

LECTURE 10

BELLMAN-FORD ALGORITHM







Big-O Coding

Website: www.bigocoding.com

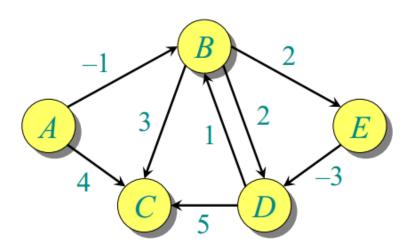


Bellman-Ford

Thuật toán **Bellman-Ford** là thuật toán tìm đường đi có chi phí nhỏ nhất từ **một đỉnh** đến **tất cả các đỉnh** còn lại trong đồ thị có hướng hoặc vô hướng, có trọng số (trọng số có thể dương **hoặc âm**).

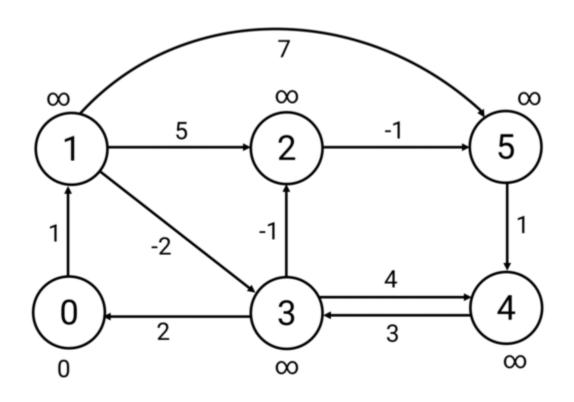
Độ phức tạp: O (E.V)

- E (Edges) là số lượng cạnh của đồ thị.
- V (Vertices) là số lượng đỉnh của đồ thị.





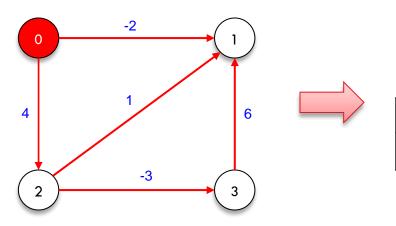
Mô phỏng cách chạy thuật toán





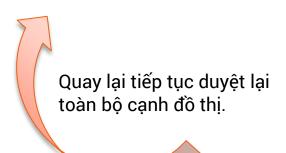
Ý tưởng của thuật toán

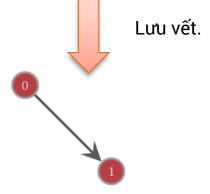
Xuất phát từ một đỉnh bất kỳ. Duyệt qua toàn bộ cạnh đồ thị.



So sánh chi phí đường đi hiện tại với đường đi trong bảng chi phí (nếu nhỏ hơn thì cập nhật)

Đỉnh	0	1	2	3
Chi phí	0	8	8	8





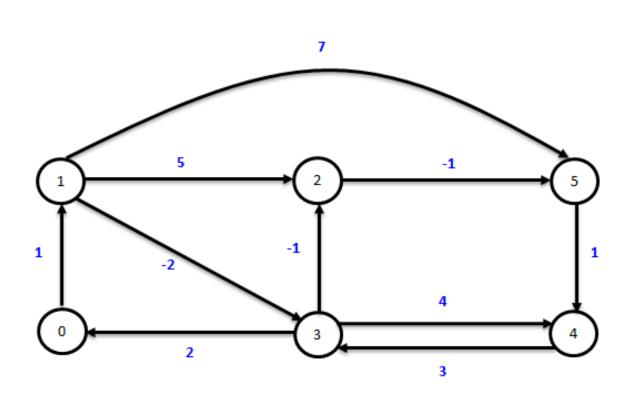
Đỉnh cha	0	1	2	3
Lưu vết	-1	0	-1	-1

→ Duyệt qua V - 1 lần thì dừng. Xuất kết quả bài toán.



Bài toán minh họa

Cho đồ thị **có hướng** như hình vẽ. Tìm đường đi **ngắn nhất (chi phí nhỏ nhất)** từ **đỉnh 0** đến **tất cả** các đỉnh khác.



Edge List

6	10		
0	1	1	
1	2	5	
1	3	-2	
1	5	7	
2	5	-1	
3	0	2	
3	2	-1	
3	4	4	
4	3	3	
5	4	1	



Bước 0: Chuẩn bị dữ liệu (1)

Chuyển danh sách cạnh vào graph.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
(0, 1, 1)	(1, 2, 5)	(1, 3, -2)	(1, 5, 7)	(2, 5, -1)	(3, 0, 2)	(3, 2, -1)	(3, 4, 4)	(4, 3, 3)	(5, 4, 1)

Trong đó, mỗi phần tử bao gồm:

source: đỉnh đầu.

target: đỉnh đích.

weight: trong số.

Mảng chứa chi phí đường đi dist.

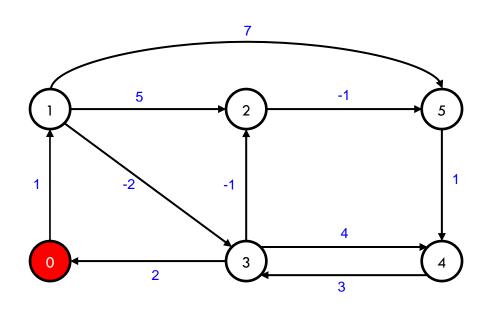
Đỉnh	0	1	2	3	4	5
Chi phí	8	~	8	8	8	8

Mảng lưu vết đường đi path.

Đỉnh cha	0	1	2	3	4	5
Lưu vết	-1	-1	-1	-1	-1	-1



Bước 0: Chuẩn bị dữ liệu (2)



Gán chi phí cho đỉnh bắt đầu đi (đỉnh 0): dist[0] = 0

dist

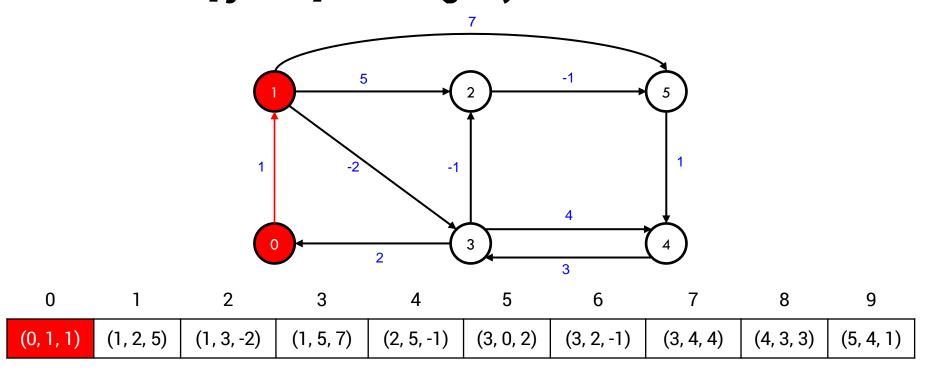
Đỉnh	0	1	2	3	4	5
Chi phí	0	∞	8	8	8	8



BƯỚC 1 CHẠY VÒNG LẶP DUYỆT QUA DANH SÁCH CẠNH LẦN 1

Big-O Blue

Bước 1: Chạy thuật toán (j=0)



dist

Đỉnh	0	1	2	3	4	5
Chi phí	0	8	∞	∞	∞	∞

Lấy cạnh đầu tiên của graph (u = 0, v = 1, w = 1) $d\hat{e}$ xem xét:

- Nếu chi phí tại dist[u] khác ∞ (0 khác ∞)
- Và chi phí dist[u] + w < dist[v] (0 + 1 < ∞)
- → Cập nhật dist[v] = dist[u] + w = 1.



Bước 1: Chạy thuật toán (j=0)

Cập nhật dist[v] = dist[u] + w = 0 + 1 = 1.

Cập nhật chi phí đỉnh đang xét (đỉnh 1) dist[1] = 1.

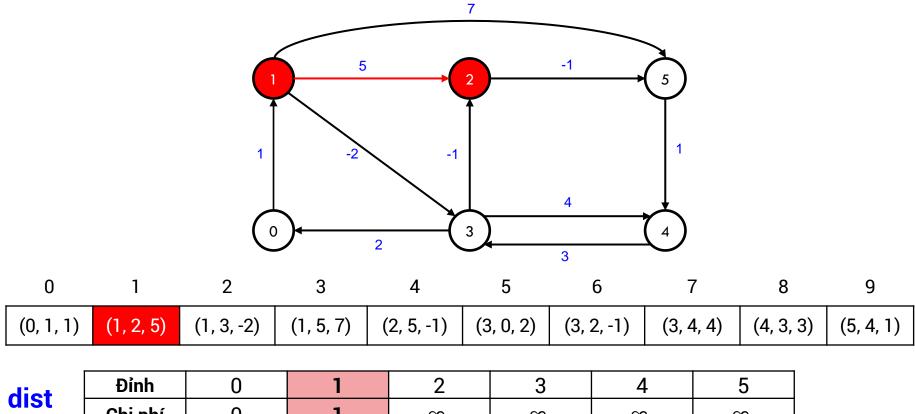
dist

Đỉnh	0	1	2	3	4	5
Chi phí	0	1	∞	8	8	8

Xét cạnh (0, 1) → cập nhật giá trị mảng lưu vết path[1] = 0.

Đỉnh cha	0	1	2	3	4	5
Lưu vết	-1	0	-1	-1	-1	-1

Bước 1: Chạy thuật toán (j=1)



Đỉnh	0	1	2	3	4	5
Chi phí	0	1	8	8	8	∞

Lấy cạnh tiếp theo của graph (u = 1, v = 2, w = 5) để xem xét:

- Nếu chi phí tại dist[u] khác ∞ (1 khác ∞) ✓
- Và chi phí dist[u] + w < dist[v] $(1 + 5 < \infty)$
- → Cập nhật dist[v] = dist[u] + w = 6.



Bước 1: Chạy thuật toán (j=1)

Cập nhật dist[v] = dist[u] + w =
$$1 + 5 = 6$$
.

Cập nhật chi phí đỉnh đang xét (đỉnh 2) dist[2] = 6.

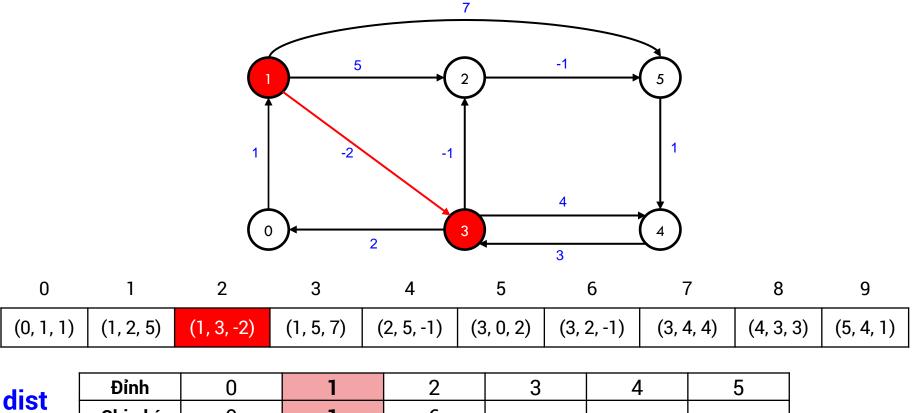
dist

Đỉnh	0	1	2	3	4	5
Chi phí	0	1	6	8	8	8

Xét cạnh (1, 2) → cập nhật giá trị mảng lưu vết path[2] = 1.

Đỉnh cha	0	1	2	3	4	5
Lưu vết	-1	0	1	-1	-1	-1

Bước 1: Chạy thuật toán (j=2)



Đỉnh	0	1	2	3	4	5
Chi phí	0	1	6	∞	8	∞

Lấy cạnh tiếp theo của graph (u = 1, v = 3, w = -2) để xem xét:

- Nếu chi phí tại dist[u] khác ∞ (1 khác ∞) ✓
- Và chi phí dist[u] + w < dist[v] (1 + (-2) < ∞)
- → Cập nhật dist[v] = dist[u] + w = -1.



Bước 1: Chạy thuật toán (j=2)

Cập nhật dist[v] = dist[u] + w =
$$1 + (-2) = -1$$
.

Cập nhật chi phí đỉnh đang xét (đỉnh 3) dist[3] = -1.

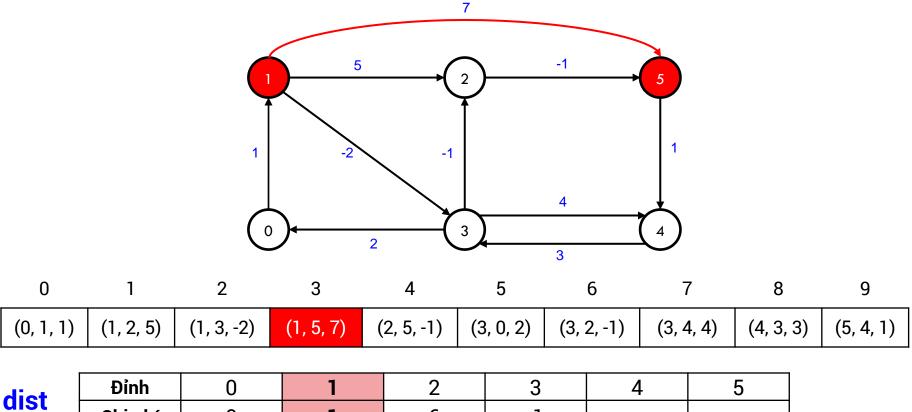
dist

Đỉnh	0	1	2	3	4	5
Chi phí	0	1	6	-1	8	8

Xét cạnh (1, 3) → cập nhật giá trị mảng lưu vết path[3] = 1.

Đỉnh cha	0	1	2	3	4	5
Lưu vết	-1	0	1	1	-1	-1

Bước 1: Chạy thuật toán (j=3)



Đỉnh	0	1	2	3	4	5
Chi phí	0	1	6	-1	8	∞

Lấy cạnh tiếp theo của graph (u = 1, v = 5, w = 7) để xem xét:

- Nếu chi phí tại dist[u] khác ∞ (1 khác ∞) ✓
- Và chi phí dist[u] + w < dist[v] $(1 + 7 < \infty)$
- → Cập nhật dist[v] = dist[u] + w = 8.



Bước 1: Chạy thuật toán (j=3)

Cập nhật dist[v] = dist[u] + w =
$$1 + 7 = 8$$
.

Cập nhật chi phí đỉnh đang xét (đỉnh 5) dist[5] = 8.

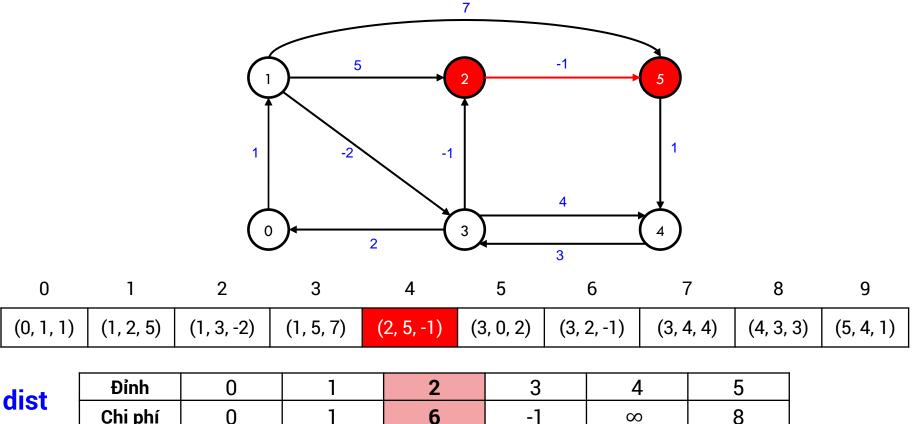
dist

Đỉnh	0	1	2	3	4	5
Chi phí	0	1	6	7-	8	8

Xét cạnh (1, 5) → cập nhật giá trị mảng lưu vết path[5] = 1.

Đỉnh cha	0	1	2	3	4	5
Lưu vết	-1	0	1	1	-1	1

Bước 1: Chạy thuật toán (j=4)



Đỉnh	0	1	2	3	4	5
Chi phí	0	1	6	-1	8	8

Lấy cạnh tiếp theo của graph (u = 2, v = 5, w = -1) để xem xét:

- Nếu chi phí tại dist[u] khác ∞ (6 khác ∞) ✓
- Và chi phí dist[u] + w < dist[v] (6 + (-1) < 8) ✓
- → Cập nhật dist[v] = dist[u] + w = 5.



Bước 1: Chạy thuật toán (j=4)

Cập nhật dist[v] = dist[u] + w =
$$6 + -1 = 5$$
.

Cập nhật chi phí đỉnh đang xét (đỉnh 5) dist[5] = 5.

dist

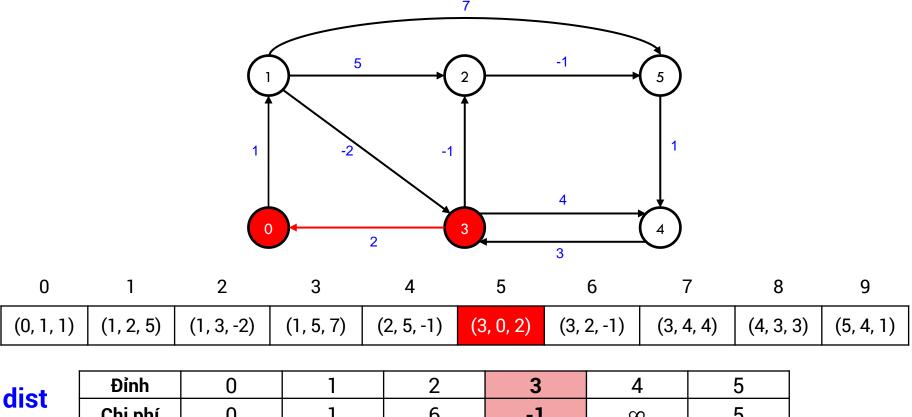
Đỉnh	0	1	2	3	4	5
Chi phí	0	1	6	-1	8	5

Xét cạnh (2, 5) → cập nhật giá trị mảng lưu vết path[5] = 2.

Đỉnh cha	0	1	2	3	4	5
Lưu vết	-1	0	1	1	-1	2



Bước 1: Chạy thuật toán (j=5)



Đỉnh	0	1	2	3	4	5
Chi phí	0	1	6	-1	8	5

Lấy cạnh tiếp theo của graph (u = 3, v = 0, w = 2) để xem xét:

Nếu chi phí tại dist[u] khác ∞ (-1 khác ∞)

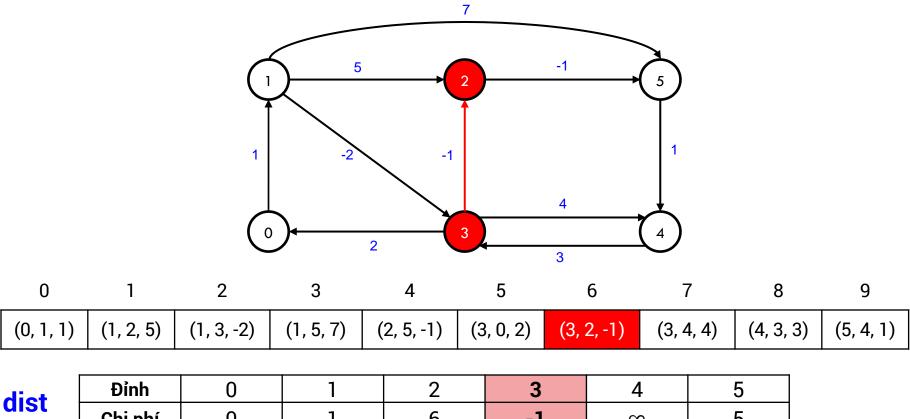


Và chi phí dist[u] + w < dist[v] ((-1) + 2 > 0)



→ Không cập nhật.

Bước 1: Chạy thuật toán (j=6)



Đỉnh	0	1	2	3	4	5
Chi phí	0	1	6	-1	8	5

Lấy cạnh tiếp theo của graph (u = 3, v = 2, w = -1) để xem xét:

- Nếu chi phí tại dist[u] khác ∞ (-1 khác ∞)
- Và chi phí dist[u] + w < dist[v] ((-1) + (-1) < 6) ✓
- Cập nhật dist[v] = dist[u] + w = -2.



Bước 1: Chạy thuật toán (j=6)

Cập nhật dist[v] = dist[u] + w =
$$-1 + -1 = -2$$
.

Cập nhật chi phí đỉnh đang xét (đỉnh 2) dist[2] = -2.

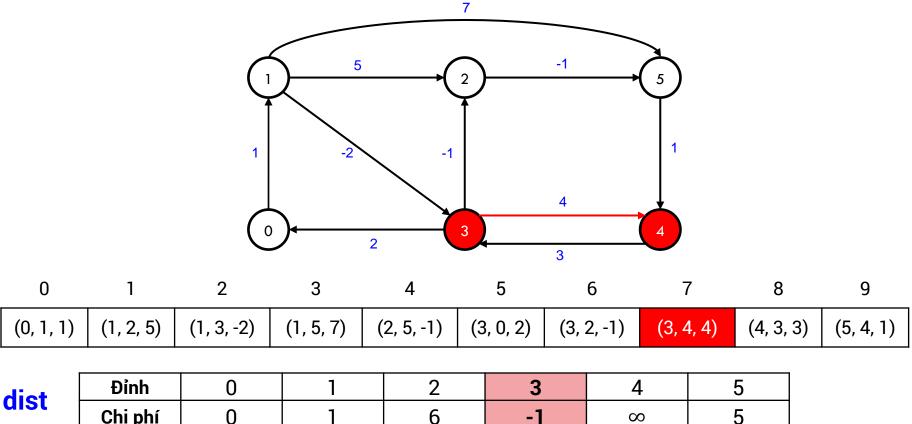
dist

Đỉnh	0	1	2	3	4	5
Chi phí	0	1	-2	-1	8	5

Xét cạnh (3, 2) → cập nhật giá trị mảng lưu vết path[2] = 3.

Đỉnh cha	0	1	2	3	4	5
Lưu vết	-1	0	3	1	-1	2

Bước 1: Chạy thuật toán (j=7)



	ÐINN	U		2	3	4	5
ı	Chi phí	0	1	6	-1	8	5

Lấy cạnh tiếp theo của graph (u = 3, v = 4, w = 4) để xem xét:

Nếu chi phí tại **dist[u] khác** ∞ (-1 khác ∞)



Và chi phí dist[u] + w < dist[v] ((-1) + 4 < ∞)

→ Cập nhật dist[v] = dist[u] + w = 3.



Bước 1: Chạy thuật toán (j=7)

Cập nhật dist[v] = dist[u] + w = -1 + 4 = 3.

Cập nhật chi phí đỉnh đang xét (đỉnh 4) dist[4] = 3.

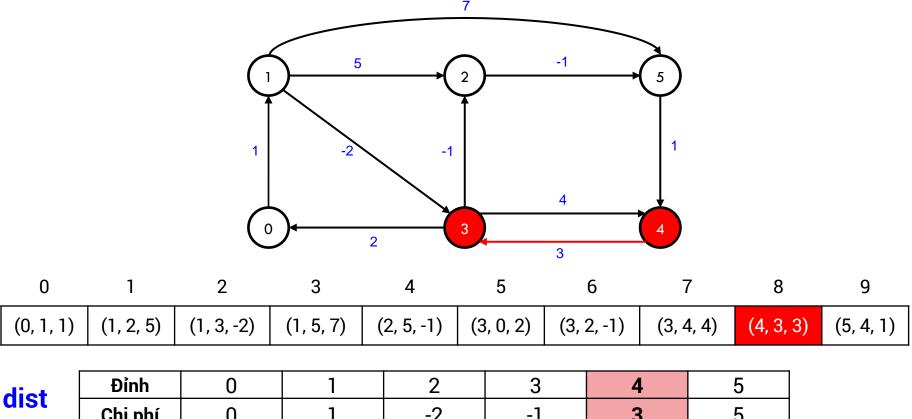
dist

Đỉnh	0	1	2	3	4	5
Chi phí	0	1	-2	-1	3	5

Xét cạnh $(3, 4) \rightarrow$ cập nhật giá trị mảng lưu vết path [4] = 3.

Đỉnh cha	0	1	2	3	4	5
Lưu vết	-1	0	3	1	3	2

Bước 1: Chạy thuật toán (j=8)

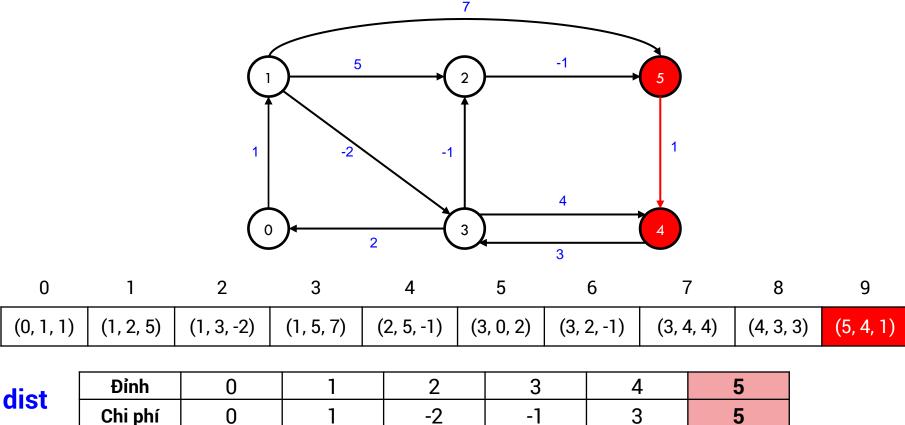


Đỉnh	0	1	2	3	4	5
Chi phí	0	1	-2	-1	3	5

Lấy cạnh tiếp theo của graph (u = 4, v = 3, w = 3) để xem xét:

- Nếu chi phí tại **dist[u] khác** ∞ (3 khác ∞) **√**
- Và chi phí dist[u] + w < dist[v] (3 + 3 > -1)
- → Không cập nhật.

Bước 1: Chạy thuật toán (j=9)



•	וווווט	U			ว	4	3
	Chi phí	0	1	-2	-1	3	5
							-

Lấy cạnh tiếp theo của graph (u = 5, v = 4, w = 1) để xem xét:

- Nếu chi phí tại dist[u] khác ∞ (5 khác ∞) √
- Và chi phí dist[u] + w < dist[v] (5 + 1 > 3)
- → Không cập nhật.

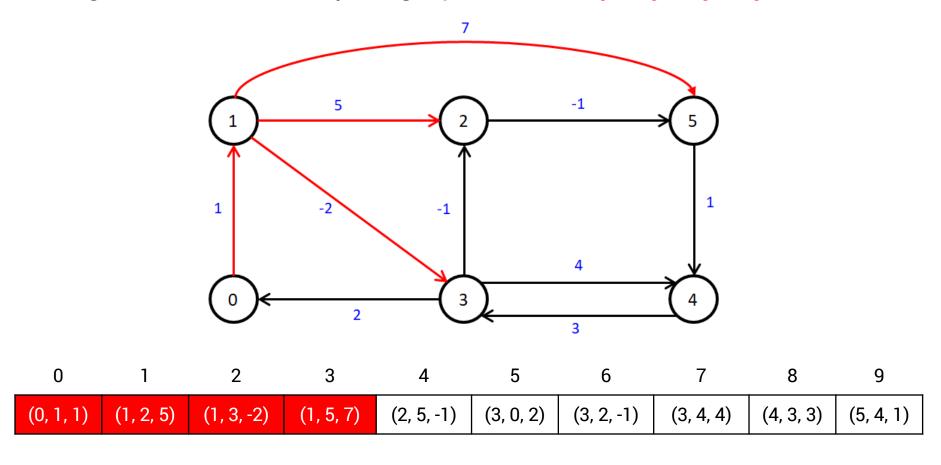


BƯỚC 2 CHẠY VÒNG LẶP DUYỆT QUA DANH SÁCH CẠNH LẦN 2



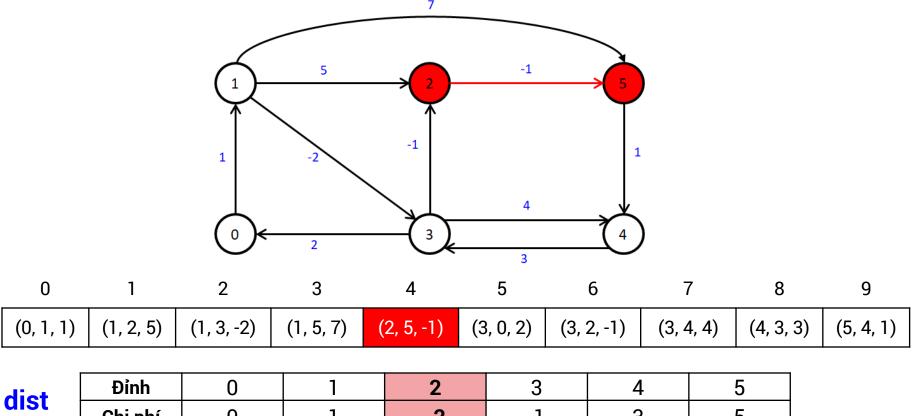
Bước 2: Chạy thuật toán

Tương tự như bước 1. Chạy vòng lặp lần lượt với j=0, j=1, j=2, j=3.



→ Không cập nhật.

Bước 2: Chạy thuật toán (j=4)



Đỉnh	0	1	2	3	4	5
Chi phí	0	1	-2	-1	3	5

Lấy cạnh tiếp theo của graph (u = 2, v = 5, w = -1) để xem xét:

- Nếu chi phí tại **dist[u] khác** ∞ (-2 khác ∞)
- Và chi phí dist[u] + w < dist[v] ((-2) + (-1) < 5) √
- → Cập nhật dist[v] = dist[u] + w = -3.



Bước 2: Chạy thuật toán (j=4)

Cập nhật dist[v] = dist[u] + w =
$$(-2)$$
 + (-1) = -3.

Cập nhật chi phí đỉnh đang xét (đỉnh 5) dist[5] = -3.

dist

Đỉnh	0	1	2	3	4	5
Chi phí	0	1	-2	-1	3	-3

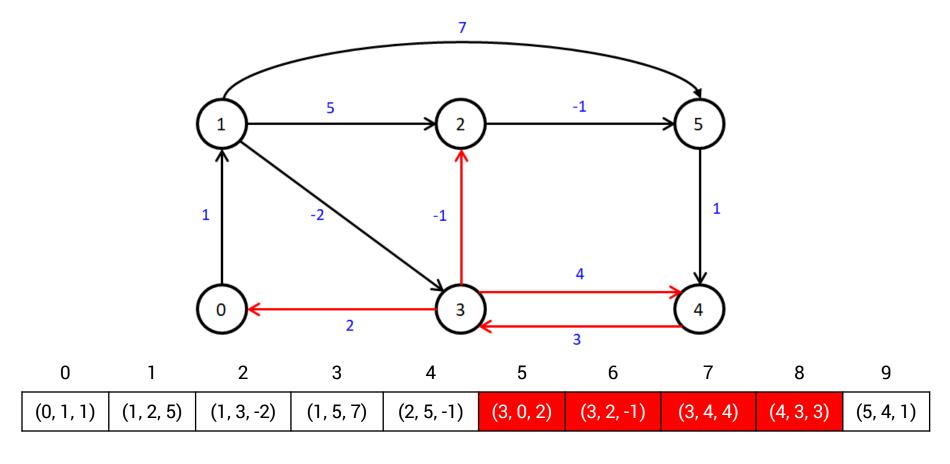
Xét cạnh (2, 5) → cập nhật giá trị mảng lưu vết path[5] = 2.

Đỉnh cha	0	1	2	3	4	5
Lưu vết	-1	0	3	1	3	2



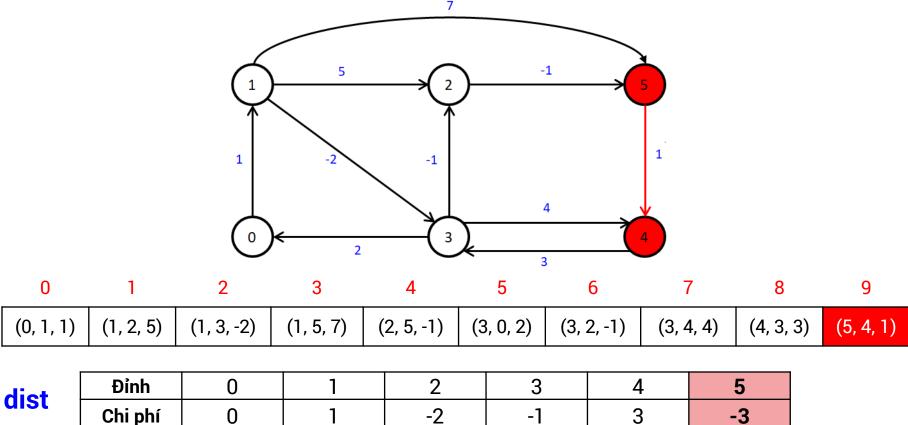
Bước 2: Chạy thuật toán

Tương tự như bước 1. Chạy vòng lặp lần lượt với j=5, j=6, j=7, j=8.



→ Không cập nhật.

Bước 2: Chạy thuật toán (j=9)



Đỉnh	0	1	2	3	4	5
Chi phí	0	1	-2	-1	3	-3

Lấy cạnh tiếp theo của graph (u = 5, v = 4, w = 1) để xem xét:

- Nếu chi phí tại dist[u] khác ∞ (-3 khác ∞)
- Và chi phí dist[u] + w < dist[v] ((-3) + 1 < 3) ✓
- → Cập nhật dist[v] = dist[u] + w = -2.



Bước 2: Chạy thuật toán (j=9)

Cập nhật dist[v] = dist[u] + w =
$$(-3)$$
 + 1 = -2.

Cập nhật chi phí đỉnh đang xét (đỉnh 4) dist[4] = -2.

dist

Đỉnh	0	1	2	3	4	5
Chi phí	0	1	-2	-1	-2	-3

Xét cạnh (5, 4) → cập nhật giá trị mảng lưu vết path[4] = 5.

Đỉnh cha	0	1	2	3	4	5
Lưu vết	-1	0	3	1	5	2

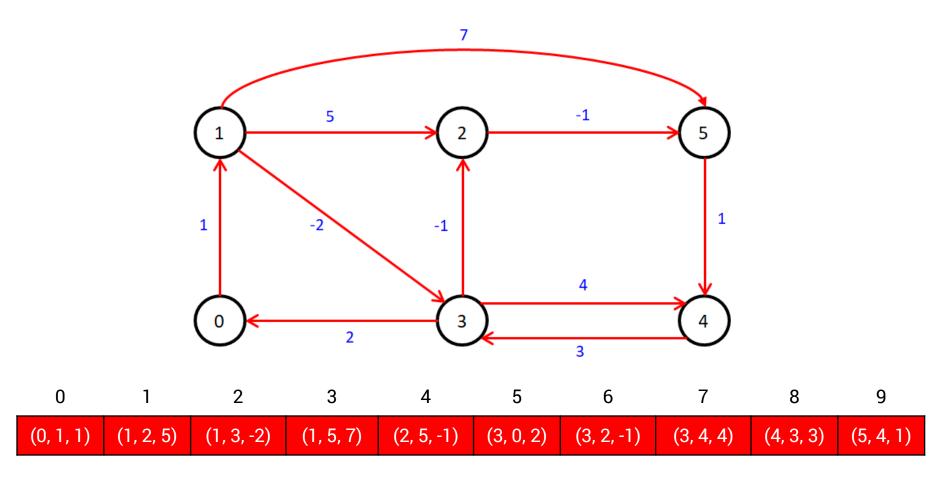


BƯỚC 3 CHẠY VÒNG LẶP DUYỆT QUA DANH SÁCH CẠNH LẦN 3



Bước 3: Chạy thuật toán

Tương tự như bước 1. Chạy vòng lặp lần lượt từ j=0 đến j=9.



→ Không cập nhật.

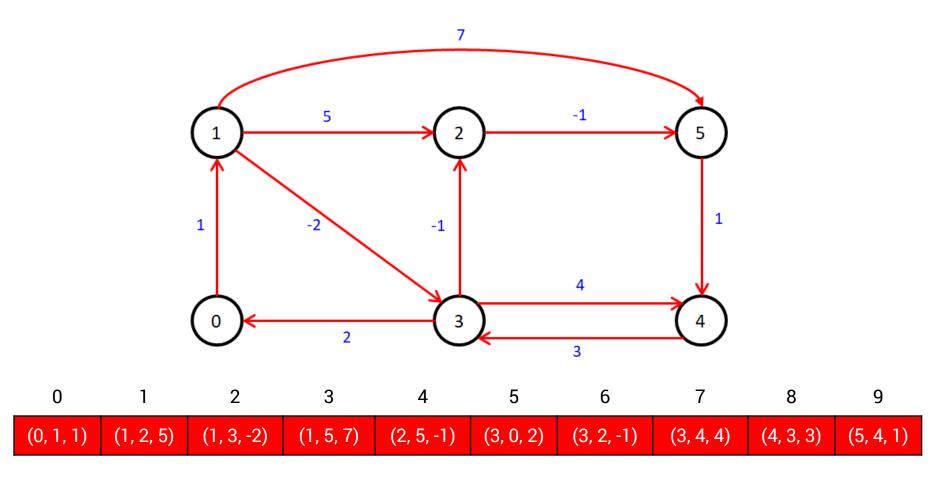


BƯỚC 4 CHẠY VÒNG LẶP DUYỆT QUA DANH SÁCH CẠNH LẦN 4



Bước 4: Chạy thuật toán

Tương tự như bước 1. Chạy vòng lặp lần lượt từ j=0 đến j=9.



→ Không cập nhật.

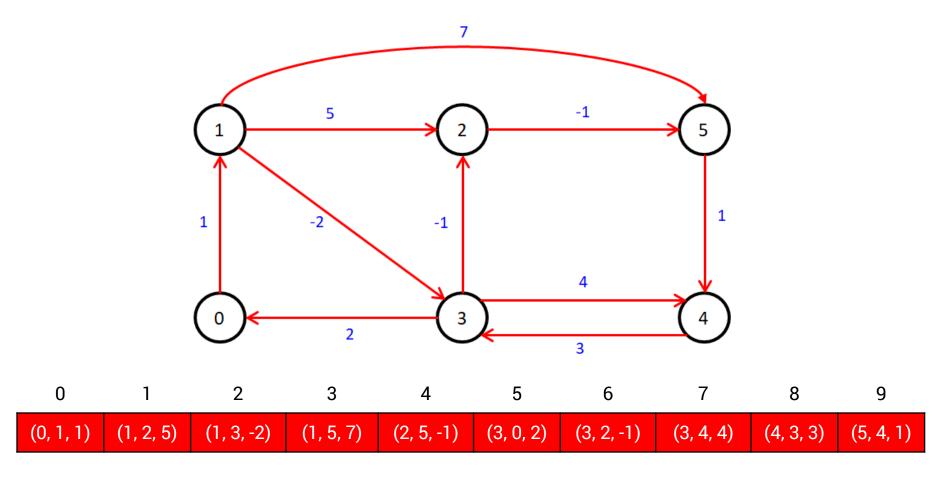


BƯỚC 5 CHẠY VÒNG LẶP DUYỆT QUA DANH SÁCH CẠNH LẦN 5



Bước 5: Chạy thuật toán

Tương tự như bước 1. Chạy vòng lặp lần lượt từ j=0 đến j=9.



→ Không cập nhật.



Dùng thuật toán và in ra đường đi

Tìm đường đi ngắn nhất từ 0 đến 4.













path

Đỉnh cha	0	1	2	3	4	5
Lưu vết	-1	0	3	1	5	2

dist

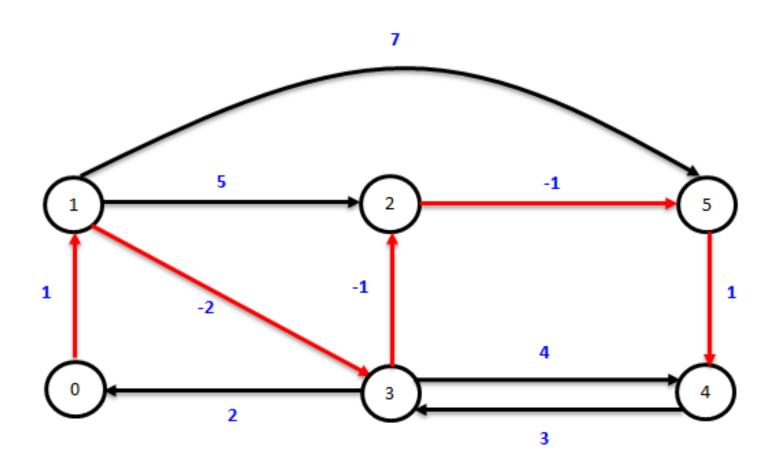
l t	Đỉnh	0	1	2	3	4	5
Cł	hi phí	0	1	-2	-1	-2	-3

 $0 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 4$ Chi phí: -2



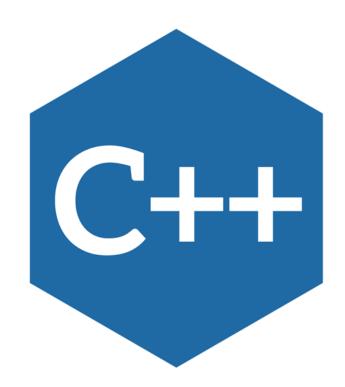
Đường đi trên đô thị

 $0 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 4$ Chi phí: -2





MÃ NGUỒN MINH HỌA BẰNG C++





```
#include <iostream>
    #include <vector>
2.
    using namespace std;
    #define MAX 105
    const int INF = 1e9;
    vector<int> dist(MAX, INF);
    vector <int> path(MAX, -1);
7.
    vector<Edge> graph;
    int n, m;
9.
    struct Edge
10.
11.
        int source;
12.
        int target;
13.
        int weight;
14.
        Edge(int source = 0, int target = 0, int weight = 0)
15.
        {
16.
            this->source = source;
17.
             this->target = target;
18.
            this->weight = weight;
19.
        }
20.
    };
```



```
21. bool BellmanFord(int s)
22.
        int u, v, w;
23.
        dist[s] = 0;
24.
        for (int i = 1; i <= n - 1; i++)
25.
26.
             for (int j = 0; j < m; j++)
27.
28.
                 u = graph[j].source;
29.
                 v = graph[j].target;
30.
                 w = graph[j].weight;
31.
                 if (dist[u] != INF && (dist[u] + w < dist[v])) {</pre>
32.
                      dist[v] = dist[u] + w;
33.
                      path[v] = u;
34.
35.
36.
37.
   // to be continued
```



Thuật toán chính Bellman-Ford (part 2)

```
//Để đảm bảo không tồn tại chu trình âm thì bellman-ford mới tìm được đường đi.
      for (int i = 0; i < m; i++)
38.
      {
39.
           u = graph[i].source;
40.
            v = graph[i].target;
41.
           w = graph[i].weight;
42.
            if (dist[u] != INF && (dist[u] + w < dist[v]))</pre>
43.
                 return false;
44.
45.
        return true;
46.
```



```
int main()
49. {
        int s, t, u, v, w;
50.
        cin >> n >> m;
51.
        for (int i = 0; i < m; i++)</pre>
52.
53.
            cin >> u >> v >> w;
54.
            graph.push back(Edge(u, v, w));
55.
56.
        s = 0; t = 4;
57.
        bool res = BellmanFord(s);
58.
        if (res == false)
59.
             cout << "Graph contains negative weight cycle" << endl;</pre>
60.
        else
61.
            cout << dist[t] << endl;</pre>
62.
        return 0;
63.
64. }
```



MÃ NGUỒN MINH HỌA BẰNG PYTHON





Khai báo thư viện và các biến toàn cục:

```
INF = 10**9
                                                           python*
  MAX = 105
  class Edge:
      def __init__(self, source, target, weight):
          self.source = source
5.
          self.target = target
          self.weight = weight
7.
  dist = [INF for in range(MAX)]
  path = [-1 for _ in range(MAX)]
10. graph = []
```



```
11. def BellmanFord(s):
                                                                python
       dist[s] = 0
12.
       for i in range(1, n):
13.
            for j in range(m):
14.
                u = graph[j].source
15.
                v = graph[j].target
16.
               w = graph[j].weight
17.
                if (dist[u] != INF) and (dist[u] + w < dist[v]):</pre>
18.
                    dist[v] = dist[u] + w
19.
                    path[v] = u
20.
       for i in range(m):
21.
            u = graph[i].source
22.
            v = graph[i].target
23.
           w = graph[i].weight
24.
            if (dist[u] != INF) and (dist[u] + w < dist[v]):</pre>
25.
                return False
26.
       return True
27.
```



Hàm main.

```
if __name__ == '__main__':
                                                             python™
      n, m = map(int, input().split())
29.
      for i in range(m):
30.
           u, v, w = map(int, input().split())
31.
           graph.append(Edge(u, v, w))
32.
     s, t = 0, 4
33.
    res = BellmanFord(s)
34.
       if not res:
35.
           print("Graph contains negative weight cycle")
36.
       else:
37.
           print(dist[t])
38.
```



MÃ NGUỒN MINH HỌA BẰNG JAVA





Class Edge

```
import java.util.Arrays;
   import java.util.Scanner;
   class Edge {
       public int source;
4.
       public int target;
       public int weight;
       public Edge(int source, int target, int weight) {
7.
           this.source = source;
8.
           this.target = target;
           this.weight = weight;
10.
11.
12. }
```



// to be continued

```
public class Main {
13.
        private static final int INF = (int)1e9;
14.
        private static final int MAX = 105;
15.
        private static int[] dist = new int[MAX];
16.
        private static Edge[] graph;
17.
        private static int n, m;
18.
        private static int[] path = new int[MAX];
19.
        private static boolean BellmanFord(int s) {
20.
             int u, v, w;
21.
             dist[s] = 0;
22.
             for (int i = 1; i <= n - 1; i++) {
23.
                 for (int j = 0; j < m; j++) {
24.
                     u = graph[j].source;
25.
                     v = graph[j].target;
26.
                     w = graph[j].weight;
27.
                     if (dist[u] != INF && dist[u] + w < dist[v]) {</pre>
28.
                          dist[v] = dist[u] + w;
29.
                          path[v] = u;
30.
31.
32.
33.
```



Thuật toán chính Bellman-Ford (part 2)

```
// kiểm tra chu trình âm
             for (int i = 0; i < m; i++) {</pre>
34.
                 u = graph[i].source;
35.
                 v = graph[i].target;
36.
                w = graph[i].weight;
37.
                 if (dist[u] != INF && dist[u] + w < dist[v]) {</pre>
38.
                      return false:
39.
40.
41.
            return true;
42.
43.
```



Hàm main (part 1)

```
public static void main(String[] args) {
44.
            Scanner sc = new Scanner(System.in);
45.
           n = sc.nextInt();
46.
           m = sc.nextInt();
47.
           graph = new Edge[m];
48.
           Arrays.fill(dist, INF);
49.
           Arrays.fill(path, -1);
50.
            int u, v, w;
51.
            for (int i = 0; i < m; i++) {
52.
                u = sc.nextInt();
53.
                v = sc.nextInt();
54.
                w = sc.nextInt();
55.
                graph[i] = new Edge(u, v, w);
56.
57.
    // to be continued
```



Hàm main (part 2)

```
int s = 0, t = 4;
58.
            boolean res = BellmanFord(s);
59.
            if (!res) {
60.
                System.out.println("Graph contains negative weight cycle");
61.
62.
            else {
63.
                System.out.println(dist[t]);
64.
65.
66.
67.
```







