

# Билеты к ГКЭ по общей физике

Николай Чусовитин

2021-2022 учебный год

## Предисловие

Данный документ содержит в себе материалы для подготовки к ГКЭ по общей физике на основе экзаменационной программы 2021-2022 года. При составлении использовались в основном учебники Д.В. Сивухина и Н.А. Кириченко. Раздел, посвящённый квантовой физике, написан в основном с использованием лекционного курса В. Н. Глазкова.

Поскольку документ составлялся в течение длительного времени с большими перерывами, стиль и подробность повествования и оформления могут меняться от части к части. Тем не менее, он содержит теоретический минимум по каждому вопросу программы, а зачастую чуть больше, чем минимум.

For aerospace bot squadron with love.

# Содержание

I	Механика	5
1	Законы Ньютона. Движение тел в инерциальных и неинерциальных системах отсчета.	5
2	Принцип относительности Галилея и принцип относительности Эйнштейна. Преобразования Лоренца. Инвариантность интервала.	7
3	Законы сохранения энергии и импульса в классической механике. Упругие и неупругие столкновения.	9
4	Уравнение движения релятивистской частицы под действием внешней силы. Импульс и энергия релятивистской частицы.	11
5	Закон всемирного тяготения и законы Кеплера. Движение тел в поле тяготения.	12
6	Закон сохранения момента импульса. Уравнение моментов. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Гироскопы.	14
7	Течение идеальной жидкости. Уравнение непрерывности. Уравнение Бернулли.	16
8	Закон вязкого течения жидкости. Формула Пуазейля. Число Рейнольдса, его физический смысл.	17
9	Упругие деформации. Модуль Юнга и коэффициент Пуассона. Энергия упругой деформации.	19
II	Термодинамика и молекулярная физика	21
10	Уравнение состояния идеального газа, его объяснение на основе молекулярно-кинетической теории. Уравнение неидеального газа Ван-дер-Ваальса.	21
11	Квазистатические процессы. Первое начало термодинамики. Количество теплоты и работа. Внутренняя энергия. Энтальпия.	23
12	Второе начало термодинамики. Цикл Карно. Энтропия и закон ее возрастания. Энтропия идеального газа. Статистический смысл энтропии.	25
13	Термодинамические потенциалы. Условия равновесия термодинамических систем.	28
14	Распределения Максвелла и Больцмана.	30
15	Теплоемкость. Закон равномерного распределения энергии по степеням свободы. Зависимость теплоемкости газов от температуры.	31
16	Фазовые переходы. Уравнение Клапейрона-Клаузиуса. Диаграммы состояний.	33

17	Явления переноса: диффузия, теплопроводность, вязкость. Коэффициенты переноса в газах. Уравнение стационарной теплопроводности.	34
18	Поверхностное натяжение. Формула Лапласа. Свободная энергия и внутренняя энергия поверхности.	35
19	Флуктуации в термодинамических системах.	37
20	Броуновское движение, закон Эйнштейна-Смолуховского. Связь диффузии и подвижности (соотношение Эйнштейна).	38
<b>III Электричество и магнетизм</b>		<b>40</b>
21	Закон Кулона. Теорема Гаусса в дифференциальной и интегральной формах. Теорема о циркуляции для статического электрического поля. Потенциал. Уравнение Пуассона.	40
22	Электростатическое поле в веществе. Вектор поляризации, электрическая индукция. Граничные условия для векторов $E$ и $D$ .	43
23	Магнитное поле постоянных токов в вакууме. Основные уравнения магнито-статики в вакууме. Закон Био-Савара. Сила Ампера. Сила Лоренца.	45
24	Магнитное поле в веществе. Основные уравнения магнитостатики в веществе. Граничные условия для векторов $B$ и $H$ .	47
25	Закон Ома в цепи постоянного тока. Переходные процессы в электрических цепях.	49
26	Электромагнитная индукция в движущихся и неподвижных проводниках. ЭДС индукции. Само- и взаимоиנדукция. Теорема взаимности.	51
27	Система уравнений Максвелла в интегральной и дифференциальной формах. Ток смещения. Материальные уравнения.	53
28	Закон сохранения энергии для электромагнитного поля. Вектор Пойнтинга. Импульс электромагнитного поля.	55
29	Квазистационарные токи. Свободные и вынужденные колебания в электрических цепях. Явление резонанса. Добротность колебательного контура, ее энергетический смысл.	56
30	Спектральное разложение электрических сигналов. Спектры колебаний, модулированных по амплитуде и фазе.	59
31	Электрические флуктуации. Дробовой и тепловой шумы. Предел чувствительности электроизмерительных приборов.	60
32	Электромагнитные волны. Волновое уравнение. Уравнение Гельмгольца.	61
33	Электромагнитные волны в волноводах. Критическая частота. Объемные резонаторы.	62

34 Плазма. Плазменная частота. Диэлектрическая проницаемость плазмы. Дебаевский радиус.	64
<b>IV Оптика</b>	<b>66</b>
35 Интерференция волн. Временная и пространственная когерентность. Соотношение неопределенностей.	66
36 Принцип Гюйгенса-Френеля. Зоны Френеля. Дифракция Френеля и Фраунгофера. Границы применимости геометрической оптики.	69
37 Спектральные приборы (призма, дифракционная решетка, интерферометр Фабри-Перо) и их основные характеристики.	70
37.1 Призма . . . . .	70
37.2 Дифракционная решётка . . . . .	71
37.3 Интерферометр Фабри-Перо . . . . .	71
38 Дифракционный предел разрешения оптических и спектральных приборов. Критерий Рэлея.	72
39 Пространственное фурье-преобразование в оптике. Дифракция на синусоидальных решетках. Теория Аббе формирования изображения.	73
40 Принципы голографии. Голограмма Габора. Голограмма с наклонным опорным пучком. Объемные голограммы.	75

## Часть I

# Механика

## 1 Законы Ньютона. Движение тел в инерциальных и неинерциальных системах отсчета.

**Определение 1.1.** *Масса (количество материи) есть характеристика тела, являющаяся мерой инерции.*

**Определение 1.2.** *Импульс (количество движения) есть произведение массы тела на его скорость:  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ .*

**Определение 1.3.** *Взаимодействие сил определяется силой  $\mathbf{F}$ , которая необходима для изменения состояния покоя или равномерного движения тела.*

### Первый закон Ньютона

*Существуют системы отсчёта, называемые инерциальными, в которых тела (материальные точки), на которые внешние силы не действуют, или их действие скомпенсировано, покоятся или движутся равномерно прямолинейно.*

**Замечание.** *Инерциальные системы отсчёта движутся равномерно прямолинейно друг относительно друга.*

### Второй закон Ньютона

*В инерциальных системах отсчёта изменение импульса тела прямо пропорционально величине приложенной силы.*

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F} \quad (1.1)$$

Если же движение тела не является релятивистским, то (1.1) можно представить в виде:

$$m\mathbf{a} = m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} \quad (1.2)$$

### Третий закон Ньютона

*Силы взаимодействия двух материальных точек равны по величине, противоположно направлены и действуют вдоль прямой, соединяющей эти материальные точки.*

### Движение тел в инерциальных системах отсчёта

В инерциальных системах отсчёта движение тел (материальных точек) описывается законами Ньютона и получается при решении дифференциального уравнения (1.1).

## Движение тел в неинерциальных системах отсчёта

Как было указано ранее, инерциальные системы отсчёта движутся относительно друга равномерно прямолинейно. Пусть в некоторой ИСО ( $O_1$ ) уравнение движения тела имеет вид

$$m\mathbf{a}_{abc} = \mathbf{F} \quad (1.3)$$

Пусть  $\mathbf{R}$  – радиус-вектор точки  $M$  в ИСО  $O_1$ ,  $\mathbf{R}_0$  – вектор  $\mathbf{O}_1\mathbf{O}$ , описывающий положение НСО относительно ИСО, а  $\mathbf{r}$  – радиус вектор точки относительно НСО 1.1. В таком случае будут верны равенства

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{r} \quad (1.4)$$

$$\dot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{R}}_0 + \dot{\mathbf{r}} \quad (1.5)$$

$$\ddot{\mathbf{R}} = \ddot{\mathbf{R}}_0 + \ddot{\mathbf{r}} \quad (1.6)$$

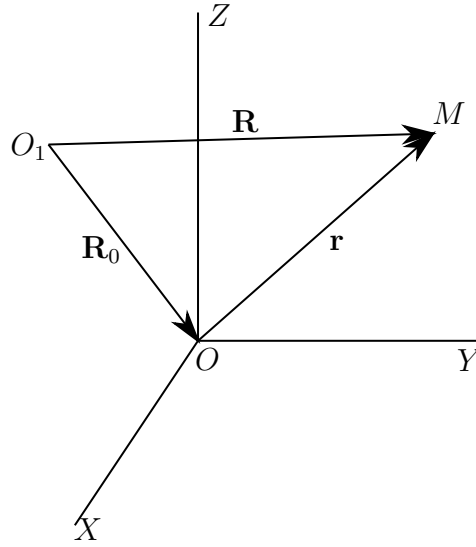


Рис. 1.1: Неинерциальная система отсчёта

Рассмотрим сначала поступательное движение НСО. Тогда имеем

$$\mathbf{v}_{abc} = \mathbf{v}_{отн} + \mathbf{v}_{пер} \quad (1.7)$$

$$\mathbf{a}_{abc} = \mathbf{a}_{отн} + \mathbf{a}_{пер} \quad (1.8)$$

Здесь относительная скорость и ускорение описывают движение точки в НСО, а переносные – движение НСО относительно ИСО. Подставляя результаты в (1.3), получим

$$m\mathbf{a}_{отн} = \mathbf{F} - m\mathbf{a}_{пер} \quad (1.9)$$

Слагаемое  $-m\mathbf{a}_{пер}$  называется (поступательной) силой инерции.

Если НСО вращается относительно ИСО со скоростью  $\boldsymbol{\omega}$ , то эти выражения усложняются:

$$\dot{\mathbf{r}} = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}] + \mathbf{v}_{отн} \quad (1.10)$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = [\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{r}] + [\boldsymbol{\omega}, [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}]] + 2[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}_{отн}] + \mathbf{a}_{отн} \quad (1.11)$$

Первые два слагаемых относятся к переносному ускорению, а третье называется Кориолисовым. Соответственно они объединяются в силу инерции и Кориолисову силу.

## 2 Принцип относительности Галилея и принцип относительности Эйнштейна. Преобразования Лоренца. Инвариантность интервала.

Рассмотрим задачу о равномерном движении ИСО  $S'$  относительно ИСО  $S$  (рис. 2.1).

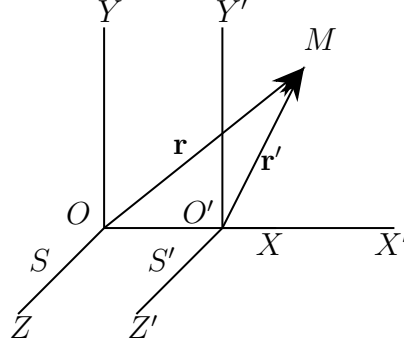


Рис. 2.1: Относительно движение ИСО

Пусть для простоты оси систем отсчёта  $X, Y, Z$ , и  $X', Y', Z'$  соответственно параллельны друг другу, а  $X$  и  $X'$  совпадают. Пусть также в начальный момент времени  $t = 0$  точки  $O$  и  $O'$  совпадают, а  $\mathbf{V}$  – относительная скорость движения  $S'$  направлена вдоль оси  $X$ . Переход к более общему случаю осуществляется с помощью переноса начала отсчёта и поворота координат.

Пусть некоторая точка в момент времени  $t$  находится в положении  $M$ . За это время точка  $O'$  сдвинется на  $\mathbf{V}t'$ . Для положения имеем

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{V}t', \quad t = t' \quad (2.1)$$

В проекции на оси это соотношение запишется следующим образом:

$$x = x' + Vt', \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t' \quad (2.2)$$

Формулы обратного преобразования имеют вид

$$x' = x - Vt', \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t \quad (2.3)$$

(2.2) и (2.3) представляют собой решение задачи о преобразовании координат при движении одной из систем отсчёта. Они называются преобразованиями Галилея.

**Замечание.** Расстояние  $l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$  является инвариантом преобразования Галилея.

Продифференцировав, получим

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}' + \mathbf{V} \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V} \quad (2.4)$$

Это соотношение представляет собой нерелятивистский закон сложения скоростей. При повторном дифференцировании получим

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' \quad (2.5)$$

Поскольку силы не зависят от системы отсчёта, то уравнения движения системы (второй закон Ньютона) инвариантны относительно преобразований Галилея. Это и есть принцип относительности: уравнения механики инвариантны относительно преобразований Галилея (отличие траекторий есть следствие отличия начальных условий в разных СО). Иначе его можно сформулировать следующим образом: *Законы природы, определяющие изменения состояния движения механических систем, не зависят от того, к какой из двух инерциальных систем отсчёта, движущихся одна относительно другой прямолинейно и равномерно, они относятся.*

Всё физические явления нельзя разделить на чисто механические и немеханические, поэтому имеет место принцип относительности Эйнштейна: *Законы природы, определяющие изменения состояний физических систем, не зависят от того, к какой из двух инерциальных систем отсчёта, движущихся одна относительно другой прямолинейно и равномерно, они относятся.*

Полученные результаты имеют место в предположении об абсолютности времени и расстояния в разных системах отсчёта, но при возрастании скоростей эти предположения нарушаются. Оказывается, например, что скорость света абсолютна и не зависит от системы отсчёта, что противоречит нерелятивистскому закону сложения скоростей. Вернёмся к рассмотрению задачи о двух ИСО (рис. 2.1). В релятивистском случае имеют место преобразования Лоренца:

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (2.6)$$

Обратное преобразование:

$$x' = \frac{x - Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - Vt', \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (2.7)$$

Дифференцируя (2.6), получим

$$dx = \frac{dx' + Vdt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad dy = dy', \quad dz = dz', \quad dt = \frac{dt' + \frac{V}{c^2}dx'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (2.8)$$

Отсюда, во-первых, можно получить формулу преобразования скорости

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}, \quad v_y = v'_y \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}, \quad v_z = v'_z \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}} \quad (2.9)$$

Во-вторых, из этих выражений следует инвариантность интервала – расстояния между точкам в 4-мерном пространстве Минковского  $(t, x, y, z)$ ,  $\Delta S^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$ . Рассмотрим приращение интервала между двумя малыми точками:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = [(2.9)] = ds'^2 \quad (2.10)$$

Таким образом, интервал инвариантен относительно преобразований Лоренца.



### 3 Законы сохранения энергии и импульса в классической механике. Упругие и неупругие столкновения.

Рассмотрим систему материальных точек. На  $j$ -ую точки системы действуют силы, которые можно разбить на внешние и внутренние:  $\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{F}_i^{(e)} + \mathbf{F}_i^{(i)}$ , где внутренние силы – силы взаимодействия с другими точками этой системы. В силу третьего закона Ньютона для силы взаимодействия между  $j$  и  $k$  точками  $\mathbf{F}_{kj} + \mathbf{F}_{jk} = \mathbf{0}$ . Таким образом  $\dot{\mathbf{P}} = \sum \dot{\mathbf{p}}_i = \sum \mathbf{F}_i^{(e)} = \mathbf{F}^{(e)}$ . Если сумма внешних сил равна нулю (в частности, если система замкнута), то имеет место закон сохранения импульса: *Если сумма сил, действующих на систему, равна нулю, то импульс системы сохраняется.*

Рассмотрим теперь понятия работы и энергии.

**Определение 3.1.** *Элементарной работой называется скалярное произведение силы  $\mathbf{F}$  на элементарном перемещении  $d\mathbf{s}$ :*

$$\delta A = (\mathbf{F}, d\mathbf{s}) \quad (3.1)$$

*Работа на пути – криволинейный интеграл второго рода*

$$A = \int_L (\mathbf{F}, d\mathbf{s}) \quad (3.2)$$

С учётом второго закона Ньютона, получим

$$\delta A = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \mathbf{v} dt = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{p} \quad (3.3)$$

Вспоминая определение импульса, имеем

$$\delta A = m(\mathbf{v}, d\mathbf{v}) = mv dv \Rightarrow A_{12} = m \int_{v_1}^{v_2} v dv = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} \quad (3.4)$$

**Определение 3.2.** *Величина  $K = \frac{mv^2}{2}$  называется кинетической энергией.*

Таким образом, работа равна изменению кинетической энергии. Этот факт обобщается на систему материальных точек с необходимостью учитывать работы всех сил, включая внутреннее.

**Определение 3.3.** *Сила называется консервативной, если её работа на замкнутой траектории равна нулю (если работа не зависит от траектории).*

**Определение 3.4.** *Сила называется гироскопической, если зависит от скорости точки и действует перпендикулярно ей.*

**Замечание.** *Гироскопические силы не совершают работу.*

Если на систему сил действуют только гироскопические и консервативные силы, то можно ввести понятие потенциальной энергии. Выберем «нулевое» положение системы, а работу, совершаемую консервативными силами при перемещении в это положение, назовём потенциальной энергией. Потенциальная энергия  $U$  является функцией только координат, а консервативные силы  $\mathbf{F} = -\nabla U$ . Работа этих сил при переходе из состояния 1 в состояние 2 равна  $A_{12} = U_1 - U_2 = -\Delta U$ .

Вспомним, что работа сил равна приращению кинетической энергии. Тогда в консервативной системе имеем

$$K_2 - K_1 = U_1 - U_2 \Rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2 = E = \text{const} \quad (3.5)$$

Величина  $E$  называется полной энергией системы. Таким образом, мы получаем закон сохранения энергии: *Полная энергия консервативной системы (с гироскопическими силами) сохраняется.*

Законы сохранения и импульса часто применяются для решения задач о соударениях частиц. Удар называется абсолютно неупругим, если после него два тела «слипаются» и продолжают движение вместе. В таком случае закон сохранения импульса даёт

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = (m_1 + m_2) \mathbf{u} \quad (3.6)$$

а полная механическая энергия системы уменьшается.

Удар называется абсолютно упругим, если механическая энергия системы сохраняется. Для решения задач об упругих ударах необходимо рассматривать системы из уравнений ЗСИ и ЗСЭ.

## 4 Уравнение движения релятивистской частицы под действием внешней силы. Импульс и энергия релятивистской частицы.

**Определение 4.1.** Импульс релятивистской частицы  $\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ .

При таком определении импульса уравнение движения принимает вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \mathbf{F} \quad (4.1)$$

С учётом обозначения Лоренц-фактора  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ , при дифференцировании получим

$$\mathbf{F} = \gamma m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + m\mathbf{v} \left[ \frac{1}{2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \right] \left( \frac{2\mathbf{v}}{c^2}, \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) = \gamma m \mathbf{a} + \gamma^3 \frac{m}{c^2} \mathbf{v} (\mathbf{v}, \mathbf{a}) \quad (4.2)$$

Таким образом, в общем случае ускорение не параллельно силе. Домножив обе части равенства (4.2) скалярно на  $\mathbf{v}$ , получим:

$$(\mathbf{v}, \mathbf{F}) = \gamma^3 m (\mathbf{v}, \mathbf{a})$$

Используя это соотношение приведём (4.2) к виду

$$\gamma m \mathbf{a} = \mathbf{F} - \frac{\mathbf{v}}{c^2} (\mathbf{v}, \mathbf{F}) \quad (4.3)$$

Получим выражение для кинетической энергии в случае действия силы вдоль скорости:

$$\delta A = dK = (\mathbf{F}, d\mathbf{s}) = (\mathbf{F}, \mathbf{v} dt) = \gamma^3 m v dv \quad (4.4)$$

$$K = \int_0^v \frac{m d(v^2)}{2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} = (\gamma - 1) mc^2 \quad (4.5)$$

Величина  $E = \gamma mc^2$  называется полной энергией тела,  $E_0 = mc^2$  – энергией покоя, а их разница – кинетической энергией. С учётом выражения импульса имеем

$$E^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2 \quad (4.6)$$

Поскольку энергия покоя инварианта относительно преобразований Лоренца, то величина  $E^2 - (pc)^2$  также является релятивистским инвариантом. Законы сохранения энергии и импульса остаются верны и в релятивистской механике.

## 5 Закон всемирного тяготения и законы Кеплера. Движение тел в поле тяготения.

Кеплер эмпирически установил три закона движения планет, основываясь на результатах многолетних астрономических наблюдений. Их формулировки выглядят следующим образом:

1. Каждая планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.
2. Радиус-вектор планеты за равные промежутки времени заметает равные площади.
3. Квадраты времён обращений планет относятся как кубы больших полуосей эллиптических орбит, которые они описывают вокруг солнца.

На основе этих законов Ньютон получил закон всемирного тяготения:

$$\mathbf{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r} \quad (5.1)$$

Покажем вывод второго и третьего законов Кеплера из закона всемирного тяготения. Поскольку сила притяжения центральна, то на тело не действует никаких моментов сил, а значит имеет место закон сохранения момента импульса:

$$\mathbf{L} = [\mathbf{r}, m\mathbf{v}] = \text{const}$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{rv_\varphi}{2} = \frac{|[\mathbf{r}, \mathbf{v}_\varphi]|}{2} = \text{const}$$

Введём потенциальную энергию  $U = -G \frac{Mm}{r}$ . Для движения в поле тяжести имеет место закон сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2} - G \frac{Mm}{r} = \varepsilon = \text{const}$$

Рассмотрим крайние точки эллипса. В них скорость имеет только поперечную составляющую. С учётом сохранения момента импульса имеем для них

$$\frac{L^2}{2mr^2} - G \frac{Mm}{r} = \varepsilon$$

Это квадратное уравнение и по теореме Виета сумма его корней равна

$$r_1 + r_2 = -G \frac{Mm}{\varepsilon} = 2a \Rightarrow \varepsilon = -G \frac{Mm}{2a}$$

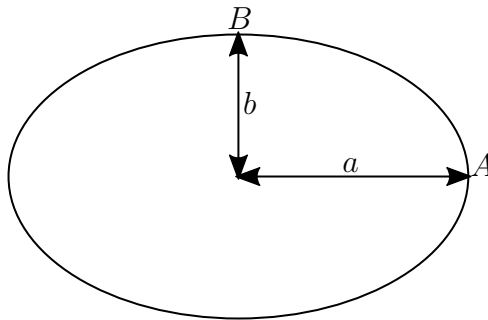


Рис. 5.1: Траектория движения тела в поле тяготения

Заметим теперь, что сумма расстояний от фокусов до точки на эллипсе постоянна. Таким образом двойное расстояние от фокуса  $2CB = 2a \Rightarrow CB = a$ . Отсюда получим скорость в точке  $B$  (рис. 5.1):

$$\frac{mv_B^2}{2} - G\frac{Mm}{a} = \varepsilon = -G\frac{Mm}{2a} \Rightarrow v_B = \sqrt{\frac{GM}{a}}$$

Наконец, рассчитаем период обращения:

$$S = \pi ab = \frac{L}{2m}T \Rightarrow T = \frac{2\pi abm}{L} = \frac{2\pi a}{v_B} \Rightarrow T^2 \propto a^3$$

Что и доказывает третий закон Кеплера.

## 6 Закон сохранения момента импульса. Уравнение моментов. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Гироскопы.

**Определение 6.1.** Моментом силы  $\mathbf{F}$  относительно точки (полюса)  $O$  называется векторное произведение  $\mathbf{M} = [\mathbf{r}, \mathbf{F}]$ , где  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор точки приложения силы.

**Определение 6.2.** Моментом импульса материальной точки с импульсом  $\mathbf{p}$  относительно точки (полюса)  $O$  называется векторное произведение  $\mathbf{L} = [\mathbf{r}, \mathbf{p}]$ .

Для производной момента импульса имеем:

$$\dot{\mathbf{L}} = [\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{p}] + [\mathbf{r}, \dot{\mathbf{p}}]$$

Поскольку при неподвижном начале координат скорость тела параллельна импульсу, то первое слагаемое обращается в ноль. С учётом второго закона Ньютона получаем уравнение моментов:

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M} \quad (6.1)$$

Для замкнутой механической системы по аналогии с законом сохранения импульса имеет место закон сохранения момента импульса, поскольку сумма моментов противоположных сил так же равна нулю.

Рассмотрим вращение вокруг неподвижной оси. Если материальная точка вращается вокруг оси  $O$  по окружности радиуса  $r$  со скоростью  $v$ , то её момент импульса равен  $L = mvr$ . Пусть  $\omega$  – угловая скорость точки. Тогда для момента импульса имеет место выражение  $L = mr^2\omega = I\omega$ , где величина  $I$  называется моментом инерции относительно оси  $O$ . В случае системы материальных точек (твёрдого тела) момент инерции вычисляется как сумма (интеграл) по всем точкам системы (по всему телу). Отсюда получим основное уравнение динамики вращательного движения относительно неподвижной оси:

$$\frac{d}{dt}(I\omega) = M \quad (6.2)$$

Более общим понятием, чем момент инерции, является тензор инерции, в вывод которого углубляться не будем. Заметим лишь, что это симметричный тензор второго ранга, который можно привести к диагональному виду в ОНБ из собственных векторов, причём для твёрдого тела верно

$$\mathbf{L} = \hat{I}\boldsymbol{\omega} \quad (6.3)$$

То есть во общем случае момент импульса не сонаправлен с угловой скоростью.

Рассмотрим динамически-симметричное тело: тело, у которого два главных момента инерции совпадают. В таком теле момент импульса можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{L} = I_{\parallel}\boldsymbol{\omega}_{\parallel} + I_{\perp}\boldsymbol{\omega}_{\perp} \quad (6.4)$$

Пусть составляющая угловой скорости вокруг оси симметрии намного больше, чем другая её составляющая. В таком случае при вычислении момента импульса можно пренебречь вторым слагаемым. Если приложить силу к оси гироскопа, то момент сил будет перпендикулярен моменту импульса, а значит может изменить лишь его направление, а не скорость. При постоянной силе это явление называется вынужденной регулярной прецессией гироскопа. Пусть  $\boldsymbol{\Omega}$  – скорость прецессии. Тогда имеем

$$\dot{\mathbf{L}} = [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{L}] = \mathbf{M} = [\mathbf{a}, \mathbf{F}] \quad (6.5)$$

Основная формула гироскопии:

$$\Omega = \frac{M}{L} \quad (6.6)$$

Если же ось гироскопа наклонена относительно оси прецессии, то формула примет вид

$$\mathbf{\Omega} = -\frac{a}{L}\mathbf{F} \quad (6.7)$$

## 7 Течение идеальной жидкости. Уравнение непрерывности. Уравнение Бернулли.

Движение жидкостей или газов можно рассматривать различными способами. Один из способов – описание движения каждой отдельно взятой частицы. Другой – описание параметров течения (скорость, плотность, температура) в каждой точке пространства. При таком подходе параметры жидкости являются функциями координат и времени.

**Определение 7.1.** Течение называется стационарным, если его параметры не меняются со временем.

**Определение 7.2.** Жидкость называется идеальной, если при её движении не учитывается трение о стенки и слои жидкости между собой.

Рассмотрим элемент объема жидкости, не перемещающийся в пространстве. Масса в нём может меняться только за счёт "утекания через стенки":

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = - \oint_{\partial V} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}$$

Пользуясь теоремой Гаусса-Остроградского для перехода от поверхностного интеграла к объёмному и равенства нулю этого интеграла по произвольному объёму получим уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla, \rho \mathbf{v}) = 0 \quad (7.1)$$

Аналогом закона Ньютона для идеальной жидкости является уравнение Эйлера. Сила, действующая на малый объём со стороны давления выражается следующим интегралом:

$$- \oint_{\partial V} p d\mathbf{A}$$

Или, переходя к объёмному интегралу:

$$- \int_V \nabla p dV$$

Таким образом для элемента объёма жидкости имеем:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p$$

Если так же учесть объёмные силы  $\mathbf{f}$  и раскрыть полную производную скорости, получим уравнение Эйлера:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \rho \mathbf{f} \quad (7.2)$$

Рассмотрим теперь стационарное течение идеальной жидкости в поле тяжести вдоль линии тока. Градиент в таком случае есть производная по направлению кривой  $\frac{\partial}{\partial l}$ , а сила тяжести потенциальна и равна градиенту потенциала соответственно. Тогда имеем

$$\rho \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial l} = -\frac{\partial p}{\partial l} - \frac{\partial (\rho gh)}{\partial l}$$

Проинтегрировав, получим уравнение Бернулли для идеальной жидкости:

$$\frac{\rho v^2}{2} + p + \rho gh = \text{const} \quad (7.3)$$



## 8 Закон вязкого течения жидкости. Формула Пуазейля. Число Рейнольдса, его физический смысл.

В реальных (неидеальных) жидкостях помимо сил давления действуют касательные силы вязкости. Для получения количественных законов вязкости рассмотрим следующий пример: пусть слой жидкости заключён между двумя бесконечно длинными параллельными пластинками. Нижняя пластинка пусть неподвижна, а верхняя движется относительно неё со скоростью  $\mathbf{v}_0$ . Оказывается, что для поддержания равномерного движения верхней пластинки к ней надо будет приложить силу  $\mathbf{F}$  направленную в сторону движения. Такая же сила, противоположная по направлению, должна быть приложена к нижней пластинке для сохранения неподвижности. Ньютоном было установлено, что эта сила пропорциональна площади пластинки  $S$ , скорости  $v_0$ , и обратно пропорциональна расстоянию между пластинками  $h$ :

$$F = \eta S \frac{v_0}{h} \quad (8.1)$$

Постоянная  $\eta$  называется вязкостью жидкости и зависит только от жидкости, но не от материала пластинок. Обобщение этой формулы можно получить, разбивая движущуюся жидкость на тонкие слои. Результатом будет формула для касательного напряжения:

$$\tau_{yx} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad (8.2)$$

Рассмотрим стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости по цилиндрической прямолинейной трубе радиуса  $R$ . Если выделить бесконечно маленькую трубку тока, то из несжимаемости жидкости будет следовать постоянство скорости на этой линии тока, так что скорость течения  $v$  является только функцией радиуса  $r$ . Рассмотрим теперь тонкий цилиндр жидкости толщины  $dx$  и радиуса  $r$ . На него действует касательная сила вязкости

$$2\pi r \eta \frac{dv}{dr} dx$$

Так же на него действует сила разности давлений

$$(P(x) - P(x + dx)) S = -\pi r^2 \frac{dP}{dx} dx$$

При стационарном течении скорость постоянна, а значит сумма этих сил должна быть равна нулю:

$$2\eta \frac{dv}{dr} = r \frac{dP}{dx}$$

Скорость  $v(r)$ , а значит и её производная не зависят от  $x$ , а значит производная  $\frac{dP}{dx}$  является постоянной и будет равна

$$\frac{dP}{dx} = \frac{P_2 - P_1}{l}$$

Где  $l$  – длина трубы, а  $P_1$  и  $P_2$  – давления на входе и выходе соответственно. Таким образом получаем формулу

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{P_1 - P_2}{2\eta l} r \quad (8.3)$$

При интегрировании получим

$$v = C - \frac{P_1 - P_2}{4\eta l} r^2$$

Постоянная интегрирования определяется из условия равенства нулю скорости на стенках трубы. Таким образом, скорость вязкой жидкости при удалении от оси меняется по параболическому закону:

$$v = \frac{P_1 - P_2}{4\eta l} (R^2 - r^2) \quad (8.4)$$

Рассчитаем теперь расход жидкости при таком течении. Масса жидкости, протекающая через кольцо с внутренним радиусом  $r$  и внешним  $r + dr$  равна  $dQ = 2\pi r dr \cdot \rho v$ . Тогда

$$\begin{aligned} Q &= \pi \rho \frac{P_1 - P_2}{2\eta l} \int_0^R (R^2 - r^2) r dr \\ Q &= \pi \rho \frac{P_1 - P_2}{8\eta l} R^4 \end{aligned} \quad (8.5)$$

Последняя формула и называется формулой Пуазейля. Заметим, что она верна только для *ламинарных* течений, то есть тех, в которых слои жидкости не перемешиваются между собой и трубки тока параллельны трубе. При больших скоростях ламинарное течение становится турбулентным и формула (8.5) перестаёт быть верной. Тип течения характеризуется числом Рейнольдса

$$Re = \frac{\rho l v_0}{\eta} \quad (8.6)$$

Число Рейнольдса пропорционально отношению кинетической энергии жидкости к энергии, теряемой из-за вязкости на характерной длине. Оно определяет относительную роль инерции и вязкости жидкости. При больших числах преимущественна инерция, при малых – вязкость. При больших числах Рейнольдса течение обычно турбулентное, при малых – ламинарное, однако возможны исключения.

## 9 Упругие деформации. Модуль Юнга и коэффициент Пуассона. Энергия упругой деформации.

Все тела деформируемы, то есть меняют форму и объём при приложении внешних сил. Если при прекращении действия приложенных сил деформации исчезают, они называются *упругими*. Иначе – *пластическими*. Тип деформации зависит не только от материала, но и от прикладываемой силы. Если напряжение (сила на единицу площади) превзойдёт предел упругости, то деформация будет пластичной.

Для определения понятия напряжения рассмотрим деформированное тело или среду. Мысленно разделим его на два и посмотрим на границу раздела. Полученные тела будут взаимодействовать с некоторой силой. Пусть на элемент поверхности одного из них  $dS$  действует сила  $d\mathbf{F}$ . Тогда напряжением назовём отношение силы к площади:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{d\mathbf{F}}{dS} \quad (9.1)$$

В общем случае напряжённое состояние характеризуется *тензором напряжений*.

Рассмотрим наиболее простой случай: одномерное растяжение/сжатие стержня. Если он растягивается под действием силы  $F$ , то напряжение будет равно

$$\sigma = \frac{F}{S}$$

где  $S$  – площадь поперечного сечения стержня. Пусть  $l_0$  – длина недеформированного стержня, а  $\Delta l$  – приращение длины. Тогда вводится понятия относительного удлинения/сжатия (*относительная деформация*):

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \quad (9.2)$$

Опыт показывает, что при малых деформациях относительная деформация пропорциональна напряжению

$$\sigma = E\varepsilon \quad (9.3)$$

Коэффициент пропорциональности  $E$  зависит от вещества и называется *модулем Юнга*.

Закон Гука также представим в виде  $F = k\Delta x$ , где  $k = E\frac{S}{l}$ . Тогда работа, совершаемая при деформации, равна

$$U = \int_0^{\Delta l} kx dx = \frac{k\Delta l^2}{2} \quad (9.4)$$

В терминах напряжений и относительных деформаций имеем

$$U = \frac{ESl^2\varepsilon^2}{2l} = \frac{E\varepsilon^2}{2}V \quad (9.5)$$

Таким образом, упругая энергия единицы объёма

$$u = \frac{E\varepsilon^2}{2} \quad (9.6)$$

Опыт показывает, что под действием растягивающей или сжимающей силы изменяются не только продольные, но и поперечные размеры. Если сила растягивающая, то поперечные размеры уменьшаются, если сжимающая – увеличиваются. Коэффициент пропорциональности между поперечной и продольной деформацией называют *коэффициентом Пуассона*:

$$\mu = -\frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel}} = -\frac{\Delta d/d_0}{\Delta l/l_0} \quad (9.7)$$

С учётом поперечных деформаций и закона Гука можно получить следующую формулу:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \mu \frac{\sigma_y + \sigma_z}{E} \quad (9.8)$$

Модуль Юнга и коэффициент Пуассона полностью характеризуют упругие свойства изотропного материала.

## Часть II

# Термодинамика и молекулярная физика

## 10 Уравнение состояния идеального газа, его объяснение на основе молекулярно-кинетической теории. Уравнение неидеального газа Ван-дер-Ваальса.

Системы, рассматриваемые в термодинамике, как например газы, содержат в себе очень большое число частиц, поэтому их описание путем описания, например, траекторий и скоростей всех частиц не представляется возможным. Для описания состояния таких систем используются макроскопические параметры: давление, объём, температура и т.д. Оказывается, что если две макроскопические величины заданы, то они однозначно определяют третью и для таким систем можно записать *уравнение состояния*:

$$f(P, V, T) = 0$$

**Определение 10.1.** Газ, подчиняющийся законам Бойля-Мариотта ( $PV = f(T)$ ) и Гей-Люссака ( $P/T = g(P)$ ) будем называть идеальным. Эквивалентное определение идеального газа – газ, в котором не учитывается взаимодействие молекул за исключением соударения.

Следствием этих экспериментальных законов является уравнение состояния идеального газа, называемое уравнением Менделеева-Клапейрона:

$$PV = \nu RT \quad (10.1)$$

Получим формулу для давления идеального газа с точки зрения молекулярно-кинетической теории. Разделим молекулы на группы так, что в одной и той же группы молекулы имеют примерно одинаковую по величине и направлению скорость. Скорость молекул этой группы –  $v_i$ , а концентрация –  $n_i$ . Рассмотрим площадку  $\sigma$  на стенке сосуда. Пусть  $i$ -ые молекулы движутся к ней. За время  $dt$  с ней столкнётся  $n_i v_{in} \sigma dt$  молекул, где  $v_{in}$  – нормальная составляющая скорости к площадке.

Рассчитаем силу, с которой эти молекулы давят на площадку. Предположим, что удары абсолютно упругие. Тогда для одной молекулы  $dF_i = dp/dt = 2mv_{in}/dt$ , а для всех попадающих на стенку за время  $dt$   $F_i = 2mn_i v_{in}^2 \sigma$ , или  $P_i = 2mn_i v_{in}^2$ . С учётом равномерного распределения на стенку давит примерно 1/6 всех молекул, таким образом

$$P = \frac{1}{3} m n \overline{v^2}$$

или

$$PV = Nm \overline{v^2} = \frac{2}{3} N \overline{E_{\text{пост}}} = \nu RT \quad (10.2)$$

Однако, модель идеального газа не всегда даёт верные результаты. Из-за взаимодействия между частицами поведение реального газа может значительно отличаться. Одним из уравнений, учитывающих это взаимодействие, является уравнение Ван-дер-Ваальса. Учтём влияние молекулярных сил в уравнении Менделеева-Клапейрона. Во-первых на малых расстояниях молекулы отталкиваются друг от друга, уменьшая доступный объём:

$$V \rightarrow V - b$$

Во-вторых, на больших расстояниях они притягиваются, уменьшая давление:

$$P \rightarrow P + \frac{a}{V^2}$$

Результатом этих предположений является уравнение Ван-дер-Ваальса для одного моля:

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT \quad (10.3)$$

Или для, нескольких молей:

$$\left(P + \frac{a\nu^2}{V^2}\right)(V - b\nu) = \nu RT \quad (10.4)$$

## 11 Квазистатические процессы. Первое начало термодинамики. Количество теплоты и работа. Внутренняя энергия. Энтальпия.

**Определение 11.1.** Термодинамическое равновесие – состояние, в которое изолированная система приходит с течением времени и не выходит из него.

**Определение 11.2.** Квазистатический процесс – процесс, который состоит из непрерывно следующих друг за другом равновесных состояний.

При расширении или сжатии газ способен совершать работу. Рассмотрим, например, газ под поршнем. Пусть поршень сместился на малое расстояние  $dx$ , так что давление газа практически не изменилось. Тогда работа, совершённая газом, будет равна  $\delta A = Fdx = PSdx = PdV$ , где  $S$  – площадь поршня. При квазистатических процессах каждое состояние является равновесным, а значит работа внешних сил равна работе газа, взятой со знаком «-» :  $A_{\text{внеш}} = -A$ .

Введём понятие адиабатической оболочки:

**Определение 11.3.** Оболочка называется адиабатической, если состояние системы внутри неё остаётся неизменным при любых изменениях температуры тел вне оболочки.

Сформулируем первое начало термодинамики для систем в адиабатических оболочках: Если система тел адиабатически изолирована, то работа внешних сил над этой системой зависит только от конечного и начального состояний этой системы, но не от пути, по которому осуществляется переход. В рамках этого утверждения можно определить понятие внутренней энергии системы:

**Определение 11.4.** Внутренней энергией системы  $U$  называется функция состояния, приращение которой равно работе внешних сил, совершаемых над системой в адиабатической оболочке при переходе от одного равновесного состояния к другому.

**Замечание.** Внутренняя энергия определена с точностью до аддитивной постоянной.

Если система помещена в адиабатическую оболочку, то единственным способом изменения её внутренней энергии является совершение работы (путём изменения внешних параметров). Однако если адиабатической изоляции нет, то изменение внутренней энергии возможно, например, с помощью теплообмена.

**Определение 11.5.** Энергия, полученная телом в результате теплообмена с окружающей средой, называется количеством теплоты или теплотой.

Теперь можно дать математическую формулировку первого начала термодинамики: Теплота, полученная системой, идёт на приращение её внутренней энергии и совершение работы.

$$Q = \Delta U + A \quad (11.1)$$

Для квазистатических процессов

$$\delta Q = dU + \delta A = dU + PdV \quad (11.2)$$

Далее будет введено понятие энтропии  $dS = \delta Q/T$ , причём для квазистатических процессов имеет место равенство  $dU = TdS - PdV$ .

Помимо давления, объёма, температуры, внутренней энергии и т.п. есть ещё множество функций, которые можно использовать для описания термодинамической системы. Введём понятие *энтальпии*  $H$  (или  $I$ ):

$$H = U + PV \quad (11.3)$$

Для дифференциала энтальпии имеем:

$$dH = TdS + VdP \quad (11.4)$$

*Энтальпия есть такая функция состояния, приращение которой в процессе при постоянном давлении равно количеству теплоты, полученному системой.*



## 12 Второе начало термодинамики. Цикл Карно. Энтропия и закон ее возрастания. Энтропия идеального газа. Статистический смысл энтропии.

Существует множество различных формулировок второго начала термодинамики. Рассмотрим две классических.

- Томсон: *Невозможен круговой процесс, единственным результатом которого является совершение работ за счёт охлаждения теплового резервуара (получения тепла).*
- Клаузиус: *Теплота не может самопроизвольно переходить от менее нагретого тела к более нагретому (нельзя передать теплоту так, чтобы в природе не произошло больше никаких изменений).*

Покажем эквивалентность этих определений. Пусть процесс Клаузиуса возможен. Тогда возьмём тепловую машину, которая отнимет у нагревателя теплоту  $Q_1$  и отдаст холодильнику теплоту  $Q_2$ , совершив при этом работу  $A = Q_1 - Q_2$ . С помощью процесса Клаузиуса затем вернём нагревателю теплоту  $Q_2$ . Тогда мы получили процесс, единственным результатом которого является совершение работы за счёт охлаждения нагревателя, что противоречит невозможности процесса Томсона.

Предположим теперь, что возможен процесс Томсона. Тогда отнимем теплоту  $Q$  у менее нагретого тела и с помощью работы в процессе Томсона (например, за счёт трения) передадим её более горячему. Мы получили процесс Клаузиуса. Эквивалентность формулировок доказана.

Рассмотрим процесс Карно, в котором система приводится в тепловой контакт с тепловыми резервуарами, температуры которых равны  $T_1$  и  $T_2$ ,  $T_1 > T_2$ . Более горячий резервуар – нагреватель, более холодный – холодильник (охладитель). Цикл Карно состоит в следующем:

1. Система, имея температуру  $T_1$  приводится в тепловой контакт с нагревателем. При квазистатическом уменьшении давления система изотермически расширяется, забирая теплоту у нагревателя и совершая работу против внешнего давления.
2. После система адиабатически изолируется и расширяется по адиабате, пока не достигнет температуры  $T_2$ , также совершая работу.
3. Система приводится в тепловой контакт с холодильником и изотермически сжимается, отдавая теплоту холодильнику, при этом система совершает отрицательную работу.
4. Система адиабатически сжимается до температуры  $T_1$ .

В результате цикла внутренняя энергия системы не меняется, работа есть  $A = Q_1 - Q_2$ , а КПД соответственно

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \quad (12.1)$$

**Теорема 12.1** (Первая теорема Карно). *КПД тепловой машины, работающей по циклу Карно, зависит только от температур нагревателя и холодильника и не зависит от устройства машины или вида рабочего вещества.*

*Доказательство.* Рассмотрим две машины Карно, имеющие общие нагреватель и холодильник. Пусть КПД первой –  $\eta$ , а второй –  $\eta'$ . Предположим, что  $\eta > \eta'$ .

Цикл Карно – квазистатический, а значит его возможно проводить в обратном направлении. Пусть в результате  $m$  циклов первая машина Карно совершит работу  $A = Q_1 - Q_2$ , равную разности теплоты, отнятой у нагревателя и отданной холодильнику. Будем использовать вторую

машину для передачи теплоты от холодильника к нагревателю с помощью обратного цикла, совершая над ней работу за счёт первой машины. В результате  $m'$  циклов она отберёт у холодильника теплоту  $Q'_2$  и передаст нагревателю  $Q'_1$ , над ней будет совершена работа  $A' = Q'_1 - Q'_2$ .

В результате нагреватель отдал теплоту  $Q_1 - Q'_1$ , а холодильник получил теплоту  $Q_2 - Q'_2$ . Таким образом машина совершила работу

$$A - A' = (Q_1 - Q_2) - (Q'_1 - Q'_2) = \eta Q_1 - \eta' Q'_1$$

Будем использовать формулировку Томсона для доказательства. Подберём целые числа  $m$  и  $m'$  так, чтобы  $Q_1 - Q'_1 = 0$ . Тогда результат процесса будет следующим: состояние нагревателя не изменилось, холодильник отдал теплоту  $Q'_2 - Q_2 = (\eta - \eta')Q_1 > 0$ , а машина совершила работу  $A - A' = (\eta - \eta')Q_1 > 0$ . Таким образом мы получили процесс, единственным результатом которого является совершение работы за счёт теплоты, полученной от холодильника, что противоречит второму началу термодинамики. Аналогично доказывается невозможность случая  $\eta < \eta'$ , и равенство КПД.  $\square$

**Теорема 12.2** (Вторая теорема Карно). *КПД любой тепловой машины, работающей между двумя резервуарами не превышает КПД машины Карно для резервуаров с такими же температурами.*

При этом КПД машины Карно  $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$ . В силу второй теоремы Карно

$$1 - \frac{Q_2}{Q_1} \leq 1 - \frac{T_2}{T_1} \Rightarrow \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0 \quad (12.2)$$

Полученное неравенство называется *неравенством Клаузиуса*. Оно обращается в равенство при использовании цикла Карно. При обобщении можно получить неравенство Клаузиуса в интегральной форме

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0 \quad (12.3)$$

В общем случае в (12.3) подразумевается температура окружающей среды, с которой система обменивается теплотой. В квазистатическом процессе эти температуры равны. Поскольку квазистатический процесс обратим, то для обратного процесса (12.3) тоже должно быть верно. Это возможно, только если оно обращается в равенство. Таким образом для квазистатических процессов верно равенство Клаузиуса

$$\oint_{\text{квст}} \frac{\delta Q}{T} = 0 \quad (12.4)$$

В силу (12.4) можно ввести новую функцию состояния *энтропию*  $S$ :

$$dS = \left( \frac{\delta Q}{T} \right)_{\text{квст}} \quad (12.5)$$

Получим выражение для энтропии идеального газа из первого начала термодинамики:

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = \frac{\nu C_V dT}{T} + \frac{PdV}{T} = \frac{\nu C_V dT}{T} + \frac{\nu R dV}{V}$$

Если  $C_V$  не зависит от температуры, то получим

$$S = \nu C_V \ln T + \nu R \ln V + \text{const} \quad (12.6)$$

Рассмотрим переход системы из состояния 1 в состояние 2 в неравновесном процессе  $I$ , а затем её возвращение в исходной состоянии в равновесном  $II$ . Тогда согласно неравенству Клаузиуса

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = \int_I \frac{\delta Q}{T} + \int_{II} \frac{\delta Q}{T} \leq 0$$

Поскольку процесс  $II$  – равновесный, то  $\int_{II} \frac{\delta Q}{T} = S_1 - S_2$ . Тогда имеем

$$S_2 - S_1 \geq \int_I \frac{\delta Q}{T}$$

В адиабатически изолированной системе этот интеграл равен нулю, а значит

$$S_2 \geq S_1 \tag{12.7}$$

Таким образом *энтропия адиабатически изолированной системы не может убывать*. Это утверждение есть закон возрастания энтропии.

В статистической физике энтропия определяется формулой Больцмана:

$$S = k \ln G \tag{12.8}$$

где  $k$  – постоянная Больцмана, а  $G$  – статистический вес данного макросостояния (число реализующих его микросостояний).

## 13 Термодинамические потенциалы. Условия равновесия термодинамических систем.

Ранее уже были введены понятия таких функций состояния как внутренняя энергия  $U$ , энтропия  $S$  и энтальпия  $H = U + PV$ .

$$dU = TdS - PdV \quad (13.1)$$

$$dH = TdS + VdP \quad (13.2)$$

Рассмотрим ещё несколько функций состояния:

- Свободная энергия Гельмгольца  $\Psi$  ( $F$ )

$$\Psi = U - TS \quad (13.3)$$

$$d\Psi = -SdT - PdV \quad (13.4)$$

- Термодинамический потенциал (Гиббса)  $\Phi$  ( $G$ )

$$\Phi = \Psi + PV = U - TS + PV \quad (13.5)$$

$$d\Phi = -SdT + VdP \quad (13.6)$$

Эти выражения вместе с выражениями дифференциалов внутренней энергии и энтальпии позволяют рассматривать все термодинамические потенциалы как функции двух переменных. Для получения различных термодинамических соотношений часто используется равенство смешанных производных. Полученные таким образом выражения называются соотношениями Максвелла.

Введём понятие *химического потенциала*  $\varphi$  ( $\mu$ ,  $g$ ). Он характеризует изменение энергии при изменении числа частиц

$$dU = TdS - PdV + \varphi dN \quad (13.7)$$

Этот член необходимо, соответственно, добавить ко всем остальным потенциалам. Так как термодинамический потенциал является функцией только интенсивных величин (не зависящих от массы системы), то

$$\varphi = \frac{\Phi}{N} \quad (13.8)$$

то есть химический потенциал является удельным термодинамическим потенциалом. Соответственно

$$d\varphi = -sdT + vdP \quad (13.9)$$

Равновесие термодинамических систем (фазовое равновесие) требует, во-первых, теплового равновесия, то есть  $T_1 = T_2 = T$ , во-вторых, механического равновесия  $P_1 = P_2 = P$ . Покажем, что также требуется равенство химических потенциалов. Произведём некоторый процесс, тогда внутренние энергии фаз изменятся:

$$dU_1 = TdS_1 - PdV_1 + \varphi_1 dN_1$$

$$dU_2 = TdS_2 - PdV_2 + \varphi_2 dN_2$$

Пусть  $S = S_1 + S_2$  – полная энтропия системы. Ввиду изолированности энергия не будет меняться  $dU_1 + dU_2 = 0$ , как и объём  $dV_1 + dV_2 = 0$ . Таким образом

$$TdS + \varphi_1 dN_1 + \varphi_2 dN_2 = 0$$

Так как число частиц не меняется, то  $dN_1 = -dN_2$ . Получим

$$TdS = (\varphi_1 - \varphi_2) dN_2$$

В равновесии энтропия максимальна а значит  $dS = 0$ , что и доказывает равенство химических потенциалов.

## 14 Распределения Максвелла и Больцмана.

Поставим задачу о распределении частиц газа по скоростям. Будем рассматривать пространство скоростей. Пусть  $d\omega$  – вероятность вектора скорости в этом пространстве попасть в параллелепипед  $dv_x dv_y dv_z$ . Вероятность должна быть пропорциональна объёму, то есть

$$d\omega = f(v)dv_x dv_y dv_z = \varphi(v_x)\varphi(v_y)\varphi(v_z)dv_x dv_y dv_z$$

Где мы считаем независимыми друг от друга события, выражающие попадания в соответствующие интервалы по разным осям. Пользуясь этим предположением и изотропностью пространства, можно получить *распределение Максвелла*:

1. Одномерный случай:

$$f_1(v) = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \quad (14.1)$$

2. Двумерный случай:

$$f_2(v) = \frac{m}{2\pi kT} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \quad (14.2)$$

3. Трёхмерный случай:

$$f_3(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \quad (14.3)$$

Рассмотрим теперь распределение не по направлениям, а по величине скорости  $F(v)$ . С учётом полученных ранее результатов,

$$F(v)dv = f_3(v) \cdot 4\pi v^2 dv = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \quad (14.4)$$

Поставим теперь вопрос распределения частиц в пространстве. В отсутствие внешних сил в равновесии концентрация молекул газа будет всюду одинакова, однако ситуация изменится при добавлении внешних полей. Рассмотрим идеальный газ в поле тяжести. Выделим столб газа толщины  $dz$  с основанием площадью  $S$ . Сила тяжести этого столба должна уравниваться разностью давлений:

$$(P_1 - P_2)S = -\frac{dP}{dz}Sdz = nmgsdz$$

Отсюда

$$\frac{dP}{dz} = -nmg \quad (14.5)$$

В идеальном газе  $P = nkT$ . В предположении, что температура газа всюду одинакова, получим

$$kT \frac{dn}{dz} = -nmg \Rightarrow kT d \ln n = -mg dz$$

Таким образом, получаем *барометрическую формулу*

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right) \quad (14.6)$$

(14.6) обобщается на общий случай потенциальных сил. Результатом является *распределение Больцмана*:

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{\varepsilon_p}{kT}\right) \quad (14.7)$$

## 15 Теплоемкость. Закон равномерного распределения энергии по степеням свободы. Зависимость теплоемкости газов от температуры.

**Определение 15.1.** *Теплоёмкостью  $C$  называется величина*

$$C = \frac{\delta Q}{dT}$$

*Теплоёмкость на единицу массы называется удельной, на один моль – молярной. В термодинамике наиболее часто используется именно последняя.*

В частности, из первого начала термодинамики следуют выражения для теплоёмкостей при постоянном объёме и давлении:

$$C_V = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V \quad (15.1)$$

$$C_P = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V + \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + P \right] \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \quad (15.2)$$

Из определения энтальпии для теплоёмкости при постоянном давлении так же имеет место выражение

$$C_P = \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_P \quad (15.3)$$

В состоянии теплового равновесия, например, газа и поршня, оказывается, что средняя кинетическая энергия молекул газа должна быть равна средней кинетической энергии поршня, откуда следует связь температуры с кинетической энергией. В зависимости от строения молекул эта кинетическая энергия может иметь различную структуру: только поступательные степени свободы, вращательные степени свободы и наконец даже колебательные степени свободы.

Ввиду хаотичности теплового движения все направления скорости молекулы равновероятны, а значит одинакова и средняя энергия, приходящаяся на каждое направление (кинетическая энергия движения вдоль осей  $X, Y, Z$ ). Учитывая, что всего на поступательные степени свободы приходится  $\frac{3}{2}kT$ , то на каждую степень свободы приходится  $kT/2$  энергии. При наличии вращательных степеней свободы и колебательных степеней свободы имеет место *теорема о равномерном распределении кинетической энергии по степеням свободы*. Её формулировка состоит в следующем:

*В состоянии теплового равновесия средняя кинетическая энергия, приходящаяся на каждую степень свободы, одинакова.* В случае газа эта энергия равна  $kT/2$ .

Классическая теория теплоёмкости идеальных газов основана на этой теореме. Для идеальных газов имеем:

$$C_V = \frac{R}{\gamma - 1}, \quad C_P = \gamma \frac{R}{\gamma - 1} \quad (15.4)$$

Внутренняя энергия состоит из кинетической энергии поступательного, вращательного и колебательного движения молекул. Потенциальная энергия взаимодействия в идеальном газе не учитывается.

Молекулы одноатомного газа будем рассматривать как материальные точки. Они имеют только поступательные степени свободы, таким образом молярные теплоёмкости одноатомного газа:

$$C_V = \frac{3}{2}R, \quad C_P = \frac{5}{2}R \quad (15.5)$$

Двухатомные газы имеют уже 5 степеней свободы: 3 поступательных и 2 вращательных. Таким образом

$$C_V = \frac{5}{2}R, \quad C_P = \frac{7}{2}R \quad (15.6)$$

Молекулу многоатомного газа можно рассматривать как твёрдое тело, имеющее 6 степеней свободы. Таким образом его теплоёмкость

$$C_V = 3R, \quad C_P = 4R \quad (15.7)$$

Теплоёмкость, однако, не является постоянной величиной и может меняться с изменением температуры. Это связано с тем, что некоторые степени свободы не всегда возбуждены. Например, колебательные степени свободы начинают оказывать влияние на теплоёмкость только при высоких температурах. Объяснение зависимости теплоёмкости от температуры формируется на основе квантовой физики. При достаточной температуре «возбуждаются» вращательные и колебательные степени свободы у большого числа молекул, что и оказывает влияние на теплоёмкость газа.



## 16 Фазовые переходы. Уравнение Клапейрона-Клаузиуса. Диаграммы состояний.

Ранее было получено условие равновесия двух фаз вещества – равенство химических потенциалов

$$\varphi_1 = \varphi_2 \quad (16.1)$$

Будем рассматривать процессы испарения и конденсации (переход между жидкой и газообразной фазами). Каждое состояние вещества можно изобразить точкой на плоскости  $T, P$ . Условие равенства химических потенциалов будет определять некоторую кривую на этой плоскости – *кривую равновесия фаз*. Можно изобразить этот график для трёх фаз: жидкой, твёрдой и газообразной. Этот график называется диаграммой состояний. Точка пересечения кривых равновесия называется *тройной точкой*: в ней все три фазы могут существовать одновременно. Области, на которые кривые делят плоскость, соответствуют различным фазам.

Найдём наклон кривой равновесия. Имеем  $d\varphi_1 = d\varphi_2$ , или, если расписать дифференциал

$$v_1 dP - s_1 dT = v_2 dP - s_2 dT$$

или

$$\frac{dP}{dT} = \frac{s_1 - s_2}{v_1 - v_2} \quad (16.2)$$

Если считать процесс квазистатическим, то имеет место выражение  $q = Tds$ , где  $q$  – удельная теплота испарения, которая поглощается или выделяется системой при фазовом переходе. С учётом этого выражения имеем

$$\frac{dP}{dT} = \frac{q}{T(v_1 - v_2)} \quad (16.3)$$

Уравнение (16.3) называется уравнением Клапейрона-Клаузиуса.

## 17 Явления переноса: диффузия, теплопроводность, вязкость. Коэффициенты переноса в газах. Уравнение стационарной теплопроводности.

С тепловым движением газа связаны различные явления переноса, такие как *диффузия*, *вязкость* и *теплопроводность*. Их особенность состоит в медленной скорости протекания, поскольку несмотря на высокую скорость движения молекул они довольно часто сталкиваются. Частоту столкновений характеризует характерная длина  $\lambda$ , называемая *длиной свободного пробега* – среднее расстояние, которое частицы проходят без столкновения.

Начнём рассмотрение этих процессов с диффузии лёгкой примеси. Пусть её концентрация меняется с изменением координаты  $n = n(x)$ ,  $\lambda$  – длина свободного пробега а  $v$  – средняя скорость молекул. В единицу времени на площадку  $dS$  между слоями газа попадает  $\frac{1}{6}n(x - \lambda)v$  молекул с одной стороны и  $\frac{1}{6}n(x + \lambda)v$  с другой. Таким образом поток частиц

$$j = \frac{1}{6}v(n(x - \lambda) - n(x + \lambda)) \approx -\frac{1}{3}\lambda v \frac{\partial n}{\partial x}$$

Или в общем случае

$$j = -D \nabla n \quad (17.1)$$

Где  $D = \frac{1}{3}\lambda v$  – коэффициент диффузии. Полученное выражение называется законом Фика.

Аналогично рассматриваются явления теплопроводности, как переноса энергии, и вязкости, как переноса импульса. Для теплопроводности имеем

$$q \approx -\frac{1}{3}\lambda v n \cdot c_V k \frac{\partial T}{\partial x} \quad (17.2)$$

Здесь  $c_V$  – теплоёмкость одной молекулы. Соответственно коэффициент теплопроводности

$$\kappa = \frac{1}{3}n\lambda v c_V \quad (17.3)$$

Вязкость имеет место, если при направленном движении газа скорость  $u$  является функцией координаты  $u(x)$ . Тогда при смещении слоёв переносится импульс и его поток равен

$$j_p \approx -\frac{1}{3}\lambda v n m \frac{\partial u}{\partial x} \quad (17.4)$$

Отсюда можно получить приближённое выражение для вязкости:

$$\eta = \frac{1}{3}n m \lambda v \quad (17.5)$$

Рассмотрим перенос тепловой энергии вдоль оси  $x$ . В объёме  $dV = dS dx$  содержится  $dU = u dV$  энергии ( $u$  – объёмная плотность энергии). Пусть  $q$  – поток тепла. Тогда количество энергии, поступившей в единицу времени, равно

$$q(x, t) - q(x + dx, t) dS \approx -\frac{\partial q}{\partial x} dV$$

Это выражение для изменения энергии в выделенном объёме. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x}$$

В случае идеального газа  $u = n c_V T$ . С учётом выражения для потока тепла получим уравнение теплопроводности:

$$n c_V \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (17.6)$$

## 18 Поверхностное натяжение. Формула Лапласа. Свободная энергия и внутренняя энергия поверхности.

Известно, что на молекулу жидкости действуют силы притяжения со стороны окружающих её молекул. Если она удалена от поверхности и находится внутри жидкости, то эти силы в среднем уравниваются. Однако если молекула близка к поверхности, то на неё действует сила, направленная внутрь. С этим связано явление поверхностного натяжения: чтобы извлечь молекулу на поверхность, необходимо совершить работу.

**Определение 18.1.** Работа, необходимая для увеличения поверхности жидкости на единицу площади в изотермическом квазистатическом процессе при сохранении объёма, называется поверхностным натяжением.

Изотермическая работа равна убыли свободной энергии. Свободную энергию жидкости можно представить в виде

$$\Psi = \Psi_{об} + \Psi_{пов} \quad (18.1)$$

Здесь  $\Psi_{об}$  – объёмная составляющая свободной энергии, а  $\Psi_{пов}$  – поверхностная. С учётом определения поверхностного натяжения имеем

$$\Psi_{пов} = \sigma F \quad (18.2)$$

где  $\sigma$  – поверхностное натяжение, а  $F$  – площадь поверхности. Таким образом можно определить поверхностное натяжение как свободную энергию, приходящуюся на единицу поверхности.

Понятие поверхностного натяжения также связано с прикладываемой силой. Пусть сила  $f$  действует на элемент поверхности длины  $l$ , смещая его на  $\Delta x$ . Тогда эта сила совершает работу  $A = f\Delta x$ , увеличивая площадь поверхности на  $S = l\Delta x$ . С учётом определения поверхностного натяжения получим

$$\sigma = \frac{f}{l} \quad (18.3)$$

Получим выражение для внутренней энергии поверхности. Поскольку при увеличении поверхности внешние силы совершают работу  $\delta A = \sigma dF$ , то сама плёнка совершает работу  $-\sigma dF$ . Таким образом

$$dU = TdS + \sigma dF$$

Для свободной энергии

$$d\Psi = -SdT + \sigma dF$$

отсюда  $S = -(\partial\Psi/\partial T)_F$  а значит

$$\Psi = U + T \left( \frac{\partial\Psi}{\partial T} \right)_F \quad (18.4)$$

Учтём, что  $\Psi = \sigma F$ . При этом поверхностное натяжение не зависит от площади поверхности, но зависит от температуры. Имеем

$$U = \left( \sigma - T \frac{d\sigma}{dT} \right) F \quad (18.5)$$

Если поверхность жидкости – кривая, то из-за поверхностного натяжения давление по разные стороны поверхности будет различным. Рассмотрим случай, когда боковая поверхность – цилиндр радиуса  $R$  и длины  $b$  (рис. 18.1).

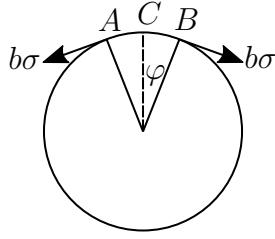


Рис. 18.1: К выводу формулы Лапласа

Выберем на его поверхности участок  $AB$ , стягиваемый центральным углом  $\varphi$ . На его боковые стороны действуют касательные силы  $b\sigma$ . Их равнодействующая направлена к центру цилиндра и по величине равна  $2b\sigma \sin(\varphi/2)$ . В силу малости угла  $F = b\sigma\varphi$ .

Пусть  $a$  – длина дуги. Тогда  $AB$ . Тогда  $\varphi = a/R$ , а  $S = ab$  – площадь элемента поверхности. Таким образом

$$F = \frac{\sigma}{R}S$$

Наконец, разделив силу на площадь, найдём возникающую разность давлений:

$$\Delta P = \frac{\sigma}{R} \quad (18.6)$$

Это и есть формула Лапласа. В случае поверхности двойной кривизны она имеет вид

$$\Delta P = \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (18.7)$$

Так, например, для сферической поверхности

$$\Delta P = \frac{2\sigma}{R} \quad (18.8)$$

Если поверхности две (случай плёнки), то разность давлений увеличивается ещё в два раза.

## 19 Флуктуации в термодинамических системах.

**Определение 19.1.** Флуктуацией физической величины  $f$  называется её отклонение  $\Delta f = f - \bar{f}$  от среднего значения.

Среднее значение флуктуации равно нулю, так что на практике используют средний квадрат флуктуации  $\overline{(\Delta f)^2}$ . Квадратный корень из этой величины  $\sqrt{\overline{(\Delta f)^2}}$  называется *среднеквадратичной флуктуацией*, а его отношение к среднему  $\sqrt{\overline{(\Delta f)^2}}/\bar{f}$  – *среднеквадратичной относительной флуктуацией*. Заметим, что

$$\overline{(\Delta f)^2} = \overline{f^2} - (\bar{f})^2$$

Рассмотрим физическую систему, состоящую из  $N$  одинаковых частей. Пусть  $f_i$  – аддитивная физическая величина, характеризующая  $i$ -ую подсистему, например кинетическая энергия молекулы идеального газа. Тогда для всей системы  $F = \sum_i f_i$ . Рассчитаем средний квадрат флуктуации. Если считать все составляющие системы одинаковыми, то  $\bar{F} = \sum_i \bar{f}_i = N\bar{f}$ . Для квадрата величины имеем

$$F^2 = \left( \sum_i f_i \right)^2 = \sum_i f_i^2 + \sum_{i \neq j} f_i f_j$$

Если считать части независимыми, то  $\overline{f_i f_j} = \bar{f}_i \bar{f}_j = (\bar{f})^2$ . Таким образом

$$\overline{F^2} = N\overline{f^2} + N(N-1)(\bar{f})^2$$

Тогда для квадратичной флуктуации имеем

$$\overline{(\Delta F)^2} = N(\overline{f^2} - \bar{f}^2) \quad (19.1)$$

А для относительной

$$\frac{\sqrt{\overline{(\Delta F)^2}}}{\bar{F}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{\sqrt{\overline{(\Delta f)^2}}}{\bar{f}} \quad (19.2)$$

Таким образом, с увеличением числа частиц флуктуация величины  $F$  убывает пропорционально корню из числа частиц.

Рассмотрим флуктуацию числа частиц молекул идеального газа в фиксированном объёме  $V$ . Пусть в нём находится  $N$  молекул идеального газа. Разделим его на  $z = V/v$  одинаковых маленьких объёмов величины  $v$ . Если  $n_i$  – число молекул в  $i$ -ом объёме, то  $N = \sum_i n_i$ . Среднее число частиц в маленьком объёме  $\bar{n}_i = \bar{n} = Nv/V = Np$ , где  $p = v/V$  – вероятность нахождения молекулы в объёме. Пусть теперь  $f_i = 1$ , если  $i$ -ая молекула находится в объёме  $v$ , и 0, если вне его. Тогда  $n = \sum_i f_i$ . Заметим, что  $f_i = f_i^2 = f_i^3 = \dots$ , а значит  $\bar{f}_i = \bar{f}_i^2 = \dots = p$ . Таким образом

$$\overline{(\Delta f_i)^2} = \overline{f_i^2} - (\bar{f}_i)^2 = p(1-p) \quad (19.3)$$

Поскольку в случае идеального газа величины  $f_1, f_2, \dots$  независимы

$$\overline{\Delta n^2} = Np(1-p) = \bar{n}(1-p) \quad (19.4)$$

Если объём  $V$  много больше, чем  $v$ , имеем

$$\overline{\Delta n^2} = \bar{n} \quad (19.5)$$

## 20 Броуновское движение, закон Эйнштейна-Смолуховского. Связь диффузии и подвижности (соотношение Эйнштейна).

**Определение 20.1.** Броуновское движение – хаотическое движение макроскопических частиц в среде (газе или жидкости), вызванное случайными ударами молекул среды.

Рассмотрим движение шарообразной частицы в жидкости. При равномерном движении со скоростью  $V$  на неё будет действовать сила сопротивления  $F$ , пропорциональная этой скорости. Коэффициент пропорциональности в формуле

$$V = BF \quad (20.1)$$

называется *подвижностью частицы*. В частности, для шарообразной частицы радиуса  $a$

$$B = \frac{1}{6\pi\eta a} \quad (20.2)$$

где  $\eta$  – вязкость жидкости.

Уравнение движения Броуновской частицы в направлении оси  $X$  имеет вид

$$M\ddot{x} = -\frac{\dot{x}}{B} + X$$

Здесь первое слагаемое – трение со стороны жидкости, а второе – сила взаимодействия с молекулами жидкости, хаотично сталкивающимися с броуновской частицей. Ввиду хаотичности  $\overline{X} = 0$ . Домножим обе части этого уравнения на  $x$  и учтём, что

$$\frac{d}{dt}x^2 = 2x\dot{x}, \quad \frac{d^2}{dt^2}x^2 = 2\dot{x}^2 + 2x\ddot{x}$$

Получим

$$M\frac{d^2}{dt^2}x^2 + \frac{1}{B}\frac{d}{dt}x^2 - 2M\dot{x}^2 = 2Xx$$

Будем отсчитывать координату от начального положения частицы при  $t = 0$ . Усредним это уравнение. Ввиду хаотичности движения имеем  $\langle Xx \rangle = 0$ . В тепловом равновесии  $\langle M\dot{x}^2 \rangle = kT$ . Тогда

$$M\frac{d^2}{dt^2}\langle x^2 \rangle + \frac{1}{B}\frac{d}{dt}\langle x^2 \rangle - 2kT = 0 \quad (20.3)$$

Решение этого дифференциального уравнения имеет вид:

$$\overline{x^2} = x_0^2 + 2kTBt + C \exp\left(-\frac{t}{MB}\right)$$

Или, при больших временах,

$$\overline{x^2} = x_0^2 + 2kTBt \quad (20.4)$$

При обобщении на трёхмерный случай кинетическая энергия будет в три раза больше, тогда

$$\overline{\mathbf{r}^2} = r_0^2 + 6kTBt \quad (20.5)$$

Рассмотрим множество частиц, находящихся в постоянном и однородном силовом поле, где мы пренебрегаем силами взаимодействия между этими частицами (множество броуновских частиц в жидкости, идеальный газ). Пусть  $\mathbf{F}$  – сила, действующая на частицу в силовом поле.

Тогда потенциальная энергия  $\varepsilon_p = -Fx$  (ось  $X$  направлена вдоль действия силы). Если состояние стационарно, а температура постоянна, то концентрация меняется в соответствии с распределением Больцмана:

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{\varepsilon_p}{kT}\right) = n_0 \exp\left(\frac{Fx}{kT}\right) \quad (20.6)$$

Поскольку концентрация не постоянна, возникает диффузия, причём  $j_D = -D \frac{dn}{dx}$ . С другой стороны есть поток частиц, вызванный силовым полем. Поскольку  $\mathbf{u} = B\mathbf{F}$ , то  $j_F = BFn$ . В состоянии равновесия эти потоки равны друг другу:

$$-D \frac{dn}{dx} + BFn = 0$$

С учётом распределения Больцмана получим

$$D = kTB \quad (20.7)$$

Это соотношение между диффузией и подвижностью частицы называется *соотношением Эйнштейна*.

## Часть III

# Электричество и магнетизм

## 21 Закон Кулона. Теорема Гаусса в дифференциальной и интегральной формах. Теорема о циркуляции для статического электрического поля. Потенциал. Уравнение Пуассона.

Основным количественным законом электростатики является закон Кулона: *сила взаимодействия точечных зарядов в вакууме прямо пропорциональна величинам их зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. Это сила притяжения, если заряды различного знака, и отталкивания, если одного.* Математически это утверждение выглядит следующим образом:

$$F = C \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \quad (21.1)$$

Где  $C$  – некоторый числовой коэффициент. Его значение и размерность можно выбрать произвольно, получая таким образом различные системы единиц. Мы будем рассматривать систему единиц СГСЭ или Гауссову систему единиц, где  $C = 1$  и не имеет размерности. В таком случае размерность заряда получается из закона Кулона, который выглядит следующим образом:

$$F = \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \quad (21.2)$$

Или в векторном виде

$$\mathbf{F} = \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12} \quad (21.3)$$

Так же вводится понятие напряжённости электрического поля: *сила, действующая на единичный положительный заряд, помещённый в электрическое поле.*

$$E = \frac{F}{q} \quad (21.4)$$

Например, напряжённость поля точечного заряда

$$E = \frac{q}{r^2} \quad (21.5)$$

В векторном виде

$$\mathbf{E} = \frac{q}{r^3} \mathbf{r} \quad (21.6)$$

Для напряжённости электрического поля имеет место *принцип суперпозиции*: напряжённость электрического поля нескольких неподвижных зарядов есть векторная сумма напряжённости полей каждого из них, взятого по отдельности

$$\mathbf{E} = \sum_i \frac{q_i}{r_i^3} \mathbf{r}_i \quad (21.7)$$

В физике часто применяется понятие *потока вектора через площадку*. По определению это скалярное произведение вида  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{S}$ , где  $\mathbf{a}$  – векторное поле, а  $\mathbf{S}$  – вектор нормали, длина которого равна площади площадки  $S$ . Если векторное поле не постоянно, то можно посчитать поток



разбив площадку на малые элементы:  $\int (\mathbf{a}, d\mathbf{S})$ . Далее будем рассматривать поток вектора напряжённости. Если поле  $\mathbf{E}$  есть суперпозиция (векторная сумма) нескольких полей, то в силу линейности скалярного произведения окажется, что поток суммарного поля есть алгебраическая сумма потоков каждого из элементарных полей.

Докажем основную теорему электростатики – *теорему Гаусса*. Она определяет поток вектора напряжённости электрического поля через произвольную замкнутую поверхность  $S$ . Положительной нормалью будем считать внешнюю. Рассмотрим для начала случай, когда поле создается одним точечным зарядом. Пусть поверхность  $S$  – сфера, а заряд помещён в центр. Тогда

$$d\Phi = (\mathbf{E}, \mathbf{n}) dS = \frac{qdS}{r^2}$$

Интегрируя по поверхности сферы получим

$$\Phi = 4\pi q \quad (21.8)$$

Покажем, что этот результат не зависит от формы поверхности. Рассмотрим произвольную элементарную площадку  $dS$  с нормалью  $\mathbf{n}$ . Поток через неё

$$d\Phi = (\mathbf{E}, \mathbf{n}) dS = EdS \cos \alpha = EdS_r$$

Здесь  $dS_r$  – проекция площадки на плоскость, перпендикулярную радиусу  $\mathbf{r}$ . Тогда  $d\Phi = \frac{qdS_r}{r^2}$ . По определению телесного угла имеем  $dS_r = r^2 d\Omega$ , тогда  $d\Phi = qd\Omega$ . Интегрируя по всей поверхности имеем  $\Phi = q\Omega$ , где  $\Omega$  – телесный угол, под которым видна поверхность из точки расположения заряда. Здесь стоит рассмотреть два случая

- Если заряд лежит внутри поверхности, то телесный угол охватывает все направления и равен  $4\pi$ . Получаем формулу (21.8).
- Если заряд лежит вне поверхности, то телесный угол равен нулю, поскольку прямая, направленная от заряда, будет пересекать поверхность чётное число раз, причём нормали будут иметь противоположные направления. Получим, что поток равен нулю.

В случае, если рассматривается система зарядов, с учётом принципа суперпозиции стоит рассматривать алгебраическую сумму зарядов. Таким образом получаем электростатическую теорему Гаусса в интегральной форме

$$\Phi = \oint \mathbf{E} d\mathbf{S} = 4\pi q \quad (21.9)$$

где  $q$  – алгебраическая сумма зарядов, охваченных поверхностью.

Используя теорему Гаусса-Остроградского из математического анализа, можно получить теорему Гаусса в дифференциальной форме:

$$\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{E} dV = 4\pi \iiint_V \rho dV$$

где  $\rho$  – объёмная плотность заряда. Устремляя объём к нулю, получим

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \rho \quad (21.10)$$

Рассмотрим теперь работу, совершаемую электрическим полем точечного заряда  $Q$ . Напряжённость электрического поля этого заряда равна  $\mathbf{E} = \frac{Q}{r^3} \mathbf{r}$ . Таким образом работа, совершаемая силами поля при перемещении из некоторого положения 1 в положение 2 равна

$$A_{12} = \int_{12} q \mathbf{E} d\mathbf{r} = qQ \int_{12} \frac{\mathbf{r} d\mathbf{r}}{r^3}$$

Поскольку  $\mathbf{r}d\mathbf{r} = rdr$ , то криволинейный интеграл сводится к определённомu

$$A_{12} = qQ \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = qQ \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (21.11)$$

Таким образом, при любом перемещении заряда работа электрического поля не зависит от пути, а только от начальной и конечной точки, то есть поле точечного заряда потенциально. Из принципа суперпозиции следует потенциальность поля любой системы точечных зарядов, а поскольку любую систему зарядов можно аппроксимировать точечной, то электрическое поле всегда потенциально. В силу потенциальности имеет место теорема о циркуляции статического электрического поля:

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{s} = 0 \quad (21.12)$$

для любого замкнутого контура. Для потенциальных полей можно ввести понятие потенциала, как работы по перемещению единичного заряда из некоторой начальной точки. Например, для точечных зарядов удобно выбирать ноль потенциала на бесконечности. Тогда

$$\varphi = Q \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{r} \quad (21.13)$$

Работа при перемещении из точки 1 в точку 2 будет равна  $A = q(\varphi_1 - \varphi_2)$ .

Найдём связь между потенциалом и напряжённостью электрического поля. Работа при бесконечно малом перемещении единичного заряда  $d\mathbf{l} = (dx, dy, dz)^T$  будет, с одной стороны, равна  $-d\varphi$ , а с другой  $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E_x dx + E_y dy + E_z dz$ . Приравнивая эти выражения, получим

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi \quad (21.14)$$

Подставив это выражение в теорему Гаусса в дифференциальной форме, получим

$$-\nabla \cdot \nabla \varphi = -\nabla^2 \varphi = -\Delta \varphi = 4\pi \rho \quad (21.15)$$

Это уравнение называется уравнением Пуассона. Здесь  $\Delta = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$  — оператор Лапласа.

## 22 Электростатическое поле в веществе. Вектор поляризации, электрическая индукция. Граничные условия для векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$ .

Различные вещества по-разному реагируют на внешнее электрическое поле. В проводниках есть свободные электроны. Под действием внешнего поля происходит перераспределение этих электронов до тех пор, пока поле внутри проводника не станет равно нулю (действительно, иначе бы заряды продолжали движение под действием внешнего поля). Таким образом, с одной стороны проводники являются эквипотенциальными, а с другой плотность заряда в них равна нулю.

Совсем иначе ведут себя во внешнем поле диэлектрики. Они также реагируют на внешнее электрическое поле, но менее активно, поскольку не имеют свободных носителей заряда, заряды в диэлектрике могут смещаться лишь на малые расстояния, порядка атомных (например поворот полярных молекул). Под действием внешнего поля центр тяжести электронов в молекуле немного смещается относительно центра тяжести ядра, и молекулы становятся диполями, ориентированными положительными концами в направлении поля  $\mathbf{E}$ .

В качестве количественной характеристики поляризации диэлектрика используется *вектор поляризации*  $\mathbf{P}$ . Он представляет дипольный момент единицы объёма:

$$\mathbf{P} = \frac{\sum \mathbf{p}}{V} \quad (22.1)$$

Рассмотрим однородный изотропный диэлектрик, имеющий форму косого параллелепипеда, и поместим его во внешнее поле, направленное параллельно боковым рёбрам. Тогда на основаниях параллелепипеда образуются поляризационные заряды с поверхностной плотностью  $\sigma_{\text{пол}}$ . На боковых гранях зарядов не будет, поскольку поле направлено параллельно им. Пусть  $S$  – площадь основания параллелепипеда, а  $\mathbf{l}$  – вектор, направленный от отрицательного основания к положительному параллельно боковым рёбрам. Тогда дипольный момент будет равен  $\sigma_{\text{пол}} S \mathbf{l}$  а вектор поляризации

$$\mathbf{P} = \frac{\sigma_{\text{пол}} S \mathbf{l}}{V} \quad (22.2)$$

Если  $\mathbf{n}$  – вектор нормали к основанию (заряженному положительно), то  $V = S (\mathbf{l}, \mathbf{n})$ . Подставляя это выражение в (22.2) и домножив скалярно на  $\mathbf{n}$  получим

$$\sigma_{\text{пол}} = (\mathbf{P}, \mathbf{n}) = P_n \quad (22.3)$$

Эта формула оказывается справедлива в общем случае (нормаль к отрицательному основанию направлена в противоположную сторону, а вектор поляризации параллелен боковым рёбрам).

При неоднородной поляризации могут появляться не только поверхностные, но и объёмные заряды. Выделим объём  $V$  в диэлектрике, ограниченный поверхностью  $S$ . При поляризации через площадку  $dS$  в отрицательном направлении нормали  $\mathbf{n}$  к этой площадке смещается заряд  $dq = -P_n dS$ . Таким образом заряд во всём объёме:

$$q_{\text{пол}} = - \oint P_n dS = - \oint \mathbf{P} d\mathbf{S} \quad (22.4)$$

Возникающие поляризационные (связанные) заряды необходимо учесть в теореме Гаусса:

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{S} = 4\pi (q + q_{\text{пол}}) \quad (22.5)$$

Подставляя сюда выражение для поляризационных зарядов, имеем

$$\oint (\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}) d\mathbf{S} = 4\pi q \quad (22.6)$$

Введём вектор электрической индукции:

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} \quad (22.7)$$

Тогда Теорема Гаусса принимает вид

$$\oint (\mathbf{D}, d\mathbf{S}) = 4\pi q \quad (22.8)$$

где  $q$  – свободные заряды. В дифференциальной форме это соотношение имеет вид

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho \quad (22.9)$$

Получим теперь граничные условия для полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$ . Рассмотрим малый элемент поверхности границы раздела двух сред. Выберем поверхность, охватывающую этот элемент: цилиндр, площадь которого равна  $dS$  а высота пренебрежимо мала. Пусть  $\sigma$  – плотность свободных зарядов на поверхности. Тогда по теореме Гаусса имеем:

$$\Phi = \mathbf{D}_1 d\mathbf{S}_1 + \mathbf{D}_2 d\mathbf{S}_2 = 4\pi\sigma dS$$

Пусть  $\mathbf{n}$  – нормаль по направлению из среды один к среде два. Тогда  $d\mathbf{S}_1 = \mathbf{n}dS$ , а  $d\mathbf{S}_2 = -\mathbf{n}dS$ . Сокращая  $dS$  и учитывая, что скалярное произведение на вектор нормали есть нормальная составляющая, имеем

$$D_{1n} - D_{2n} = 4\pi\sigma \quad (22.10)$$

Таким образом при прохождении через границу раздела сред вектор электрической индукции может испытывать скачок. Это и есть граничное условие на вектор электрической индукции. В случае вектора электрической напряжённости стоит также учесть плотность связанных (поляризационных) зарядов.

Теперь построим рядом с поверхностью контур в форме параллелограмма. Его можно сделать настолько малым, что две его грани будут параллельны поверхности, а вклад двух других в циркуляцию электрического поля будет пренебрежимо мал. Тогда с учётом теоремы о циркуляции

$$\mathbf{E}_1 d\mathbf{l}_1 + \mathbf{E}_2 d\mathbf{l}_2 = 0$$

Пусть  $\boldsymbol{\tau}$  – единичный касательный к поверхности вектор, параллельный  $d\mathbf{l}_1$ . Тогда  $d\mathbf{l}_1 = \boldsymbol{\tau}dl$ , а  $d\mathbf{l}_2 = -\boldsymbol{\tau}dl$ . Подставляя эти выражения в выражение для циркуляции и учитывая, что скалярное произведение на касательный вектор есть тангенциальная составляющая, имеем

$$E_{1\tau} - E_{2\tau} = 0 \quad (22.11)$$

То есть тангенциальные составляющие вектора напряжённости электрического поля совпадают.

## 23 Магнитное поле постоянных токов в вакууме. Основные уравнения магнитостатики в вакууме. Закон Био-Савара. Сила Ампера. Сила Лоренца.

Экспериментально установлено, что при наличии магнитного поля на движущийся заряд действует сила, которая определяется формулой

$$\mathbf{F}_m = \frac{q}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{B}] \quad (23.1)$$

Здесь  $\mathbf{B}$  – величина не зависящая заряда, а характеризующая лишь магнитное поле. Она называется *магнитной индукцией*.

В электрическом поле на заряд также действует сила  $\mathbf{F}_e = \mathbf{E}e$ . Если предположить, что электрическое и магнитное поля действуют на заряд независимо друг от друга, то результирующая сила будет равна  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m$  или

$$\mathbf{F} = q \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{B}] \right) \quad (23.2)$$

Суммарная сила называется *силой Лоренца*.

Можно рассмотреть действие магнитного поля не на отдельную частицу, а на поток частиц. Пусть ток создается движением одинаковых зарядов  $e$  с концентрацией  $n$ . Тогда  $\mathbf{j} = nev$  – плотность тока. Число частиц в объёме  $dV$  будет  $dN = ndV$  и тогда на этот объём действует сила

$$d\mathbf{F} = \frac{e}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{B}] dN = \frac{ne}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{B}] dV = \frac{1}{c} [\mathbf{j}, \mathbf{B}] dV$$

Если рассмотреть участок бесконечно тонкого провода, по которому течёт ток  $I$ , а площадь которого равна  $S$ , то  $dV = Sdl$ , причём вектор  $d\mathbf{l}$  совпадает по направлению с током, тогда имеем

$$d\mathbf{F} = \frac{I}{c} [d\mathbf{l}, \mathbf{B}] \quad (23.3)$$

Сила, действующая на ток в магнитном поле, называется *силой Ампера*.

Источником магнитного поля являются движущиеся заряды. Опытным путём был установлен закон, определяющий магнитное поле заряда, скорость которого много меньше скорости света:

$$\mathbf{B} = \frac{q}{cr^3} [\mathbf{v}, \mathbf{r}] \quad (23.4)$$

Причём постоянная  $c$  есть ни что иное, как скорость света. Стоит отметить, что как и электрическое поле, магнитное поле обратно пропорционально квадрату расстояния. Рассмотрим теперь поле, создаваемое не отдельным зарядом, а элементом тока. Аналогично предыдущим выкладкам, получим

$$d\mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{[\mathbf{j}, \mathbf{r}]}{r^3} dV \quad (23.5)$$

Или для линейного элемента тока

$$d\mathbf{B} = \frac{I}{c} \frac{[d\mathbf{l}, \mathbf{r}]}{r^3} \quad (23.6)$$

Эти формулы выражают закон Био-Савара. Суммарное поле же находится интегрированием по всем токам.

Прямым следствием закона Био-Савара является теорема Гаусса для магнитного поля:

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (23.7)$$

Так же с помощью него можно доказать теорему о циркуляции магнитного поля:

$$\oint \mathbf{B} ds = \frac{4\pi}{c} I = \frac{4\pi}{c} \int \mathbf{j} d\mathbf{S} \quad (23.8)$$

где  $I$  – токи, обхватываемые контуром (в случае интеграла рассматривается распределение тока). Используя формулу Стокса можно получить дифференциальную форму теоремы о циркуляции:

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (23.9)$$

## 24 Магнитное поле в веществе. Основные уравнения магнитостатики в веществе. Граничные условия для векторов $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ .

Как было сказано ранее, источником магнитного поля являются токи, а магнитных зарядов не существует. Простейший виток с током можно рассматривать как магнитный диполь  $\mathbf{m}$ .

В веществе магнитное поле может возбуждаться не только токами, но и движением заряженных частиц внутри самих атомов и молекул. Магнетизм веществ в основном обусловлен вращением электронов вокруг атомных ядер, собственным вращением (спином) электронов, или собственным вращением атомных ядер. По этим причинам возникают микроскопические поля, а их результирующее поле – макроскопическое. В силу отмеченной ранее эквивалентности магнитного диполя витку с током, собственные магнитные диполи вещества эквивалентны *молекулярным токам*  $\mathbf{j}_m$ . Обычные токи, связанные с переносом зарядов, называются *токами проводимости*  $\mathbf{j}$ . В таком случае результирующее магнитное поле  $\mathbf{B}$  является суммой полей токов проводимости и молекулярных токов. Так, например, для теоремы о циркуляции

$$\oint \mathbf{B} ds = \frac{4\pi}{c} (I + I_m), \quad \text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j} + \mathbf{j}_m) \quad (24.1)$$

Реакцию среды на внешнее магнитное поле характеризует *вектор намагниченности*  $\mathbf{I}$ . По аналогии с вектором поляризации

$$\mathbf{I} = n\mathbf{m} \quad (24.2)$$

где  $\mathbf{m}$  – средний дипольный момент молекулы вещества. Если рассмотреть цилиндр объёмом  $V$ , то, с одной стороны, его момент есть  $\mathbf{m} = \mathbf{IV}$ , а с другой  $\mathbf{m} = I_m \mathbf{S}/c$ , где  $I_m$  – молекулярный ток, текущий по поверхности. Если учесть, что  $V = SL$  (для прямого цилиндра), для линейной плотности молекулярного тока получим

$$i_m = c\mathbf{I} \quad (24.3)$$

В общем случае необходимо рассматривать здесь проекцию на ось цилиндра  $I_l = (\mathbf{I}, \mathbf{l})$ .

Теорема Гаусса для магнитного поля не меняет свой вид в веществе. Рассмотрим теорему о циркуляции. Произвольный контур окружим бесконечно тонкой трубкой. По её поверхности будет циркулировать ток с плотностью  $i_m = cI_l$ . Он будет пересекать произвольную поверхность, натянутую на контур, только один раз. На единицу длины трубки приходится ток  $dI_m = i_m dl = c(\mathbf{I}, d\mathbf{l})$ . Для полного тока намагничивания имеем

$$I_m = c \oint \mathbf{I} d\mathbf{l} \quad (24.4)$$

Подставляя это выражение в теорему о циркуляции, имеем

$$\oint (\mathbf{B} - 4\pi\mathbf{I}) d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} I \quad (24.5)$$

А в дифференциальной форме

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j} + c \text{rot } \mathbf{I}) \quad (24.6)$$

Эти формулы упрощаются, если ввести *вектор напряжённости магнитного поля*:

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{I} \quad (24.7)$$

Тогда теорема о циркуляции принимает вид:

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} I, \quad \text{rot } H = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (24.8)$$

Аналогично полям  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$  из этих уравнения можно получить граничные условия. Так, в силу теоремы Гаусса, нормальная компонента вектора магнитной индукции должна быть непрерывной:

$$B_{1n} = B_{2n} \quad (24.9)$$

А тангенциальная компонента вектора напряжённости может испытывать скачок:

$$H_{2\tau} - H_{1\tau} = \frac{4\pi}{c} i \quad (24.10)$$



## 25 Закон Ома в цепи постоянного тока. Переходные процессы в электрических цепях.

Рассмотрим упорядоченное движение электрических зарядов (например электронов). Пусть  $\mathbf{u}$  – их дрейфовая скорость. Тогда плотность тока – величина заряда, протекающая через единицу площади за единицу времени, равна

$$\mathbf{j} = ne\mathbf{u} \quad (25.1)$$

здесь  $e$  – заряд частиц (предполагаем их одинаковыми), а  $n$  – их концентрация.

Токи в веществе возникают под действием внешних электрических полей. Они связаны между собой законом Ома:

$$\mathbf{j} = \lambda \mathbf{E} \quad (25.2)$$

где величина  $\lambda$  называется *удельной проводимостью* и является свойством материала. Величина, обратная удельной проводимости, называется *удельным сопротивлением*:

$$\rho = \frac{1}{\lambda} \quad (25.3)$$

Если бы единственными источниками поля  $\mathbf{E}$  в проводниках являлись заряды, то со временем поле бы пропадало и, соответственно, прекращалось бы течение тока. Для его поддержания необходимы дополнительные силы  $\mathbf{F}^{\text{стор}}$ . Определим их напряжённость  $\mathbf{E}^{\text{стор}}$  как отношение силы к заряду. Тогда закон Ома примет вид:

$$\mathbf{j} = \lambda (\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{стор}}) \quad (25.4)$$

Рассмотрим теперь случай течения тока по тонким проводам. При малой толщине плотность тока можно считать постоянной вдоль всего сечения и силу тока:

$$I = jS \quad (25.5)$$

если ток постоянен, то величина  $I$  будет постоянна вдоль всего провода. Из закона Ома в дифференциальной форме:

$$E + E^{\text{стор}} = \frac{I}{\lambda S}$$

Умножим это соотношение на элемент длины  $dl$  и проинтегрируем по участку провода от некоторой точки 1 до точки 2, на части которого  $E^{\text{стор}} \neq 0$ . Имеем

$$\int_{12} E dl + \int_{12} E^{\text{стор}} dl = \int_{12} \frac{I}{\lambda S} dl$$

Первый интеграл в силу потенциальности электрического поля равен просто разности потенциалов  $\varphi_1 - \varphi_2$ .

Пусть сторонние силы действуют на участке 34. Величина

$$\mathcal{E} = \int_{12} E^{\text{стор}} dl = \int_{34} E^{\text{стор}} dl \quad (25.6)$$

называется электродвижущей силой и характеризует работу сторонних сил на единицу заряда. Наконец, третий интеграл

$$R = \int_{12} \frac{dl}{\lambda S} = \int_{12} \rho \frac{dl}{S} \quad (25.7)$$

характеризует свойства проводника и называется сопротивлением. Таким образом имеем интегральный закон Ома для участка цепи:

$$\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E} = IR \quad (25.8)$$

Если на участке нет источника тока (не действуют сторонние силы), то

$$\varphi_1 - \varphi_2 = IR \quad (25.9)$$

Если же рассмотреть замкнутый участок цепи, то  $\varphi_1 = \varphi_2$  и

$$\mathcal{E} = IR \quad (25.10)$$

Рассмотрим задачи о зарядке и разрядке конденсатора в предположении, что в каждый момент времени величина тока постоянна во всём проводнике. Пусть  $Q$  – заряд конденсатора,  $\varphi$  – разность потенциалов между обкладками, а  $C$  – его ёмкость. Имеем следующие уравнения:

$$I = -\frac{dQ}{dt}, \quad RI = \varphi, \quad Q = C\varphi$$

Исключая из этих уравнений разность потенциалов и силу тока, получим

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{RC} = 0$$

После интегрирования придём к соотношению, описывающему зависимость заряда конденсатора от времени:

$$Q = Q_0 e^{-t/\tau} \quad (25.11)$$

где  $Q_0$  – начальная величина заряда, а  $\tau = RC$  – время релаксации. Аналогично можно получить решение задачи о зарядке конденсатора, подключенного к источнику тока с ЭДС  $\mathcal{E}$ :

$$Q = \mathcal{E}C (1 - e^{-t/\tau}) \quad (25.12)$$

## 26 Электромагнитная индукция в движущихся и неподвижных проводниках. ЭДС индукции. Само- и взаимная индукция. Теорема взаимности.

*Электромагнитная индукция* – явление возникновения тока (ЭДС индукции) в проводниках при наличии меняющегося магнитного поля. Так, например, если к катушке приближать постоянный магнит, в ней будет возникать индукционный ток.

Явление электромагнитной индукции в движущихся проводниках объясняется силой Лоренца. Рассмотрим простейший случай, когда два параллельных провода помещены в магнитное поле  $\mathbf{B}$ , а проводящий мост  $AB$  может скользить вдоль этих проводов (26.1). Пусть мост движется со скоростью  $\mathbf{v}$ . Тогда на свободные электроны в этом мосте действует сила Лоренца  $\mathbf{F} = (e/c) [\mathbf{v}, \mathbf{B}]$ , направленная вдоль проводника. На рисунке она действует вниз на положительный ион и вверх на отрицательный. В результате под действием этой силы в проводнике возникнет электрический ток. Сила Лоренца является сторонней силой, вызывающей ток, и соответственно стороннее электрическое напряжение равно  $\mathbf{E}^{\text{стор}} = \frac{\mathbf{F}}{e} = \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{B}]$ . Возникающая электродвижущая сила называется *ЭДС индукции* и обозначается  $\mathcal{E}^{\text{инд}}$ . В рассматриваемом случае  $\mathcal{E}^{\text{инд}} = -\frac{v}{c} Bl$ , где  $l$  – длина мостика. Минус здесь поставлен потому, что сила направлена против положительного обхода контура (магнитное поле, вызванное индукционным током, направлено противоположно внешнему).

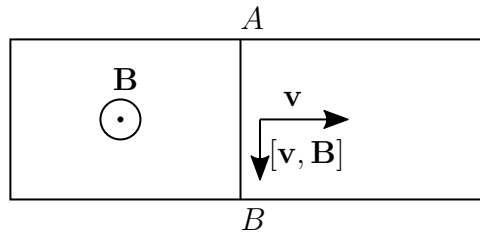


Рис. 26.1: Явление электромагнитной индукции в движущемся проводнике

Величина  $lv$  есть приращение площади контура в единицу времени, так что  $vBl = d\Phi/dt$ , где  $\Phi$  – магнитный поток, пронизывающий контур. Таким образом

$$\mathcal{E}^{\text{инд}} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} \quad (26.1)$$

Эта формула выражает закон индукции Фарадея и остаётся верной если, например, внешнее поле направлено под углом к контуру с током.

Индукционные токи могут возникать и в неподвижных проводниках. Опыт показывает, что изменение магнитного потока, пронизывающего контур, всегда приводит возникновению ЭДС индукции, причём величина этой ЭДС определяется законом Фарадея. Имеет место правило Ленца: *индукционный ток всегда имеет такое направление, что он ослабляет действие причины, возбуждающей этот ток.*

Токи являются источниками магнитного поля. Таким образом, например, замкнутый контур с током пронизывает магнитное поле, создаваемое этим током. Если внутри контура провести произвольную поверхность  $S$ , магнитная индукция и поток через эту поверхность будут пропорциональные току, и можно написать

$$\Phi = \frac{1}{c} LI \quad (26.2)$$

где коэффициент  $L$  называется *индуктивностью* проводника и определяется только его геометрическими параметрами. При переменном токе в проводнике поток, пронизывающий его,

меняется, и возникает явление самоиндукции. В соответствие с законом Фарадея

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = -\frac{L}{c} \frac{dI}{dt} \quad (26.3)$$

Если рассмотреть два витка или катушки с током, то помимо вклада собственного тока в магнитный поток, имеет место вклад другого проводника. Для потоков можно записать

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{1}{c} L_{11} I_1 + \frac{1}{c} L_{12} I_2 \\ \Phi_2 &= \frac{1}{c} L_{21} I_1 + \frac{1}{c} L_{22} I_2 \end{aligned} \quad (26.4)$$

Коэффициенты  $L_{11}$  и  $L_{22}$  – это собственные индуктивности витков, а  $L_{21}$  и  $L_{12}$  – взаимные индуктивности.

Электрический ток обладает запасом магнитной энергии. Получить выражение для неё просто. Если мы будем наращивать ток в цепи, то будет увеличиваться и магнитный поток, а значит источник будет совершать работу против ЭДС самоиндукции. Тогда

$$\delta A^{\text{внеш}} = -\mathcal{E}_{\text{инд}} I dt = \frac{1}{c} I d\Phi \quad (26.5)$$

В случае немагнитной среды энергия пойдёт только на увеличение энергии, тогда после интегрирования имеем

$$W = \frac{L}{2} \left( \frac{I}{c} \right)^2 = \frac{1}{2c} I \Phi = \frac{\Phi^2}{2L} \quad (26.6)$$

Для системы витков будем иметь:

$$dW = \frac{1}{c} \sum_i I_i d\Phi_i$$

С учётом определения коэффициентов взаимной индукции, мы имеем

$$dW = \frac{1}{c^2} \sum_i \sum_j L_{ij} I_i dI_j \quad (26.7)$$

Наконец, воспользуемся свойством равенства смешанных производных. Тогда

$$\frac{1}{c^2} L_{ij} = \frac{\partial^2 W}{\partial I_i \partial I_j} = \frac{\partial^2 W}{\partial I_j \partial I_i} = \frac{1}{c^2} L_{ji} \quad (26.8)$$

что и доказывает *теорему взаимности*.

## 27 Система уравнений Максвелла в интегральной и дифференциальной формах. Ток смещения. Материальные уравнения.

Основные уравнения, описывающие электромагнитное поле в неподвижных средах, были установлены Максвеллом. К общим законам электродинамики отнесём теоремы Гаусса для электрического и магнитного поля а так же теоремы о циркуляции. Однако, теорему о циркуляции магнитного поля необходимо дополнить. Рассмотрим закон сохранения электрического заряда (уравнение непрерывности):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0 \quad (27.1)$$

Теорема о циркуляции магнитного поля в дифференциальной форме имеет вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (27.2)$$

Поскольку дивергенция ротора всегда равна нулю, то это уравнение не может быть верным (оно верно только для стационарных токов). Если продифференцировать по времени теорему Гаусса для электрической индукции, получим

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \dot{\mathbf{D}}$$

или с учётом уравнения непрерывности

$$\operatorname{div} \cdot \left( \mathbf{j} + \frac{1}{4\pi} \dot{\mathbf{D}} \right) = 0 \quad (27.3)$$

Где величина

$$\mathbf{j}_{\text{см}} = \frac{1}{4\pi} \dot{\mathbf{D}} \quad (27.4)$$

называется *током смещения*, который и необходимо учесть в теореме о циркуляции напряжённости магнитного поля. Таким образом, получим систему уравнений Максвелла в интегральной форме:

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = 4\pi q \quad (27.5)$$

$$\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0 \quad (27.6)$$

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S} \quad (27.7)$$

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \int_S \left( \mathbf{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\mathbf{S} \quad (27.8)$$

и в дифференциальной форме:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi \rho \quad (27.9)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (27.10)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (27.11)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (27.12)$$

Однако эти уравнения не описывают электромагнитное поле полностью, система не доопределена. Их необходимо дополнить соотношениями, характеризующими свойства среды. Эти соотношения называются *материальными уравнениями*. Они определяются из теорий поляризации, намагничивания и проводимости среды. В простейшем случае изотропных сред эти уравнения будут иметь вид

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (27.13)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (27.14)$$

$$\mathbf{j} = \lambda \mathbf{E} \quad (27.15)$$

где  $\varepsilon, \mu, \lambda$  – диэлектрическая проницаемость, магнитная проницаемость и электрическая проводимость среды.

## 28 Закон сохранения энергии для электромагнитного поля. Вектор Пойнтинга. Импульс электромагнитного поля.

Дополним уравнения Максвелла законом сохранения энергии. При изменении электромагнитного поля и прохождении электрического тока в единице объёма  $dV$  совершается внешняя работа

$$\delta A^{\text{внеш}} = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{E} d\mathbf{D} + \mathbf{H} d\mathbf{B}) + \mathbf{j} \mathbf{E} dt \quad (28.1)$$

Эта работа идёт на приращение внутренней энергии кроме теплоты, покидающей элемент объёма вследствие теплопроводности. Этой потерей пренебрежём. Если  $u$  – внутренняя энергия единицы объёма (плотность энергии), то  $\delta A^{\text{внеш}} = du$  или

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{E} \dot{\mathbf{D}} + \mathbf{H} \dot{\mathbf{B}}) + \mathbf{j} \mathbf{E} \quad (28.2)$$

С учётом уравнений Максвелла имеем:

$$\mathbf{E} \left( \frac{1}{4\pi} \dot{\mathbf{D}} + \mathbf{j} \right) + \frac{1}{4\pi} \mathbf{H} \dot{\mathbf{B}} = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \text{ rot } \mathbf{H} - \mathbf{H} \text{ rot } \mathbf{E})$$

Учтём векторное тождество:

$$\mathbf{E} \text{ rot } \mathbf{H} - \mathbf{H} \text{ rot } \mathbf{E} = -\text{div } [\mathbf{E}, \mathbf{H}]$$

Введём обозначение:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}, \mathbf{H}] \quad (28.3)$$

Тогда закон сохранения энергии примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \text{div } \mathbf{S} = 0 \quad (28.4)$$

Вектор  $\mathbf{S}$  называется *вектором Пойнтинга* и имеет смысл плотности потока электромагнитной энергии. Определим теперь плотность потока импульса  $\mathbf{g}$  электромагнитного поля. Пусть  $w$  – плотность электромагнитной энергии. Соответствующая ей плотность массы будет равна  $w/c^2$ , а значит импульс  $\mathbf{g} = w\mathbf{v}/c^2$ . Заметим, что плотность потока энергии есть  $\mathbf{S} = w\mathbf{v}$ , а значит

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{S}}{c^2} = \frac{1}{4\pi c} [\mathbf{E}, \mathbf{H}] \quad (28.5)$$

## 29 Квазистационарные токи. Свободные и вынужденные колебания в электрических цепях. Явление резонанса. Добротность колебательного контура, ее энергетический смысл.

Будем рассматривать колебательный контур в предположении *квазистационарности* тока, то есть когда сила тока постоянна во всем контуре. Колебательным контуром называется схема, состоящая из последовательно соединенных конденсатора  $C$ , катушки индуктивности  $L$  и сопротивления  $R$ . Возможно также подключение к контуру внешнего источника тока с переменной ЭДС.

Пусть  $q$  – заряд конденсатора. Тогда записав закон Ома для колебательного контура, получим:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \mathcal{E} \quad (29.1)$$

Это дифференциальное уравнение второго порядка. Если внешней ЭДС нет, то уравнения линейны и однородны относительно  $q$ . Такие уравнения описывают свободные колебания. Введём обозначения:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad 2\gamma = \frac{R}{L}, \quad \frac{\mathcal{E}}{C} = X$$

Тогда уравнение можно переписать в виде

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = X \quad (29.2)$$

Рассмотрим сначала свободные колебания:  $X = 0$ . В случае отсутствия сопротивления, уравнение (29.2) примет вид уравнения гармонического осциллятора, решением которого являются гармонические колебания без затуханий:

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0 \quad (29.3)$$

$$q = q_0 \cos(\omega_0 t + \psi) \quad (29.4)$$

Теперь рассмотрим затухающие колебания. Уравнение (29.2) примет вид:

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = 0 \quad (29.5)$$

Корни характеристического уравнения  $\lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ . В зависимости от знака выражения под корнем, возможны три различных случая:

- $\omega_0^2 - \gamma^2 > 0$

В таком случае выражение под корнем отрицательно и решением будут затухающие колебания:

$$q = q_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \psi) \quad (29.6)$$

где  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ . При малых затуханиях  $\gamma \ll \omega_0$  и частота практически совпадает с частотой незатухающих колебаний.



- $\omega_0^2 - \gamma^2 = 0$

В этом случае решение уравнения имеет вид  $q = (a + bt)e^{-\gamma t}$ . Такой режим называется апериодическим и достигается при критическом сопротивлении  $R_{кр} = 2\frac{L}{C}$ . В зависимости от начальных параметров величина  $q$  (или другие параметры контура в силу одинаковых уравнений) может достигать или не достигать максимума.

- $\omega_0^2 - \gamma^2 < 0$

В этом случае решение есть просто сумма двух экспоненциально затухающих решений:  $q = C_1 e^{-\lambda_1 t} + C_2 e^{-\lambda_2 t}$ , где  $\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ .

Наибольший интерес представляет случай затухающих колебаний. Их амплитуда экспоненциально затухает, время, при котором амплитуда убывает в  $e$  раз, называется временем затухания:  $\tau = 1/\gamma$ . Отношение амплитуд в моменты колебаний, отличающиеся на период, определяется по формуле  $A_1/A_2 = e^{\gamma T}$ . Величина

$$d = \ln \frac{A_1}{A_2} = \gamma T \quad (29.7)$$

называется *логарифмическим декрементом затухания*. Величина

$$Q = \frac{\pi}{d} = \frac{\pi}{\gamma T} = \frac{\omega}{2\gamma} \quad (29.8)$$

называется *добротностью* колебательного контура. Она характеризует способность контура сохранять запасённую его энергию. Энергетический смысл добротности есть отношение энергии, запасённой в осцилляторе, к потерям её за период:

$$Q = 2\pi \frac{W_0}{\Delta W} \quad (29.9)$$

Рассмотрим, наконец, случай вынужденных колебаний, когда к контуру подключено внешнее гармоническое напряжение  $X = X_0 \cos \omega t$ . Поскольку общее решение однородного уравнения, связанного с собственными колебаниями, затухает, мы будем интересоваться только частными решениями. Для нахождения частного решения удобно воспользоваться переходом к комплексным числам:  $X = X_0 e^{i\omega t}$ , а частное решение искать в виде  $q = q_0 e^{i\omega t}$ . Тогда для уравнение (29.2) имеем:

$$(-\omega^2 + 2i\omega\gamma + \omega_0^2) e^{i\omega t} = X_0 e^{i\omega t} \quad (29.10)$$

$$q = \frac{X_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\gamma} e^{i\omega t} \quad (29.11)$$

Это решение комплексное, причём мнимая часть амплитуды влияет на сдвиг фазы. Выделяя вещественную часть, получим для решения

$$q = q_0 \cos(\omega t - \delta) \quad (29.12)$$

$$q_0 = \frac{X_0}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2}} \quad (29.13)$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{2\omega\gamma}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (29.14)$$

Таким образом, максимум амплитуды достигается при совпадении частоты внешней ЭДС с собственной частотой контура. Это явление называется резонансом. Оно соответствует Кривая, изображающая зависимость амплитуды от частоты вблизи собственной частоты контура,

называется резонансной кривой. Помимо амплитуды в максимуме часто важна *ширина резонансной кривой* – разность между частотами, на которых энергия колебаний вдвое меньше энергии в максимуме (амплитуда меньше в  $\sqrt{2}$  раз соответственно):

$$(\omega_{1,2}^2 - \omega_0^2)^2 = 4\omega_{1,2}^2 \gamma^2$$

Если частоты лежат близко к резонансной, то приближённо имеем:

$$\Delta\omega = 2\gamma = \omega_0/Q \tag{29.15}$$

## 30 Спектральное разложение электрических сигналов. Спектры колебаний, модулированных по амплитуде и фазе.

Рассмотрим негармонический электрический сигнал вида  $f(t)$  с периодом  $T$ , т.е.  $f(t+T) = f(t)$ . Такие сигналы неудобны для рассмотрения, однако можно воспользоваться теоремой Фурье и разложить его в гармонический ряд:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \quad (30.1)$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \quad (30.2)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n\omega t dt \quad (30.3)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin n\omega t dt \quad (30.4)$$

Здесь  $\omega = 2\pi/T$ . Таким образом произвольный сигнал рассматривается как суперпозиция гармонических. Рассмотрим некоторые частные случаи.

Амплитудная модуляция – амплитуда меняется с малой частотой  $\Omega \ll \omega$ ,  $m \ll 1$ :

$$f(t) = A(1 + m \cos \Omega t) \cos \omega t \quad (30.5)$$

Раскрывая скобки и воспользовавшись выражением для произведения косинусов, получим:

$$f(t) = A \cos \omega t + \frac{mA}{2} (\cos (\omega + \Omega) t + \cos (\omega - \Omega) t) \quad (30.6)$$

Фазовая модуляция – фаза меняется с малой частотой  $\Omega \ll \omega$ ,  $m \ll 1$ :

$$\begin{aligned} f(t) &= A \cos (\omega t + m \cos \Omega t) = A (\cos \omega t \cos m \cos \Omega t + \sin \omega t \sin m \cos \Omega t) \approx \\ &\approx A \cos \omega t + mA \sin \omega t \cos \Omega t = A \cos \omega t + \frac{mA}{2} (\sin (\omega + \Omega) t + \sin (\omega - \Omega) t) \end{aligned} \quad (30.7)$$

## 31 Электрические флуктуации. Дробовой и тепловой шум. Предел чувствительности электроизмерительных приборов.

В электрических цепях существуют флуктуации тока и напряжения, проявляющиеся в различных измерениях. Эти флуктуации создают ложные сигналы на выходе усилителей и ограничивают чувствительность электрических приборов. Возникновение флуктуаций связано с дискретностью зарядов, осуществляющих перенос тока, и случайностью характера движения этих зарядов.

### Дробовой шум

*Дробовым шумом* называются флуктуации, связанные с дискретностью зарядов и случайным характером их вылета и прибытия. Ток образуется электронами, покидающими катод. Импульсы тока, производимые отдельными зарядами, достигающими анода, можно считать одинаковыми. Но эти импульсы следуют случайным образом, то есть наблюдаемый ток есть последовательность затухающих импульсов. Если  $i(t)$  – форма импульса, то ток имеет вид:

$$I(t) = \sum_j i(t - t_j) \quad (31.1)$$

Из соотношения неопределённостей имеем:  $\tau \Delta\nu \approx 1$ , а для дисперсии числа зарядов  $\overline{\Delta N^2} = N$ . Учтём, что  $N = q/e = I\tau/e$ , где  $I$  – средний ток. Тогда для шумового тока имеем:

$$\overline{i^2} = \frac{e^2 \overline{\Delta N^2}}{\tau} = \frac{eI}{\tau} \approx Ie\Delta\nu$$

Это соотношение называется формулой Шоттки.

### Тепловой шум

*Тепловой шум* связан с тепловым движением зарядов. Он проявляется во флуктуациях разности потенциалов на концах проводника. Рассмотрим высокочастотный резонансный  $LCR$ -контур. Энергия, запасённая в контуре, состоит из электрической энергии в конденсаторе и магнитной в катушке:

$$W = \frac{LI^2}{2} + \frac{CU^2}{2}$$

Если система имеет температура  $T$ , то по теореме о равномерном распределении имеем:

$$\overline{W_L} = \frac{\overline{LI^2}}{2} = \frac{kT}{2}, \quad \overline{W_C} = \frac{\overline{CU^2}}{2} = \frac{kT}{2}, \quad \overline{W} = kT$$

Учтём теперь, что добротность контура выражается, с одной стороны, как  $Q = 2\pi W/\Delta W$ , то есть  $\Delta W = 2\pi W/Q$ . С другой стороны  $W = kT$  и  $Q = \omega_0/\Delta\omega$ , где  $\omega_0$  – резонансная частота, а  $\Delta\omega$  – ширина резонанса. Тогда для потери энергии за период имеем:

$$\Delta W = 2\pi \frac{kT}{\omega_0} \Delta\omega$$

Учтём, что  $2\pi/\omega_0 = T_0$  – период колебаний системы, а  $\Delta W/T_0$  – мощность потерь, которая, с другой стороны, равна  $P = I^2 R = \mathcal{E}^2/R$ . Тогда для флуктуаций имеем:

$$\overline{I^2} = \frac{kT}{R} \Delta\omega, \quad \overline{\mathcal{E}^2} = kTR\Delta\omega \quad (31.2)$$

## 32 Электромагнитные волны. Волновое уравнение. Уравнение Гельмгольца.

Рассмотрим уравнения Максвелла в среде без свободных зарядов и токов с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$  и магнитной проницаемостью  $\mu$ . Они примут вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0 & \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 & \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{\varepsilon \mu}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

Применим оператор ротора к одному из векторных уравнений. Учтём, что  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \nabla \operatorname{div} \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E}$ . С учётом скалярных уравнений и перестановочности операторов дифференцирования по координатам и времени, получим:

$$-\Delta \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\varepsilon \mu}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Таким образом из уравнений Максвелла следуют волновые уравнения для электрического и магнитного полей:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{c^2}{\varepsilon \mu} \Delta \mathbf{E} \quad (32.1)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = \frac{c^2}{\varepsilon \mu} \Delta \mathbf{B} \quad (32.2)$$

Если волна распространяется вдоль конкретной оси, например  $x$ , то решением уравнения  $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - a^2 \Delta f = 0$  является функция вида  $f(x, t) = f_1(t - \frac{x}{a}) + f_2(t + \frac{x}{a})$ . Таким образом, решения уравнений Максвелла есть волны, распространяющиеся со скоростью  $\frac{c}{n}$ , где величина  $n = \sqrt{\varepsilon \mu}$  называется показателем преломления. Важным частным случаем являются плоские монохроматические волны:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \quad (32.3)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \quad (32.4)$$

Здесь  $\mathbf{k}$  – волновой вектор, направление которого совпадает с направлением распространения волны.  $k = \frac{\omega n}{c}$ . Непосредственно из уравнений Максвелла в применении к этим волнам следует их поперечность ( $\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{B} \perp \mathbf{k}$ ), перпендикулярность векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  а так же равенство  $B = nE$ .

Рассмотрим теперь некоторую функцию  $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{f}_0(\mathbf{r}) e^{i\omega t}$ , являющуюся решением волнового уравнения. Заметим, что  $\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial t^2} = -\omega^2 \mathbf{f}$ . Тогда волновое уравнения  $\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial t^2} = v^2 \Delta \mathbf{f}$  переходит в уравнение Гельмгольца:

$$\Delta \mathbf{f}_0 + k^2 \mathbf{f}_0 = 0 \quad (32.5)$$

где  $k = \omega/v$ .

### 33 Электромагнитные волны в волноводах. Критическая частота. Объемные резонаторы.

Рассмотрим распространение электромагнитной волны в волноводе. *Волноводом* называется канал, способный поддерживать распространение в нём электромагнитных волн. Мы рассмотрим прямоугольный волновод с проводящими стенками, в котором волна распространяется вдоль оси  $z$ . Для простоты так же будем считать, что в среде волновода  $\varepsilon = \mu = 1$ . Из уравнений Максвелла и условия отсутствия поля в стенках имеем граничные условия:  $\mathbf{E}_\tau = 0$ ,  $B_n = 0$ .

Выделяют два основных типа волн:  $E$ -волны или ТМ-волны, в которых  $\mathbf{H} \perp z$ ,  $E_z \neq 0$ , и  $H$ -волны или ТЕ-волны, в которых соответственно  $\mathbf{E} \perp z$ ,  $H_z \neq 0$ . Рассмотрим случай ТЕ-волны. Будем искать решение в виде  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(x, y)e^{ik_z z - i\omega t}$ . Подставляя это выражение в уравнение Гельмгольца, получим

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}_0}{\partial y^2} + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) \mathbf{E}_0 = 0 \quad (33.1)$$

Пусть вектор  $\mathbf{E}$  параллелен оси  $y$ . Тогда из теоремы Гаусса ( $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ ) поле не зависит от координаты  $y$  и уравнения приходит к виду

$$\frac{d^2 E_{0y}}{dx^2} + \kappa^2 E_{0y} = 0 \quad (33.2)$$

Решение этого уравнения имеет вид  $E_{0y} = c_1 \sin \kappa x + c_2 \cos \kappa x$ . С учётом граничных условий  $E_y|_{x=0} = 0$ ,  $E_y|_{x=a} = 0$ , где  $a$  – ширина волновода вдоль оси  $x$ , получим  $c_1 = 0$ ,  $\kappa = \pi n/a$ , где  $n$  – натуральное число. Таким образом поле имеет вид

$$E_y = E_0 \sin \left( \frac{\pi n}{a} x \right) e^{ik_z z - i\omega t} \quad (33.3)$$

С учётом полученного значения  $\kappa$  имеем

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\pi^2 n^2}{a^2} + k_z^2 \quad (33.4)$$

Таким образом, существует минимальная частота волны, которая может распространяться в волноводе, называемая критической:

$$\omega_{\text{кр}} = \frac{\pi c}{a} \quad (33.5)$$

В общем случае для ТЕ-волны добавляется гармоническая зависимость от второй координаты, аналогичный член добавляется и в выражение для частот.

Следует заметить, что фазовая скорость волны в волноводе  $v_\phi = \omega/k_z$  превышает скорость света. Однако групповая скорость, с которой распространяется информация и энергия, меньше.

Рассмотрим теперь *объёмный резонатор* – устройство, в котором накапливается ЭМ энергия от внешнего источника. Мы будем рассматривать резонатор в форме параллелепипеда с размерами  $L_x$ ,  $L_y$  и  $L_z$ . Граничные условия остаются теми же, что и при рассмотрении прямоугольного волновода, с добавлением граничных условий вдоль оси  $z$ . В итоге получим зависимость вида

$$E_x = E_{0x} \cos k_x x \sin k_y y \sin k_z z e^{i\omega t} \quad (33.6)$$

$$E_y = E_{0y} \sin k_x x \cos k_y y \sin k_z z e^{i\omega t} \quad (33.7)$$

$$E_z = E_{0z} \sin k_x x \sin k_y y \cos k_z z e^{i\omega t} \quad (33.8)$$

где в силу граничных условий  $k_x L_x = \pi n$ ,  $k_y L_y = \pi m$ ,  $k_z L_z = \pi l$ . Для допустимых частот имеем:

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\pi^2 n^2}{L_x^2} + \frac{\pi^2 m^2}{L_y^2} + \frac{\pi^2 l^2}{L_z^2} \quad (33.9)$$

Минимальная допустимая частота называется основной модой и определяется из этой формулы с учётом размеров волновода (среди чисел  $n, m, l$  допустим только один ноль, иначе поля в резонаторе нет).

## 34 Плазма. Плазменная частота. Диэлектрическая проницаемость плазмы. Дебаевский радиус.

**Определение 34.1.** Плазмой называется частично или полностью ионизированный квазинейтральный газ. Квазинейтральность означает, что количества положительных и отрицательных зарядов почти одинаковы в любом выделенном объёме.

Как поведение плазмы во внешних электромагнитных полях (на которые обычный газ не реагирует) так и её механические свойства значительно отличаются от свойств газа из-за электромагнитного взаимодействия между частицами. Свойства плазмы в целом в значительной степени определяются именно электродинамикой.

Выделим в плазме объём в форме параллелепипеда, оси координат направим вдоль его сторон. Будем считать, что заряд ионов равен единицы. В силу квазинейтральности концентрации ионов и электронов в этом объёме совпадают:  $n_e = n_i$ . Предположим, что ионы сместились на расстояние  $x$  вдоль оси  $Ox$ , а ионы остались неподвижными, поскольку их масса много больше массы электронов. В результате на краях параллелепипеда образуется поверхностный заряд

$$\sigma = \pm \frac{q}{S} = \pm \frac{n_e e S x}{S} = \pm n_e e x \quad (34.1)$$

$$E = 4\pi\sigma = 4\pi n_e e x \quad (34.2)$$

Запишем уравнения движения электронов:

$$m_e \ddot{x} = -eE = -4\pi n_e e^2 x = -\omega_p^2 m_e x \quad (34.3)$$

Мы получили уравнение колебаний. Частота этих колебаний  $\omega_p = \sqrt{4\pi n_e e^2 / m_e}$  называется *плазменной частотой*. Колебания, совершаемые электронами в плазме относительно ионов называются *плазменными колебаниями*.

Оценим амплитуду плазменных колебаний. Средняя скорость движения электронов есть средняя скорость теплового движения  $\bar{v}_e \sim \sqrt{kT_e / m_e}$ , амплитуда имеет порядок  $r \sim \bar{v}_e / \omega_p$ . Получим

$$r_D = \frac{kT_e}{4\pi n_e e^2} \quad (34.4)$$

Полученная величина называется *дебаевским радиусом*. Дебаевский радиус это одна из основных характеристик плазмы: он характеризует характерный масштаб, на котором может существенно нарушаться квазинейтральность.

Если внести в плазму точечный заряд  $q$ , то из-за кулоновского взаимодействия произойдёт пространственное перераспределение частиц плазмы и внесённый заряд будет окружён зарядами противоположного знака. Потенциал внесённого заряда с учётом окружающих его быстро затухает на расстояниях порядка дебаевского радиуса, поэтому его также называют *радиусом экранирования*. На расстояниях больших дебаевского радиуса внесённый заряд оказывают слабое влияние на плазму.

Рассмотрим падение электромагнитной волны на плазму. Ввиду тяжести ионов под действием излучения двигаются в основном электроны. Более того, скорость электронов обычно мала по сравнению со скоростью света  $v \ll c$ , поэтому можно пренебречь взаимодействием с магнитным полем по сравнению со взаимодействием с электрическим. Наконец, смещение электронов мало, поэтому мы учтём только зависимость электрического поля от времени. Уравнение движение электрона во внешнем поле имеет вид

$$m \ddot{x} = -eE = -eE_0 \cos \omega t$$

Решение этого уравнения имеет вид



$$x = \frac{eE_0}{m\omega^2} \cos \omega t = \frac{eE}{m\omega^2}$$

Электроны слабо смещаются относительно положения равновесия и можно уподобить их связанным зарядам в диэлектрике. Тогда возникающий дипольный момент  $p = -ex = -e^2 E / m\omega^2$ . В векторном виде  $\mathbf{p} = -e^2 \mathbf{E} / m\omega^2$ . пусть  $N$  – концентрация электронов. Тогда для вектора поляризации имеем

$$\mathbf{P} = -N\mathbf{p} = -\frac{Ne^2}{m\omega^2} \mathbf{E} = \alpha \mathbf{E} \quad (34.5)$$

Учитывая, что диэлектрическая проницаемость плазмы равна  $\varepsilon = 1 + 4\pi\alpha$ , получим

$$\varepsilon = 1 - \frac{4\pi Ne^2}{m\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (34.6)$$

В отличие от диэлектриков диэлектрическая проницаемость плазмы меньше единицы, причем при частотах меньших плазменной она отрицательна: такие волны не проходят в плазму, они экспоненциально затухают при распространении в ней.

## Часть IV

# Оптика

Под интенсивностью света в этом разделе мы будем понимать величину  $I = \overline{E^2}$ , если не оговорено противное.

### 35 Интерференция волн. Временная и пространственная когерентность. Соотношение неопределенностей.

Рассмотрим точку пространства, в которой пересекаются два пучка света. Напряжённость электрического поля в этой точке равна их сумме:  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ . Рассчитаем интенсивность:

$$I = \overline{E^2} = \overline{E_1^2} + \overline{E_2^2} + 2\overline{(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2)} = I_1 + I_2 + I_{12}$$

Таким образом в общем случае суммарная интенсивность не равна сумме интенсивностей падающих волн. Слагаемое  $I_{12}$  учитывает взаимодействие пучков света. Если источники света независимы, то оно обратится в нуль. Такие источники света называются *некогерентными*.

Пусть падающие волны имеют в этой точке вид  $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_{01} \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$ ,  $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{02} \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$ . Тогда для части скалярного произведения, зависящей от времени, имеем

$$\cos(\omega_1 t + \varphi_1) \cos(\omega_2 t + \varphi_2) = \frac{1}{2} (\cos((\omega_1 + \omega_2)t + \varphi_1 + \varphi_2) + \cos((\omega_1 - \omega_2)t + \varphi_1 - \varphi_2))$$

Видно, что если частоты волн отличаются, то при усреднении этот член обратится в нуль. Таким образом, интерференция возможна только в случае одинаковых частот. *Когерентность* означает, что разность фаз остаётся постоянной во времени. Одной из характеристик интерференционной картины является *видность*  $V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$ , характеризующая контрастность.

Одной из наиболее классических интерференционных схем является схема Юнга (рис. 35.1): два когерентных источника  $S_1$ , и  $S_2$  создаются источником  $S$  с помощью щелей. Разность фаз в точке наблюдения будет равна  $k\Delta$ , где  $\Delta$  – оптическая разность хода (с учётом показателя преломления). Если расстояние между щелями много меньше расстояния до экрана, то  $\Delta \approx \frac{Dx}{L}$ . Для схемы Юнга интенсивность равна

$$I = I_0 \left( 1 + \cos k \frac{Dx}{L} \right) \quad (35.1)$$

где  $I_0$  – интенсивность источников  $S_1$  и  $S_2$ . Видность интерференционной картины в схеме Юнга равна 1.

Рассмотрим случай некогерентного источника. Пусть, сначала, он излучает на двух длинах волн  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  с одинаковой интенсивностью. Интерференционные картины для каждой длины волны возникнут независимо друг от друга в силу некогерентности, соответственно для суммарной интенсивности имеем:

$$I = 2I_0(1 + \cos k_1 \Delta) + 2I_0(1 + \cos k_2 \Delta)$$

Пользуясь тригонометрической формулой для суммы косинусов, получим

$$I = 4I_0 \left( 1 + \cos \frac{k_1 + k_2}{2} \Delta + \cos \frac{k_1 - k_2}{2} \Delta \right) \quad (35.2)$$

Второй косинус осциллирует намного медленнее первого и определяет видность  $V = \left| \cos \frac{k_1 - k_2}{2} \Delta \right|$ .

Пусть теперь интенсивность распределена в некотором интервале  $\delta k$ :  $I_0 = J_0 \delta k$ . Тогда для интенсивности на экране имеем  $dI = 2dI_0(1 + \cos k\Delta)$ ,  $dI_0 = J_0 dk$ . Проинтегрируем:

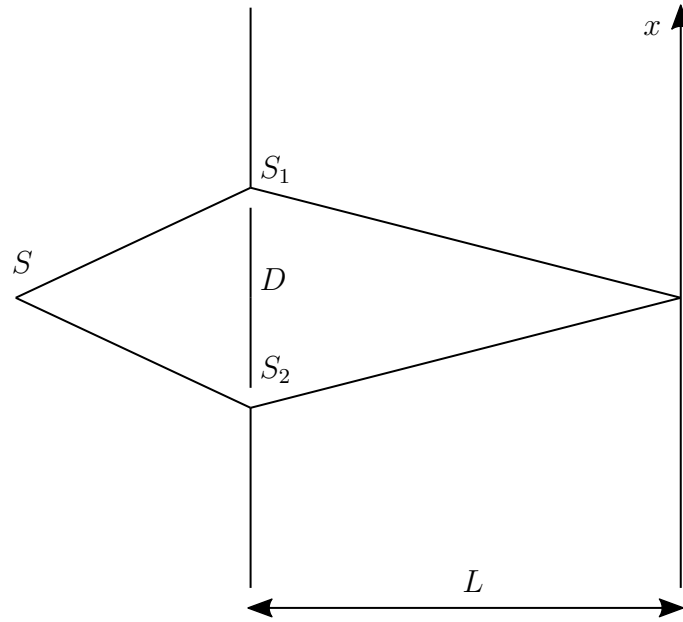


Рис. 35.1: Схема Юнга

$$I = \int_{k_0 - \delta k/2}^{k_0 + \delta k/2} 2J_0(1 + \cos k\Delta) dk = 2J_0 \left( k + \frac{\sin k\Delta}{\Delta} \right) \Big|_{k_0 - \delta k/2}^{k_0 + \delta k/2}$$

С учётом тригонометрической формулы для разности синусов получим

$$I = 2I_0 \left( 1 + \frac{\sin \frac{\delta k}{2} \Delta \cos k_0 \Delta}{\frac{\delta k}{2} \Delta} \right) \quad (35.3)$$

В этом случае видность равна

$$V = \left| \frac{\sin \frac{\delta k}{2} \Delta}{\frac{\delta k}{2} \Delta} \right| \quad (35.4)$$

Теперь рассмотрим случае протяжённого источника в случае схемы Юнга (рис. 35.2).

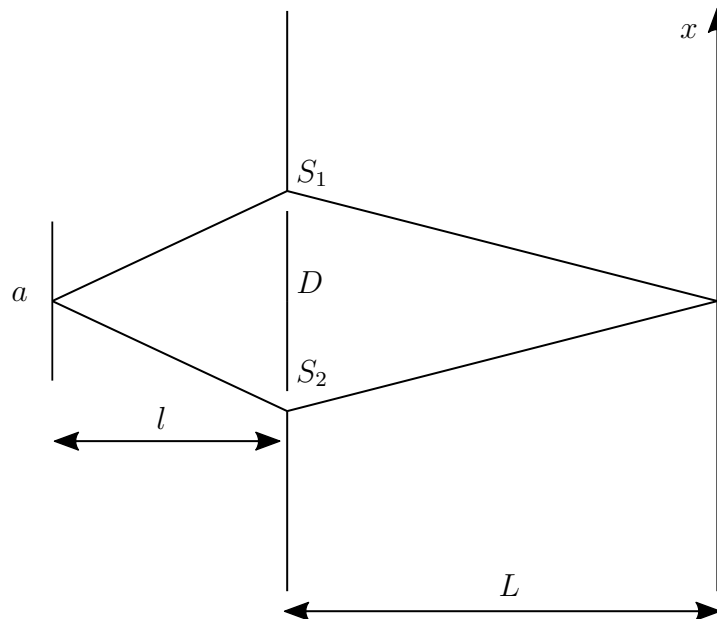


Рис. 35.2: Схема Юнга с протяжённым источником

Каждая точка источника излучает независимо, на неё приходится интенсивность  $dI_0 = \frac{I_0}{a} d\xi$ . Разность хода складывается из двух частей: разности хода до щелей и после. Тогда

$$dU = 2dI_0 \left( 1 + \cos k \left( \frac{\xi D}{l} + \frac{x D}{L} \right) \right)$$

Суммарная интенсивность

$$I = \int_{-a/2}^{a/2} 2 \frac{I_0}{a} \left[ 1 + \cos k \left( \frac{\xi D}{l} + \frac{x D}{L} \right) \right] d\xi = \frac{2I_0}{a} \left( \xi + \frac{\sin k \left( \frac{\xi D}{l} + \frac{x D}{L} \right)}{\frac{k D}{l}} \right) \Big|_{-a/2}^{a/2}$$

С учётом выражения для разности синусов

$$I = 2I_0 \left( 1 + \frac{\sin \frac{kaD}{2l} \cos \frac{kxD}{l}}{\frac{kaD}{2l}} \right) \quad (35.5)$$

Видность:

$$V = \left| \frac{\sin \frac{kaD}{2l}}{\frac{kaD}{2l}} \right| \quad (35.6)$$

Источники, размеры и расположение которых позволяют наблюдать интерференционную картину, называются *пространственно когерентными*.

Рассмотрим прямоугольный импульс амплитуды  $A$  длительностью  $\tau$  и найдём его спектр. Преобразование Фурье:

$$a(\omega) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-i\omega t} dt = A \frac{\sin \frac{\omega \tau}{2}}{\omega/2}$$

Эта величина убывает с ростом  $\omega$  и первый раз обращается в ноль при  $\omega \tau = 2\pi$ . Таким образом характерная спектральная ширина волнового пакета

$$\Delta \omega \tau = 2\pi \quad (35.7)$$

Полученное соотношение называется *соотношением неопределённостей*.

## 36 Принцип Гюйгенса-Френеля. Зоны Френеля. Дифракция Френеля и Фраунгофера. Границы применимости геометрической оптики.

**Определение 36.1.** Дифракцией называется отклонение распространения света от законов геометрической оптики.

Примером дифракции является проникновение света в зону геометрической тени. Ключевым в описании дифракционных явлений является *принцип Гюйгенса-Френеля*: каждая точка волнового фронта является источником вторичной сферической волны, при том источники вторичного волнового фронта когерентны и интерферируют. Количественным описанием этого принципа является интеграл Френеля:

$$E = \int_{\Sigma} K(\varphi) E(\mathbf{r}) \frac{e^{ik\rho}}{\rho} d\sigma \quad (36.1)$$

Где интеграл берётся по поверхности волнового фронта  $\Sigma$ , а  $K(\varphi)$  - множитель, зависящий от угла наблюдения, стремящийся к нулю при углах близких к  $90^\circ$ .

Для вычисления этого интеграла удобно разбить волновой фронт на зоны Френеля. Если, например, рассмотреть фронт сферической волны, то первая зона Френеля будет строиться таким образом, чтобы расстояние от точки наблюдения до этой зоны будет  $r + \lambda/2$ , где  $r$  – расстояние от точки наблюдения до сферы. Таким образом, соседние зоны Френеля находятся в противофазе друг к другу. Так, например, если открыты первые две зоны Френеля, интенсивность в точке наблюдения будет минимальной.

Рассмотрим, например, дифракцию на круглом отверстии. Точные расчёты показывают, что для этой задачи радиус  $m$ -ой зоны Френеля равен  $r_m = \sqrt{\lambda z m}$  где  $z$  – расстояние до точки наблюдения. В зависимости от числа открытых зон Френеля можно выделить несколько случаев:

- $m \gg 1$  – открыто очень большое число зон Френеля. Это случай геометрической оптики. Для размеров имеем  $R \gg \lambda$ , то есть характерные размеры значительно превышают длину волны.
- $m \sim 1$  – открыто несколько зон Френеля. Этот случай называется дифракцией Френеля.
- $m < 1$  – открыто меньше одной зоны Френеля. Реализуется на больших расстояниях (на бесконечности). Особенность дифракции Фраунгофера в том, что она *подобна*, то есть световое поле есть функция угла. В связи с этим для наблюдения дифракции Фраунгофера используют линзы (бесконечность «переносится» в фокальную плоскость линзы).

## 37 Спектральные приборы (призма, дифракционная решетка, интерферометр Фабри-Перо) и их основные характеристики.

*Спектральными приборами* называются оптические инструменты, предназначенные для пространственного разделения спектральных компонент излучения. Они характеризуются несколькими основными параметрами:

1. *Угловая дисперсия*  $D_\theta = \frac{d\theta}{d\lambda}$  характеризует угловое расстояние между спектральными линиями.
2. *Линейная дисперсия*  $D_l = \frac{dl}{d\lambda}$  характеризует линейное расстояние между спектральными линиями.
3. *Разрешающая способность*  $R = \frac{\lambda}{\delta\lambda}$ , где  $\delta\lambda$  – минимальная разность разрешимых спектральных линий.
4. *Дисперсионная область*  $\Delta\lambda$  – область, в которой прибор применим (в больших областях возможно, например, перекрывание соседних линий).

Рассмотрим некоторые примеры спектральных приборов.

### 37.1 Призма

Действие призмы как спектрального прибора основано на зависимости показателя преломления вещества от длины волны:  $\frac{dn}{d\lambda}$ . Таким образом разные спектральные линии отклоняются на разные углы.

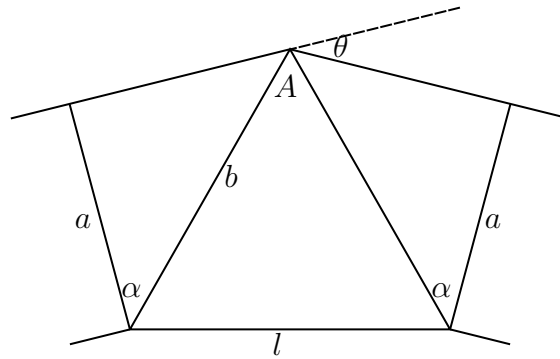


Рис. 37.1: Призма

Для определения спектральных характеристик призмы воспользуемся принципом таутохронизма: лучи одного волнового фронта должны проходить одинаковый оптический путь. С учётом рис. 37.1:

$$ln = 2b \sin \alpha \left| \pi = \theta + 2 \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right| \Rightarrow ldn = 2b \cos \alpha d\alpha = ad\theta$$

Отсюда для угловой дисперсии имеем

$$D_\theta = \frac{l}{a} \frac{dn}{d\lambda} \quad (37.1)$$

Пусть  $a$  – ширина волнового фронта, прошедшего через диафрагму. Тогда имеет место дифракционное расширение  $\delta\theta = \frac{\lambda}{a}$ . Для разрешения спектральных линий нужно, чтобы угол между ними составлял больше  $\delta\theta$ :  $\frac{l}{a}dn > \frac{\lambda}{a}$ . Отсюда получим разрешающую способность призмы

$$\frac{\lambda}{d\lambda} < l \frac{dn}{d\lambda} = R \quad (37.2)$$

## 37.2 Дифракционная решётка

В случае дифракционной решётки направление на максимумы имеет вид

$$\lambda m = b \sin \theta_m \quad (37.3)$$

А для ближайших к нему минимумов

$$\lambda \left( m + \frac{1}{N} \right) = b \sin \theta_m \quad (37.4)$$

где  $b$  – период решётки,  $m$  – порядок максимума,  $N$  – число штрихов. Получим спектральные характеристики дифракционной решётки.

Дифференцируя выражение для максимума, получим угловую дисперсию:

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{m}{b \cos \theta_m} \quad (37.5)$$

Для корректного разрешения необходимо, чтобы спектры соседних порядков не перекрывались. Тогда для дисперсионной области  $m(\lambda + \Delta\lambda) = (m + 1)\lambda$

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{m} \quad (37.6)$$

Наконец, условие разрешения двух спектральных линий  $\lambda$  и  $\lambda'$ :

$$\begin{aligned} b \sin \theta_m &= \left( m + \frac{1}{N} \right) \lambda \\ b \sin \theta_m &= m \lambda' \end{aligned}$$

Тогда  $(m + 1/N)\lambda = m\lambda'$  и  $\delta\lambda = \lambda/(Nm)$ . Разрешающая способность дифракционной решётки:

$$R = mN \quad (37.7)$$

## 37.3 Интерферометр Фабри-Перо

Интерферометр Фабри-Перо представляет собой систему из двух параллельных пластинок с высокими коэффициентами отражения. При таких условиях интерференционная картина представляет собой последовательность резких высоких максимумов. Если  $h$  – расстояние между пластинками, то для направления на максимум:  $m\lambda = 2h \cos \theta_m$ . Разрешающая способность интерферометра Фабри-Перо:

$$R = \frac{\pi m \sqrt{R}}{1 - R} \quad (37.8)$$

где  $R$  – коэффициент отражения по энергии, а  $m$  – номер максимума. Дифференцируя выражение для направления на максимум, получим угловую дисперсию:

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{m}{2h \sin \theta_m} \quad (37.9)$$

## 38 Дифракционный предел разрешения оптических и спектральных приборов. Критерий Рэлея.

Вычисление интеграла Френеля для случая дифракции Фраунгофера показывает, что первый минимум интенсивности находится под углом  $\lambda/D$ , где  $D$  – ширина прямоугольной щели ( $1.22\lambda/D$  для круглой). В пределах этого угла находится основная часть излучения. В таком случае изображением точечного источника при прохождении света через линзу размера  $D$  будет не точка, а пятно, причем угловой размер этого порядка  $\lambda/D$ . Если источников несколько, то при малом расстоянии между источниками их пятна Эйри будут перекрываться и для наблюдателя выглядеть как одно пятно.

*Критерий Рэлея* устанавливает условие различимости источников: расстояние центрами (максимумами) дифракционных пятен должно быть не меньше радиуса одного из пятен (то есть максимум одного совпадает с минимумом другого). В соответствии с этим критерием говорят о *разрешающей способности оптических приборов* – минимальном угловом или линейном расстоянии, при котором два точечных источника воспринимаются отдельными.

Основным элементом оптических приборов является линза, рассмотрим применение критерия Рэлея для неё: пусть два источника находятся на расстоянии  $L$  от линзы и  $l$  друг от друга. Тогда расстояние между их изображениями в фокальной плоскости  $\delta x = f\theta = f\frac{l}{L}$  (при малых углах). Для разрешимости необходимо

$$f\theta > f\frac{\lambda}{D} \quad (38.1)$$

Для углового и линейного размера (в случае круглого отверстия добавляется множитель 1.22):

$$\theta > \frac{\lambda}{D}, \quad l > L\frac{\lambda}{D} \quad (38.2)$$

В случае спектральных приборов дифракционный предел играет ту же роль, однако ставится задача различимости не точечных источников, а спектральных линий. В большинстве случаев для определения разрешимости линий так-же используют критерий Рэлея.



### 39 Пространственное фурье-преобразование в оптике. Дифракция на синусоидальных решетках. Теория Аббе формирования изображения.

Одной из задач волновой оптики является решения задач дифракции – расчёт волновых полей за различным препятствиями. Одним из способов решения этих задач является метод Гюйгенса-Френеля, где поле представляется как суперпозиция сферических волн. Альтернативным является *метод Рэлея*, при котором волновое поле рассматривается как суперпозиция плоских волн.

Если рассматривать волновое поле вида  $E(\mathbf{r}, t) = E(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$ , то его амплитуда должна удовлетворять уравнению Гельмгольца.

$$\Delta E + k^2 E = 0, \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (39.1)$$

Частным решением этого уравнения является плоская волна  $A = A_0 e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ ,  $\mathbf{k}^2 = k^2$ .

Пусть поле задано в плоскости  $z = 0$ :

$$E|_{z=0} = E_0 e^{ik_x x + ik_y y} \quad (39.2)$$

Необходимо найти поле при  $z > 0$ . Уравнению Гельмгольца с таким граничным условиям удовлетворяет функция

$$E = E_0 e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} \quad (39.3)$$

где  $k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}$ . Это и есть решение поставленной задачи.

В более общем виде функцию  $E$  можно разложить в ряд Фурье или интеграл Фурье, то есть

$$E|_{z=0} = \sum_n E_n e^{i(k_{xn} x + k_{yn} y)} \quad (39.4)$$

В таком случае решение уравнения Гельмгольца имеет аналогичный вид для каждой составляющей, то есть

$$E = \sum_n E_n e^{i(k_{xn} x + k_{yn} y + k_{zn} z)} \quad (39.5)$$

где  $k_{zn} = \sqrt{k^2 - k_{xn}^2 - k_{yn}^2}$ . Задача сводится к разложению в ряд или интеграл Фурье исходного волнового поля.

Метод Рэлея хорошо подходит для решения задач дифракции на периодических структурах. В качестве примера рассмотрим амплитудную синусоидальную решётку с функцией пропускания  $T = T_0 (1 + m \cos \Omega x)$ , где  $b = 2\pi/\Omega$  – период решётки. Пусть на неё нормально падает волна  $E_0$ . Тогда в плоскости решётки поле имеет вид

$$E(x) = E_0 T_0 (1 + m \cos \Omega x) = E_0 T_0 \left( 1 + m \frac{e^{i\Omega x} + e^{-i\Omega x}}{2} \right) \quad (39.6)$$

Для поля за решёткой ( $z > 0$ ) имеем:

$$E(x, z) = E_0 T_0 e^{ikz} + E_0 T_0 m e^{i\sqrt{k^2 - \Omega^2} z} \cos \Omega x \quad (39.7)$$

где  $k$  – волновое число падающей волны.

Как было сказано ранее, в методе Рэлея волновое поле представляется суперпозицией плоских волн, то есть осуществляется пространственное преобразование Фурье. Пространственное

разделение фурье-гармоник можно осуществить, в частности, с помощью линзы: волны, направленные под одним углом, собираются в одну точку в фокальной плоскости линзы. В связи с этим её называют *фурье-плоскостью*.

Рассмотрим теорию Аббе формирования изображений. Изображение с помощью одиночной линзы формируется в два этапа. Сначала линза осуществляет пространственное преобразование Фурье и в фокальной плоскости линзы формируется *первичное изображение*. Затем свет распространяется до сопряжённой плоскости, в которой формируется изображение предмета (*вторичное изображение*). Распространение от фокальной до сопряжённой плоскости соответствует обратному преобразованию Фурье.

## 40 Принципы голографии. Голограмма Габора. Голограмма с наклонным опорным пучком. Объемные голограммы.

**Определение 40.1.** Голография – метод точной записи волновых полей с учётом амплитуды и фазы.

Основным отличием от фотографии является именно запись фазы, а не только интенсивности. Для записи голограммы некоторого предмета используется две волны: первая – *предметная волна*, вторая – *опорная волна*. результат их интерференции записывается на фотоэмульсии, в результате чего записывается и информация о фазе предметной волны относительно опорной. Результатом является фотопластинка с некоторой функцией пропускания  $T(x)$ . При освещении голограммы волной, идентичной опорной, будет восстановлено изображение предмета.

*Схемой Габора* называется голографическая схема, при которой опорная волна падает на фотопластинку нормально в том же направлении, что и предметная волна.

В качестве примера рассмотрим запись плоской волны, падающей под углом  $\theta$  к нормали в схеме Габора. Волновые векторы падающей и опорной волны  $\mathbf{k}_2$  и  $\mathbf{k}_1$  соответственно, причём  $k_1 = k_2 = k$ . Имеем

$$E = E_1 e^{ik_1 z} + E_2 e^{ik_2 \mathbf{r}} \quad (40.1)$$

Для интенсивности интерферирующих волн в плоскости голограммы:

$$I = E_1^2 + E_2^2 + 2E_1 E_2 \cos(k \sin \theta x) \quad (40.2)$$

Пропускающая функция фотопластинки будет иметь вид  $T = T_0(1 + m \cos(k \sin \theta x))$ . В соответствии с принципами фурье-оптики, при освещении пластинки волной, аналогичной опорной, мы получим:

$$E = E_0 T_0 e^{ikz} + \frac{mT_0}{2} e^{i(k \sin \theta x + k \cos \theta z)} + \frac{mT_0}{2} e^{i(k \sin \theta x - k \cos \theta z)} \quad (40.3)$$

Помимо записанной волны мы также получили восстанавливающую волну и сопряжённую волну.

Рассмотрим теперь голограмму с наклонным пучком. Пусть опорная волна имеет вид  $E = E_0 e^{i(k \cos \theta z + k \sin \theta x)}$ , а предметная в плоскости голограммы –  $a(x) e^{i\psi(x)}$ . Введём обозначение  $u = k \sin \theta$ . Тогда интенсивность имеет вид

$$I(x) = E_0^2 + a^2 + E_0 a (e^{i(u x - \psi(x))} + e^{i(-u x + \psi(x))}) \quad (40.4)$$

Пусть функция пропускания полученной фотопластинки имеет вид  $T = T_0 * I(x)$ . Тогда при просвечивании волной, аналогичной опорной, мы получим следующее распределение волнового фронта в плоскости  $z = 0$ :

$$E = E_0 T_0 (E_0^2 + a^2) e^{iu x} + T_0 E_0^2 a e^{i\psi(x)} + T_0 E_0^2 a e^{i(2u x - \psi(x))} \quad (40.5)$$

Первое слагаемое соответствует амплитудно-модулированной восстанавливающей волне, второе – изображению предмета, а третье – сопряжённому изображению. На благодаря множителю  $e^{i2u x}$  сопряжённая волна идёт в другом направлении, что позволяет выделить записанное изображение предмета.

До сих пор рассматривались голограммы, основанные на записи интерференционной картины в тонком слое светочувствительного материала. Возможно также создание *объёмных* голограмм, в которых картина интерференция записывается в некотором объёме материала. Пусть предметная волна – плоская, падающая на пластинку под углом  $\theta/2$ , а опорная имеет ту же длину волны и падает симметрично предметной. Если амплитуды одинаковы, то распределение

интенсивности будет иметь вид  $I = 2E_0^2 (1 + \cos \delta \mathbf{k} \mathbf{r})$ , где  $\delta \mathbf{k} = \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1$  – вектор, направленный вдоль оси  $x$ . В результате голограмма будет представлять собой ряд зеркальных поверхностей.

При восстановлении голограммы происходит многолучевая интерференция, при которой волны, падающие под тем же углом, что и предметная, усиливают друг друга. Если  $d$  – полученный период интерференции, то для проходящей волны должно быть выполнено условие Брэгга-Вульфа:  $2d \sin \varphi = m\lambda$ . Такую голограмму можно восстанавливать естественным светом, поскольку длины волн, не удовлетворяющие этому условию, не будут проходить через голограмму.