Тема 1. Тождественные преобразования выражений. Степень. Основные тождества. Формулы сокращенного умножения.

Вспомним основные понятия по данной теме, изученные вами в школьном курсе математики.

Определение. «Два выражения называются *тождественно равными*, если при любых значениях переменных из области определения выражений, их соответственные значения равны. Равенство, верное при любых значениях переменных, называется *тождеством*» [30].

Приведем примеры тождеств: $a + b = b + a$; $ab = ba$; $a(b + c) = ab + ac$; $a + 0 = 0 + a = a$ и др.

Под *тождественным преобразованием алгебраического выражения* понимают «последовательный переход от одного выражения к другому, тождественно равном ему» [30].

При выполнении тождественных преобразований выражений используются *формулы сокращенного выражения* (1.1 - 1.7), *свойства степеней и действия с корнями* (1.8 - 1.25).

Формулы сокращенного выражения

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (1.1)$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad (1.2)$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \qquad (1.3)$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \qquad (1.4)$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \qquad (1.5)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \qquad (1.6)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \qquad (1.7)$$

Свойства степеней и действия с корнями

$$a^0 = 1,\ a \neq 0 \quad (1.8)$$

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{-n} = a^n,\ a \neq 0 \quad (1.9)$$

$$a^m a^n = a^{m+n} \quad (1.10)$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (1.11)$$

$$(a^m)^n = a^{mn} \quad (1.12)$$

$$(ab)^n = a^n b^n \quad (1.13)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0 \quad (1.14)$$

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad (1.15)$$

$$a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k} \quad (1.16)$$

$$\sqrt{a^2} = |a| \quad (1.17)$$

$$\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a| \quad (1.18)$$

$$\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}} = a \quad (1.19)$$

$$\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a} \quad (1.20)$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a} \quad (1.21)$$

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k} \quad (1.22)$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (1.23)$$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} \quad (1.24)$$

$$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b} \quad (1.25)$$

Рассмотрим примеры выполнения тождественных преобразований выражений.

Пример 1. $4p^3(-3)pq^5 = 4(-3)p^3pq^5 = -12p^4q^5$.

Пример 2. «Упростить выражение: $\left(\frac{3}{a} + \frac{3}{a+d}\right) \cdot \frac{a}{18(2a+d)}$.

Решение: $\left(\frac{3}{a} + \frac{3}{a+d}\right) \cdot \frac{a}{18(2a+d)} = \frac{(3(a+d)+3a)a}{a(a+d)18(2a+d)} = \frac{(3a+3d+3a)\cdot a}{18a(a+d)(2a+d)} =$
$= \frac{(6a+3d)\cdot a}{18a(a+d)(2a+d)} = \frac{3(2a+d)}{18(a+d)(2a+d)} = \frac{1}{6(a+d)}$. Ответ: $\frac{1}{6(a+d)}$ » [3].

Пример 3. Упростить выражение: $\frac{n-2}{n-5} : \left(\frac{n^2+24}{n^2-25} - \frac{4}{n-5}\right)$.

Решение:

«$\frac{n-2}{n-5} : \left(\frac{n^2+24}{n^2-25} - \frac{4}{n-5}\right) = \frac{n-2}{n-5} : \left(\frac{n^2+24}{(n-5)(n+5)} - \frac{4}{n-5}\right) = \frac{n-2}{n-5} : \left(\frac{n^2+24}{(n-5)(n+5)} - \frac{4(n+5)}{n-5}\right) =$
$\frac{n-2}{n-5} : \frac{n^2+24-4n-20}{(n-5)(n+5)} = \frac{n-2}{n-5} \cdot \frac{(n-5)(n+5)}{n^2-4n+4} = \frac{(n-2)(n+5)}{n^2-4n+4} = \frac{(n-2)(n+5)}{(n-2)^2} = \frac{n+5}{n-2}$» [2]. Ответ: $\frac{n+5}{n-2}$.

Пример 4. Упростить выражение: $\sqrt{150}-\sqrt{96}-\sqrt{\frac{2}{3}}-\frac{1}{\sqrt{6}}$.

Решение: «$\sqrt{150}-\sqrt{96}-\sqrt{\frac{2}{3}}-\frac{1}{\sqrt{6}}=\sqrt{25\cdot 6}-\sqrt{16\cdot 6}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}}=$

$=5\sqrt{6}-4\sqrt{6}-\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2\cdot 3}\cdot\sqrt{6}}=5\sqrt{6}-4\sqrt{6}-\frac{\sqrt{6}}{3}-\frac{\sqrt{6}}{6}=\sqrt{6}\cdot\left(5-4-\frac{1}{3}-\right.$

$\left.-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{6}$» [2]. Ответ: $\frac{1}{2}\sqrt{6}$.

Пример 5. Исключить иррациональность из знаменателя:

$$а)\frac{1}{2-\sqrt{3}};\quad б)\frac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{\sqrt{5}+\sqrt{7}};\quad в)\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}.$$

Решение: « $а)\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\frac{1(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=\frac{2+\sqrt{3}}{4-3}=\frac{2+\sqrt{3}}{1}=2+\sqrt{3}.$

Ответ: а) $2+\sqrt{3}$.

$$б)\frac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}=\frac{(\sqrt{5}-\sqrt{7})(\sqrt{5}-\sqrt{7})}{(\sqrt{5}+\sqrt{7})(\sqrt{5}-\sqrt{7})}=\frac{(\sqrt{5}-\sqrt{7})^2}{5-7}=$$

$$=\frac{5-2\sqrt{35}+7}{-2}=\frac{12-2\sqrt{35}}{-2}=\frac{-2(\sqrt{35}-6)}{-2}=\sqrt{35}-6.$$

Ответ: б) $\sqrt{35}-6$.

$$в)\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}+\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=$$

$$=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2+(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}{3-2}=$$

$$=\frac{2+2\sqrt{6}+3-2+2\sqrt{6}-3}{1}=4\sqrt{6}.$$

Ответ: $4\sqrt{6}$» [2].

Пример 6. Упростить выражение: $2\sqrt{8}+0{,}5\sqrt{32}-\frac{1}{3}\sqrt{18}.$

Решение: $2\sqrt{8}+0{,}5\sqrt{32}-\frac{1}{3}\sqrt{18}=2\sqrt{4\cdot 2}+0{,}5\sqrt{16\cdot 2}-\frac{1}{3}\sqrt{9\cdot 2}=$

$= 2 \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} + 0{,}5 \cdot \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} - \frac{1}{3} \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot 2\sqrt{2} + 0{,}5 \cdot 4\sqrt{2} - \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{2} =$

$= 4\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = 5\sqrt{2}.$ Ответ: $5\sqrt{2}$.

Пример 7. Выполните действия: $(2\sqrt{a} + \sqrt{b})(4a - 2\sqrt{ab} + b)$.

Решение:

$$(2\sqrt{a} + \sqrt{b})(4a - 2\sqrt{ab} + b) = (2\sqrt{a})^3 + (\sqrt{b})^3 = 8\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3}.$$

Ответ: $8\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3}$.

Пример 8. Вычислить: $\sqrt{27 + 10\sqrt{2}} + \sqrt{27 - 10\sqrt{2}}$.

Решение. Заметим, что «$\sqrt{27 + 10\sqrt{2}} = (\sqrt{2} + 5)^2$; $\sqrt{27 - 10\sqrt{2}} = (\sqrt{2} - 5)^2$. Тогда имеем: $\sqrt{27 + 10\sqrt{2}} + \sqrt{27 - 10\sqrt{2}} = (\sqrt{2} + 5)^2 + (\sqrt{2} - 5)^2 = |\sqrt{2} + 5| + |\sqrt{2} - 5| = \sqrt{2} + 5 + 5 - \sqrt{2} = 10$» [28].

Ответ: 10.

Пример 9. Доказать, что: $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = 2$.

Доказательство:

$$\left(\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}\right)^2 = 4 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{(4 + 2\sqrt{3})(4 - 2\sqrt{3})} + 4 - 2\sqrt{3} = 8 - 2\sqrt{16 - 12} = 8 - 4 = 4 = 2^2.$$

Следовательно, исходное выражение может быть равно 2 или - 2; так как $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} > \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$, то это выражение положительно и $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = 2$.

Пример 10. Упростить выражение:

а) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{a^2b}}\right)^6$; б) $\sqrt[4]{abc} \cdot \sqrt[4]{a^3b^2c} \cdot \sqrt[4]{b^5c^2}$.

Решение: а) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{a^2b}}\right)^6 = \left(\sqrt[3]{a^2b}\right)^{\frac{6}{2}} = \left(\sqrt[3]{a^2b}\right)^3 = a^2b$;

б) $\sqrt[4]{abc} \cdot \sqrt[4]{a^3b^2c} \cdot \sqrt[4]{b^5c^2} = \sqrt[4]{a^4b^8c^4} = |a| \cdot b^2 \cdot |c|$.

Ответ: a^2b; $|a| \cdot b^2 \cdot |c|$.