выделены на рисунке красным цветом.

Таким образом, максимальное статическое перемещение, возникающее в сечении «К» [ка] балки, равно 0,27 миллиметра.

Слайд 286

Динамическая деформационная часть задачи

Запишем условие жесткости при ударе и проверим его выполнение.

Условие жесткости при ударе имеет вид (10.46). Подставим в него найденные значения коэффициента динамичности, максимального статического перемещения и найдем сначала величину максимального динамического перемещения. Согласно формуле (10.47), оно равно, 20,47 миллиметрам. Сравнивая эту величину с допускаемым перемещением, равным 3 миллиметра, делаем вывод, что условие жесткости не выполняется. В задаче требовалось лишь проверить выполнение этого условия, что мы и сделали. Если потребуется удовлетворить условие жесткости, необходимо будет пропорционально уменьшить массу падающего тела.

Задача решена полностью.