Курс «Сопротивление материалов»

Кафедра «Нанотехнологии, материаловедение и механика»

Слайд 1

Тема 5. Расчет на прочность и жесткость при изгибе

Напряжения при чистом изгибе

Чистым изгибом называется такой вид изгиба, при котором возникает только один внутренний силовой фактор: изгибающий момент.

Для случая чистого изгиба справедлива гипотеза Бернулли: сечения, плоские до приложения внешней силы, остаются такими же и после нагружения, поворачиваясь друг относительно друга на некоторый угол.

Рассмотрим балку, нагруженную двумя симметрично приложенными силами F , представленную на рисунке 5.1. По построенным эпюрам поперечной силы и изгибающего момента видно, что средний участок балки испытывает чистый изгиб, так как здесь поперечная сила отсутствует, действует только изгибающий момент.

Определим, какие напряжения возникают при чистом изгибе. Для этого рассмотрим три стороны задачи.

Первая – статическая сторона задачи. Воспользуемся интегральными уравнениями равновесия (5.1).

Вторая – геометрическая сторона задачи. Вырежем из балки в зоне чистого изгиба элемент длиной dz . После приложения нагрузки он выглядит, как показано на рисунке 5.2. Здесь ρ – радиус нейтральной линии. Нейтральной линией называется след нейтрального слоя, разделяющего балку на области растяжения и сжатия. $d\theta$ – угол поворота сечения. Сама нейтральная линия на рисунке обозначена ab , её длина равна dz – длине выбранного элемента балки.

Выделим волокно a_1b_1 на расстоянии y от нейтральной линии. До деформации его длина равнялась ab. Относительное изменение длины этого волокна можно вычислить по формуле (5.2).

Слайд 2

Напряжения при чистом изгибе

Рассмотрим третью, физическую сторону задачи. Запишем закон Гука в напряжениях и деформациях по формуле (5.3). Подставив выражение (5.2) в формулу (5.3), получим выражение для напряжения (5.4). Далее в интегральное уравнение (5.1) для момента M_x подставим формулу (5.4), получим выражение этого момента в виде (5.5), в котором интеграл представляет собой осевой момент инерции J_x. Тогда справедлива формула (5.6). Преобразовав её к виду (5.7) и подставив в формулу (5.4), получим окончательное выражение (5.8) для вычисления напряжения при чистом изгибе, где y – координата произвольного волокна относительно нейтральной линии.

Таким образом, абсолютная величина напряжения тем выше, чем больше расстояние от нейтральной линии.

Очевидно, что максимальное напряжение в этом случае можно вычислить по формуле (5.9), где y_{max} – расстояние от нейтральной линии до наиболее удаленной точки сечения. Точки сечения, наиболее удаленные от нейтральной линии, называются опасными точками. В выражении (5.9) отношение осевого момента инерции J_x к расстоянию y_{max} называется осевым моментом сопротивления и обозначается W_x. Момент сопротивления – это геометрическая характеристика, которая зависит от формы и размеров поперечного сечения, а также от положения опасных точек в нем.

Тогда условие прочности при чистом изгибе можно записать в виде формулы (5.10).

Слайд 3

Напряжения при чистом изгибе

Для определения положения нейтральной линии в области поперечного сечения привлечем два оставшихся интегральных уравнения равновесия (5.1).

В интегральное уравнение с продольной силой N подставим выражение для напряжения (5.4). Его математическое преобразование показано в формуле (5.11), из которой следует, что статический момент S_x должен быть равен нулю, так как продольная сила в данном случае отсутствует. Это, в свою очередь, означает, что ось x, совпадающая с нейтральной линией, является центральной осью.

В последнее интегральное уравнение равновесия для момента M_y также подставим выражение для напряжения (5.4) и математически преобразуем. Это показано в выражении (5.12), из которого следует, что центробежный момент инерции J_{xy} должен быть равен нулю, так как и M_y в данном случае отсутствует. Это означает, что ось x является главной осью.

Таким образом, нейтральная линия является главной центральной осью поперечного сечения.

Для случая прямоугольного сечения можно утверждать, что его ось симметрии x является нейтральной линией, если внешние силы действуют по оси y. Ось y в этом случае называется силовой линией. Вид изгиба, при котором одна из главных центральных осей является силовой линией, а вторая нейтральной линией, называется прямым изгибом.

Таким образом, нормальное напряжение при прямом чистом изгибе по ширине сечения не изменяется, а по высоте сечения изменяется по линейному закону. Причем оно равно нулю в точках нейтральной линии и принимает максимальное значение в точках, наиболее удаленных от нейтральной линии. Эпюра распределения нормального напряжения по высоте прямоугольного сечения показана на рисунке.

Для сравнения отметим, что при деформации растяжения-сжатия напряжение постоянно в любой точке поперечного сечения.

Слайд 4

Особенности расчета на прочность

При расчете на прочность балок, работающих в условиях изгиба, необходимо учитывать, из какого материала они изготовлены: хрупкого или пластичного. Эти два вида материалов по-разному реагируют на напряжения растяжения и сжатия. Рассмотрим особенности расчета для каждого вида материала.

Пластичный материал одинаково сопротивляется напряжениям растяжения и сжатия, поэтому для конструкций из пластичных материалов допускаемое напряжение принимается единое и условие прочности записывается в виде (5.13). Для таких материалов рационально использовать симметричные профили, например, прямоугольный или круглый, как показано на рисунке 5.3. При этом на эпюре напряжений $\sigma_{\max p}$ равна $\sigma_{\max c}$. Для бóльшей экономичности профили делают полыми. Сечение следует располагать таким образом, чтобы силовой фактор действовал в плоскости максимальной жесткости. На рисунке 5.4 второй вариант ориентации профиля предпочтительней первого.

Хрупкий материал лучше сопротивляется напряжениям сжатия и хуже напряжениям растяжения, поэтому допускаемые напряжения здесь в зонах растяжения и сжатия разные. Для таких материалов целесообразно использовать несимметричные относительно нейтральной линии профили, например, тавровый, показанный на рисунке 5.5. Размеры поперечного сечения для таких профилей должны удовлетворять двум условиям прочности: (5.14) и (5.15). Анализируя пропорции для сторон двух подобных треугольников эпюры напряжений для тавра, представленной на рисунке 5.5, нетрудно выбрать из двух условий прочности (5.14) и (5.15) одно, более опасное. Если выполняется условие (5.16), то опасными являются сжатые волокна, и расчет на прочность следует вести по формуле (5.14). Если выполняется условие (5.17), то опасными являются растянутые волокна, и расчет на прочность следует вести по формуле (5.15).

Слайд 5

Алгоритм расчета: пластичный материал

Проведя подробный анализ особенностей расчета на прочность конструкций, изготовленных из пластичных и хрупких материалов, сформулируем теперь четкий порядок действий в виде алгоритмов. Начнем с балок, изготовленных из пластичных материалов.

Итак, чтобы рассчитать на прочность пластичную балку, необходимо:

1. Определить положение опасного сечения балки, построив эпюры поперечной силы Q_y и изгибающего момента M_x . Опасное сечение будет там, где значение изгибающего момента максимально по абсолютной величине.

2. Определить положение опасных точек в опасном сечении. Для этого сначала нужно указать положение нейтральной линии – это главная центральная ось сечения, которая является осью изгиба. Затем определить точки, наиболее удаленные от нейтральной линии. Это и будут опасные точки опасного сечения. Учитывая размеры сечения и положение нейтральной линии, необходимо найти $y_{мах}$ – расстояние от нейтральной линии до наиболее опасных точек.

3. Определить момент сопротивления W_x , предварительно вычислив главный центральный момент инерции сечения J_x .

4. Подставить все найденные величины в условие прочности для пластичных материалов и решить его согласно поставленной задаче: определить характерный размер сечения, или найти параметр внешней нагрузки, или провести проверочный расчет.

Слайд 6

Алгоритм расчета: хрупкий материал

Теперь сформулируем порядок действий при расчете на прочность балок, изготовленных из хрупких материалов.

Начало расчета здесь аналогичное: необходимо построить эпюры поперечной силы Q_y и изгибающего момента M_x и по эпюре M_x определить положение опасного сечения.

Далее для опасного сечения следует определить положение точки центра тяжести и провести через нее главные центральные оси, одна из которых является силовой линией, а вторая, ей перпендикулярная, – нейтральной линией. Относительно нейтральной линии найти главный центральный момент инерции J_x .

Для решения вопроса о рациональности расположения сечения требуется:

- определить по эпюре M_x расположение зон растяжения и сжатия в опасном сечении: с какой стороны от базы эпюры расположена ордината максимального момента, с той стороны от нейтральной линии в сечении находится зона сжатия;
- в зонах растяжения и сжатия опасного сечения найти расстояния y_{MAXp} и y_{MAXc} , учитывая размеры сложного сечения и координату точки центра тяжести;
- установить сечение так, чтобы расстояние y_{MAXc} было больше расстояния y_{MAXp} . Если при заданном положении сечения это соответствие не выполняется, значит, сечение расположено нерационально и его нужно повернуть на 180 градусов.

Слайд 7

Алгоритм расчета: хрупкий материал

1. Выбрать наиболее опасное волокно, проведя анализ отношений (5.16) и (5.17), представленных выше.

2. Для более опасного волокна надо записать соответствующее условие прочности и проверить его выполнение или найти из него требуемую величину.

Слайд 8

Касательные напряжения при поперечном изгибе

Изгиб называется поперечным, если кроме изгибающего момента в сечениях элемента конструкции возникает поперечная сила.

От действия поперечной силы в точках поперечного сечения балки возникают касательные напряжения τ . Исследования показали, что закон изменения касательных напряжений гораздо сложнее, чем нормальных, однако при этом наибольшие значения τ примерно на два порядка меньше, чем наибольшие значения σ . Поэтому расчет на прочность при поперечном изгибе чаще всего ведется только по нормальным напряжениям, как и при чистом изгибе.

Тем не менее, необходимо знать, как распределяются касательные напряжения по сечению. Итак, касательные напряжения от действия поперечной силы по ширине сечения не изменяются, а по высоте сечения изменяются по формуле Журавского (5.18). Здесь: S_x^* – статический момент части площади поперечного сечения, отсекаемой на том уровне относительно оси изгиба, где определяется величина касательного напряжения τ . В формулу также входит J_x – момент инерции всего сечения относительно оси изгиба и ширина поперечного сечения b^* того слоя, где определяется касательное напряжение τ .

На рисунке для прямоугольного сечения отсекаемая часть, расположенная на расстоянии y от оси изгиба x , выделена штриховкой. Для этой формы сечения формула Журавского имеет вид (5.19), то есть по высоте прямоугольного сечения касательные напряжения изменяются по квадратичному закону. На рисунке показаны эпюры распределения нормальных и касательных напряжений. Как видно, максимальное значение касательного напряжения в прямоугольном сечении возникает в точках оси изгиба и вычисляется по формуле (5.20).

Для сравнения укажем, что в круглом сечении касательное напряжение по высоте изменяется по кубическому закону, а наибольшее его значение вычисляется по формуле (5.21).

Слайд 9

Пример расчета на прочность при изгибе

Рассмотрим пример расчета на прочность балки на двух шарнирных опорах, изображенной на рисунке 5.6. Задача формулируется следующим образом.

Двухопорная балка постоянного поперечного сечения нагружена заданной системой внешних сил и изгибающих моментов. Требуется произвести расчет на прочность в двух вариантах.

1. Для данной балки, изготовленной из пластичного материала с допускаемым напряжением, равным 160 мегапаскалей, подобрать из условия прочности минимально допустимые размеры двутаврового, прямоугольного и круглого сечений. Дать заключение о рациональности формы сечения по расходу материала.

2. Для данной балки, изготовленной из хрупкого материала, определить из условия прочности допускаемый характерный размер *a* сложного поперечного сечения, предварительно решив вопрос о его рациональном положении. Принять допускаемые напряжения, равные: в зоне растяжения – 100 мегапаскалям, а в зоне сжатия – 150 мегапаскалям. Форма сложного сечения показана на рисунке 5.7.

Слайд 10

Случай пластичного материала

Рассмотрим первый случай, когда балка изготовлена из пластичного материала.

Построим эпюры поперечной силы Q_y и изгибающего момента M_x. Для данной балки подробное описание построения эпюр, приведенных на рисунке, было сделано в теме «Построение эпюр ВСФ при растяжении-сжатии, кручении, изгибе», во втором примере.

По эпюре M_x определяем положение опасного сечения – сечение L наиболее опасно, так как в этом сечении возникает самый большой по абсолютной величине момент, равный 47,06 килоньютон-метра.

Запишем условие прочности для опасного сечения в виде (5.22). Отсюда выразим величину допускаемого момента сопротивления W_x и, подставив значения максимального момента и допускаемого напряжения, найдем его величину. Эти вычисления показаны в выражении (5.23). В формуле (5.24) представлен результат вычислений – величина допускаемого момента сопротивления равна 294 кубическим сантиметрам.

Таким образом, какими бы ни были размеры и форма поперечного сечения балки, значение момента сопротивления этого сечения относительно оси изгиба должно быть не меньше допускаемой величины.

Слайд 11

Подбор размеров трех форм сечений

Подберем из условия прочности размеры трех форм сечений: двутаврового, прямоугольного и круглого. Для каждой из трех форм сечений выразим момент сопротивления с геометрической точки зрения, то есть через характерный размер сечения, и, приравняв его к расчетному, равному 294 кубическим сантиметрам, определим характерный размер. Для того, чтобы из трех форм выбрать наиболее рациональную по затратам материала, вместе с размерами будем определять и площадь каждого сечения.

Рассмотрим двутавровое сечение. Тонкостенные профили – двутавры, швеллеры, уголки – выпускаются промышленностью определенных стандартных размеров. Номер профиля соответствует его высоте, выраженной в сантиметрах. Все характерные размеры таких профилей, а также их геометрические характеристики, в том числе и момент сопротивления W_x , сведены в таблицы, которые называются «Сортамент прокатных профилей». Они приводятся в соответствующих ГОСТах, а также в справочниках, учебниках и задачниках по сопротивлению материалов. Нам остается лишь по сортаменту определить номер двутавра, у которого момент сопротивления ближайший больший к расчетному. По сортаменту, взятому из ГОСТ 8239-89, подходит двутавр № 24*a*, у которого момент сопротивления W_x равен 317 кубических сантиметров, а площадь равна 37,5 квадратных сантиметра.

Слайд 12

Подбор размеров трех форм сечений

Рассмотрим прямоугольное сечение с соотношением сторон h / b , равным двум. Нейтральная линия прямоугольника – главная центральная ось x . Расстояние от нейтральной линии до наиболее удаленных точек сечения y_{max} равно половине высоты прямоугольника – $h / 2$. Тогда, согласно определению, момент сопротивления W_x можно определить по формуле (5.25). Через размеры прямоугольника он равен $bh^2 / 6$. Учитывая, что $h = 2b$, в формуле (5.25) продолжаем преобразовывать момент сопротивления прямоугольника через характерный размер b: он равен $2b^3 / 3$. Приравняв его к расчетному значению, равному 294 кубических сантиметра, находим минимально допустимый размер прямоугольника b по формуле (5.26). Таким образом, принимаем значение основания прямоугольника b , равное 7,6 сантиметра. Тогда его площадь, согласно формуле (5.27), равна 115,5 квадратных сантиметра.

Теперь рассмотрим круглое сечение. Здесь все аналогично. Нейтральная линия – ось x, расстояние от нейтральной линии до наиболее удаленных точек сечения y_{max} равно половине диаметра круга – $d/2$. Тогда, согласно определению, момент сопротивления W_x можно определить по формуле (5.28). Через диаметр круга он равен $\pi d^3/32$. Приравняв его к расчетному допускаемому значению момента сопротивления, находим допускаемый диаметр круглого сечения d по формуле (5.29). Используем найденное значение диаметра для определения площади круглого сечения по формуле (5.30).

После сравнения площадей трех подобранных форм профилей приходим к выводу, что самым рациональным из них является двутавр, так как его использование обеспечит минимальный вес конструкции.

Слайд 13

Случай хрупкого материала

Рассмотрим балку из хрупкого материала и подберем из условия прочности характерный размер a [а] заданного сложного сечения, у которого положение центра тяжести и геометрические характеристики были определены в теме «Геометрические характеристики плоских сечений».

Нейтральная линия сечения – главная центральная ось x, проходящая через центр тяжести. Она делит всё сечение на две зоны – растянутых и сжатых волокон. Учитывая правило знаков для эпюры изгибающих моментов M_x, что она строится на сжатых волокнах, легко определить расположение соответствующих зон в опасном сечении. На эпюре M_x в опасном сечении L ордината момента, равная 47,06 килоньютон-метра, расположена ниже осевой линии, следовательно, в этом сечении снизу от нейтральной линии находятся сжатые волокна, а сверху – растянутые. Определим расстояния от нейтральной линии до наиболее удаленных точек сечения в зонах растяжения и сжатия. В формуле (5.31) показано вычисление расстояния y_{MAXp} от нейтральной линии до наиболее удаленных верхних волокон, расположенных в растянутой зоне. С учетом заданных размеров сложного сечения и найденной в теме 4 координаты точки центра тяжести оно равно $3{,}21a$. Аналогично в формуле (5.32) показано вычисление расстояния y_{MAXc} от нейтральной линии до наиболее удаленных нижних волокон, расположенных в сжатой зоне. Оно равно $4{,}79a$.

Решим вопрос о рациональности расположения сечения. Поскольку и допускаемое напряжение в зоне сжатия, и расстояние y_{MAXc} больше соответствующих значений в зоне растяжения, то есть одновременно выполняются условия (5.33), значит, сечение расположено рационально.

Слайд 14

Случай хрупкого материала

Определим положение опасного волокна в опасном сечении. Для этого составляем и сравниваем отношение расстояний в зонах сжатия и растяжения с соответствующим отношением допускаемых напряжений. В нашем примере выполняется условие (5.34), следовательно, растянутое волокно более опасно, чем сжатое. Если знак неравенства в условии (5.34) будет обратным, в этом случае сжатое волокно считается более опасным.

Запишем условие прочности для опасного растянутого волокна и подставим в него значения входящих величин. Это действие обозначено номером (5.35). Здесь значение момента инерции J_x , равное $219a^4$, было найдено для данного сечения в теме «Геометрические характеристики плоских сечений». Выразим из условия прочности (5.35) допускаемую величину характерного размера сложного сечения a . Математически это представлено выражением (5.36).

Таким образом, минимально допустимое значение характерного размера сложного сечения равно 19 миллиметрам.

Задача решена полностью.

Слайд 15

Перемещения при изгибе

Согласно гипотезе Бернулли, поперечные сечения балки при изгибе не искривляются, а лишь вертикально смещаются, поворачиваясь при этом относительно нейтральной линии на некоторый угол. Таким образом, поперечные сечения балки при изгибе получают два вида перемещений: линейное вертикальное перемещение δ и угол поворота θ . Вертикальное перемещение сечений принято называть прогибом балки.

Осевая линия балки, прямолинейная до приложения изгибных нагрузок, становится криволинейной после их приложения. Функцию изогнутой оси балки, или функцию прогибов, принято обозначать $y(z)$. Функция углов поворота $\theta(z)$ связана с функцией прогибов $y(z)$ дифференциальной зависимостью (5.37), из которой можно сделать вывод, что из двух функций перемещений основной является функция прогибов.

Для того чтобы рассчитать балку на жесткость, необходимо определить её максимальный прогиб $\delta_{\max}$ и сравнить его с допускаемой величиной, то есть проверить выполнение условия жесткости (5.38). Допускаемая величина перемещения, заключенная здесь в квадратные скобки, обычно назначается из условий эксплуатации.

Далее рассмотрим методы определения перемещений при изгибе, которые делятся на две группы. К первой относятся методы, позволяющие установить функциональные зависимости $y(z)$ и $\theta(z)$. Ко второй группе относятся методы определения перемещений в конкретных, наперед заданных сечениях балки.

Слайд 16

Дифференциальное уравнение упругой линии балки

Определим связь функции изогнутой оси балки $y(z)$ с её внутренним изгибающим моментом.

Из дифференциальной геометрии известно, что для плоской кривой существует связь между её радиусом кривизны $\rho(z)$ и самой функцией $y(z)$ в виде зависимости (5.39).

Очевидно, что в области упругого деформирования угол наклона касательной к изогнутой оси балки θ стремится к нулю, то есть справедливо соотношение (5.40). Тогда в формуле (5.39) величиной производной от перемещения y'^2 можно пренебречь, и она примет вид (5.41).

С другой стороны, выражение, стоящее в левой части формулы (5.41), связано с внутренним изгибающим моментом M_x формулой (5.42), которая была получена при определении напряжений при чистом изгибе. Приравняв правые части формул (5.41) и (5.42), получим уравнение (5.43), которое называется дифференциальным уравнением изогнутой оси балки.

В это уравнение входит вторая производная функции изогнутой оси балки. Проинтегрировав его один раз, приходим к уравнению (5.44) для углов поворота $\theta(z)$. При повторном интегрировании получаем функцию изогнутой оси балки (5.45). Это выражение называется универсальным уравнением изогнутой оси балки. А сам метод определения функций $\theta(z)$ и $y(z)$ называется методом непосредственного интегрирования дифференциального уравнения изогнутой оси балки. В формулах (5.44) и (5.45) постоянные интегрирования C и D определяются из граничных условий задачи.

Слайд 17

Метод непосредственного интегрирования

Определим методом непосредственного интегрирования вертикальное перемещение среднего сечения S консольной балки длиной l при нагружении её сосредоточенной силой F.

Выберем начало координат в незакрепленном сечении балки, направив ось z к жесткой заделке. Тогда, согласно методу сечений, функция изменения внутреннего изгибающего момента M_x будет иметь вид (5.46). Подставив её в дифференциальное уравнение (5.43), получим вид этого уравнения непосредственно для заданной балки – (5.47).

Проинтегрировав это уравнение, получим функцию угла поворота сечений балки (5.48). Интегрируя полученное уравнение еще раз, приходим к уравнению упругой линии балки (5.49). Константы интегрирования C и D найдем из двух граничных условий задачи, а именно из условий закрепления балки. Левый конец её жестко защемлен, следовательно, в этом сечении угол поворота и вертикальное перемещение равны нулю. Учитывая, что в выбранной системе координата закрепленного сечения $z = l$, формулируем граничные условия задачи. Первое: $y'(z = l) = 0$. Второе: вертикальное перемещение $y(z = l) = 0$.

Подставив первое граничное условие в (5.48), получим уравнение, из которого находим значение постоянной интегрирования C . Подставив второе граничное условие и найденное значение C в уравнение упругой линии (5.49), находим значение второй постоянной интегрирования D .

Подставив найденные значения постоянных интегрирования в уравнение (5.49), получим окончательный вид функции перемещений поперечных сечений заданной балки (5.50).

Осталось найти искомое значение вертикального перемещения среднего сечения балки S , подставив его координату $z = l / 2$ в полученную функцию перемещений (5.50).

Таким образом, вертикальное перемещение среднего сечения балки равно $\frac{5Fl^3}{48EJ_x}$. Задача решена.

Слайд 18

Потенциальная энергия деформации при изгибе

Прежде чем переходить ко второй группе методов определения перемещений, получим выражение для потенциальной энергии деформации при изгибе.

Рассмотрим на рисунке 5.8 консольную балку, нагруженную в свободном сечении сосредоточенной парой сил M. Под действием этой пары сил осевая линия балки изогнется с радиусом кривизны ρ, а свободное сечение повернется на угол Θ.

Составим уравнение энергетического баланса. Здесь: I – работа внешних сил, приложенных к балке, U – потенциальная энергия деформации, K – кинетическая энергия.

Для случая статического нагружения кинетическая энергия равна нулю, поэтому потенциальная энергия деформации равна работе внешних сил балки.

Работу внешних сил, графически представленную на рисунке 5.9, определим по теореме Клапейрона (5.51). Выразив угол Θ через радиус кривизны осевой линии по формуле (5.52) и используя уже известную нам формулу (5.53), получим выражение (5.54) для работы внешних сил.

Таким образом, потенциальная энергия упругой деформации балки при изгибе определяется по формуле (5.55).

Слайд 19

Интеграл Мора для случая изгиба

Из второй группы методов определения перемещений при изгибе рассмотрим метод Мора и его численные приложения. Начнем с основного метода Мора.

Определим перемещение произвольного сечения C консольной балки, нагруженной в свободном сечении сосредоточенной силой F. Это перемещение изображено на рисунке – вариант «а».

Приложим в точке C фиктивную силу Φ, что отображается на рисунке, вариант «б» [бэ]. Это даст возможность использовать для определения искомого перемещения теорему Кастилиано. Функция внутреннего изгибающего момента с учетом обеих сил имеет вид (5.56), где M_1 – коэффициент пропорциональности.

Для определения физического смысла коэффициента M_1 разгрузим балку от внешней силы F, а фиктивную силу Φ приравняем к единице, что показано на рисунке, вариант «в». Для этого случая получим выражение (5.57).

Таким образом, M_1 – это внутренний изгибающий момент, возникающий при разгрузке балки от внешних сил и нагружении ее единичной безразмерной силой, приложенной в направлении искомого перемещения.

Запишем выражение для потенциальной энергии деформации с учетом обеих сил в виде (5.58).

Применяя теорему Кастилиано, определим искомое перемещение по формуле (5.59). Так как в исходной системе фиктивная сила отсутствует, приравняем её в этой формуле к нулю. Получим выражение (5.60).

Обобщая рассмотренный случай нагружения на k рабочих участков, приходим к выражению (5.61), которое называется интегралом Мора для случая изгиба.

Слайд 20

Пример применения интеграла Мора

Рассмотрим двухопорную балку, нагруженную равномерно распределенной нагрузкой интенсивности q. Определим прогиб балки в среднем сечении C с помощью интеграла Мора.

В силу симметрии нагружения реакции в опорах будут равны между собой, направлены вверх и равны половине равнодействующей распределенной нагрузки, то есть $ql / 2$. Построим эпюры внутренних силовых факторов Q_y и M_x. Найдем методом сечений функцию внутреннего изгибающего момента $M_x(z)$ от действия внешних сил. Она имеет вид (5.62).

Разгрузим балку от внешней нагрузки и приложим в сечении C в вертикальном направлении фиктивную единичную безразмерную силу. Определим реакции опор. В силу симметрии нагружения реакции будут одинаковыми по величине, равными 1/2 и направленными вверх. Построим от действия этой единичной силы единичную эпюру изгибающих моментов M_1. Балка с единичной силой имеет два участка. Выразим методом сечений функцию единичного изгибающего момента $M_1(z)$ на левом участке в направлении слева направо. Она имеет вид (5.63). На правом участке в силу симметрии функция $M_1(z)$ будет точно такой же в направлении справа налево.

Подставим функции грузового и единичного моментов (5.62) и (5.63) в интеграл Мора (5.61). На двух симметричных участках балки обе подинтегральные функции будут симметричные, поэтому пределы интегрирования определяем по длине одного участка – от нуля до $l / 2$, а результат удваиваем. Вычисление этого интеграла представлено в выражении (5.64).

Таким образом, вертикальное перемещение среднего сечения балки δ_C равно $\dfrac{5ql^4}{384EJ_x}$.

Слайд 21

Формула Симпсона

Интеграл Мора можно решить и с помощью численных методов. Одним из них является трехточечный метод Симпсона. Рассмотрим его.

В интеграле Мора функция единичного момента M_1 всегда является линейной, а функция грузового момента $M(F)$ в общем случае при равномерно распределенной нагрузке является квадратичной параболой. Это показано на рисунке 5.10. Произведение этих функций, таким образом, в общем случае есть кубическая парабола, интеграл от которой можно вычислить по формуле Симпсона (5.65). Для этого нужно определить значения грузового и единичного моментов в трех точках: на левой границе, в средней точке и на правой границе участка и подставить их в формулу (5.65). Если участков взаимодействия несколько, то, как и в интеграле Мора, формула Симпсона применяется отдельно для каждого участка, а результаты алгебраически складываются.

Рассмотрим вычисление интеграла Мора по методу Симпсона в ранее рассмотренном примере, все необходимые графические данные для которого изображены на рисунке 5.11. На единичной эпюре моментов два участка, а грузовая эпюра моментов симметрична относительно среднего сечения, поэтому результаты применения формулы Симпсона на обоих участках будут одинаковы. Значения моментов в средней точке левого участка показаны на обеих эпюрах моментов. Вычисление перемещения сечения *C* по формуле Симпсона представлено в формуле (5.66). Результат тот же самый.

Слайд 22

Способ Верещагина

Рассмотрим второй способ вычисления интеграла Мора, способ Верещагина.

Пусть на участке длиной l грузовая эпюра ограничена функцией $f_1(z)$, единичная эпюра – функцией $f_2(z)$. Рассмотрим интеграл вида (5.67). Поскольку функция $f_2(z)$ всегда является линейной, общий вид которой с математической точки зрения можно представить в виде (5.68), тогда интеграл (5.67) можно преобразовать к виду (5.69). Учитывая, что площадь грузовой эпюры может быть вычислена по формуле (5.70), интеграл (5.69) примет вид (5.71). В данном выражении интеграл, входящий во второе слагаемое, представляет собой статический момент площади грузовой эпюры относительно оси y и может быть вычислен по формуле (5.72). Здесь $z_{ц.т.}$ – абсцисса точки центра тяжести грузовой эпюры.

Окончательно исходный интеграл принимает вид (5.73).

Если теперь от абстрактных функций f_1 и f_2 перейти к функциям грузового и единичного моментов, то интеграл Мора можно вычислить с помощью формулы Верещагина (5.74).

Таким образом, по правилу Верещагина интеграл Мора определяется как отношение произведения площади грузовой эпюры моментов на расположенную под её центром тяжести ординату единичной эпюры к жесткости поперечного сечения EJ_x . Если грузовая эпюра является линейной, то произведение в формуле Верещагина обладает свойством коммутативности.

Слайд 23

Пример применения способа Верещагина

Определим по формуле Верещагина перемещение среднего сечения консольной балки, показанной на рисунке, вариант «а».

Построим грузовую эпюру изгибающих моментов M_x от действующей силы F . Это показано в варианте «б» рисунка.

Разгрузим балку от внешней силы и приложим в сечении C единичную безразмерную сосредоточенную силу. Эти действия отображены в варианте «в» рисунка.

Построим единичную эпюру изгибающих моментов M_1 от действия единичной силы, это действие отображается в варианте «г» рисунка.

В силу того, что обе эпюры моментов линейные, запишем формулу Верещагина с использованием свойства коммутативности, то есть площадь будем определять у единичной эпюры, и под её центром тяжести найдем ординату грузовой эпюры моментов.

Площадь единичной эпюры, представляющей собой прямоугольный треугольник, равна половине произведения его катетов, то есть $l^2 / 8$. Центр тяжести у треугольника расположен на расстоянии, равном двум третям длины катета от вершины, как показано на рисунке. Над точкой центра тяжести единичной эпюры определяем ординату эпюры грузового момента, при этом необходимо соблюдать пропорции. Она равна $5Fl / 6$.

Подставляя найденные значения в формулу Верещагина, находим искомую величину прогиба балки в сечении C, равную $\dfrac{5Fl^3}{48EJ_x}$. Задача решена.

Анализируя все рассмотренные выше способы решения интеграла Мора, можно сделать вывод, что метод Симпсона является наиболее простым для применения. Поэтому в последующих примерах при определении перемещений будем вычислять интеграл Мора с помощью формулы Симпсона.

Слайд 24

Алгоритм расчета на жесткость при изгибе

Рассмотрев некоторые методы определения перемещений при изгибе, теперь определим последовательность действий при расчете конструкции на жесткость.

Прежде всего, необходимо построить так называемую грузовую эпюру изгибающих моментов от действия заданной нагрузки.

Затем нужно методом Мора с использованием фиктивной единичной силы определить прогибы граничных сечений балки, в которых она не закреплена. При этом для вычисления соответствующих интегралов Мора рекомендуется использовать простейшую формулу Симпсона.

Далее нужно провести прямолинейную ось балки, отложить от нее в выбранном масштабе найденные значения прогибов в соответствующих сечениях и через полученные точки изобразить приближенный вид изогнутой оси балки. При этом необходимо учесть, что закрепленные сечения не смещаются, их перемещения равны нулю. По виду изогнутой оси нетрудно определить величину максимального прогиба $\delta_{\max}$.

И последнее: сравнив величину $\delta_{\max}$ с допускаемой величиной перемещения, нужно сделать вывод о выполнении условия жесткости.

Слайд 25

Пример расчета на жесткость при изгибе

Рассмотрим двухопорную балку BP , для которой эпюры внутренних силовых факторов мы построили в теме «Построение эпюр ВСФ при растяжении-сжатии, кручении, изгибе», а расчет на прочность произведен выше для двух вариантов материала балки: пластичного и хрупкого.

Рассчитаем данную балку на жесткость, выбрав пластичный вариант материала с модулем Юнга E , равным 2 на 10 в пятой мегапаскалям. Из трех симметричных форм, подобранных нами из условия прочности, выберем наиболее рациональную – двутавр номер $24a$ с моментом инерции J_x , равным 3800 см^4 .

Примем величину допускаемого прогиба равной тысячной доле от длины пролета балки l . Пролетом называется расстояние между опорами, в нашем случае оно равно всей длине балки, то есть 4,6 метра. Тогда величина допускаемого прогиба равна 4,6 миллиметра.

Чтобы рассчитать балку на жесткость, нужно найти её максимальный прогиб и сравнить с допускаемой величиной.

Для этого, согласно алгоритму, нужно прежде всего найти прогибы в незакрепленных граничных сечениях балки, то есть в сечениях C , D , L и K .

Все перемещения будем определять методом Мора с использованием простейшей формулы Симпсона.

Слайд 26

Построение единичной эпюры моментов M_{1C}

Начнем с определения перемещения в незакрепленном сечении C .

Согласно алгоритму, сначала нужно построить грузовую эпюру изгибающего момента M_x . Эту эпюру мы уже построили в теме «Построение эпюр ВСФ при растяжении-сжатии, кручении, изгибе», на рисунке это вариант «а» .

Далее разгрузим балку от внешней нагрузки и приложим в сечении C единичную безразмерную сосредоточенную силу в вертикальном направлении, как показано в варианте «б» на рисунке. Построим от её действия единичную эпюру изгибающих моментов M_{1C} , определив предварительно из уравнений равновесия реакции в опорах.

Из моментного уравнения равновесия, записанного относительно опорной точки B , найдем единичную реакцию R_{1P} . Вычисления представлены группой формул (5.75). Значение реакции в относительных единицах равно 0,22.

Из силового уравнения равновесия в проекции на вертикальную ось y найдем вторую единичную реактивную силу R_{1B} . Вычисления представлены группой формул (5.76). Значение реакции в относительных единицах равно 0,78.

Методом сечений построим единичную эпюру M_{1C} с учетом найденных реакций и единичной безразмерной силы, как показано на рисунке, вариант «в» .

И на грузовой эпюре M_x , и на единичной эпюре M_{1C} значения ординат определены как в граничных сечениях, так и в средних точках участков.

Средние значения выделены красным цветом. Они потребуются при применении формулы Симпсона.

Слайд 27

Определение прогиба в сечении *C*

Найдем перемещение δ_C , «перемножив» грузовую эпюру моментов M_x на единичную M_{1C} , используя формулу Симпсона. Количество участков перемножения $k = 5$: BC , CD , DL , LK и KP .

Формулу Симпсона применяем на каждом участке с учетом его длины, а результаты алгебраически суммируем. Поскольку вся грузовая эпюра расположена выше базовой линии, значит, все её ординаты положительные. Единичная эпюра лежит ниже базовой линии, все её ординаты отрицательные. В результате в формуле Симпсона во всех слагаемых на всех участках получаются отрицательные значения.

Жесткость поперечного сечения EJ_x , которая входит в знаменатель формулы Симпсона, при предварительных вычислениях выносится за скобку. В окончательном вычислении значения модуля Юнга E и момента инерции J_x подставляются с учетом перевода единиц.

Таким образом, перемещение δ_C равно минус 6,7 миллиметра. Знак «минус» говорит о том, что, выбирая направление единичной силы, мы не угадали истинное направление перемещения.

Подводя итог, делаем вывод: при действии заданной нагрузки сечение C балки перемещается вверх на 6,7 миллиметра.

Слайд 28

Определение прогиба в сечении *D*

Определим прогиб балки в сечении D . Все действия при этом аналогичны тем, что выполнялись для сечения C .

Сначала разгрузим балку от внешней нагрузки и приложим в сечении D единичную безразмерную сосредоточенную силу в вертикальном направлении. Построим от её действия единичную эпюру изгибающих моментов M_{1D} , определив предварительно из уравнений равновесия реакции в опорах. Вычисление реактивных единичных сил было подробно показано для сечения C , здесь лишь приведем полученные значения. Значение реакции R_{1B} в относительных единицах равно 0,609, а значение реактивной силы R_{1P} равно 0,391.

На единичной эпюре M_{1D} также вычисляем и показываем значения ординат в граничных и в средних сечениях всех участков.

Найдем перемещение δ_D , «перемножив» грузовую эпюру моментов M_x на единичную M_{1D} , используя формулу Симпсона. Участки перемножения те же: BC , CD , DL , LK и KP . Вычисления аналогичны, они расписаны на слайде подробно по участкам. Замечания по знакам прежние. Направление единичной силы выбрали вниз, результат получили отрицательный, следовательно, сечение перемещается в противоположную сторону.

Таким образом, сечение D нагруженной балки смещается вверх на 10 миллиметров.

Слайд 29

Определение прогиба в сечении *L*

Точно так же определим перемещение следующего незакрепленного сечения L .

Разгрузим балку от внешней нагрузки и приложим в сечении L единичную безразмерную сосредоточенную силу в вертикальном направлении. Построим от её действия единичную эпюру изгибающих моментов M_{1L} , определив предварительно из уравнений равновесия реакции в опорах. В результате вычислений получим значение реакции R_{1B} , в относительных единицах равное 0,435, и значение реактивной силы R_{1P} , равное 0,565.

На единичной эпюре M_{1L} также вычисляем и показываем значения ординат в граничных и в средних сечениях всех участков.

Найдем перемещение δ_L, «перемножив» грузовую эпюру моментов M_x на единичную M_{1L}, используя формулу Симпсона. Участки перемножения те же: BC, CD, DL, LK и KP. Вычисления аналогичны, они также подробно по участкам расписаны на слайде. Замечания по знакам прежние. Направление единичной силы выбрали вниз, результат получили отрицательный, следовательно, сечение перемещается в противоположную сторону.

Таким образом, сечение L нагруженной балки смещается вверх на 9,8 миллиметра.

Слайд 30

Определение прогиба в сечении *K*

Определим вертикальное перемещение последнего незакрепленного граничного сечения K.

Разгрузим балку от внешней нагрузки и приложим в сечении K единичную безразмерную сосредоточенную силу в вертикальном направлении. Построим от её действия единичную эпюру изгибающих моментов M_{1K}, определив предварительно из уравнений равновесия реакции в опорах. В результате вычислений получим значение реакции R_{1B}, в относительных единицах равное 0,326, и значение реактивной силы R_{1P}, равное 0,674.

На единичной эпюре M_{1K} также вычисляем и показываем значения ординат в граничных и в средних сечениях всех участков.

Найдем перемещение δ_K, «перемножив» грузовую эпюру моментов M_x на единичную M_{1K}, используя формулу Симпсона. Участки перемножения те же: BC, CD, DL, LK и KP. Вычисления аналогичны, они показаны на слайде. Замечания по знакам прежние. Направление единичной силы выбрали вниз, результат получили отрицательный, следовательно, сечение перемещается в противоположную сторону.

Таким образом, сечение K нагруженной балки смещается вверх на 8,1 миллиметра.

Слайд 31

Проверка выполнения условия жесткости

Итак, найдены перемещения всех незакрепленных сечений, теперь изобразим приближенный вид изогнутой оси балки.

Для этого сначала проведем прямолинейную осевую линию балки, какой она была до приложения внешних сил. Затем в масштабе отложим от нее найденные значения перемещений в незакрепленных граничных сечениях. В закрепленных сечениях B и P перемещения равны нулю, отметим их точками на осевой линии. Соединим все полученные таким образом точки плавной кривой. На рисунке она показана красной пунктирной линией. Это и есть приближенный вид изогнутой оси балки, по которой нетрудно определить максимальный прогиб балки.

Наибольшее вертикальное перемещение возникает в сечении D, оно равно 10 миллиметрам. Это больше допускаемой величины, равной 4,6 миллиметра. Следовательно, условие жесткости не выполняется.

В задаче требовалось только проверить выполнение этого условия, что мы и сделали. Если потребуется удовлетворить это условие, то для этого будет необходимо либо пропорционально уменьшить внешнюю нагрузку, либо увеличить размер поперечного сечения, то есть взять двутавр большего номера.

Таким образом, задача решена.

Слайд 32

Косой изгиб

Косым изгибом называется такой вид деформации, при котором силовая линия не совпадает ни с одной из главных центральных осей сечения. Силовая линия – это след плоскости действия внутреннего изгибающего момента. В рассмотренных выше примерах силовая линия совпадала с одной из главных центральных осей сечения, а вторая, ей перпендикулярная, являлась нейтральной линией. Такой вид деформации называется прямым изгибом.

Давайте вспомним, как определить положение главных центральных осей сечения по простейшим признакам, при этом необходимо отвлечься от точных определений. Если сечение имеет ось симметрии, то она всегда является главной центральной осью. Вторая же главная центральная ось перпендикулярна первой и проходит через центр тяжести сечения.

В связи с вышеизложенным косой изгиб можно представить как сумму двух прямых изгибов, как показано на рисунке. Слева изображена балка, нагруженная сосредоточенной парой сил M , линия действия которой наклонена под углом α к главной центральной оси y . Это случай косого изгиба. Справа показана балка, где действующий момент M разложен на проекции M_x и M_y . Каждый из них поворачивает сечение относительно соответствующей главной центральной оси x или y и определяется по формулам (5.77). Это сочетание двух прямых изгибов. Действие на балку в этих двух случаях равноценно. Это следует из принципа независимости действия сил.

Тогда, согласно тому же принципу, напряжения при косом изгибе в любой произвольной точке поперечного сечения определяются как алгебраическая сумма нормальных напряжений от каждого изгибающего момента, создающего прямой изгиб. Математически это выражено в формуле (5.78). Здесь x и y – координаты точки сечения, в которой определяется величина суммарного напряжения; J_x и J_y – главные центральные моменты инерции поперечного сечения.

Слайд 33

Положение нейтральной линии при косом изгибе

При прямом изгибе нейтральная линия перпендикулярна силовой линии. Так ли это будет при косом изгибе? Давайте выясним.

Обозначим координаты точек нейтральной линии $x_{\text{н.л.}}$ и $y_{\text{н.л.}}$ соответственно. Из условия равенства нулю напряжения в точках нейтральной линии и с учетом выражения для напряжений при косом изгибе (5.78) получим уравнение нейтральной линии (5.79). Это прямая линия, проходящая через начало координат, наклон которой к оси x определяется тангенсом угла β .

Выразим $tg\beta$ через координаты точек нейтральной линии как отношение $y_{\text{н.л.}}$ к $x_{\text{н.л.}}$. Это же отношение найдем из уравнения нейтральной линии (5.79). Подставив вместо моментов M_x и M_y их выражения из формул (5.77), получим соотношение между углом наклона нейтральной линии β к оси x и углом наклона силовой линии α к оси y . Все эти преобразования показаны в формуле (5.80). Из полученного соотношения можно сделать вывод, что при $J_x \neq J_y$ угол α не равен углу β . А это, в свою очередь, означает, что нейтральная линия при косом изгибе не перпендикулярна силовой линии. Этот факт и объясняет название данного вида деформации – косой изгиб.

Слайд 34

Условие прочности при косом изгибе

При косом изгибе так же, как и при прямом, максимальное напряжение возникает в точках опасного сечения, наиболее удаленных от нейтральной линии. Эти точки называются опасными точками. Для сечения рассматриваемой балки наиболее опасной является точка K , показанная на рисунке 5.12.

Условие прочности при изгибе в двух плоскостях для опасной точки K с координатами x_K , y_K , определяемыми относительно главных центральных осей сечения, имеет вид (5.81).

Если форма сечения такова, что опасная точка имеет координаты, максимальные сразу относительно обеих осей, как показано на рисунке 5.13, то условие прочности можно записать через моменты сопротивления в виде (5.82). Это справедливо для таких сечений, как, например, прямоугольник, двутавр, швеллер.

Слайд 35

Случаи исключения

Для таких форм поперечного сечения, как круг и все правильные многоугольники, у которых все центральные оси – главные, случай косого изгиба невозможен. Для таких сечений изгиб всегда прямой, так как нейтральная линия всегда перпендикулярна силовой линии. Если при этом внешняя нагрузка представляет собой сочетание двух прямых изгибов, то вид деформации называют прямым пространственным изгибом. Условие прочности для сечений исключений можно записать в виде (5.83), где суммарный момент определяется как геометрическая сумма моментов M_x и M_y .

Для круглого и квадратного сечений условие прочности можно записать через момент сопротивления, как показано в формуле (5.84). Здесь моменты сопротивления для круга и квадрата, вычисленные по определению через размеры сечений, приведены в формулах (5.85) и (5.86), соответственно. В формуле (5.85) b – сторона квадрата, в формуле (5.86) d – диаметр круга.

Слайд 36

Алгоритм расчета на прочность при косом изгибе

Подводя итог вышесказанному, перечислим последовательность действий при расчете конструкции на прочность в случае косого изгиба.

Прежде всего, необходимо построить эпюры внутренних изгибающих моментов M_x и M_y от действия внешних нагрузок, по которым затем определить положение опасного сечения. Опасным будет сечение, где суммарный момент, равный геометрической сумме моментов M_x и M_y, принимает наибольшее по абсолютной величине значение.

Далее в опасном сечении нужно определить положение силовой линии. Для этого необходимо в плоскости сечения по осям x и y отложить в масштабе ординаты внутренних моментов в сторону, соответствующую положению ординат на эпюрах изгибающих моментов в опасном сечении. При этом M_x нужно откладывать по оси y, а M_y по оси x. Ордината суммарного момента, построенная как геометрическая сумма ординат моментов M_x и M_y, определяет положение силовой линии.

Третьим шагом необходимо определить положение опасных точек в опасном сечении. Для сечения прямоугольной формы и подобной ему, такой как двутавр или швеллер, опасные точки – это угловые точки в силовых четвертях. Они равноопасны, так как находятся на одинаковых расстояниях от главных центральных осей сечения.

И последним действием нужно выбрать правильный вид условия прочности, записать его и решить согласно требованиям поставленной задачи. Для форм сечений общего вида используется условие (5.81), для «зеркальных» форм, таких как прямоугольник или двутавр, используется «зеркальная» формула (5.82).

Для случаев исключений алгоритм отличается лишь выбором вида условия прочности. Условие (5.81) заменяется на (5.83), а условие (5.82) на (5.84).

Слайд 37

Пример расчета на прочность при косом изгибе

В качестве примера рассмотрим консольный стержень прямоугольного сечения, нагруженный на свободном конце сосредоточенной силой F, равной 10 кН . Вектор силы проходит через центр тяжести сечения под углом 30° к вертикальной оси y . Длина стержня l равна 1 метру, а соотношение сторон прямоугольного сечения $h / b = 2$. Стержень изготовлен из стали Ст3 с допускаемым напряжением $= 160$ МПа .

Для данного стержня требуется:

1. Определить из условия прочности по допускаемым напряжениям величину характерного размера прямоугольного сечения b .
2. Заменив прямоугольное сечение стержня круглым, определить величину диаметра круглого сечения d из условия прочности.
3. Сравнить металлозатраты для стержней прямоугольного и круглого поперечных сечений.

Слайд 38

Положение опасного сечения и опасных точек

Согласно алгоритму, начнем решение задачи с определения положения опасного сечения в стержне. Для этого спроектируем силу F на главные центральные оси x и y поперечного сечения. Проекции F_x и F_y найдем с учетом угла наклона силы F к оси y , как показано на слайде. Затем от каждой из этих сил на одной базе построим эпюры изгибающих моментов M_y и M_x соответственно, как представлено на рисунке 5.14. Опасное сечение будет в заделке, то есть в том сечении, где оба момента достигают своего максимального значения.

Теперь, согласно второму шагу алгоритма, определим положение силовой линии в опасном сечении. Для этого изобразим сечение, как показано на рисунке 5.15 справа, и от его центра отложим в масштабе значения изгибающих моментов в ту же сторону, что на соответствующих эпюрах: M_y отложим влево, а M_x отложим вниз. Так как эпюры построены на сжатых волокнах, то очевидно, что от момента M_y сжаты левые волокна стержня. Поэтому слева от оси y, во II и III четвертях сечения, поставим знаки «–», а справа, в I и IV четвертях, поставим знаки «+». Нумерация четвертей прямоугольника показана на рисунке 5.15 слева. От момента M_x сжаты нижние волокна стержня относительно оси x и, соответственно, поставим знаки «–» нормального напряжения в Ш и IV четвертях, а в верхних – I и II четвертях знаки «+». Тогда ордината суммарного момента пройдет через I и III четверти и определит положение силовой линии.

Далее определим положение опасных точек в опасном сечении. Это будут угловые точки в силовых четвертях, то есть точки B и C. Они являются равноопасными, так как величины напряжений в них одинаковы по абсолютной величине и противоположны по знаку. В точке C – угловой точке третьей четверти с двумя знаками «–» – возникает максимальное сжимающее напряжение. Противоположная ей точка B попала в область растяжения, и напряжение в ней будет положительным.

Слайд 39

Определение размеров прямоугольного сечения

Запишем условие прочности для опасных точек B и C и определим из него величину характерного размера b прямоугольного поперечного сечения.

Прямоугольник – зеркально симметричное сечение, поэтому форму условия прочности выбираем «зеркальную» – (5.87).

Предварительно выразим моменты сопротивления поперечного сечения, входящие в условие прочности, через характерный размер b, как показано в формулах (5.88). Здесь учитывается заданное соотношение сторон прямоугольника.

Подставим в условие прочности численные значения изгибающих моментов в опасном сечении и выражения (5.88) для моментов сопротивления. Получим неравенство, из которого определим минимально допускаемую величину характерного размера прямоугольника. Все эти преобразования представлены формулами (5.89).

Таким образом, при действии на стержень заданной силы минимально допустимая величина основания прямоугольного сечения b равна 56 миллиметрам. Соответственно, высота прямоугольника должна быть в два раза больше – 112 миллиметров.

Слайд 40

Определение размеров круглого сечения

Решим вторую часть задачи. Предположим, что заданный стержень имеет не прямоугольную форму поперечного сечения, а круглую. Найдем минимальный размер диаметра круглого сечения из условия прочности.

Для этого определим прежде всего максимальное значение внутреннего изгибающего момента в заделке, как показано в формуле (5.90). Максимальный момент равен 10 килоньютон-метрам.

В плоскости опасного сечения проведем ординату максимального момента под углом 30° к оси y и продлим ее до пересечения с контуром сечения, как показано на рисунке. Это и будет силовой линией. Нейтральная линия проходит перпендикулярно силовой линии. Опасными точками будут точки, расположенные на максимальном расстоянии от нейтральной линии. Это точки K и L, находящиеся на концах диаметра, совпадающего с силовой линией. Направление вектора внешней силы F указывает на сжатую зону. То есть половина сечения выше нейтральной линии растянута, и точка K испытывает положительные напряжения. Соответственно, точка L испытывает отрицательные напряжения.

Так как круглое сечение относится к сечениям-исключениям, запишем условие прочности по формуле прямого изгиба (5.91).

Для круглого сечения момент сопротивления через диаметр определяется по формуле (5.92).

Подставим в условие прочности значение максимального изгибающего момента из (5.91) и выражение для момента сопротивления из (5.92). Из полученного неравенства по формуле (5.93) определим минимально допустимое значение диаметра круглого сечения. Оно равно 86 миллиметрам.

Осталось сравнить стержни прямоугольного и круглого сечений по металлозатратам. Для этого определим площади сечений по формулам (5.94). Площадь прямоугольного сечения оказалась больше площади круглого, следовательно, по металлозатратам стержень круглого профиля экономически более выгодный. Задача решена.

Слайд 41

Косой изгиб с растяжением-сжатием

Рассмотрим более сложный вид нагружения, добавив к действию косого изгиба действие продольной силы. Такой вид деформации называется сочетанием косого изгиба с растяжением-сжатием.

В качестве примера на рисунке изображен стержень, испытывающий именно такой вид деформации. Одна из сил, направленная вдоль оси стержня, вызывает деформацию растяжения, а вторая, линия действия которой составляет угол α с главной центральной осью поперечного сечения y, деформацию косого изгиба.

Чтобы научиться оценивать прочность конструкции в случае косого изгиба с растяжением-сжатием, необходимо учитывать следующие моменты.

1. Оценка напряжений в опасной точке элемента конструкции ведется отдельно от каждого внутреннего силового фактора, возникающего при данном виде деформации.

2. Поскольку присутствует косой изгиб, то в первую очередь определяют положение опасных точек от косого изгиба.

3. В зависимости от того, что добавляется к косому изгибу – растяжение или сжатие, в опасные точки от действия изгибающих моментов будет добавляться, соответственно, положительное или отрицательное напряжение от продольной силы.

4. Условие прочности при косом изгибе с растяжением-сжатием имеет вид формулы (5.95).

5. Если материал элемента конструкции пластичный, то есть имеет одинаковые пределы текучести при растяжении и сжатии, то расчет напряжений в опасной точке сжатой зоны ведется по модулю.

Слайд 42

Прямой изгиб с растяжением-сжатием

Совокупность прямого изгиба, при котором силовая линия совпадает с одной из главных центральных осей сечения, с одновременным силовым воздействием в направлении продольной оси элемента конструкции приводит к данному случаю деформации.

На рисунке изображен консольный стержень круглого сечения, испытывающий прямой изгиб с растяжением.

При оценке прочности элемента конструкции в данном случае нагружения необходимо знать следующее.

Во-первых, это частный случай косого изгиба с растяжением-сжатием. Если косой изгиб представляют два изгибающих момента, то в данном случае присутствует один из них: M_x или M_y . Поэтому все методические приемы оценки прочности остаются такими же, как и для случая косого изгиба с растяжением-сжатием.

Во-вторых, вид условия прочности для прямого изгиба с растяжением-сжатием определяется в зависимости от особенностей нагружения и формы сечения, а именно:

- при наличии внутреннего изгибающего момента M_x и продольной силы N оно имеет вид (5.96);
- при наличии внутреннего изгибающего момента M_y и продольной силы N условие прочности записывается в виде (5.97);
- при наличии моментов M_x и M_y и продольной силы N , но для форм сечений, исключающих косой изгиб, таких как круг и правильные многоугольники, вид условия прочности определяется формулой (5.98). Здесь суммарный момент находится как геометрическая сумма моментов M_x и M_y , а W_{oc} – осевой момент сопротивления поперечного сечения относительно оси изгиба.

Слайд 43

Пример расчета на прочность при изгибе со сжатием

Рассмотрим консольную балку на рисунке 5.16, нагруженную силами, создающими изгиб в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, и сжимающей силой, приложенной к свободному концу. Материал балки – сталь Ст3 с допускаемым напряжением $= 160$ МПа .

Определим величину для двух случаев поперечного сечения: прямоугольного с отношением сторон $h/b = 2$ и круглого с диаметром d, представленных на рисунке 5.17. Известно, что основание прямоугольника $b = 4 \cdot 10^{-2}\,м$, или 4 сантиметра. Диаметр круглого сечения $d = 6 \cdot 10^{-2}\,м$, или 6 сантиметров.

Здесь неслучайно выбраны две разные формы поперечного сечения. Для прямоугольного сечения изгибные нагрузки в двух взаимно перпендикулярных плоскостях вызывают деформацию косого изгиба. Круглое сечение, которое относится к сечениям-исключениям, при таком нагружении испытывает деформацию прямого изгиба. Проследим особенности расчета на прочность для обоих случаев деформации: косого изгиба со сжатием и прямого изгиба со сжатием.

Слайд 44

Определение положения опасного сечения

Расчет на прочность начинаем с определения положения опасного сечения стержня, то есть сечения, где возникает наибольшее по абсолютной величине напряжение. Для стержня, у которого размеры поперечного сечения по длине не изменяются, положение опасного сечения определяется по эпюрам внутренних силовых факторов.

Построим эпюры внутренних изгибающих моментов M_x и M_y, а также эпюру продольной силы N. Все эпюры представлены на рисунке. Они построены методом сечений на базах, параллельных осевой линии стержня, причем эпюры изгибающих моментов представлены на одной базе в разных плоскостях, соответствующих плоскостям действия вертикальных и горизонтальных сил.

Эпюра продольной силы N постоянна по всей длине стержня. Из эпюр изгибающих моментов видно, что предположительно опасными могут быть два сечения: C или D.

Дальнейший анализ зависит уже не только от величины внутренних усилий, но и от формы и размеров поперечного сечения. Рассмотрим поочередно прямоугольную и круглую форму сечений заданных размеров.

Слайд 45

Прямоугольная форма: сечение *C*

Для стержня прямоугольного профиля выберем из двух подозреваемых сечений – C или D – наиболее опасное. Какое сечение более опасно в данном случае, мы сможем сказать только после определения величин напряжений в опасных точках каждого сечения.

Рассмотрим сначала сечение C . Оно испытывает прямой поперечный изгиб со сжатием.

Определим положение опасных точек в сечении C . Для этого в плоскость сечения перенесем с эпюры ординату внутреннего изгибающего момента M_x , равную $3F$, как показано на рисунке. Установим положение силовой линии. В сечении C она совпадает с осью y , а ось x является нейтральной от действия момента M_x . Опасными являются точки верхней и нижней стороны сечения. Нижние волокна испытывают напряжение сжатия, на это указывает ордината момента, расположенная по оси y ниже центра тяжести. Поэтому в области нижних волокон мы ставим знак «–», а в области верхних «+», так как они испытывают напряжение растяжения. Добавляя к каждому знаку напряжений от действия изгибающего момента знак «–» от действия сжимающей продольной силы, видим, что опасными в сечении C являются точки, расположенные на нижней стороне прямоугольника.

Определим величину максимального напряжения, возникающего в опасных точках от действия момента M_x , пренебрегая при этом напряжением от продольной силы N в силу его малости. Вычисление максимального напряжения приведено в формуле (5.99).

Слайд 46

Прямоугольная форма: сечение *D*

Рассмотрим второе подозреваемое сечение D . Оно испытывает косой поперечный изгиб со сжатием.

Определим положение опасных точек в сечении D .

Здесь силовая линия определяется по положению ординаты суммарного момента M_{Σ} и пересекает II и IV четверти поперечного сечения, как показано на рисунке. Опасными от изгиба будут угловые точки K и L .

Положение ординаты суммарного изгибающего момента указывает на то, что точка L испытывает напряжение сжатия, и рядом с ней мы ставим два знака «–» от действия моментов M_x и M_y . Рядом с противоположной точкой K два знака «+», так как в ней возникают напряжения растяжения. Добавляя к каждому знаку напряжений от действия изгибающих моментов знак «–» от действия сжимающей продольной силы, видим, что опаснее будет точка L , где все три знака одинаковые.

Для сечения D максимальное напряжение в опасной точке L от действия моментов M_x и M_y находится по формуле (5.100).

Видно, что максимальные напряжения в опасных точках сечений C и D равны между собой, следовательно, оба сечения стержня равноопасны.

Слайд 47

Грузоподъемность балки прямоугольного профиля

Определим величину из условия прочности, подставив в него значение максимального напряжения, вычисленного в равноопасных точках сечений C и D , как показано в формулах (5.99). Подставляя сюда известные значения размера прямоугольника и допускаемого напряжения, получаем по формуле (5.101) величину допускаемой силы, равную 2,28 кН .

Проведем проверку прочности в опасных точках сечения C и D с учетом перенапряжения от действия продольной силы N , которую предварительно мы не учитывали. Убедимся, что это действие было правомерно. Вычисление максимального напряжения с учетом и изгибающих моментов, и продольной силы показано в формуле (5.102). Видно, что напряжение от действия изгибающих моментов почти на два порядка больше, чем от действия продольной силы. И хотя величина полного напряжения несколько превышает допускаемую величину, равную 160 мегапаскалей, но всего лишь на 0,64 %, что меньше допустимых 5 % перегруза.

Слайд 48

Круглая форма: сечение *C*

Рассмотрим теперь стержень круглого сечения и проведем анализ напряженного состояния в опасных точках сечений C и D.

Круглое сечение C так же, как и при прямоугольной форме, испытывает прямой поперечный изгиб со сжатием. Определим в нем положение опасных точек.

В сечении C силовая линия совпадает с осью y, нейтральная – с осью x, как показано на рисунке. Опасными являются точки G и P на пересечении силовой линии с контуром круглого сечения, находящиеся на максимальном расстоянии от нейтральной линии. Нижняя точка P испытывает напряжение сжатия, и около нее мы поставим знак «–». Здесь объяснение аналогичное, что и для прямоугольного профиля – ордината момента M_x расположена со стороны сжатых волокон. Верхняя точка G, соответственно, попала в область растяжения, и около нее мы поставим знак «+». Добавляя знак «–» от напряжений, возникающих под действием сжимающей продольной силы, получаем максимальное по модулю напряжение в точке P.

Вычисление максимального напряжения в сечении C в его опасной точке P от действия момента M_x представлено формулой (5.103). При этом пренебрегаем напряжением от действия продольной силы в силу его малости.

Слайд 49

Круглая форма: сечение *D*

Рассмотрим второе подозреваемое сечение D. Оно, в отличие от одноименного сечения прямоугольного профиля, испытывает прямой пространственный изгиб со сжатием, так как круглая форма является сечением-исключением.

Определим положение опасных точек в сечении D.

Для этого необходимо определить положение силовой линии. Она должна проходить через ординату суммарного момента M_{Σ} . Ординаты внутренних моментов M_x и M_y откладываем в ту же сторону, что и на эпюрах соответствующих моментов. В силу равенства моментов M_x и M_y ордината суммарного момента, а значит, и силовая линия, проходит под углом в 45° через II и IV четверти поперечного сечения, как показано на рисунке. Опасными от изгиба будут точки R и H – точки пересечения силовой линии с контуром круга. Нейтральная линия проходит перпендикулярно силовой, разделив плоскость сечения на области растяжения и сжатия. Точка R попала в область растяжения, а точка H – в область сжатия. Соответственно, около точки R поставим знак «+», а около точки H – знак «–». Добавляя к каждой точке по знаку «–» нормального напряжения от действия сжимающей продольной силы, делаем вывод о том, что опасной точкой сечения D является точка H .

Вычисление максимального напряжения в сечении D в его опасной точке H от действия моментов M_x и M_y представлено формулой (5.104).

Сравнивая напряжения в точках P и H , приходим к выводу, что самой опасной точкой на балке круглого сечения является точка P , а наиболее опасным является сечение C .

Слайд 50

Грузоподъемность балки круглого профиля

Определим для балки круглого сечения величину из условия прочности (5.105), подставив в него значение максимального напряжения, вычисленного в опасной точке P сечения C . Подставляя сюда известные значения размера прямоугольника и допускаемого напряжения, получаем по формуле (5.106) величину допускаемой силы, равную 1,13 кН .

Проведем проверку прочности в опасной точке P с учетом перенапряжения от действия продольной силы N , которую предварительно мы не учитывали. Вычисление максимального напряжения с учетом и изгибающего момента, и продольной силы показано в формуле (5.107). Опять видно, что напряжение от действия изгибающего момента намного больше, чем от действия продольной силы. Величина перенапряжения составляет всего лишь 0,21 %, что существенно меньше допустимых 5 % перегруза.

Таким образом, задача полностью решена.

Слайд 51

Внецентренное растяжение-сжатие

Внецентренное растяжение-сжатие – это случай нагружения, когда линия действия внешней растягивающей или сжимающей силы не совпадает с осью стержня, а параллельна ей, и имеет эксцентриситеты x_F и y_F . Случай внецентренного сжатия стержня прямоугольного сечения силой F показан на рисунке 5.18.

Перенесем по правилам теоретической механики силу F параллельно самой себе в центр тяжести прямоугольного сечения, добавив при этом моменты от параллельного переноса M_x и M_y , как показано на рисунке 5.19. Получим эквивалентный случай нагружения, который представляет собой сочетание косого изгиба с центральным сжатием.

Таким образом, внецентренное растяжение-сжатие эквивалентно сочетанию косого изгиба с центральным сжатием и является его частным случаем.

В поперечных сечениях стержня, представленного на рисунке 1, возникают внутренние силовые факторы, выражения для которых обозначены на слайде номером (5.108). Внутренняя продольная сила N равна внешней сжимающей силе F. Внутренние изгибающие моменты M_x и M_y равны моментам, которые создает внешняя сила F относительно главных центральных осей сечения x и y с учетом эксцентриситетов соответственно. Поскольку значения внутренних усилий от положения поперечного сечения не зависят, а размер сечения по длине стержня не изменяется, делаем вывод, что все поперечные сечения данного стержня равноопасны.

Слайд 52

Положение нейтральной линии

Найдем положение нейтральной линии при внецентренном растяжении-сжатии. Для этого рассмотрим произвольное поперечное сечение стержня, так как мы выяснили, что они все равноопасны.

Напряжение, возникающее в произвольной точке сечения с координатами x и y относительно главных центральных осей, найдем по принципу независимости действия сил, как показано в формуле (5.109). Оно равно алгебраической сумме напряжений от совместного действия продольной силы N и изгибающих моментов M_x и M_y. Функция напряжений (5.109) линейная относительно координат x и y, значит, напряжение в сечении изменяется по линейному закону.

Точки, принадлежащие нейтральной линии, принадлежат и поперечному сечению, поэтому напряжение в них можно определить по формуле (5.109). Обозначим координаты точек нейтральной линии $x_{н.л.}$ и $y_{н.л.}$ соответственно и подставим их в выражение (5.109). Учитывая, что в нейтральном слое напряжение равно нулю, получим выражение (5.110). Здесь коэффициент F / A вынесен за скобку. Он не может быть равен нулю по физическому смыслу, значит, должно равняться нулю выражение, стоящее в скобках.

Таким образом, уравнение нейтральной линии при внецентренном растяжении-сжатии получает вид (5.111). Здесь знаменатели, стоящие в выражении (5.110), заменены квадратами радиусов инерции, что вполне справедливо согласно определению геометрических характеристик.

С геометрической точки зрения уравнение нейтральной линии (5.111) представляет собой уравнение прямой, не проходящей через начало координат и отсекающей от осей x и y отрезки, которые можно определить по формулам (5.112). Они обозначены x_0 и y_0 соответственно.

Слайд 53

Ядро сечения

Из уравнения нейтральной линии (5.111) видно, что её положение зависит от координат точки приложения внешней силы F. Изменяя эти координаты соответствующим образом, можно добиться такого положения нейтральной линии, при котором она бы вышла за пределы контура поперечного сечения. В этом случае все сечение будет работать в зоне одного знака напряжения – положительного при действии растягивающей силы F и отрицательного при её сжимающем действии. Это обстоятельство особенно важно при проектировании внецентренно сжатых стержней, изготовленных из хрупких материалов, у которых допускаемые напряжения в зонах растяжения и сжатия существенно различаются. Необходимо обеспечить такие условия, при которых в поперечных сечениях не появлялись бы нежелательные растягивающие напряжения.

Область в окрестности точки центра тяжести сечения, при приложении в которую внешней продольной силы в сечении будут возникать нормальные напряжения одного знака, называется ядром сечения.

Построим ядро прямоугольного сечения при внецентренном растяжении-сжатии. На рисунке контур прямоугольника очерчен четырьмя прямыми линиями: 1–1, 2–2, 3–3 и 4–4.

Определим такую точку приложения силы, чтобы нейтральная линия совпадала с линией 1–1. Подставляя координаты точек нейтральной линии 1–1 в уравнение (5.111), найдем соответствующие координаты точки приложения силы F по формулам (5.113). На рисунке эта точка обозначена номером 1.

Рассуждая аналогичным образом, получаем, что для совмещения нейтральной линии с линией 2–2 силу F необходимо приложить в точку 2 с координатами, определяемыми формулами (5.114).

Для линии 3–3 получаем точку 3, а для линии 4–4 симметричную точку 4 с координатами, определяемыми формулами (5.115) и (5.116) соответственно.

Соединяя полученные точки, получим ядро сечения.

Слайд 54

Тема 6. Расчет на прочность и жесткость при кручении

Чистый сдвиг и его особенности

Рассмотрим тонкостенную трубку, нагруженную скручивающими моментами, показанную на рисунке 6.1. Нанесем на поверхность трубки до нагружения сетку с прямоугольными ячейками. После нагружения ячейки станут параллелограммами.

На рисунке 6.2 показан выделенный из стенки трубы элементарный параллелепипед. На горизонтальных площадках выделенного элемента действуют касательные напряжения τ_{zx}, образующие пару сил, стремящихся сдвинуть горизонтальные площадки относительно друг друга. Исходя из условий статического равновесия, на смежных вертикальных площадках должны возникнуть напряжения τ_{xz}. Составим уравнение равновесия, приравняв к нулю сумму моментов относительно оси игрек. Отсюда следует, что касательные напряжения, возникающие на смежных взаимно перпендикулярных площадках, равны между собой и направлены противоположно. Данное утверждение в сопротивлении материалов известно как закон парности касательных напряжений.

Напряженное состояние, при котором на гранях элемента действуют только касательные напряжения, называется чистым сдвигом.

Результатом действия касательных напряжений является появление смещения Δs, называемого абсолютным сдвигом, и угла сдвига γ. В силу малости деформаций можно принять тангенс угла сдвига равным самому углу и равным отношению $\Delta s / h$. Поэтому угол сдвига также называется относительным сдвигом.

Слайд 55

Механические испытания при сдвиге

Испытание материалов в условиях чистого сдвига проводят при кручении тонкостенных трубчатых образцов. По результатам испытания строят диаграмму сдвига в координатах «касательное напряжение – относительный сдвиг» τ–γ. Диаграмма сдвига качественно сходна с диаграммами растяжения и сжатия. На начальном участке диаграммы наблюдается линейная зависимость между касательным напряжением и углом сдвига, подчиняющаяся закону Гука. Коэффициент пропорциональности G в выражении (6.1) называется модулем сдвига или модулем упругости второго рода.

Установлено, что характеристики сдвига связаны с характеристиками растяжения. Так, для изотропных материалов между модулями упругости выполняется соотношение, представленное на слайде формулой (6.2). Кроме того, для большинства материалов предел текучести при сдвиге $\tau_т$ может быть выражен через предел текучести при растяжении $\sigma_т$ согласно выражению (6.3).

Слайд 56

Кручение стержней круглого профиля

Кручение стержней круглого профиля – достаточно часто встречающаяся задача при оценке прочности элементов конструкций технических объектов. Кручение испытывают валы редукторов, двигателей, автомобильные оси и многие другие элементы конструкций. Поэтому оценка напряжений, возникающих при кручении, является актуальной. Рассмотрим ее.

На рисунке 6.3 показан консольный стержень круглого поперечного сечения, нагруженный в концевом сечении моментом M_z . Свободное сечение стержня поворачивается на угол φ , который называется абсолютным углом закручивания и измеряется в градусах или радианах. Выведем формулы для определения напряжений и перемещений сечений стержня, рассмотрев три стороны задачи.

Статическая сторона задачи заключается в привлечении интегрального уравнения равновесия, которое включает внутренний крутящий момент. Это уравнение (6.4), представляющее собой интегральную зависимость между крутящим моментом и касательным напряжением. Графическая иллюстрация записанного интегрального уравнения представлена на рисунке 6.4.

Слайд 57

Кручение стержней круглого профиля

Теперь рассмотрим геометрическую сторону задачи.

Все последующие расчеты будут сделаны на основе гипотезы Бернулли. Напомним ее. Эта гипотеза, носящая название гипотезы плоских сечений, утверждает, что сечения, плоские до приложения крутящего момента, остаются таковыми и после, поворачиваясь относительно друг друга на некоторые углы.

Построив геометрическую модель стержня, испытывающего кручение, и опираясь на эту гипотезу, выделим из исходного стержня на рисунке 6.5 элемент длиной dz , показанный на рисунке 6.6. В результате кручения торцевые сечения этого элемента поворачиваются, причем точки B и C переходят в положения B_1 и C_2 . Вынесем из элементарного стержня часть

$B_1O_1O_2C_1C_2$ отдельно на рисунок 6.7. Выделим на нем дугу D_1D_2 на расстоянии ρ от центра тяжести сечения O_2.

Из треугольника $O_3D_2D_1$ выразим длину дуги D_1D_2 через угол сдвига γ и длину элемента dz. Из треугольника $O_2D_2D_1$ ту же самую дугу выразим через элементарный угол закручивания $d\varphi$ и радиус-вектор ρ. В формуле (6.5) оба полученных выражения для дуги D_1D_2 приравнены друг другу. Это дает возможность получить зависимость (6.6) между углом сдвига γ и относительным углом закручивания θ.

Слайд 58

Кручение стержней круглого профиля

Рассмотрим физическую сторону задачи. Для этого привлечем закон Гука, описывающий процесс упругого деформирования в условиях кручения.

А теперь произведем синтез трех сторон задачи.

Подставим выражение (6.6) для относительного угла сдвига γ в формулу закона Гука, выразив касательное напряжение через относительный угол закручивания θ, получилась формула (6.7). Затем подставим в интегральное уравнение равновесия, рассмотренное в статической стороне задачи, полученное выражение (6.7) для τ. Проинтегрировав правую часть преобразованного интегрального уравнения, получим зависимость внутреннего крутящего момента от относительного угла закручивания. Оттуда выразим относительный угол закручивания через отношение внутреннего крутящего момента к произведению полярного момента инерции, умноженного на модуль сдвига, по формуле (6.8).

Основываясь на том, что относительный угол закручивания θ равен $\frac{d\varphi}{dz}$, получим интегральное выражение (6.9) для абсолютного угла закручивания φ.

Слайд 59

Кручение стержней круглого профиля

Произведение полярного момента инерции поперечного сечения вала на модуль сдвига называется жесткостью поперечного сечения при кручении.

Формулу (6.8) подставим в преобразованный закон Гука (6.7), откуда получим выражение (6.10) для касательного напряжения, возникающего в точках круглого поперечного сечения вала, испытывающего деформацию кручения. Из полученной формулы (6.10) очевидно, что величина касательного напряжения зависит от текущего радиуса ρ, который изменяется от нуля в центре круглого сечения до значения радиуса поперечного сечения r в точке контура круга. Следовательно, и касательное напряжение τ будет меняться по линейному закону в любом радиальном направлении круглого сечения от нуля в центре круга до максимальной величины в точке, лежащей на окружности, которая определяется по формуле (6.11). Таким образом, самыми напряженными точками любого сечения вала являются точки окружности, максимально удаленные от центра кручения.

Слайд 60

Условия прочности и жесткости

Сформулируем условие прочности по допускаемому напряжению при кручении. Очевидно, что для этого необходимо знать величину самого большого напряжения, возникающего во всем объеме элемента конструкции, и выставить условие его ограничения допускаемым напряжением.

Для этого сначала преобразуем формулу (6.11). Заменим в ней отношение полярного момента инерции к величине радиуса поперечного сечения $W\rho$, называемого полярным моментом сопротивления. Тогда максимальное касательное напряжение можно получить как максимальную величину отношения внутреннего крутящего момента к полярному моменту сопротивления, и условие прочности может быть записано в виде выражения (6.12). Модуль величины отношения в формуле означает, что оно не зависит от направления внутреннего крутящего момента.

Перейдем к формулировке условия жесткости. Оно заключается в ограничении максимальной деформации допускаемым значением. Используется условие жесткости и по абсолютному, и по относительному, или погонному, углу закручивания.

Для определения максимальной величины абсолютного угла закручивания задаются началом координат, по отношению к которому определяют углы поворота характерных поперечных сечений вала. Обычно за начало отсчета принимают любой конец элемента конструкции и определяют, какое из последующих сечений по длине вала повернется по отношению к нему на самый большой угол, при этом используется формула (6.9). Тогда условие жесткости по абсолютному углу закручивания может быть представлено в виде выражения (6.13), левая часть которого является расчетной величиной, а правая задается исходя из конструктивных условий или условий эксплуатации. В случае, когда задана допускаемая величина погонного угла закручивания, условие жесткости записывают в виде выражения (6.14). Здесь длина L – это расстояние от начала координат до сечения вала, повернувшегося на максимальный угол φ .

Слайд 61

Потенциальная энергия деформации при кручении

Рассмотрим на рисунке 6.8 консольный стержень, нагруженный на свободном конце крутящим моментом M_z . Закон статического нагружения стержня представлен на рисунке 6.9 графиком линейной зависимости между величиной внешнего момента и абсолютным углом закручивания. Работа внешнего момента определяется по закону Клайперона и равна половине произведения крутящего момента на абсолютный угол закручивания. При статическом нагружении в уравнении энергетического баланса кинетическая энергия равна нулю в силу того, что масса тела не получает ускорения. Тогда вся работа внешней силы тратится на потенциальную энергию деформации, которая определяется по формуле (6.15). Заменим в этом выражении абсолютный угол закручивания φ по формуле (6.9), тогда потенциальная энергия определится интегральным выражением (6.16).

Слайд 62

Интеграл Мора для случая кручения

Интеграл Мора является математическим аппаратом для определения перемещений при различных видах деформации. Выведем формулу интеграла Мора для случая кручения на примере конкретной задачи.

На рисунке 6.10 представлен консольного типа вал круглого поперечного сечения длиной, равной l, нагруженный на свободном конце крутящим моментом. Требуется определить абсолютный угол поворота произвольного сечения C.

Внутренний крутящий момент, возникающий в сечениях вала, является функцией внешнего. Для определения угла поворота воспользуемся теоремой Кастилиано. Так как она применима лишь для сечений, в которых есть внешние нагрузки, приложим на рисунке 6.11 к сечению C фиктивный крутящий момент Φ. Тогда внутренний крутящий момент будет определяться по формуле (6.17).

Для определения коэффициента пропорциональности M_{1z} разгрузим стержень от внешней нагрузки, а фиктивный момент Φ приравняем к единице, как это показано на рисунке 6.12. При этом внутренний крутящий момент будет равен коэффициенту пропорциональности M_{1z}. Таким образом, M_{1z} – внутренний крутящий момент, возникающий в сечениях элемента конструкции, если разгрузить его от внешних факторов, а к сечению, угол поворота которого определяется, приложить единичный безразмерный момент.

Подставим в формулу для потенциальной энергии деформации при кручении выражение (6.17). Затем применим теорему Кастилиано, взяв частную производную от потенциальной энергии деформации по фиктивному моменту Ф при условии, что он равен нулю. В результате получаем формулу интеграла Мора (6.18) для случая кручения.

Слайд 63

Пример решения задачи

Рассмотрим практическое применение только что рассмотренных формул для напряжения и деформации в условиях кручения стержней круглого профиля.

В данной задаче стержень постоянного поперечного сечения, у которого левый конец закреплен в жесткой заделке, нагружен системой внешних моментов.

Требуется подобрать диаметр поперечного сечения из условия прочности по допускаемому напряжению.

Также необходимо провести проверку жесткости стержня, используя величину определенного диаметра, если известен допускаемый погонный угол закручивания.

Слайд 64

Определение величины диаметра

Решение начинаем с построения эпюры внутреннего крутящего момента с целью определения положения опасного сечения. Разделим характерными сечениями стержень на три участка: 0–1, 1–2 и 2–3. Не определяя реакции в заделке, начинаем строить эпюру со свободного конца участка 2–3. Делаем скачок на величину момента M_1 = 50 кНм . Затем проводим прямую линию, параллельную базе, так как участок по длине ничем не загружен. В граничном сечении 2 делаем скачок на величину момента M_2 = 20 кНм вниз, так как M_2 направлен в сторону, противоположную моменту M_1 . Получим ординату внутреннего крутящего момента, равную 30 кНм. Затем снова проводим прямую параллельную базе по всей длине участка 1–2 в силу того, что он ничем не загружен. В граничном сечении 1 делаем скачок на величину момента M_3 = 40 кНм вниз по той же причине. Получим ординату, равную 10 кНм ниже базы эпюры. Участок 0–1 загружен равномерно распределенным моментом, а это значит, что здесь должна быть наклонная прямая. Изменение момента на участке произойдет на величину произведения интенсивности момента на длину участка, то есть на 20 кНм . Причем наклонная прямая поднимется от 10 кНм в сечении 1 вверх до 10 , в сечении 0 – выше базы. Из анализа полученной эпюры следует, что все сечения участка 1–2 равноопасны и испытывают внутренний крутящий момент, равный 50 кНм.

Запишем условие прочности по допускаемому касательному напряжению, в которое вместо полярного момента сопротивления подставим его выражение для круглого профиля через диаметр. Выразим величину допускаемого диаметра через максимальный внутренний крутящий момент и допускаемое касательное напряжение. При подстановке численных значений величин, входящих в полученное выражение, вычисляем величину диаметра.

Слайд 65

Построение эпюры углов закручивания

Для проведения проверки жесткости вала построим эпюру углов закручивания. Выберем начало координат в жесткой заделке, сечении под номером 0. Определим величины абсолютных углов закручивания на каждом из участков вала: 0–1 , 1–2 , 2–3 .

Так как на участке 0–1 внутренний крутящий момент изменяется по наклонной прямой, угол поворота сечения номер один по отношению к нулевому сечению определим по интегральной формуле (6.8) и в результате получим ноль. Как видно из формулы (6.19), изменение угла закручивания по длине участка 0–1 происходит по квадратичной функции. Очевидно, что посередине участка, там, где эпюра внутреннего крутящего момента пересекает базу, угол закручивания принимает экстремальное значение. Для его определения в выражение (6.19) нужно подставить координату этого сечения $z = 0,5$ метра.

Затем определяем абсолютный угол закручивания сечения номер два по отношению к первому сечению. На этом участке внутренний крутящий момент имеет постоянное значение по всей длине участка. Поэтому вычисление угла поворота можно произвести по формуле (6.20), умножив внутренний крутящий момент данного участка на его длину и поделив на жесткость поперечного сечения при кручении.

Аналогичным образом определяем абсолютный угол закручивания сечения 3 по отношению ко второму сечению.

Затем определяем углы закручивания каждого характерного сечения по отношению к неподвижному нулевому сечению, последовательно складывая углы закручивания, полученные в пределах каждого участка. Так, чтобы определить поворот второго сечения к нулевому, надо к углу закручивания первого сечения прибавить угол поворота второго сечения по отношению к первому. Чтобы определить поворот третьего сечения по отношению к нулевому, прибавляем к углу поворота второго сечения по отношению к началу отсчета угол поворота третьего по отношению ко второму сечению.

По полученным результатам строим эпюру углов закручивания φ .

Слайд 66

Проверка выполнения условия жесткости

Максимальный абсолютный угол закручивания по отношению к заделке получило третье сечение. Так как допускаемая величина деформации задана в виде относительного угла поворота, определим максимальный погонный угол закручивания, поделив абсолютный на расстояние от заделки до третьего сечения, которое равно трем метрам. Подставив значения всех физических величин в выражение для относительного угла закручивания, получим 0,57 град/м . Это меньше допускаемого относительного угла закручивания, следовательно, диаметр вала, который мы определили из условия прочности, обеспечивает жесткость конструкции. Задача решена.

Слайд 67

Кручение стержней некруглого профиля

На рисунке 6.13 рассмотрим стержень прямоугольного сечения с приложенными к торцевым сечениям крутящими моментами.

Определение напряжений и перемещений сечений такого стержня является сложной задачей, которая не может быть решена методами сопротивления материалов. Связано это с тем, что при кручении стержней некруглого профиля гипотеза плоских сечений Бернулли неприменима. Поперечные сечения депланируют, то есть искривляются. На рисунке 6.14 представлена примерная картина депланации прямоугольного поперечного сечения стержня.

Кручение называется свободным, если депланация сечений одинакова по всей длине стержня, и стесненным, если депланация разных сечений различна. Стесненное кручение можно создать, если жестко защемить один из торцов стержня, а к свободному концу приложить крутящий момент.

В рамках курса «Сопротивление материалов» мы рассмотрим лишь самые простые аспекты прочности таких конструкций. Например, докажем, что при кручении в угловых точках прямоугольного сечения стержня касательное напряжение отсутствует. Доказательство приведем от обратного.

Для этого на рисунке 6.15 рассмотрим стержень прямоугольного сечения, испытывающий свободное кручение. Предположим, что в ближайшей к нам угловой точке возникает вектор касательного напряжения τ . Разложим этот вектор на две составляющие τ_{zx} и τ_{zy} . Так как боковые стороны стержня свободны от силового воздействия, то касательные напряжения на площадках, смежных с рассматриваемой, τ_{xz} и τ_{yz} равны нулю. Это означает, что согласно закону парности касательных напряжений τ_{zy} и τ_{zx} также равны нулю, а следовательно, и вектор τ равен нулю. Таким образом, при кручении в угловых точках прямоугольного сечения касательных напряжений не возникает.

Слайд 68

Кручение стержней некруглого профиля

Выводом формул для определения касательных напряжений при кручении стержней некруглого профиля занимается математическая теория упругости. Здесь мы приведем уже известные результаты для случая прямоугольного сечения, у которого b – размер основания, а h – высота. На рисунке показан закон распределения касательных напряжений от центра кручения, находящегося в точке центра тяжести сечения, по направлениям главных центральных осей, совпадающих с осями симметрии, и по сторонам прямоугольника.

Из графика видно, что максимальное касательное напряжение возникает посередине длинной стороны сечения и определяется по формуле (6.21). Момент сопротивления при кручении прямоугольника определяется по формуле (6.22), в которой коэффициент α является табличной функцией и определяется исходя из соотношения сторон h / b .

Касательное напряжение, возникающее посередине короткой стороны, может быть найдено по формуле (6.23), где γ – табличный коэффициент, также зависящий от отношения h / b .

Относительный угол закручивания определяется по формуле (6.24), полностью аналогичной той, которую мы получили для круглого профиля, за исключением величины момента инерции сечения при кручении. Эту геометрическую характеристику в данном случае надо определять по формуле (6.25), в которой β – табличный коэффициент, зависящий от отношения h / b.

Слайд 69

Расчет цилиндрических пружин

Цилиндрические пружины являются довольно распространенным элементом конструкций и подвергаются действию в основном осевой внешней нагрузки. Несмотря на это, их разрушение происходит в результате деформации среза. Это вызвано тем, что в поперечных сечениях проволоки пружины возникают такие внутренние силовые факторы, как поперечная сила и крутящий момент. Рассмотрим подробнее данную проблему.

На рисунке 6.16 представлена цилиндрическая винтовая пружина, навитая из проволоки диаметром d, с диаметром витка D и относительно малым шагом навивки. Определим внутренние силы, возникающие в пружине при её сжатии силами F. Для этого воспользуемся методом сечений. Сделаем сечение в произвольном месте пружины, разделив ее на две части. Оставим для рассмотрения верхнюю часть и запишем уравнения равновесия. Из условия равенства нулю суммы проекций всех сил на вертикальную ось заштрихованного сечения проволоки пружины получим выражение (6.26) для возникающей в нем внутренней поперечной силы. А из условия равенства нулю суммы моментов относительно оси z сечения получим формулу (6.27) для определения внутреннего крутящего момента. Таким образом, от действия на пружину сжимающих сил в поперечных сечениях проволоки возникают два внутренних силовых фактора: поперечная сила Q_y и крутящий момент M_z.

Каждый из этих силовых факторов является обобщением касательных напряжений. Графическая иллюстрация сказанного представлена эпюрой касательных напряжений $\tau(Q_y)$ от поперечной силы на рисунке 6.17 и эпюрой касательных напряжений $\tau(M_z)$ от крутящего момента на рисунке 6.18.

Слайд 70

Расчет цилиндрических пружин

Будем считать, что поперечная сила Q_y равномерно распределена по сечению, как показано на рисунке 6.19. Тогда касательное напряжение от нее можно определить по формуле (6.28).

Закон изменения касательных напряжений от действия внутреннего крутящего момента представлен на рисунке 6.20. Он соответствует уже известному нам выражению (6.29) для максимального касательного напряжения при кручении стержней круглого профиля.

Из эпюр касательных напряжений на рисунках 6.19 и 6.20 видно, что опасной точкой сечения является точка C на внутренней стороне пружины. Это объясняется тем, что в ней возникает максимальное напряжение от крутящего момента и касательное напряжение от поперечной силы того же знака. Складывая величины напряжений от поперечной силы и крутящего момента, возникающие в точке C, получим суммарное напряжение по формуле (6.30).

Слайд 71

Условие прочности для пружин

Обычно для практических расчетов пренебрегают сомножителем в скобке формулы (6.30) и используют приближенную формулу (6.31). Для более точных расчетов вводят коэффициент k и расчет делают по формуле (6.32). Для определения поправочного коэффициента k используют выражение (6.33), в которое входит параметр C_n. Он называется индексом пружины и представляет собой отношение диаметра проволоки к диаметру витка пружины. В зависимости от величины индекса пружины из представленной на слайде таблицы выбирают поправочный коэффициент k. Условие прочности для пружины заключается в ограничении максимального касательного напряжения величиной допускаемого напряжения.

Слайд 72

Определение осадки пружины

Для расчета пружины на жесткость определим ее осадку под действием сжимающих сил. Для этого запишем уравнение энергетического баланса (6.34). В условиях статического нагружения пружины вся работы внешней силы будет потрачена на потенциальную энергию деформации.

Левую часть равенства (6.34) заменим одной второй произведения сжимающей силы F на величину осадки пружины λ на основании теоремы Клайперона. Правую часть равенства заменяем формулой для потенциальной энергии деформации при кручении стержней круглого профиля. Заменяем под интегралом правой части крутящий момент по формуле (6.27), полярный момент инерции для случая круглого профиля и, интегрируя по длине всей пружины, получим формулу (6.35) для вычисления осадки пружины. Условие жесткости заключается в ограничении величины осадки пружины допускаемым значением, которое определяется условиями эксплуатации.

Слайд 73

Практические расчеты на срез

Соединить внахлёст два или более листа можно с помощью шва из заклепок. Под действием продольных внешних сил F каждая заклепка работает на срез, так как в ее поперечных сечениях возникают внутренние поперечные силы. Учитывая, что в момент среза касательные напряжения равномерно распределены по поперечному сечению заклепки, условие прочности на срез можно записать в виде выражения (6.36), поделив силу среза на срезаемую площадь сечения. Чтобы определить площадь среза, необходимо умножить площадь поперечного сечения одной заклепки на количество срезаемых заклепок i и количество плоскостей m, по которым происходит срез. На рисунке 6.21 показано односрезное соединение, а на рисунке 6.22 – двухсрезное.

Допускаемое касательное напряжение в правой части условия прочности (6.36) определяется в долях от предела текучести материала заклепок.

Аналогично заклепочным соединениям рассчитываются болтовые соединения. Рассмотренные формулы можно использовать также для шпоночных и шлицевых соединений.

Слайд 74

Практические расчеты на смятие

Кроме деформации среза, которую испытывает сам крепежный элемент – заклепка или болт, может произойти смятие стенок отверстия под крепеж в соединяемых элементах, приводящее к разрушению соединения. Расчет на смятие проводят по формуле (6.37), в которой площадь смятия определяется произведением диаметра заклепки или болта на толщину скрепляемых листов δ и на количество заклепок i.

Допускаемое напряжение на смятие зависит от типа стали. Так, для малоуглеродистых сталей его величина находится в диапазоне от ста до ста десяти мегапаскалей. А для среднеуглеродистых сталей – от ста сорока до ста семидесяти мегапаскалей.

Слайд 75

Расчет сварных соединений

Соединение листов может осуществляться с помощью сварки.

Существуют различные виды сварных соединений. Так, на рисунке 6.23 показано стыковое соединение. Такие типы соединений работают под действием внешних сил F на разрыв. В данном случае в поперечном сечении сварного шва возникают нормальные напряжения, которые можно определить как отношение силы, работающей на разрыв, к площади поперечного сечения сварного шва. Последняя равна произведению длины шва на толщину соединяемых листов. Условие прочности на разрыв представлено на слайде формулой (6.38).

Второй тип соединения внахлест показан на рисунке 6.24 и характеризуется тем, что сварной шов работает на срез в плоскости максимальной слабины, совпадающей с биссекторной плоскостью шва. Эта плоскость, одна из сторон которой является биссектрисой в треугольной плоскости поперечного сечения сварного шва, показана на рисунке 6.25. Там возникают максимальные касательные напряжения, которые можно определить по формуле (6.39). Сила среза в ней делится на величину площади биссекторной плоскости. Коэффициент 0,7 – это синус угла в сорок пять градусов, на который умножается величина катета равнобокого сварного шва для определения стороны биссекторной плоскости.

В правых частях обоих условий прочности присутствуют допускаемые напряжения для основного материала, то есть материала соединяемых элементов. Это говорит о том, что прочность самого сварного шва не уступает прочности основного металла.

Слайд 76

Тема 7. Устойчивость сжатых стержней

Понятие об устойчивости

Понятие устойчивости широко применяется в разных отраслях знания и в повседневной жизни. Так мы называем способность какой-либо системы сохранять своё состояние при внешних воздействиях.

В механике используются понятия устойчивого, неустойчивого и безразличного равновесного состояния. Если малые внешние воздействия вызывают малые отклонения системы от положения равновесия, её состояние является устойчивым. Очевидно, что шарик на рисунке 7.1, находящийся на дне ямки, после малого отклонения вернётся в исходное положение. Таким образом, он находится в устойчивом состоянии.

Если малым внешним воздействиям соответствуют большие отклонения, состояние системы является неустойчивым. Так, шарик на рисунке 7.2, находящийся в равновесии на вершине выпуклости, после малого отклонения начнёт всё больше отклоняться от первоначального положения. Это означает, что его состояние неустойчиво.

И если при любом по величине внешнем воздействии система, отклоняясь, вновь занимает устойчивое равновесие, ее состояние называют безразличным. Примером является шарик на горизонтальной поверхности, показанный на рисунке 7.3.

Переход системы из исходного состояния, ставшего неустойчивым, в некоторое новое положение равновесия называется потерей устойчивости. Потеря устойчивости обычно сопровождается большими перемещениями и приводит к катастрофическим последствиям.

Слайд 77

Понятие об устойчивости и критической силе

Потеря устойчивости возможна и для деформируемых упругих систем.

Рассмотрим изображённый на рисунке 7.4 относительно длинный и тонкий стержень, шарнирно закреплённый на концах и нагруженный сжимающей силой, действующей вдоль его оси. В процессе нагружения по мере роста величины силы F до некоторого предела прямолинейная форма стержня остаётся устойчивой. После этого предела стержень внезапно искривляется, как показано на рисунке 7.5. Это говорит о том, что прямолинейная форма стержня становится неустойчивой и стержень принимает новую, более устойчивую форму – изогнутую.

Такой вид деформации, возникающий под действием сжимающей силы и связанный с потерей устойчивости прямолинейной формы стержня, называется продольным изгибом. Величина силы, при которой возникает отклонение от первоначальной формы равновесия, называется критической.

Продольный изгиб является одним из самых простых видов потери устойчивости. Вместе с тем он имеет большое практическое значение, так как может возникать при работе многих конструкций. К ним относятся строительные колонны, стойки подъёмных кранов, ходовые винты станков, пружины сжатия, домкраты.

Явление потери устойчивости очень опасно. Во-первых, оно может начаться задолго до того, как напряжения достигнут предела текучести. Во-вторых, оно приводит к возникновению больших перемещений, а это может вызвать появление пластических деформаций или разрушения. Часто большие перемещения сами по себе означают резкое снижение несущей способности и выход конструкции из строя.

Слайд 78

Задача Эйлера

Рассмотрим стержень, нагруженный центрально приложенной сжимающей силой. Определим величину критической силы, при достижении которой возникает искривление стержня.

Пусть размеры поперечного сечения стержня одинаковы по всей его длине. Примем также, что после появления прогиба материал стержня находится в упругом состоянии.

Воспользуемся приближённым дифференциальным уравнением упругой линии (7.1), полученным ранее для случая изгиба. Напомним, что в этой формуле E – модуль упругости материала стержня, J_x – момент инерции сечения относительно оси изгиба. Внутренний изгибающий момент M_x, возникающий в произвольном сечении стержня, можно определить как произведение силы $F_{кр}$ на величину прогиба этого сечения y. Минус в выражении (7.2) означает, что при изгибе стержня вверх сжимаются его нижние волокна. С учётом этого выражения дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня можно записать в виде (7.3). Сделаем замену множителя при переменной y на коэффициент k^2 согласно выражению (7.4). Из курса высшей математики известно, что решение таких уравнений имеет вид (7.5).

Слайд 79

Задача Эйлера

Для определения величины критической силы из уравнения (7.4) рассмотрим граничные условия.

Первое условие – отсутствие прогиба y на левом конце стержня, то есть при координате $z = 0$. Подставив нулевые значения для z и y в выражение (7.5), находим, что постоянная интегрирования $D = 0$, и уравнение изогнутой оси стержня упрощается до вида (7.6). Таким образом, упругая линия стержня представляет собой синусоиду.

Второе граничное условие – это отсутствие прогиба y на правом конце стержня, то есть при координате z, равной длине стержня l. Подставим соответствующие значения в уравнение (7.6). Постоянная интегрирования C не может быть равной нулю, так как в этом случае получится уравнение прямой линии. Поэтому результатом применения второго граничного условия является выражение (7.7).

Полученное выражение имеет бесконечное множество решений. Ограничимся рассмотрением только положительных корней. Они удовлетворяют условию (7.8).

Слайд 80

Задача Эйлера

Из формулы (7.8) выразим коэффициент k в виде (7.9). Используя подстановку (7.5), получим выражение (7.10) для критической силы.

Попробуем определить, какой смысл имеет величина n, входящая в полученную формулу. Для этого подставим выражение (7.9) в уравнение изогнутой оси стержня (7.6). Построим графики полученной функции (7.11) для разных значений коэффициента n. Как видно из представленного рисунка, n – это число полуволн синусоиды, возникающих при изгибе стержня.

Опыт показывает, что на практике для стержня с шарнирным закреплением концов наблюдается только один вид изогнутой оси стержня, соответствующий одной полуволне синусоиды. В связи с этим наибольший интерес имеет минимальное значение критической силы, которое получим для $n = 1$ и минимального момента инерции поперечного сечения. Формула (7.12) была впервые получена Леонардом Эйлером.

Следует отметить, что критическая сила по формуле Эйлера зависит не от прочности материала, а от его жёсткости. Известно, что модуль Юнга E для всех сталей примерно одинаков. Поэтому замена углеродистой стали обычного качества на высокопрочную легированную с точки зрения обеспечения устойчивости не имеет смысла.

Слайд 81

Коэффициент приведения длины

Формула Эйлера была выведена для стержня, шарнирно закреплённого по концам. Такой стержень часто называется стержнем Эйлера. С поправкой на условия закрепления формула Эйлера принимает вид (7.13). Коэффициент приведения длины μ в этой формуле показывает, во сколько раз нужно увеличить длину стержня с данными условиями закрепления, чтобы привести его к условиям деформации стержня Эйлера, то есть к одной полуволне синусоиды.

Сравним формулу (7.13) с ранее полученной формулой (7.10). Видно, что коэффициент μ представляет собой величину, обратную числу полуволн синусоиды n, которое можно разместить на длине стержня при потере его устойчивости. Это даёт возможность определять величину коэффициента приведения длины из геометрических соображений, учитывая свойства опорных закреплений.

Слайд 82

Коэффициент приведения длины

На слайде представлены значения коэффициентов приведения длины для наиболее часто встречающихся способов закрепления сжатых стержней.

Очевидно, что для стержня Эйлера, показанного на рисунке «а», коэффициент $\mu = 1$.

Верхний конец стержня на рисунке «б» может свободно смещаться и поворачиваться, тогда как повороту нижнего конца стержня препятствует жёсткая заделка. Поэтому изогнутая ось стержня представляет собой половину полуволны синусоиды, и, следовательно, коэффициент $\mu = 2$.

Если один конец стержня закреплён жёстко, а другой шарнирно, как это показано на рисунках «в» и «г», изогнутая ось стержня содержит примерно 1,5 полуволны синусоиды. Точное значение коэффициента $\mu = 0{,}7$.

У стержня, изображённого на рисунке «д», обе опоры препятствуют появлению угловых перемещений. При потере устойчивости его изогнутую ось можно рассматривать как целую волну или две полуволны синусоиды. Поэтому коэффициент $\mu = 0{,}5$.

Верхний конец стержня, представленного на рисунке «е», закреплён с помощью «плавающей» заделки. Такая опора может смещаться от оси стержня, но не может поворачиваться. Изогнутая ось состоит из двух четвертей, то есть одной полуволны синусоиды, и коэффициент $\mu = 1$.

Для показанного на рисунке «ж» стержня нижний конец закреплён шарнирной опорой, а верхний – «плавающей» заделкой. Изогнутая ось представляет собой половину полуволны синусоиды, то есть коэффициент $\mu = 2$.

В случае если стержень имеет промежуточные равноотстоящие опоры, коэффициент приведения длины можно определить следующим образом. Нужно взять коэффициент μ для одного промежутка между опорами и разделить его на количество таких промежутков, как показано на рисунке «и».

Слайд 83

Равноустойчивость

При определении критической силы по формуле Эйлера необходимо предусмотреть, в какой главной плоскости инерции стержень потеряет устойчивость. Это зависит от формы и размеров поперечного сечения и от способа закрепления стержня.

Обозначим, как показано на рисунке 7.6, продольную ось стержня z , главные центральные оси поперечного сечения – x и y . Значения критических сил потери устойчивости в двух главных плоскостях инерции xz и yz определяются по формулам (7.14). Потеря устойчивости будет происходить в той плоскости, в которой значение критической силы будет меньше.

При проектировании стержня обычно стремятся, чтобы он был равноустойчив в обеих главных плоскостях инерции, то есть чтобы выполнялось условие (7.15). Для равноустойчивого стержня при потере устойчивости равновероятно искривление в направлении любой поперечной оси.

В общем случае, когда условия закрепления стержня в плоскостях xz и yz различны, условие равноустойчивости можно преобразовать в виде (7.16). Если же стержень закреплён так, что имеет одинаковую форму потери устойчивости в двух главных плоскостях инерции, то условие равноустойчивости упрощается до выражения (7.17). То есть оно упрощается до равенства главных центральных моментов инерции.

Таким образом, равноустойчивыми формами поперечного сечения являются такие формы, для которых выполняется условие (7.17). Примеры таких сечений показаны на рисунке 7.7.

Среди равноустойчивых наиболее рациональны сечения с пониженной металлоёмкостью в области центра тяжести, как у кольца. В этом случае достигается увеличение момента инерции и, соответственно, критической силы без существенного повышения площади сечения, то есть без повышения металлозатрат.

Слайд 84

Критическое напряжение

Введём понятие критического напряжения, определив его как отношение критической силы к площади поперечного сечения стержня A. Применяя формулу Эйлера, критическое напряжение можно определить в соответствии с выражением (7.18).

Воспользуемся определением радиуса инерции поперечного сечения (7.19). Это даёт возможность переписать формулу (7.18) в виде (7.20). Обозначим отношение приведённой длины стержня μl к радиусу инерции его сечения i буквой λ. Эта величина называется гибкостью стержня. С учётом выражения (7.21) формулу для вычисления критического напряжения по Эйлеру можно записать в виде (7.22).

Формула Эйлера была получена для случая, когда материал стержня находится в упругом состоянии. Это справедливо, если выполняется закон

Гука, то есть критическое напряжение не превышает предела пропорциональности материала $\sigma_{пц}$. Подставим в условие (7.23) выражение для критического напряжения (7.22). Тогда условие применимости формулы Эйлера примет вид (7.24). Выразим из полученного неравенства гибкость стержня. Она должна быть не менее чем некоторое значение $\lambda_{пред}$. Как видно из формулы (7.25), предельная гибкость зависит только от механических свойств материала стержня.

Слайд 85

Зависимость критического напряжения от гибкости

На рисунке показана диаграмма зависимости критического напряжения от гибкости стержня для пластичного материала.

Если гибкость стержня превышает величину $\lambda_{пред}$, критическое напряжение определяется по формуле Эйлера. Эта часть диаграммы называется областью большой гибкости. График на этом участке имеет форму гиперболы.

В случае, когда гибкость стержня принимает значения между некоторой величиной λ_0 и $\lambda_{пред}$, также может наблюдаться потеря устойчивости. При этом критическое напряжение оказывается существенно меньше, чем предсказывает формула Эйлера. Эта область называется областью средней гибкости. Критическое напряжение принято определять по формулам (7.26) и (7.27), которые предложил русский учёный Феликс Станиславович Яси́нский. Для большинства материалов, в том числе для сталей, применима линейная зависимость (7.26). Для чугунов следует использовать параболическую зависимость (7.27). Величины a, b и c , входящие в эти формулы, представляют собой экспериментально определяемые коэффициенты. Их значения можно найти в справочниках в зависимости от марки материала. То же самое можно сказать и о гибкости λ_0 .

Если гибкость стержня меньше величины λ_0 , повышение нагрузки приводит не к потере устойчивости, а к возникновению пластических деформаций или к разрушению в зависимости от вида материала. В этом случае проводится расчёт на прочность, а не на устойчивость. Условно критическое напряжение принимается равным пределу текучести $\sigma_{\text{т}}$ для пластичных материалов или пределу прочности $\sigma_{\text{в}}$ для хрупких материалов. Эта область диаграммы называется областью малой гибкости.

Критическая сила может быть определена как произведение критического напряжения на площадь поперечного сечения стержня.

Слайд 86

Условие устойчивости

Практический расчёт на устойчивость выполняется с использованием условия устойчивости. Существует две формы его записи.

Условие устойчивости можно представить в виде неравенства (7.28), в соответствии с которым сила, действующая на стержень, не должна превышать некоторую допускаемую величину. При этом допускаемая сила определяется как отношение критической силы $F_{\text{кр}}$ к нормативному коэффициенту запаса по устойчивости $n_{\text{у}}$.

Условие устойчивости также можно записать через напряжения, в виде формулы (7.29), которая внешне напоминает условие прочности. Допускаемое напряжение в этой формуле определяется выражением (7.30) как произведение допускаемого напряжения при обычном сжатии на коэффициент продольного изгиба φ . Значение коэффициента φ изменяется в пределах от 0 до 1 .

С увеличением гибкости стержня возрастает вероятность его несовершенства, например, его начальной кривизны. Поэтому величина коэффициента φ с ростом гибкости уменьшается. Принято для определения значений коэффициента продольного изгиба пользоваться справочными таблицами, в которых они зависят не только от гибкости стержня, но и от марки материала.

Расчёт на устойчивость с использованием коэффициентов продольного изгиба имеет то преимущество, что при его выполнении нет необходимости учитывать область гибкости стержня.

Из условия устойчивости (7.29) можно получить формулу (7.31) для определения допускаемой силы и формулу (7.32) для вычисления площади сечения. Следует отметить, что подбор сечения сжатого стержня с использованием формулы (7.32) осложняется тем, что коэффициент φ зависит от гибкости стержня, а она неизвестна, так как неизвестны размеры сечения. Поэтому проектный расчёт на устойчивость выполняется методом последовательных приближений, или итераций.

Слайд 87

Пример проектного расчёта на устойчивость

Рассмотрим пример определения размеров сечения для центрально сжатого стержня.

Задана показанная на рисунке 7.8 стойка, нагруженная сжимающей силой F величиной 20 кН . Концы стойки жёстко защемлены, однако верхний конец может смещаться.

Форма поперечного сечения стойки изображена на рисунке 7.9. Размеры сечения заданы в долях размера *a*, который представляет собой диаметр окружности, ограничивающей сечение.

Для изготовления стойки предполагается использовать сталь марки Ст3 . На слайде указаны характеристики этого материала: допускаемое напряжение при сжатии, предельные значения гибкости λ_0 и $\lambda_{пред}$.

Требуется подобрать величину характерного размера *a* поперечного сечения стойки, обеспечив её устойчивость. Для спроектированной стойки необходимо определить величину критической силы и коэффициент запаса устойчивости.

Слайд 88

Геометрические характеристики поперечного сечения

Выразим предварительно необходимые для расчёта геометрические характеристики поперечного сечения стойки через характерный размер a.

Разделим сечение на простые фигуры. В данном случае это будут круг и прямоугольный вырез.

Чтобы определить площадь сечения A , вычтем из площади круга площадь прямоугольника. Из полученной формулы можно выразить размер a .

Главные центральные оси x и y заданного сечения являются одновременно главными центральными и для простых фигур. Поэтому для определения моментов инерции J_x и J_y применять теорему о параллельном переносе осей не нужно. Просто воспользуемся справочными формулами для вычисления моментов инерции круга и прямоугольника и найдём их разность.

Момент инерции относительно оси x получился меньше, чем относительно оси y . Это означает, что в случае потери устойчивости искривление стержня будет происходить в плоскости, перпендикулярной оси x . Принято говорить, что ось x является осью наименьшей жёсткости.

Минимальный радиус инерции сечения рассчитаем как квадратный корень из отношения меньшего момента инерции сечения к его площади.

Слайд 89

Итерация № 1

Зададим первое значение коэффициента продольного изгиба φ_1 , равное 0,5 .

Рассчитаем требуемую величину площади поперечного сечения A. По полученным для заданного сечения формулам вычислим характерный размер сечения a и радиус инерции i_{min} .

Определим гибкость стойки λ_{max} . Коэффициент приведения длины μ для заданных условий закрепления стержня равен 0,5 . Длину стойки l и радиус инерции сечения i_{min} подставляем в одинаковых единицах измерения. В данном случае обе величины выражены в сантиметрах.

Пользуясь таблицей коэффициентов продольного изгиба, по найденной гибкости и марке материала определим уточнённое значение коэффициента φ_1' . Вычисленное значение гибкости λ_{max} находится в интервале значений от 90 до 100. Фрагмент таблицы для этого интервала для стали Ст3 представлен на слайде. Для определения значения φ_1' применим метод линейной интерполяции.

Определим процент расхождения коэффициентов φ_1 и φ_1' . Оно превышает 3 % , то есть является существенным, что требует продолжения расчёта.

Слайд 90

Итерация № 2

Для второй итерации зададимся новым значением коэффициента продольного изгиба φ_2 . Определим его как среднее значение коэффициентов на предыдущей итерации, то есть коэффициентов φ_1 и φ_1' .

Вычисляем новые значения площади поперечного сечения A , характерного размера сечения a , радиуса инерции сечения i_{min} и гибкости стойки λ_{max} .

Рассчитанная гибкость попала в интервал значений от 100 до 110. На слайде приведён фрагмент таблицы коэффициентов продольного изгиба для данного интервала гибкости для стали Ст3 . И вновь проведём линейную интерполяцию для определения величины коэффициента φ_2' .

Найдём относительную величину расхождения φ_2 и φ_2' . Эта величина оказалась менее 3 % . Такое расхождение считается небольшим, что позволяет выйти из итерационного процесса.

Слайд 91

Критическая сила и коэффициент запаса

Определим для контроля величину допускаемой силы для спроектированной стойки. Получим значение, которое несколько превышает заданную по условию величину 20 кН . Это означает, что спроектированная стойка будет недогруженной. Вычислим процент расхождения допускаемой силы и заданной по условию. Так как процент недогруза не превышает 3 %, подбор размера поперечного сечения стойки закончен. За величину размера *a* принимаем его значение, полученное на второй итерации, то есть 1,89 см.

Чтобы выбрать правильную формулу для нахождения величины критической силы, определим, к какой области гибкости относится спроектированная стойка. Для этого сравним полученное на последней итерации значение гибкости с предельными значениями для Ст3 , равными 61 и 100 . Так как рассчитанная гибкость превышает $\lambda_{пред}$, равное 100, значит, стойка обладает большой гибкостью. Следовательно, расчёт критической силы нужно провести по формуле Эйлера.

Удобно вычислить критическую силу как произведение критического напряжения на площадь сечения. При этом критическое напряжение нужно записать по Эйлеру.

Коэффициент запаса по устойчивости определим как отношение критической силы к заданной по условию.

Таким образом, задача решена.

Слайд 92

Пример расчёта на грузоподъёмность

Задана стойка, нагруженная осевой сжимающей силой F, как показано на рисунке 7.10. Концы и середина стойки поддерживаются шарнирными опорами. Как было показано ранее, для такого способа нагружения и закрепления коэффициент приведения длины μ равен 0,5 . Условия закрепления в плоскостях xz и yz одинаковы.

Поперечное сечение стойки представлено на рисунке 7.11. Оно состоит из двух шве́ллеров № 12. Шве́ллеры соединены друг с другом приваренными к ним планками. На рисунке это показано штриховыми линиями. Благодаря планкам сечение работает как единое целое.

Стойка изготовлена из стали марки Ст2 . На слайде приведены характеристики этого материала: допускаемое напряжение, характерные значения гибкости λ_0 и $\lambda_{пред}$, коэффициенты Ясинского a и b .

Требуется найти расстояние X между шве́ллерами, при котором стойка будет равноустойчивой в плоскостях xz и yz . Для полученной равноустойчивой конструкции необходимо определить грузоподъёмность, величину критической силы и коэффициент запаса устойчивости.

Слайд 93

Геометрические характеристики сечения

Выпишем из приведённой в ГОСТ 8240-97 таблицы сорта́мента шве́ллеров с уклоном внутренних граней полок геометрические характеристики шве́ллера № 12. Нам потребуются моменты инерции относительно главных центральных осей J_x и J_y, площадь A и расстояние x_0 от внешней стороны полки шве́ллера до его центра тяжести.

Рассчитаем площадь сечения, умножив площадь одного шве́ллера на их количество, то есть на 2.

Горизонтальные главные центральные оси X для шве́ллера и для всего сечения совпадают друг с другом. Поэтому момент инерции относительно этой оси определим просто как удвоенный момент инерции одного шве́ллера.

Вычислим момент инерции сечения относительно оси Y, учитывая, что ось $Y_{шв}$ отстоит от неё на расстояние, равное сумме расстояния x_0 и половины расстояния X.

Для определения расстояния X воспользуемся условием равноустойчивости. В данном случае, так как условия закрепления в плоскостях xz и yz одинаковы, это условие сводится к равенству моментов инерции.

Приравнивая друг к другу моменты инерции, сначала найдём расстояние между осями Y и $Y_{шв}$, а затем интересующее нас расстояние X.

Теперь, когда равенство моментов инерции обеспечено, очевидно, равны друг другу и радиусы инерции. Для дальнейшего расчёта на устойчивость вычислим радиус инерции i_x.

Слайд 94

Определение допускаемой и критической нагрузки

Определим величину допускаемой нагрузки. Для этого вычислим гибкость стойки, разделив её приведённую длину μl на радиус инерции i_x.

По таблице коэффициентов продольного изгиба определим величину φ в соответствии с гибкостью стойки и маркой материала. Гибкость попала в интервал значений от 70 до 80. Фрагмент таблицы для этого интервала представлен на слайде. Путём линейной интерполяции определим коэффициент φ для рассчитанного значения.

Из условия устойчивости выразим и вычислим максимально допустимое значение сжимающей силы F. Это и есть грузоподъёмность стойки.

Определим величину критической силы. Гибкость стойки попала в интервал между значениями λ_0 и $\lambda_{пред}$, следовательно, стойка относится к области средней гибкости. Величина критической силы рассчитывается по формуле Ясинского.

Коэффициент запаса устойчивости находим как отношение величин критической и допускаемой силы.

Таким образом, задача решена.

Слайд 95

Тема 8. Выносливость

Понятие об усталости и выносливости

До сих пор считалось, что в процессе эксплуатации элементов конструкций напряжение медленно возрастает от нуля до рабочего значения, а затем остаётся постоянным. Такое нагружение называется статическим. На практике, однако, для многих деталей машин напряжение циклически изменяется во времени.

Известно, что при многократном повторении нагружения деталь может внезапно разрушиться, даже если рабочие напряжения значительно меньше предела текучести. Это явление принято называть усталостью. Как правило, усталостное разрушение происходит без заметных остаточных деформаций, даже если деталь изготовлена из пластичного материала.

Механизм явления усталости может быть описан следующим образом. Используемые в технике металлические материалы являются поликристаллическими, то есть состоящими из отдельных зёрен. В некоторых зёрнах пластическая деформация возможна задолго до общего предела текучести. Пластическое деформирование то в одном, то в другом направлении сопровождается некоторыми повреждениями и приводит к возникновению микроскопических трещин. В результате роста и слияния микротрещин образуется магистральная трещина, которая при достижении критических размеров вызывает разрушение детали.

Слайд 96

Напряжения при вращении изогнутого вала

Повторно-переменные нагрузки возникают при колебаниях элементов конструкций, например, под действием ветровой нагрузки, при чередовании циклов нагрузки и разгрузки, в частности, в элементах подъёмно-транспортных машин или мостов.

Вместе с тем для появления переменных напряжений совсем не обязательно, чтобы внешние силы, действующие на элемент конструкции, менялись по величине и по направлению. Разберем в качестве примера работу показанного на рисунке 8.1 вращающегося вала, нагруженного поперечными силами.

Рассмотрим сечение вала в средней его области, то есть в области чистого изгиба. Распределение нормальных напряжений по высоте сечения изображено на рисунке 8.2. Выделим на контуре сечения точку 1. Она находится в области сжатия. Через четверть оборота эта точка окажется в положении 2, на нейтральной линии. Еще через четверть оборота – в положении 3, в области растяжения. Затем наша точка снова переходит через нейтральную линию в положении 4 и смещается в область сжатия.

Зависимость напряжения от времени для рассматриваемой точки представлена на рисунке 8.3. Таким образом, при постоянстве внешних сил за счет вращения оси вала создаются переменные напряжения. В аналогичных условиях работают все валы зубчатых передач.

Слайд 97

Характеристики цикла напряжений

Совокупность значений, которые напряжение последовательно принимает за один период, называется циклом напряжений.

Обычно считается, что наибольшее влияние на развитие усталостного разрушения оказывают максимальное и минимальное напряжение цикла. Эти характеристики обозначаются, соответственно, как σ_{max} и σ_{min} . Зависимость напряжения от времени при этом условно считается синусоидальной.

Более удобными для расчетов являются значения среднего напряжения цикла σ_m и амплитуды цикла σ_a. Они рассчитываются, соответственно, по формулам (8.1) и (8.2). Среднее напряжение цикла может быть как положительным, так и отрицательным. Амплитуда цикла всегда больше нуля.

Ещё одна характеристика цикла – коэффициент асимметрии R_σ, определяемый по формуле (8.3) как отношение минимального напряжения цикла к максимальному. Коэффициент R_σ может принимать значения от $+\infty$ до $-\infty$. Циклы напряжений с одинаковыми значениями коэффициента асимметрии называются подобными.

Слайд 98

Классификация циклов напряжений

В зависимости от того, меняется знак напряжения или нет, различают знакопеременные и знакопостоянные циклы.

Примеры знакопеременных циклов приведены на рисунке 8.4 «а». Из-за того, что минимальное и максимальное напряжения имеют разный знак, коэффициент асимметрии R_σ для этих циклов отрицательный. Наиболее важным из знакопеременных циклов является симметричный цикл, график которого показан на рисунке 8.4 «б». Для него максимальное и минимальное напряжения равны по величине, но противоположны по знаку, поэтому коэффициент $R_\sigma = -1$. Среднее напряжение симметричного цикла $\sigma_m = 0$. Все циклы, для которых эти условия не выполняются, принято называть асимметричными.

На рисунке 8.5 показаны примеры знакопостоянных циклов. Так как с течением времени знак напряжения не меняется, коэффициент асимметрии этих циклов, как правило, положительный.

Наиболее важными из знакопостоянных циклов являются отнулевые циклы, для которых минимальное или максимальное напряжение равняется нулю. В первом случае коэффициент $R_\sigma = 0$, во втором $R_\sigma = \pm\infty$. Соответствующие графики показаны на рисунках 8.5 «б» и 8.5 «в». Эти циклы называют также пульсирующими.

Статическое нагружение с постоянным во времени напряжением можно рассматривать как цикл с коэффициентом асимметрии, равным единице.

Слайд 99

Предел выносливости

Для испытаний на выносливость изготавливается партия совершенно одинаковых стержневых образцов, которые подвергают переменному нагружению на специальных машинах.

Первый образец из партии испытывается при максимальном напряжении, составляющем от 70 до 80 % от предела прочности. Для следующих образцов нагрузку постепенно снижают. При этом для каждого образца определяется число циклов, которое он выдерживает до разрушения.

По результатам испытания строится диаграмма в координатах «максимальное напряжение – число циклов до разрушения». Такая диаграмма называется кривой усталости, или кривой Велера. Её примерный вид показан на рисунке.

С уменьшением максимального напряжения число циклов до разрушения N быстро растёт. Проводить усталостные испытания до бесконечности нет возможности. Поэтому заранее оговаривается база испытания, то есть число циклов, по истечении которого испытание прекращается.

Для углеродистых сталей и чугунов кривая усталости асимптотически стремится к некоторой горизонтальной прямой. Напряжение, которое соответствует этой асимптоте, называется пределом выносливости и обозначается σ_R, где индекс R равен коэффициенту асимметрии цикла. То есть для симметричного цикла предел выносливости обозначается σ_{-1}, для отнулевого – σ_0.

Для цветных металлов и легированных сталей горизонтальная асимптота на кривой усталости не наблюдается. Принято говорить, что для этих материалов физического предела выносливости не существует. Базу испытания при этом приходится брать в 5–10 раз больше, чем для углеродистых сталей и чугунов.

Слайд 100

Диаграмма предельных амплитуд

Чтобы охарактеризовать сопротивление материала усталости при циклах с разной асимметрией, строят диаграмму предельных амплитуд. Она представляет собой график, показывающий, какое значение амплитуды цикла σ_a материал может выдержать без разрушения при заданной величине среднего напряжения σ_m.

Пусть задан некоторый цикл напряжений с известными параметрами. Характеристики этого цикла σ_m и σ_a можно рассматривать как координаты рабочей точки C.

Проведём луч из начала координат через полученную точку. Тангенс угла наклона этого луча к оси абсцисс определяется выражением (8.5), то есть зависит только от коэффициента асимметрии R. Таким образом, каждый луч, проведённый на диаграмме предельных амплитуд из начала координат, можно рассматривать как геометрическое место точек, характеризующих подобные циклы. Например, луч OA соответствует симметричным циклам, а луч OB соответствует статическому нагружению.

Продолжим луч OC до пересечения с предельной кривой AB. Точка D соответствует предельному циклу, который подобен заданному. Сумма её координат, согласно выражению (8.4), равна пределу выносливости материала при заданном значении коэффициента асимметрии R.

Диаграмма предельных амплитуд позволяет определить величину коэффициента запаса усталостной прочности. Для этого нужно воспользоваться формулой (8.6). Таким образом, все циклы, рабочие точки которых лежат ниже предельной кривой, являются безопасными.

Слайд 101

Схематизированные диаграммы предельных амплитуд

Построение диаграммы предельных амплитуд является очень трудоёмким процессом, поэтому обычно её схематизируют. Рассмотрим два простейших способа схематизации.

Рисунок 8.6 иллюстрирует метод схематизации Серенсена и Кинасошвили.

Верхняя часть диаграммы заменяется прямой линией, которая проходит через точки A и S, соответствующие симметричному и отнулевому циклам напряжений. Угловой коэффициент этой прямой Ψ_{σ} называется коэффициентом чувствительности материала к асимметрии цикла. Однако для большинства материалов сведения о величине предела выносливости при отнулевом цикле σ_0 отсутствуют. Поэтому при выполнении практических расчётов значение коэффициента Ψ_{σ} назначается приближённо, при этом необходимо ориентироваться на величину предела прочности материала $\sigma_в$.

Правая часть диаграммы заменяется прямой, которая проходит под углом 45^{o} через точку B с абсциссой, равной пределу прочности $\sigma_в$.

Схематизация по методу Гудмана показана на рисунке 8.7. В этом случае диаграмма предельных амплитуд заменяется прямой, соединяющей точки A и B.

Слайд 102

Концентрация напряжений

Как показывает практика, циклическая прочность реальной детали существенно зависит от её формы, размеров и состояния поверхности и может быть значительно меньше предела выносливости, определённого на стандартных образцах. Подробнее рассмотрим влияние перечисленных факторов.

На рисунке 8.8 показана пластина с отверстием, работающая на растяжение. Как видно из рисунка, в сечении пластины, удалённом от отверстия, нормальное напряжение σ равномерно распределено по её ширине. В то же время в ослабленном сечении наблюдается резкое повышение напряжений в непосредственной близости к отверстию.

Подобное явление наблюдается при растяжении стержня с выточками, при изгибе ступенчатого стержня, при прессовой посадке втулки на вал. Эти случаи показаны на рисунках 8.9, 8.10 и 8.11.

Явление увеличения напряжений в окрестностях мест резкого изменения формы тела, а также в зоне контакта соприкасающихся тел называется концентрацией напряжений. Факторы, вызывающие концентрацию напряжений, называются концентраторами напряжений.

Для пластичных материалов при статическом нагружении концентрация напряжений неопасна, а при повторно-переменной нагрузке она способствует зарождению усталостной трещины.

Слайд 103

Концентрация напряжений

Для количественной оценки концентрации напряжений можно использовать теоретический коэффициент концентрации напряжений, определяемый согласно формуле (8.7). Значения теоретических коэффициентов можно найти в справочниках в зависимости от геометрии концентратора и от вида нагружения детали. Недостатком теоретических коэффициентов является то, что они не учитывают свойства материалов. Так, известно, что у пластических материалов рост напряжений после достижения предела текучести резко уменьшается.

По указанной причине в расчётной практике для учёта влияния концентрации напряжений используется эффективный коэффициент концентрации напряжений. Он определяется в соответствии с выражением (8.8) как отношение пределов выносливости, полученных на гладких образцах и на образцах с концентраторами.

Связь между теоретическим и эффективным коэффициентом устанавливается с помощью коэффициента чувствительности материала к концентрации напряжений q , который определяется в соответствии с формулой (8.9). Коэффициент q может принимать значения от нуля до единицы. С увеличением прочности материала значение коэффициента q возрастает.

Для деталей из серого чугуна величина коэффициента q близка к нулю. Это объясняется тем, что графитные включения, находящиеся в структуре серого чугуна, являются столь сильными концентраторами напряжений, что геометрия детали становится несущественной.

Если справочных данных об эффективных коэффициентах концентрации напряжений нет, то нужные значения можно вычислить по формуле (8.10).

Слайд 104

Влияние размеров детали и состояния поверхности

Экспериментально установлено, что с увеличением абсолютных размеров образца предел выносливости снижается. Характер этой зависимости показан на представленном графике. Это явление называется масштабным эффектом. Причиной масштабного эффекта является то, что с увеличением объёма материала повышается вероятность наличия внутренних дефектов, которые могут служить очагами зарождения трещин.

Масштабный эффект учитывается при расчёте на усталостную прочность с помощью коэффициента масштабного фактора. Он определяется по формуле (8.11) как отношение пределов выносливости, полученных на образцах заданного диаметра и на образцах стандартного размера.

Усталостная трещина во многих случаях зарождается у поверхности, поэтому состояние поверхностного слоя оказывает существенное влияние на выносливость изделия.

Надрезы и царапины, оставшиеся на поверхности после механической обработки, создают дополнительные места концентрации напряжений и могут вызвать существенное снижение предела выносливости. При расчёте это учитывается коэффициентом влияния шероховатости поверхности. Он определяется по формуле (8.12) как отношение пределов выносливости, полученных на образцах с заданной шероховатостью и на полированных образцах.

Для повышения сопротивления усталости можно использовать методы поверхностного упрочнения, такие как обдувка дробью, ультразвуковая обработка, закалка токами высокой частоты, химико-термическая обработка. Положительное влияние этих способов объясняется тем, что в поверхностном слое материала возникают остаточные сжимающие напряжения, которые затрудняют развитие усталостных трещин.

Слайд 105

Коэффициент запаса при циклическом нагружении

Вернёмся к схематизированной диаграмме предельных амплитуд. Она была построена по результатам испытаний стандартных образцов. Это означает, что область *OAEB* является областью допустимых циклов для образца. Выделим из неё ту часть, которая будет безопасной для реальной детали.

Предел выносливости детали, определяющий ординату точки A_1 , будет меньше, чем для образца. Коэффициент снижения предела выносливости учитывает совместное влияние всех конструктивно-технологических факторов и вычисляется по формуле (8.13). Угол наклона прямой A_1E_1 определяется выражением (8.14).

Кроме того, нужно учесть, что для реальной детали предельным напряжением является не предел прочности $\sigma_в$, а предел текучести $\sigma_т$. Таким образом, областью допустимых циклов для детали является область $OA_1E_1B_1$.

Слайд 106

Коэффициент запаса при циклическом нагружении

Графический способ определения коэффициента запаса заключается в следующем. Нанесём на диаграмму предельных амплитуд детали рабочую точку C с координатами, равными параметрам цикла напряжений σ_{m} и σ_{a} . Проведём из начала координат O через точку C луч до пересечения с линией диаграммы в точке D . Коэффициент запаса можно определить по формуле (8.15). Если точка D находится на прямой A_1E_1 , коэффициент запаса определён по выносливости, если на прямой E_1B_1 , значит, он определён по текучести.

Определение коэффициентов запаса по текучести и выносливости аналитическим способом осуществляется по формулам (8.16) и (8.17). В качестве расчётного коэффициента запаса следует использовать тот из них, который меньше. Условие прочности записывается в виде (8.18).

Слайд 107

Пример расчёта на циклическую прочность

Рассмотрим пример расчёта на усталостную прочность.

На рисунке изображён участок вала с концентратором напряжений в виде выточки. Вал нагружен изгибающими моментами $M_и$, значения которых изменяются по несимметричному циклу. Наибольшее и наименьшее значение изгибающих моментов $M_и$, а также величины геометрических размеров вала указаны на слайде. Вал изготовлен из легированной стали 40ХН . На слайде приведены механические характеристики этого материала: предел прочности $\sigma_в$, предел текучести $\sigma_т$ и предел выносливости при симметричном цикле σ_{-1} . Поверхность вала получена тонкой обточкой.

Требуется определить коэффициент запаса вала по усталостной прочности и по текучести, а также сделать выводы о наиболее вероятном механизме его разрушения.

Слайд 108

Характеристики цикла напряжений

Определим характеристики цикла нормальных напряжений, возникающих в опасном сечении участка вала, которым является сечение выточки диаметром d .

Рассчитаем осевой момент сопротивления W_x для опасного сечения. В данном случае он определяется по формуле круга диаметром d . Следует отметить, что в случае, когда опасное сечение ослаблено шпоночной канавкой или поперечным отверстием, момент сопротивления нужно находить с учётом этого ослабления.

Вычислим коэффициент асимметрии цикла R_σ как отношение минимального значения изгибающего момента к максимальному.

Определим максимальное напряжение цикла σ_{max} как отношение максимального значения изгибающего момента к осевому моменту сопротивления сечения. Минимальное напряжение цикла σ_{min} рассчитаем, умножив максимальное напряжение на коэффициент асимметрии.

Амплитуду цикла σ_a и среднее напряжение σ_m находим, соответственно, как полуразность и полусумму максимального и минимального напряжения.

Слайд 109

Определение коэффициента запаса

Определим по справочным таблицам коэффициенты, влияющие на предел выносливости по нормальным напряжениям.

Значение эффективного коэффициента концентрации напряжений K_σ зависит от соотношения геометрических размеров выточки и от предела прочности материала $\sigma_в$. Значение масштабного фактора $K_{d\sigma}$ находим по диаметру вала в ослабленном сечении d и по виду стали. В нашем случае сталь является легированной. Коэффициент K_F определяется по виду обработки поверхности вала и по величине предела прочности стали $\sigma_в$.

Вычисляем коэффициент снижения предела выносливости $K_{\sigma д}$, учитывающий влияние всех конструктивно-технологических факторов.

По ещё одной справочной таблице находим величину коэффициента чувствительности материала к асимметрии цикла Ψ_σ , соответствующую пределу прочности стали $\sigma_в$.

Рассчитываем коэффициенты запаса вала по усталостной прочности n_σ и по текучести $n_Т$.

Сравнивая полученные коэффициенты, можно сделать вывод, что в материале рассматриваемого вала при данном режиме нагружения механизм развития усталостных трещин работает интенсивнее, чем механизм развития пластической деформации.

Таким образом, задача решена.

Слайд 110

Тема 9. Колебания упругих систем

Классификация механических колебаний

Первое, что важно знать при исследовании колебательных движений упругих систем, – число степеней свободы, то есть число независимых переменных, необходимых и достаточных для описания состояния системы в любой момент времени.

В простейших случаях положение системы можно определить только одной координатой. Например, груз, подвешенный на пружине и изображенный на рисунке 9.1, имеет одну степень свободы, так как его положение определяется одной вертикальной координатой.

Двумя степенями свободы обладает показанная на рисунке 9.2 невесомая балка, несущая две массы, и ее положение определяется двумя координатами этих масс.

Балка на рисунке 9.3 с распределенной по всей длине массой обладает бесконечным числом степеней свободы, так как ее положение определяется координатами бесконечно большого количества точек распределенной массы.

Различают следующие типы колебаний:

1. Свободные, или собственные, – колебания, возникающие вследствие начального отклонения системы от положения равновесия и происходящие только под действием сил упругости системы.

2. Вынужденные – колебания, происходящие под действием внешних периодически изменяющихся сил.

3. Параметрические – колебания, в процессе которых периодически изменяются параметры системы, например, при кручении стержня прямоугольного профиля, при потере устойчивости при пульсирующей нагрузке.

4. Автоколебания – колебания, возбуждаемые внешними силами, характер воздействия которых определяется самим колебательным процессом, например, колебания деформируемых тел в потоке жидкости или газа.

Колебания классифицируют также по виду деформации. Так, для стержней различают продольные, поперечные и крутильные колебания.

Слайд 111

Свободные колебания

Пусть тележка массой m, прикрепленная к стенке пружиной жесткостью c, выводится из состояния равновесия кратковременным возмущением, действующим вдоль оси z.

На рассматриваемую систему действуют сила упругости cz и сила инерции $m\ddot{z}$. Здесь z – величина смещения тележки от положения равновесия, $\ddot{z}$ – ускорение. В соответствии с принципом Даламбера запишем уравнение равновесия (9.1) в виде суммы проекций сил на ось z, куда и войдут перечисленные силы. Поделив оба слагаемых на величину массы m, приведем уравнение к виду (9.2). Обозначим $\frac{c}{m} = \omega^2$.

Таким образом, дифференциальное уравнение, описывающее свободные колебания упругой системы с одной степенью свободы без учета сил сопротивления, будет иметь вид (9.3).

Слайд 112

Свободные колебания

Решение полученного дифференциального уравнения (9.3) можно представить в виде (9.4), где C_1 и C_2 – постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий. Представленный на рисунке график колебательного процесса иллюстрирует решение в виде (9.5), в которое входят начальная фаза φ и собственная частота колебательного процесса ω.

Таким образом, свободные, или собственные, колебания представляют собой простые гармонические колебания.

Запишем жесткость пружины c как обратную величину податливости упругой системы δ_{11}, тогда частота собственных колебаний может быть вычислена по формуле (9.6).

Слайд 113

Учет сил сопротивления

Рассмотрим упругие колебания упругой системы с одной степенью свободы с учетом сил сопротивления. Для этого добавим на нашем примере еще одну силу – силу сопротивления, пропорциональную скорости колебательного процесса $\alpha \cdot \dot{z}$. Коэффициент α является коэффициентом пропорциональности, а $\dot{z}$ – это скорость колебательного процесса.

Снова составим уравнение равновесия (9.7) в виде суммы проекций всех сил на ось z. Поделив каждое слагаемое на массу, приведем данное уравнение к виду (9.8). Полученное дифференциальное уравнение описывает процесс колебания упругой системы с одной степенью свободы с учетом сил сопротивления. Множитель n у второго слагаемого является коэффициентом затухания колебаний.

Слайд 114

Учет сил сопротивления

Общее решение данного дифференциального уравнения представлено формулой (9.9). Если в начальный момент времени при t, равном нулю, z равно нулю, то коэффициент C_2 равен нулю и уравнение колебательного процесса принимает вид (9.10), оно описывает синусоиду с уменьшающейся амплитудой. На графике колебательного процесса, соответствующего полученному решению, видно, что за счет действия сил сопротивления происходит затухание колебаний и амплитуда падает по экспоненциальному закону. Под периодом T таких колебаний понимают время между двумя максимальными отклонениями. Отношение двух последовательных максимальных амплитуд A_i и $A_i + 1$ равно экспоненте в степени nT. Логарифм этого отношения называется логарифмическим декреме́нтом колебательного процесса и является основной характеристикой затухания колебаний.

Слайд 115

Природа сил сопротивления

Рассмотрим природу сил сопротивления.

Различают силы внешнего сопротивления: трение в опорах, аэро- и гидродинамическое сопротивление, силы внутреннего сопротивления, например, внутреннее трение, а также силы трения в сочленениях. К числу сил внешнего сопротивления относятся также специально создаваемые для гашения колебаний демпфирующие устройства.

По характеру зависимости сил сопротивления от обобщенных скоростей различают силы линейного сопротивления, кулоново трение и сухое трение. На слайде графически представлены все три типа сил сопротивления в зависимости от скорости колебательного процесса.

Если произведение силы сопротивления на скорость колебаний больше нуля, то такая сила совершает отрицательную работу и происходит рассеивание энергии. Она называется диссипативной.

Если произведение силы сопротивления на скорость колебаний меньше нуля, то происходит приток энергии в механическую систему, такая сила называется силой отрицательного сопротивления.

Любой материал обладает демпфирующим свойством, которое можно характеризовать коэффициентом демпфирования, определяемым в условиях свободных крутильных колебаний цилиндрических образцов. В начале испытания образец закручивают на некоторый угол θ_{max} и оставляют в состоянии свободного колебательного процесса. После 25 циклов колебаний замеряют угол закручивания образца θ_{25} и определяют коэффициент демпфирования η по формуле (9.11).

Слайд 116

Вынужденные колебания

Добавим к числу сил, которые действуют на упругую систему, вынуждающую силу, изменяющуюся по синусоидальному закону с частотой Ω, направленную в сторону движения. Вновь составим уравнение равновесия (9.12) в виде суммы проекций всех сил на ось z. Разделим каждое слагаемое уравнения на величину массы m и заменим $\frac{F_0}{m}$ f. В результате получим уравнение вида (9.13), описывающее вынужденные колебания упругой системы с одной степенью свободы с учетом сил сопротивления.

Примем частное решение данного уравнения в виде (9.14). Возьмем первую и вторую производную от выражения (9.14) и подставим в уравнение (9.13). Сгруппируем слагаемые, содержащие множитель в виде $\sin\Omega t$, и слагаемые, содержащие множитель $\cos\Omega t$. Запишем условие выполнения равенства правой и левой частей преобразованного уравнения (9.13) в виде системы уравнений (9.15).

Слайд 117

Вынужденные колебания

Из второго уравнения системы уравнений (9.15) выразим постоянную интегрирования $C2$ через $C1$. Подставим его в первое уравнение и получим выражение для $C1$ через параметры колебательного процесса и упругой системы в виде (9.16).

Затем формулу (9.16) подставим в выражение для C_2 через C_1, чтобы получить зависимость коэффициента C_2 от параметров колебательного процесса и упругой системы (9.17).

Введем обозначения (9.18) для C_1 и C_2, которые подставим в выражение для z^*. В результате получим формулу (9.19), откуда видно, что $A_{\text{вын}}$ – амплитуда вынужденных колебаний, ψ – фазовый сдвиг между вынуждающей силой и вызываемыми ею колебаниями.

Слайд 118

Амплитуда вынужденных колебаний

На основании введенных обозначений (9.18) квадрат амплитуды вынужденных колебаний можно определить как сумму квадратов коэффициентов C_1 и C_2. При замене коэффициентов полученными для них выражениями (9.16) и (9.17) с последующим приведением суммы к общему знаменателю получим формулу (9.20) для амплитуды вынужденных колебаний. Выразим массу из формулы собственных колебаний (9.6) и получим формулу (9.21).

Слайд 119

Амплитуда вынужденных колебаний

Подставим формулу (9.21) в формулу (9.20) и поделим числитель и знаменатель на квадрат частоты собственных колебаний. Тогда выражение для амплитуды вынужденных колебаний примет вид (9.22). Произведение $F0\delta11$ в формуле (9.22) есть не что иное, как статическое перемещение точки упругой системы, в которой сосредоточена масса m, за колебанием которой мы наблюдаем. Обозначим это произведение $\delta_{ст}$ и введем его в формулу. Получим выражение (9.23), в котором множитель при статическом перемещении $\delta_{ст}$ заменим коэффициентом $К_Д$, который называется коэффициентом динамичности, или коэффициентом усиления колебаний.

Слайд 120

Коэффициент динамичности

Итак, коэффициент динамичности $К_Д$ определяется по формуле (9.24). Если частота собственных колебаний ω значительно больше частоты вынужденных колебаний Ω или коэффициент затухания колебаний n стремится к нулю, вторым слагаемым в формуле (9.24) можно пренебречь.

Тогда $К_Д$ можно вычислить по упрощенной формуле (9.25), то есть получить зависимость только от отношения частот.

Слайд 121

График коэффициента динамичности

Рассмотрим график коэффициента динамичности, построенный по зависимости (9.25). Он состоит из двух ветвей. Левая ветвь располагается в дорезонансной зоне, отношение частот в которой изменяется от нуля до единицы. При отношении частот, равном единице, коэффициент динамичности стремится к бесконечности, и наступает явление резонанса. Амплитуда вынужденных колебаний принимает очень большое значение, практически резонансное, в диапазоне отношения частот от 0,75 до 1,25. Правая ветвь графика асимптотически приближается к оси отношения частот. То есть коэффициент динамичности и амплитуда вынужденных колебаний с ростом величины отношения частоты вынужденных колебаний к частоте собственных колебаний стремятся к нулю.

Слайд 122

Динамические напряжения и перемещения

Амплитуду вынужденных колебаний можно назвать динамическим перемещением, так как это максимальное отклонение от положения равновесия упругой системы под действием динамической силы, изменяющейся во времени по гармоническому закону. Тогда выражение (9.23) можно представить в виде (9.26). В соответствии с законом Гука напряжение прямо пропорционально деформации, то есть справедлива формула (9.27).

Для того, чтобы воспользоваться этими формулами, необходимо:

1. Статически приложить к точке упругой системы, за колебанием которой мы наблюдаем, амплитудное значение вынуждающей силы F_0 .

2. Определить максимальную величину статического напряжения и перемещения, которое возникает в упругой системе под действием статически приложенной силы F_0 .

3. Определить коэффициент динамичности.

4. Определить максимальное динамическое напряжение и перемещение по формулам (9.26) и (9.27).

Слайд 123

Пример решения задачи

На двухопорной балке, показанной на рисунке 9.4, установлен электродвигатель, вес которого $F = 0{,}4$ кН . Балка изготовлена из двух равнобоких уголков № 4 и ее поперечное сечение показано на рисунке 9.5. Число оборотов электродвигателя $N = 500$ об/мин , амплитудное значение центробежной силы, возникающей при вращении ротора, $F0 = 0{,}05$ кН .

Произвести проверочный расчет на прочность данной подмоторной балки и определить значение длины ℓ , при котором возможно наступление резонанса. Сопротивлением среды пренебречь. Допускаемое напряжение принять равным 160 МПа .

Слайд 124

Постановка задачи

Прежде чем приступить к решению задачи, давайте сначала разберемся, что происходит с балкой при заданном нагружении.

До установки двигателя балка находилась в прямолинейном равновесном состоянии, показанном на рисунке 9.6.

После установки двигателя в выключенном режиме, который можно рассматривать как сосредоточенную массу, балка испытывает деформацию изгиба от силы веса и принимает новое изогнутое равновесное состояние, как это изображено на рисунке 9.7.

При включенном двигателе к его весу добавляется действие центробежной силы $F_0 \sin \Omega t$, которая возникает при вращении ротора в силу неуравновешенности его массы. Эта сила инициирует вынужденные колебания балки относительно изогнутого равновесного состояния, как это видно из рисунка 9.8. Направление колебательного движения перпендикулярно осевой линии балки, поэтому колебания являются поперечными, а сама балка представляет собой упругую систему с одной степенью свободы.

Напряжение, возникающее в поперечных сечениях балки, вызвано двумя силами: статической силой веса электродвигателя, а также динамической, изменяющейся во времени центробежной силой и может быть определено по формуле (9.28).

Слайд 125

Геометрические характеристики сечения

Начнем решение задачи с определения геометрических характеристик сечения балки: осевого момента инерции и момента сопротивления, которые необходимы для определения напряжений.

Поперечное сечение сложной формы состоит из двух гостовских равнобоких уголков № 4. Из сортамента прокатной стали выпишем необходимые размеры и момент инерции относительно центральной оси x для одного уголка. Для сечения из двух уголков момент инерции будет в два раза больше. Осевой момент сопротивления W_x находим как отношение момента инерции сечения к расстоянию от главной центральной оси x до максимально удаленной точки y_{max} .

Слайд 126

Определение напряжения от веса двигателя

Найдем максимальное напряжение от статического действия силы, равной весу двигателя $F = mg$. Для этого построим грузовую эпюру изгибающего момента M_F , по которой определим положение опасного сечения. Как видно из эпюры, максимальный изгибающий момент возникает в сечении C , следовательно, оно наиболее опасно. По формуле (9.29) вычислим величину максимального напряжения в сечении C .

Слайд 127

Напряжение от центробежной силы

Найдем максимальное напряжение от статически приложенной силы F_0 , равной амплитудному значению центробежной силы. Для этого к балке приложим силу F_0 к сечению C , где установлен электродвигатель. Эпюра изгибающих моментов от этой силы будет аналогична грузовой эпюре от силы веса электродвигателя, и опасное сечение будет также находиться в сечении C . Максимальное статическое напряжение вычислим по формуле (9.30). Чтобы перейти к определению динамического максимального напряжения, определим коэффициент динамичности.

Слайд 128

Коэффициент динамичности

С этой целью определим податливость упругой системы δ_{11} . Учитывая, что это единичное перемещение, определим его методом Мора. Для этого приложим в точке C в направлении колебательного движения единичную безразмерную сосредоточенную силу и построим единичную эпюру изгибающего момента M_1 . Очевидно, что она будет пропорциональна грузовой эпюре M_F с коэффициентом пропорциональности, равным силе F .

Единичная эпюра имеет два участка: AC и CB. Применяя формулу Симпсона для вычисления интеграла Мора на каждом участке, получим искомую величину δ_{11} .

Слайд 129

Коэффициент динамичности

Вычислим частоту собственных колебаний ω по формуле (9.31), учитывая, что масса двигателя $m = \dfrac{F}{g}$, и принимая ускорение свободного падения $g \approx 10\, м/сек^2$.

Вычислим частоту вынужденных колебаний Ω по заданному числу оборотов электродвигателя N по формуле (9.32).

Коэффициент динамичности найдем по упрощенной формуле (9.33).

Слайд 130

Проверка прочности балки

Для определения максимального напряжения в опасном сечении C от статической силы веса и динамической центробежной силы сложим напряжения от каждой из этих сил. Второе слагаемое в формуле (9.34) представим как произведение напряжения от статически приложенной силы F_0 и коэффициента динамичности. При сравнении полученного максимального напряжения с величиной допускаемого можно сделать вывод о том, что условие прочности выполняется. Более того, балка значительно недогружена, так как максимальное напряжение в два с лишним раза меньше допускаемого.

Слайд 131

Резонансная длина

Определим значение параметра длины балки l_p, при котором возможно наступление резонанса.

Условие резонанса, как отмечалось выше, – это совпадение частот вынужденных и собственных колебаний упругой системы. Частота вынужденных колебаний Ω не зависит от значения параметра l, а частота собственных колебаний ω связана с параметром l полученной ранее зависимостью.

Возведем обе части условия резонанса в виде (9.35) в квадрат и выразим величину резонансной длины через параметры упругой системы и частоту вынужденных колебаний.

Таким образом, при значении параметра длины балки l, равном 0,66 метра, система войдет в резонанс, амплитуда вынужденных колебаний и напряжения будут стремительно возрастать, что неминуемо приведет к разрушению конструкции.

Таким образом, задача решена.

Слайд 132

Тема 10. Удар

Ударное нагружение

Ударом называется взаимодействие тел, при котором силы взаимодействия резко нарастают или ослабевают за короткий промежуток времени. Удар относится к динамическим видам нагружения.

Можно выделить три вида задач об ударе:

1. Задачи об изменении параметров движения взаимодействующих тел, решаемые аппаратом механики недеформируемого твердого тела.
2. Задачи о напряжениях и деформациях, возникающих во взаимодействующих телах, решаемые аппаратом механики деформируемого твердого тела.
3. Задачи об определении свойств материалов при ударе.

В курсе «Сопротивление материалов», как разделе механики деформируемого твердого тела, решаются ударные задачи только второго вида: производится расчет на прочность и жесткость элементов конструкций при ударном нагружении. При этом элемент конструкции, обычно неподвижный и воспринимающий удар, принято называть ударяемым телом, а внешний объект, производящий удар, соответственно, ударяющим телом.

Виды удара обычно классифицируют и по направлению ударного воздействия, и по виду деформации, возникающей при этом в ударяемом элементе конструкции. На рисунке 10.1 показан пример горизонтального продольного удара, на рисунке 10.2 – вертикального поперечного, а на рисунке 10.3 – пример вертикального скручивающего удара.

Слайд 133

Основные допущения теории удара Лепина

В известных учебниках и учебных пособиях по сопротивлению материалов разбираются методы расчета на прочность и жесткость при ударных нагрузках на примерах частных случаев удара. Более общий подход к решению таких задач был предложен доктором технических наук, основателем кафедры «Сопротивление материалов» Тольяттинского политехнического института Георгием Федоровичем Лепиным в семидесятых годах прошлого века.

Рассмотрим теорию удара Лепина. На слайде приведены основные гипотезы, на базе которых строится сама теория. Сделаем некоторые замечания к ним.

В первой гипотезе предполагается, что, учитывая деформацию ударяемого элемента конструкции, само ударяющее тело следует считать абсолютно жестким, то есть недеформируемым.

Во второй гипотезе указывается, что весь процесс ударного взаимодействия должен проходить в зоне упругости, так как величина допускаемого напряжения обычно меньше предела пропорциональности.

Понятие степени свободы элемента конструкции мы вводили в теме «Колебания». В третьей гипотезе предполагается, что вся масса ударяемого тела сосредоточена в точке удара либо этой массой вообще можно пренебречь.

Четвертая гипотеза означает, что в момент удара ударяющее тело не отскакивает, а дальнейшее их движение происходит совместно.

Пятая гипотеза предполагает, что можно пренебречь контактными явлениями, то есть незначительной долей энергии, которая рассеивается при ударе.

Ну и наконец, шестая гипотеза позволяет пренебречь волновыми явлениями, то есть конечной скоростью распространения деформаций по длине элемента конструкции.

Слайд 134

Постановка задачи

Сформулируем общую постановку задачи.

Рассмотрим, как показано на рисунке, упругую систему в виде пружины длиной l и жесткостью c, к которой прикреплен груз весом F_1. Пружина образует с горизонтом угол α и под действием веса груза имеет начальную деформацию δ_0. Абсолютно жесткое тело весом F движется со скоростью V под углом β к горизонту. В некоторый момент времени происходит столкновение, то есть удар. Согласно четвертой гипотезе в момент удара массы двух тел соединяются и продолжают дальнейшее совместное движение в направлении оси a до полной остановки, после чего за счет сил упругости пружины совершают колебательные движения. Временем ударного взаимодействия считается промежуток от момента соприкосновения до момента первой остановки системы. В этот момент груз F_1 получает максимальное перемещение от точки его положения до удара. Назовем его динамическим перемещением. На рисунке оно обозначено $\delta_д$.

Определим динамическое перемещение упругой системы $\delta_д$ за время удара.

Слайд 135

Законы сохранения импульса и энергии

В соответствии с физическим законом сохранения импульса количество движения системы до и после удара одинаково. Проецируя количество движения на ось a , данный закон для нашей системы можно записать в виде (10.1). Здесь в левой части равенства стоит количество движения ударяющего тела до момента удара, в правой – количество движения системы, получившей скорость V_1 , после соударения. Из этого закона можно выразить по формуле (10.2) скорость движения системы после соударения V_1 .

Теперь воспользуемся теоремой о кинетической энергии (10.3). Ее смысл для нашей задачи заключается в том, что изменение кинетической энергии за время ударного взаимодействия равно работе всех внешних сил на перемещении, совершенном за это время.

Кинетическую энергию системы в начале взаимодействия T_1 можно вычислить по формуле (10.5). Кинетическая энергия системы T_2 в момент полной остановки равна нулю, как показано в формуле (10.4).

Выражение для кинетической энергии в начале взаимодействия T_1 распишем и преобразуем с учетом выражения для скорости V_1 из формулы (10.2). Это преобразование представлено формулой (10.6), в которой выделена кинетическая энергия ударяющего тела до момента удара T_0 . Её выражение представлено формулой (10.7).

Теперь разберемся с правой частью теоремы (10.3).

Слайд 136

Работа внешних сил

Работа внешних сил складывается из работы силы тяжести и силы упругости пружины, согласно формуле (10.8).

Работа силы тяжести системы на перемещении, вызванном ударом, вычисляется по формуле (10.9).

Рассмотрим зависимость силы упругости F_y от перемещения δ . По закону Гука сила упругости прямо пропорциональна перемещению, причем коэффициентом пропорциональности является жесткость пружины, как показано в формуле (10.10). Графическая иллюстрация этого закона показана на рисунке. А заштрихованная площадь под наклонной прямой определяет величину работы силы упругости на отрезке $\delta_д - \delta_0$. Математически значение работы силы упругости вычисляется по формуле (10.11).

Представим жесткость пружины c в виде (10.12), то есть через обратную величину δ_{11} , которая называется податливостью упругой системы. По физическому смыслу эта величина означает перемещение точки соударения под действием единичной силы, приложенной по направлению перемещения вследствие ударного взаимодействия.

Подставим в теорему о кинетической энергии (10.3) выражения (10.4), (10.6), (10.9) и (10.11) с учетом выражения (10.12). В результате получим равенство (10.13), которое относительно динамического перемещения $\delta_д$ представляет собой квадратное уравнение.

Слайд 137

Перемещения и напряжения при ударе

Преобразуем квадратное уравнение (10.13) к нормальному виду, поставив слагаемые с $\delta_Д$ в порядке возрастания степени. Для этого сначала раскроем скобки относительно перемещений и перенесем все слагаемые в левую часть уравнения, как показано в формуле (10.14).

Здесь дважды встречающееся произведение податливости системы δ_{11} на суммарный вес грузов $F + F_1$ представляет собой статическое перемещение $\delta_{ст}$. Это обозначение приведено в формуле (10.15). По физическому смыслу $\delta_{ст}$ – это перемещение точки соударения под действием силы тяжести взаимодействующих тел, приложенной статически по направлению перемещения вследствие ударного взаимодействия.

Окончательно вид квадратного уравнения представлен формулой (10.16).

Решая это уравнение относительно $\delta_{Д}$ и выбирая из двух его корней только положительный, получаем выражение (10.17) для динамического перемещения. Здесь $K_{Д}$ – коэффициент динамичности, который вычисляется по формуле (10.18). Его значение определяет, во сколько раз динамическое перемещение вследствие удара будет больше соответствующего статического перемещения.

Согласно закону Гука, который устанавливает пропорциональность между напряжениями и перемещениями, можно сделать вывод, что и динамические напряжения будут отличаться от статических также в $K_{Д}$ раз. То есть справедливо равенство (10.19).

Полученное выражение (10.18) для коэффициента динамичности достаточно громоздкое, поскольку сама постановка задачи довольно общая. Для более простых случаев удара это выражение существенно упрощается.

Рассмотрим некоторые из них.

Слайд 138

Частные случаи: вертикальный удар

В качестве первого частного случая удара рассмотрим вертикальный удар с учетом массы ударяемой системы. На рисунке эта масса обозначена m_1 .

На вертикально расположенную пружину с сосредоточенной массой m_1 с высоты H падает абсолютно жесткое тело массой m .

В этом случае углы α и β из общей постановки задачи принимают конкретное значение 90°. Выражения для начального перемещения δ_0 и статического перемещения $\delta_{ст}$ можно записать через соответствующие массы и ускорение свободного падения g . Кинетическую энергию T_0 падающей массы здесь лучше определить через высоту H . Все эти упрощения показаны в группе формул (10.20).

Тогда выражение для коэффициента динамичности принимает вид (10.21), что несколько проще исходного выражения (10.19).

Слайд 139

Частные случаи: вертикальный удар

Второй вариант частного случая удара – вертикальный удар без учета массы упругой системы, в свою очередь, можно рассматривать как частный случай предыдущего. Если можно не учитывать массу упругой ударяемой системы, то есть к предыдущим предположениям добавить $m_1 = 0$, то получим данный случай ударного нагружения.

В связи с нулевой массой m_1 в группе формул (10.22) по сравнению с группой формул (10.20) предыдущего случая изменяются лишь выражения для начального и статического перемещений.

Само же выражение для коэффициента динамичности существенно упрощается и принимает вид (10.23).

Если же высота падения груза намного больше величины статического перемещения, что на практике чаще всего и случается, то в формуле (10.23) можно пренебречь обеими единицами, и она принимает вид (10.24).

Слайд 140

Частные случаи: мгновенное нагружение

Следующий частный случай ударного нагружения – внезапное приложение нагрузки.

Этот случай реализуется, когда высота падения груза H равна нулю. Представленный рисунок иллюстрирует данный случай нагружения.

Вернемся к предыдущему случаю вертикального удара без учета массы упругой системы и добавим дополнительное условие: $H = 0$. Тогда в группе формул (10.22) кинетическая энергия T_0 становится равной нулю, как показано в соответствующей группе (10.25).

Коэффициент динамичности в этом случае, согласно формуле (10.26), принимает конкретное числовое значение, равное двум.

Таким образом, при внезапном приложении нагрузки динамические напряжения и перемещения в упругой системе в два раза больше, чем при соответствующем статическом нагружении.

Слайд 141

Частные случаи: горизонтальный удар

Рассмотрим теперь случай горизонтального удара с учетом массы упругой системы, представленный на рисунке.

Пусть горизонтальная пружина с податливостью δ_{11} и сосредоточенной массой m_1 воспринимает удар абсолютно жесткой массы m , которая движется горизонтально со скоростью V .

Здесь будут справедливы предположения, отмеченные в группе формул (10.27). Углы наклона α и β из общей постановки задачи принимают значение, равное нулю. Начальное перемещение δ_0 отсутствует, поскольку сила тяжести груза m_1 перпендикулярна горизонтальному направлению движения. Выражение для статического перемещения $\delta_{ст}$ включает обе массы. Это можно объяснить тем, что моделируя соответствующее статическое нагружение, мы полагаем, что в направлении удара статически прикладывается сила, равная суммарному весу обеих масс. Выражение для кинетической энергии T_0 определяется через скорость V.

Тогда для данного случая удара выражение для коэффициента динамичности (10.18) принимает вид (10.28).

Слайд 142

Частные случаи: горизонтальный удар

Если же при горизонтальном ударе пренебречь массой упругой системы, то есть принять значение m_1, равное нулю, получим упрощенный случай предыдущего. На рисунке здесь вместо массы m_1 изображен буфер.

В группе формул (10.29), в связи с равенством нулю массы m_1, изменяется лишь выражение для статического перемещения по сравнению с соответствующей группой формул (10.27) предыдущего случая.

Тем не менее, выражение для коэффициента динамичности при этом существенно упрощается и принимает вид (10.30).

В ориентировочных практических расчетах при горизонтальном ударе для определения коэффициента динамичности чаще всего используется именно простая формула (10.30).

Аналогично можно получить выражения для коэффициента динамичности и для других частных случаев ударного нагружения.

Слайд 143

Расчет на прочность и жесткость при ударе

Таким образом, при ударном нагружении условие прочности имеет вид (10.31), а условие жесткости записывается в виде (10.32). Динамические напряжения и перемещения определяются через соответствующие статические и увеличиваются в коэффициент динамичности раз.

Тогда алгоритм расчета на прочность и жесткость при ударе заключается в следующем.

Сначала решается статическая часть задачи, то есть ударное нагружение заменяется соответствующим статическим. Для этого в точку удара в его направлении статически прикладывается сила, равная суммарному весу ударяющего и ударяемого тела, и определяются возникающие при этом максимальные статические напряжения и перемещения.

Затем находится коэффициент динамичности по формуле, соответствующей данному виду удара.

После чего уже решается динамическая задача. То есть найденные значения максимальных статических напряжений и перемещений и коэффициента динамичности подставляются в условие прочности (10.31) и в условие жесткости (10.32), которые решаются в соответствии с поставленной задачей.

Слайд 144

Пример расчета на прочность и жесткость при ударе

Рассмотрим пример расчета на прочность и жесткость балки, представленной на рисунке, испытывающей вертикальный поперечный удар.

Ставится следующая задача. На заданную балку с высоты H = 0,5 м свободно падает абсолютно жесткое тело массой m . Поперечное сечение балки составное – состоит из четырех стальных равнобоких уголков № 10, сваренных между собой.

Требуется определить допускаемую величину массы падающего груза , при которой будет обеспечена прочность балки, а также проверить выполнение условия жесткости, приняв $[\delta]=3\,мм$. Для решения задачи примем допускаемое напряжение = 160 МПа , а модуль Юнга E = 2 · 10^5 МПа . Массой балки пренебрежем.

Слайд 145

Определение геометрических характеристик

Определим геометрические характеристики поперечного сечения балки: осевой момент инерции J_x и осевой момент сопротивления W_x, которые потребуются нам при прочностном и деформационном расчетах.

Поперечное сечение балки, представленное на рисунке, сложное – состоит из четырех равнобоких уголков № 10. Оси x и y – главные центральные оси сечения, причем ось y – силовая линия, а ось x – нейтральная линия. По сортаменту для одного равнобокого уголка № 10 выпишем необходимые параметры: сторону уголка b, момент инерции J_{x_1}, площадь A_1, расстояние от центра тяжести до стороны уголка z_0. Значения этих величин показаны на слайде в группе формул (10.33).

Применяя теорему о суммировании моментов инерции и теорему о параллельном переносе осей, найдем осевой момент инерции J_x всего сложного сечения. Его вычисление показано в формуле (10.34).

Осевой момент сопротивления W_x найдем по определению как отношение момента инерции J_x к расстоянию от нейтральной линии до наиболее удаленных точек сечения y_{max}. Вычисление момента сопротивления представлено формулой (10.35).

Слайд 146

Статическая прочностная часть задачи

В данной задаче необходимо определить массу падающего тела из условия прочности. Поэтому сначала придется полностью произвести прочностной расчет, рассмотрев последовательно статическую и динамическую части задачи, а затем уже, с учетом найденного значения массы m, проверить выполнение условия жесткости.

Решим статическую прочностную часть задачи, смоделировав статическое нагружение балки, соответствующее заданному ударному нагружению. Для этого приложим к балке в точке удара U в направлении удара статическую силу F , равную весу падающего тела mg . На рисунке статическое нагружение показано на варианте «а» . При этом в подвижной опоре B возникает реактивная сила R_B , которая определяется из моментного уравнения равновесия, записанного относительно врезанного шарнира C для правой части балки. Это уравнение и определение из него величины реакции R_B последовательно показаны в группе формул (10.36).

Построим грузовую эпюру изгибающих моментов M_F от действия силы F и определим положение опасного сечения балки. Эпюру строим в направлении от свободного конца к жесткой заделке методом сечений с учетом действия силы F и реакции R_B . На рисунке грузовая эпюра отмечена вариантом «б» . Опасное сечение балки – сечение D , где возникает максимальный момент $M_{\max} = 2mg$.

Определим максимальное статическое напряжение $\sigma_{cm\max}$ в долях массы m . Примем при этом ускорение свободного падения $g \approx 10\,м/сек^2$. Вычисление максимального статического напряжения, возникающего в сечении D , приведено в формуле (10.37).

Слайд 147

Определение коэффициента динамичности

Найдем коэффициент динамичности для данного случая удара. Балка испытывает вертикальный удар, причем в условии задачи сказано, что массой балки можно пренебречь. Следовательно, для определения коэффициента динамичности выбираем формулу (10.24), соответствующую случаю вертикального удара без учета массы упругой системы. Выбираем более короткий вариант формулы, при условии, что высота падения H намного больше величины статического перемещения в точке удара.

Учитывая, что статические деформации очень малы, это условие практически всегда выполняется.

В формулу (10.24) входит податливость упругой системы δ_{11} . Для её определения построим единичную эпюру изгибающих моментов M_1 от действия единичной силы, приложенной статически в точке удара U. Правила её построения те же, что и для грузовой эпюры M_F , представленной на рисунке вариантом «а» . Эпюра M_1 обозначена на рисунке вариантом «б» . Очевидно, что единичная эпюра отличается от грузовой эпюры лишь тем, что значения моментов в соответствующих сечениях будут в mg раз меньше.

Определим податливость упругой балки δ_{11} методом Мора, «умножив» единичную эпюру M_1 саму на себя. Будем использовать при этом формулу Симпсона. Участков перемножения два: UB и BD . На рисунке значения моментов в средних точках этих участков на единичной эпюре отмечены красным цветом. Вычисление податливости δ_{11} по формуле Симпсона представлено в выражении (10.38).

Вычисление коэффициента динамичности в долях массы m с учетом найденного значения податливости показано в формуле (10.39).

Слайд 148

Динамическая прочностная часть задачи

Запишем условие прочности при ударе в виде (10.40).

Подставим в него значение допускаемого напряжения и выражения для коэффициента динамичности $K_д$ и максимального статического напряжения $\sigma_{ст\max}$ в долях параметра m . Получим неравенство (10.41). Если в неравенстве оставить только знак равенства, то значение параметра массы m будет максимально допустимым. Решим полученное уравнение относительно $[m]$. Сначала выразим и найдем корень из $[m]$ по формуле (10.42). Затем, возведя полученное значение в квадрат, получим величину допускаемой массы.

Таким образом, согласно выражению (10.43), на данную балку с высоты полуметра можно бросить груз массой не более 34,4 килограмма.

Определим по формуле (10.44) численное значение коэффициента динамичности $K_{д}$ с учетом найденной массы. Коэффициент динамичности равен 75. Это означает, что если бы ударяемое тело массой 34,4 килограмма не бросить, а спокойно положить на балку в точку удара, то все напряжения и перемещения, возникающие в поперечных сечениях балки, были бы в 75 раз меньше.

Прочностная часть задачи полностью решена.

Слайд 149

Приближенный вид изогнутой оси балки

Решим деформационную часть задачи – проверим выполнение условия жесткости с учетом найденного значения массы ударяющего тела.

Определим, прежде всего, в каком сечении балки возникает максимальный статический прогиб. Для этого изобразим приближенный вид изогнутой оси балки, учитывая условия её закрепления и вид грузовой эпюры изгибающих моментов, обозначенной буквой «а» на рисунке.

Сечения B и D закреплены, поэтому сместиться не могут – они остаются на месте. Согласно правилу знаков, эпюра моментов построена на сжатых волокнах. Это позволяет нам определить направление выпуклости изогнутой оси балки на участках постоянного знака грузовой эпюры моментов. На участке DC эпюра расположена выше базовой линии, значит, этот участок балки изогнется выпуклостью вниз, при этом сжатые волокна будут сверху. Рассуждая аналогично, делаем вывод, что на участке CU балка изогнется выпуклостью вверх. На последнем участке UK момент равен нулю, значит, на этом участке балка не изгибается, а остается прямолинейной. Также учитываем, что сечение D балки жестко закреплено, то есть изогнутая ось должна отойти от этого сечения с нулевым углом поворота. Изогнутая ось балки – это упругая плавная линия, она не может иметь резких изломов, кроме как во врезанном шарнире.

Учитывая все перечисленные обстоятельства, изображаем приближенный вид изогнутой оси балки. На рисунке она выделена красным цветом и обозначена буквой «б» .

Очевидно, что максимальное статическое перемещение $\delta_{ст\max}$ возникает в сечении K . На рисунке «б» также показано статическое перемещение в точке удара, оно обозначено $\delta_{ст*}$.

Слайд 150

Определение статического перемещения

Определим максимальное статическое перемещение, возникающее в сечении K , методом Мора. Для этого необходимо в сечении K приложить единичную безразмерную силу и построить от её действия единичную эпюру изгибающих моментов M_{1K} . Эпюра строится методом сечений, проходя через ноль во врезанном шарнире. На рисунке она обозначена буквой «в» .

«Умножив» единичную эпюру M_{1K} на грузовую M_F , согласно методу Мора, получим искомое перемещение $\delta_{ст\max}$. Однако, как вы видите, на рисунке вместо грузовой эпюры M_F под буквой «а» изображена единичная эпюра M_1 . В силу пропорциональности этих двух эпюр, что было отмечено выше, можно заменить в методе Мора грузовую эпюру на единичную M_1 . В этом случае коэффициент пропорциональности mg выступает дополнительным множителем, как показано в формуле (10.45). Перемножение эпюр здесь производится по простейшей формуле Симпсона. Участков перемножения два: UB и BD . Ординаты моментов на обеих перемножаемых единичных эпюрах, расположенные посередине каждого участка, выделены на рисунке красным цветом.

Таким образом, максимальное статическое перемещение, возникающее в сечении K балки, равно 0,27 миллиметра.

Слайд 151

Проверка жесткости

Запишем условие жесткости при ударе и проверим его выполнение.

Условие жесткости при ударе имеет вид (10.46). Подставим в него найденные значения коэффициента динамичности, максимального статического перемещения и найдем сначала величину максимального динамического перемещения. Согласно формуле (10.47), оно равно 20,25 миллиметра. Сравнивая эту величину с допускаемым перемещением, равным 3 миллиметра, делаем вывод, что условие жесткости не выполняется. В задаче требовалось лишь проверить выполнение этого условия, что мы и сделали. Если потребуется удовлетворить условие жесткости, необходимо будет пропорционально уменьшить массу падающего тела.

Задача решена полностью.