

LECTURE 15

PRIM'S ALGORITHM







Big-O Coding

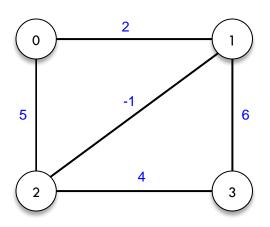
Website: www.bigocoding.com



Minimum Spanning Tree

Minimum Spanning Tree – MST (Cây khung nhỏ nhất hay cây bao trùm nhỏ nhất) là tập hợp **một số cạnh** của đồ thị vô hướng có trọng số, sao cho tạo thành một cây chứa tất cả các đỉnh với tổng trọng số các cạnh là **nhỏ nhất**.

Trong một đồ thị có nhiều cây khung, MST là chúng ta tìm cây khung có trọng số nhỏ nhất.



Tổng trọng số: -1 + 2 + 4 = 5



Thuật toán Prim

Prim's Algorithm (thuật toán Prim): là thuật toán tham lam dùng để tìm cây khung nhỏ nhất.

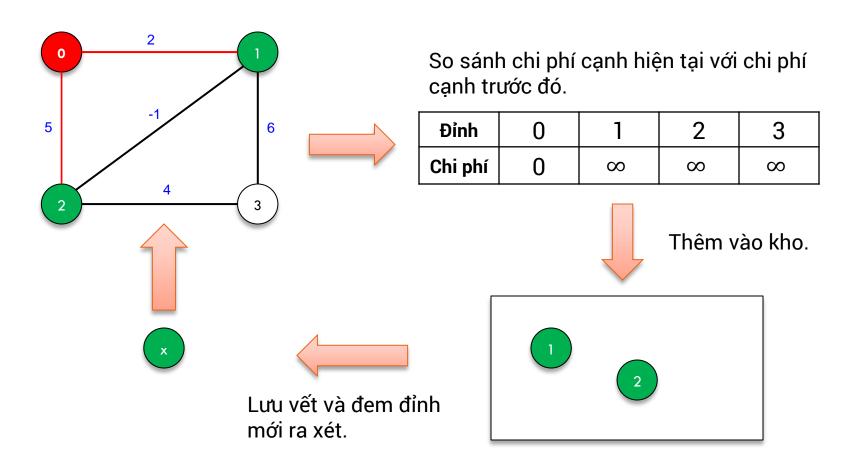
Tùy vào cách cài đặt, thuật toán Prim có 2 loại độ phức tạp khác nhau:

- Nếu cài đặt với thuật toán ở mức độ cơ bản (sử dụng ma trận kề) thì độ phức tạp của Prim là O(V²) hoặc O(V² + E).
- Nếu cài đặt với hàng đợi ưu tiên thì độ phức tạp của
 Prim là O(Elog(V))



Ý tưởng của thuật toán

Xuất phát từ một đỉnh bất kỳ. Đi đến các đỉnh kề của đỉnh này.

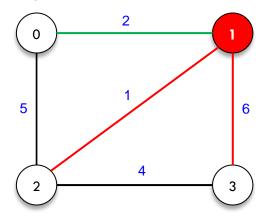


→ Dừng khi kho không còn đỉnh nào. Xuất kết quả bài toán.

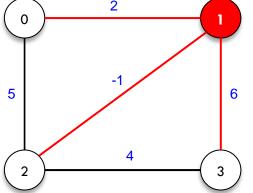


Sự khác nhau giữa Prim và Dijkstra

Dijkstra: Khi bạn đang đứng tại 1 đỉnh, bạn muốn đi đến đỉnh khác, bạn phải xét chi phí đường đi trước đó + chi phí đường đi đến đỉnh khác < chi phí đường đi tốt nhất hiện tại hay không → quyết định đi / không đi.



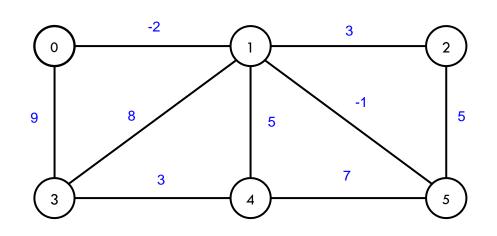
Prim: Khi bạn đang đứng tại 1 đỉnh, bạn muốn đi đến đỉnh khác, bạn cần xét **chi phí đường**đi đến đỉnh khác (chi phí cạnh) < chi phí tốt nhất hiện tại hay không → quyết định đi / không đi.





Bài toán minh họa

Cho đồ thị **vô hướng** như hình vẽ. Tìm **cây khung nhỏ nhất** của đồ thị bên dưới.

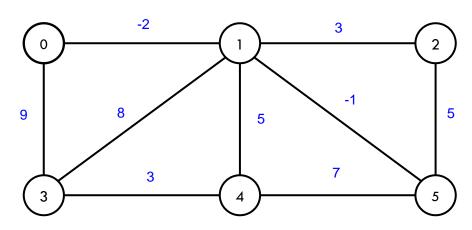


Edge List

6	9	
0	1	-2
0	3	9
1	2	3
1	3	8
1	4	5
1	5	-1
2	5	5
3	4	3
4	5	7



Bước 0: Chuẩn bị dữ liệu (1)



Chuyển danh sách cạnh kề vào graph.

Đỉnh	0	1	2	3	4	5
(Đỉnh kề, trọng số)	(1, -2) (3, 9)	(0, -2) (2, 3) (3, 8) (4, 5) (5, -1)	(1, 3) (5, 5)	(0, 9) (1, 8) (4, 3)	(1, 5) (3, 3) (5, 7)	(1, -1) (2, 5) (4, 7)

Mảng chứa chi phí đường đi dist.

Đỉnh	0	1	2	3	4	5
Chi phí	∞	∞	∞	∞	8	8



Bước 0: Chuẩn bị dữ liệu (2)

Mảng đánh dấu các đỉnh đã xét visited.

Đỉnh	0	1	2	3	4	5
Trạng thái	false	false	false	false	false	false

Mảng lưu vết đường đi path.

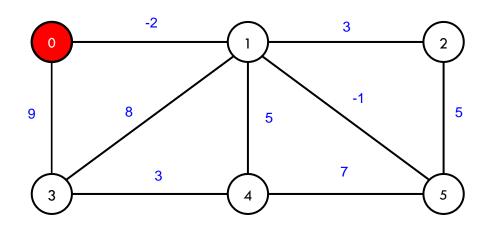
Đỉnh	0	1	2	3	4	5
Lưu vết	-1	-1	-1	-1	-1	-1

Hàng đợi ưu tiên priority_queue, lưu cặp giá trị (đỉnh, chi phí).

..



Bước 0: Chuẩn bị dữ liệu (3)



dist - lấy đỉnh bắt đầu đi là đỉnh 0. Gán chi phí cho đỉnh 0 là 0.

Đỉnh	0	1	2	3	4	5
Chi phí	0	∞	8	8	8	8

priority_queue - bổ cặp (0, 0) vào hàng đợi ưu tiên.

0

(0, 0)



Bước 1: Chạy thuật toán lần 1

0

priority_queue

(0, 0)

- Lấy cặp đỉnh 0, chi phí 0 ra khỏi hàng đợi và đánh dấu true tại visited[0].
- Xét các đỉnh có kết nối với đỉnh 0.

graph

Đỉnh	0	1	2	3	4	5
(Đỉnh kề, trọng số)	(1, -2) (3, 9)	(0, -2) (2, 3) (3, 8) (4, 5) (5, -1)	(1, 3) (5, 5)	(0, 9) (1, 8) (4, 3)	(1, 5) (3, 3) (5, 7)	(1, -1) (2, 5) (4, 7)

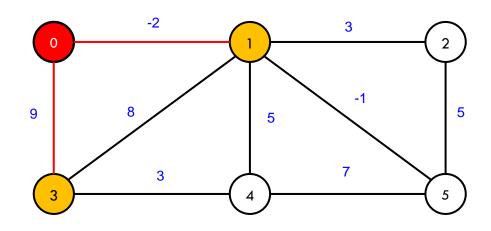
- (1, -2): dist[1] = $\infty > -2 \rightarrow \text{Câp nhât dist[1]} = -2$.
- (3, 9): dist[3] = ∞ > 9 → Cập nhật dist[3] = 9.

dist

Đỉnh	0	1	2	3	4	5
Chi phí	0	∞ → -2	8	∞ → 9	8	8



Bước 1: Chạy thuật toán lần 1



Lưu cặp giá trị (1, -2) và (3, 9) vào hàng đợi ưu tiên.

priority_queue

	<u> </u>
(1, -2)	(3, 9)

Cập nhật giá trị của đỉnh 1 và đỉnh 3.

path

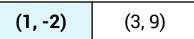
Đỉnh	0	1	2	3	4	5
Lưu vết	-1	0	-1	0	-1	-1



Bước 2: Chạy thuật toán lần 2

priority_queue

U I



- Lấy cặp đỉnh 1, chi phí -2 ra khỏi hàng đợi và đánh dấu true tại visited[1].
- Xét các đỉnh có kết nối với đỉnh 1.

graph

Đỉnh	0	1	2	3	4	5
(Đỉnh kề, trọng số)	(1, -2) (3, 9)	(0, -2) (2, 3) (3, 8) (4, 5) (5, -1)	(1, 3) (5, 5)	(0, 9) (1, 8) (4, 3)	(1, 5) (3, 3) (5, 7)	(1, -1) (2, 5) (4, 7)

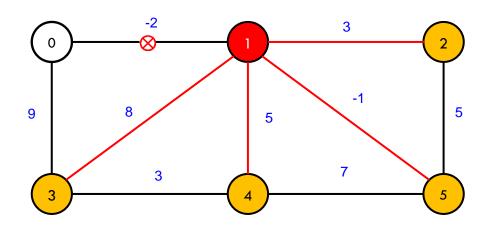
- (0, -2): đỉnh 0 đã viếng thăm → KHÔNG cập nhật.
- (2, 3): dist[2] = ∞ > 3 → Cập nhật dist[2] = 3.
- (3, 8): dist[3] = 9 > 8 → Cập nhật dist[3] = 8.
- (4, 5): dist[4] = ∞ > 5 → Cập nhật dist[4] = 5.
- (5, -1): dist[5] = ∞ > 1 → Cập nhật dist[5] = -1.

dist

Đ	ình	0	1	2	3	4	5
Ch	ni phí	0	-2	$\infty \rightarrow 3$	9 → 8	$\infty \rightarrow 5$	∞ → -1



Bước 2: Chạy thuật toán lần 2



Lưu các cặp (2, 3), (3, 8), (4, 5) và (5, -1) vào hàng đợi ưu tiên.

priority_queue

0	1	2	3	4
(5, -1)	(2, 3)	(4, 5)	(3, 8)	(3, 9)

Cập nhật giá trị của các đỉnh 2, 3, 4, 5.

path

Đỉnh	0	1	2	3	4	5
Lưu vết	-1	0	1	1	1	1



Bước 3: Chạy thuật toán lần 3

U	l	Z	3	4
(5, -1)	(2, 3)	(4, 5)	(3, 8)	(3, 9)

- priority_queue
- Lấy cặp đỉnh 5, chi phí 1 ra khỏi hàng đợi và đánh dấu true tại visited[5].
- Xét các đỉnh có kết nối với đỉnh 5.

graph

Đỉnh	0	1	2	3	4	5
(Đỉnh kề, trọng số)	(1, -2) (3, 9)	(0, -2) (2, 3) (3, 8) (4, 5) (5, -1)	(1, 3) (5, 5)	(0, 9) (1, 8) (4, 3)	(1, 5) (3, 3) (5, 7)	(1, -1) (2, 5) (4, 7)

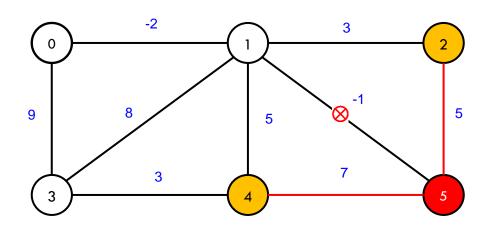
- (1, -1): đỉnh 1 đã viếng thăm → KHÔNG cập nhật.
- (2, 5): dist[2] = 3 < 5 \rightarrow KHÔNG cập nhật.
- (4,7): dist[4] = 5 < 7 \rightarrow KHÔNG cập nhật.

dist

Đỉnh	0	1	2	3	4	5
Chi phí	0	-2	3	8	5	-1



Bước 3: Chạy thuật toán lần 3



Không có giá trị mới nào cần lưu vào hàng đợi ưu tiên.

priority_queue

0	1	2	3
(2, 3)	(4, 5)	(3, 8)	(3, 9)

Không có giá trị đỉnh nào cần cập nhật.

path

Đỉnh	0	1	2	3	4	5
Lưu vết	-1	0	1	1	1	1



Bước 4: Chạy thuật toán lần 4

priority_queue

0	I	2	3
(2, 3)	(4, 5)	(3, 8)	(3, 9)

- Lấy cặp đỉnh 2, chi phí 3 ra khỏi hàng đợi và đánh dấu true tại visited[2].
- Xét các đỉnh có kết nối với đỉnh 2.

graph

Đỉnh	0	1	2	3	4	5
(Đỉnh kề, trọng số)	(1, -2) (3, 9)	(0, -2) (2, 3) (3, 8) (4, 5) (5, -1)	(1, 3) (5, 5)	(0, 9) (1, 8) (4, 3)	(1, 5) (3, 3) (5, 7)	(1, -1) (2, 5) (4, 7)

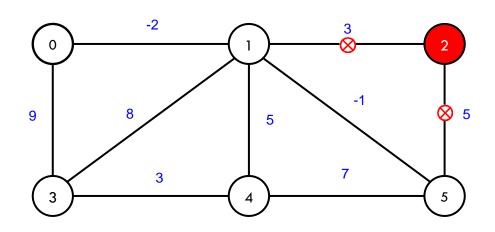
- (1, 3): đỉnh 1 đã viếng thăm → KHÔNG cập nhật.
- (5, 5): đỉnh 5 đã viếng thăm → KHÔNG cập nhật.

dist

Đỉnh	0	1	2	3	4	5
Chi phí	0	-2	3	8	5	-1



Bước 4: Chạy thuật toán lần 4



Không có giá trị mới nào cần lưu vào hàng đợi ưu tiên.

priority_queue

0	<u> </u>	2
(4, 5)	(3, 8)	(3, 9)

Không có giá trị đỉnh nào cần cập nhật.

path

Đỉnh	0	1	2	3	4	5
Lưu vết	-1	0	1	1	1	1



Bước 5: Chạy thuật toán lần 5

priority_queue

U	l	2
(4, 5)	(3, 8)	(3, 9)

- Lấy cặp đỉnh 4, chi phí 5 ra khỏi hàng đợi và đánh dấu true tại visited[4].
- Xét các đỉnh có kết nối với đỉnh 4.

graph

Đỉnh	0	1	2	3	4	5
(Đỉnh kề, trọng số)	(1, -2) (3, 9)	(0, -2) (2, 3) (3, 8) (4, 5) (5, -1)	(1, 3) (5, 5)	(0, 9) (1, 8) (4, 3)	(1, 5) (3, 3) (5, 7)	(1, -1) (2, 5) (4, 7)

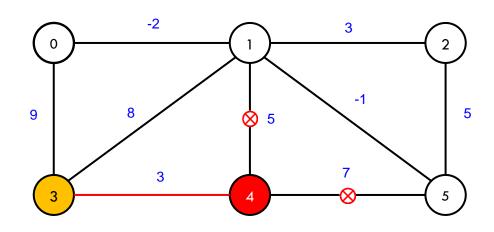
- (1, 5): đỉnh 1 đã viếng thăm → KHÔNG cập nhật.
- (3, 3): dist[3] = 8 > 3 → Cập nhật dist[3] = 3.
- (5, 7): đỉnh 5 đã viếng thăm → KHÔNG cập nhật.

dist

Đỉnh	0	1	2	3	4	5
Chi phí	0	2	3	8 → 3	5	1



Bước 5: Chạy thuật toán lần 5



Lưu cặp giá trị (3, 3) vào hàng đợi ưu tiên.

priority_queue

0	1	2	
(3, 3)	(3, 8)	(3, 9)	

Cập nhật giá trị của đỉnh 3.

path

Đỉnh	0	1	2	3	4	5
Lưu vết	-1	0	1	4	1	1



Bước 6: Chạy thuật toán lần 6

priority_queue

		Z
(3, 3)	(3, 8)	(3, 9)

- Lấy cặp đỉnh 3, chi phí 3 ra khỏi hàng đợi và đánh dấu true tại visited[3].
- Xét các đỉnh có kết nối với đỉnh 3.

graph

Đỉnh	0	1	2	3	4	5
(Đỉnh kề, trọng số)	(1, -2) (3, 9)	(0, -2) (2, 3) (3, 8) (4, 5) (5, -1)	(1, 3) (5, 5)	(0, 9) (1, 8) (4, 3)	(1, 5) (3, 3) (5, 7)	(1, -1) (2, 5) (4, 7)

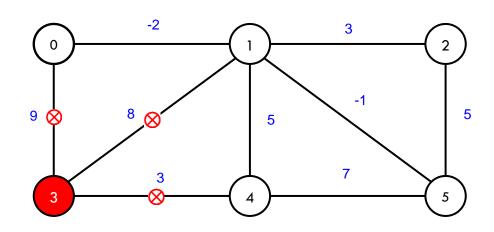
- (0, 9): đỉnh 0 đã viếng thăm → KHÔNG cập nhật.
- (1, 8): đỉnh 1 đã viếng thăm → KHÔNG cập nhật.
- (4, 3): đỉnh 4 đã viếng thăm → KHÔNG cập nhật.

dist

Đỉnh	0	1	2	3	4	5
Chi phí	0	-2	3	3	5	-1



Bước 6: Chạy thuật toán lần 6



Không có giá trị mới nào cần lưu vào hàng đợi ưu tiên.

priority_queue

U	.
(3, 8)	(3, 9)

Không có giá trị đỉnh nào cần cập nhật.

path

Đỉnh	0	1	2	3	4	5
Lưu vết	-1	0	1	4	1	1



Bước 7: Chạy thuật toán lần 7

0

priority_queue

(3, 8)	(3, 9)

- Lấy cặp đỉnh 3, chi phí 8 ra khỏi hàng đợi và đánh dấu true mảng visited.
- Xét các đỉnh có kết nối với đỉnh 3.

graph

Đỉnh	0	1	2	3	4	5
(Đỉnh kề, trọng số)	(1, -2) (3, 9)	(0, -2) (2, 3) (3, 8) (4, 5) (5, -1)	(1, 3) (5, 5)	(0, 9) (1, 8) (4, 3)	(1, 5) (3, 3) (5, 7)	(1, -1) (2, 5) (4, 7)

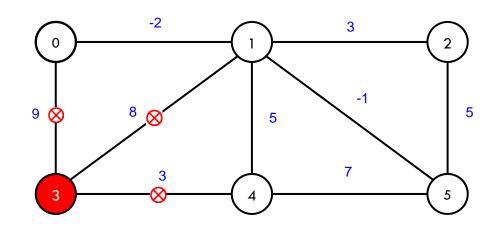
- (0, 9): đỉnh 0 đã viếng thăm → KHÔNG cập nhật.
- (1, 8): đỉnh 1 đã viếng thăm → KHÔNG cập nhật.
- (4, 3): đỉnh 4 đã viếng thăm → KHÔNG cập nhật.

dist

Đỉnh	0	1	2	3	4	5
Chi phí	0	-2	3	3	5	-1



Bước 7: Chạy thuật toán lần 7



Không có giá trị mới nào cần lưu vào hàng đợi ưu tiên.

priority_queue

Không có giá trị đỉnh nào cần cập nhật.

path

Đỉnh	0	1	2	3	4	5
Lưu vết	-1	0	1	4	1	1



Bước 8: Chạy thuật toán lần 8

0

priority_queue

(3, 9)

- Lấy cặp đỉnh 3, chi phí 9 ra khỏi hàng đợi và đánh dấu true mảng visited.
- Xét các đỉnh có kết nối với đỉnh 3.

graph

Đỉnh	0	1	2	3	4	5
(Đỉnh kề, trọng số)	(1, -2) (3, 9)	(0, -2) (2, 3) (3, 8) (4, 5) (5, -1)	(1, 3) (5, 5)	(0, 9) (1, 8) (4, 3)	(1, 5) (3, 3) (5, 7)	(1, -1) (2, 5) (4, 7)

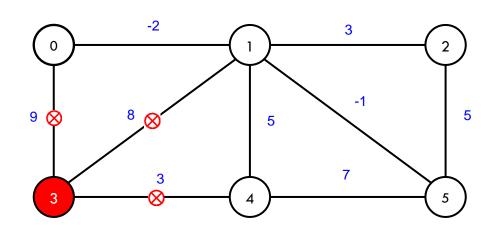
- (0, 9): đỉnh 0 đã viếng thăm → KHÔNG cập nhật.
- (1, 8): đỉnh 1 đã viếng thăm → KHÔNG cập nhật.
- (4, 3): đỉnh 4 đã viếng thăm → KHÔNG cập nhật.

dist

Đỉnh	0	1	2	3	4	5
Chi phí	0	-2	3	3	5	-1



Bước 8: Chạy thuật toán lần 8



Không có giá trị mới nào cần lưu vào hàng đợi ưu tiên.





Dùng thuật toán.

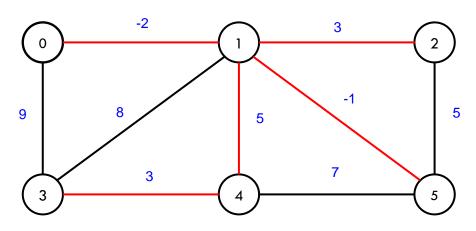
Không có giá trị đỉnh nào cần cập nhật.

path

Đỉnh	0	1	2	3	4	5
Lưu vết	-1	0	1	4	1	1



Kết quả chạy Prim



path

Đỉnh	0	1	2	3	4	5
Lưu vết	-1	0	1	4	1	1

dist

Đỉnh	0	1	2	3	4	5
Chi phí	0	-2	3	3	5	-1

0 - 1: -2

1 - 2: 3

4 - 3: 3

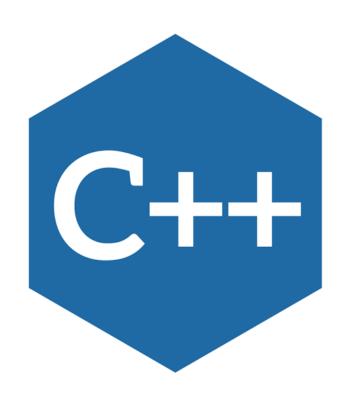
1 - 4:5

1 - 5: -1

Weight of MST: 8



MÃ NGUỒN MINH HỌA BẰNG C++





Khai báo thư viện và các biến toàn cục:

```
#include <algorithm>
   #include <iostream>
   #include <string>
   #include <vector>
   #include <queue>
   #include <functional>
   using namespace std;
   #define MAX 100
   const int INF = 1e9;
10. vector<pair<int, int> > graph[MAX];
11. vector<int> dist(MAX, INF);
   int path[MAX];
   bool visited[MAX];
14. int N, M;
```



```
15. void printMST()
16.
        int ans = 0;
17.
        for (int i = 0; i<N; i++)
18.
19.
             if (path[i] == -1)
20.
                  continue;
21.
             ans += dist[i];
22.
             cout << path[i] << " - " << i << ": " << dist[i] << endl;</pre>
23.
24.
        cout<<"Weight of MST: "<<ans<<endl;</pre>
25.
26.
```

```
27. struct option
28. {
29.    bool operator() (const pair<int, int> &a,const pair<int, int> &b) const
30.    {
31.       return a.second > b.second;
32.    }
33. };
```



```
34. void prims(int src)
35. {
       priority_queue<pair<int, int>, vector<pair<int, int> >, option > pq;
36.
       pq.push(make_pair(src, 0));
37.
       dist[src] = 0;
38.
       while (!pq.empty())
39.
40.
             int u = pq.top().first;
41.
             pq.pop();
42.
            visited[u] = true;
43.
// to be continued
```



Thuật toán Prim (part 2)

```
for (int i = 0; i < graph[u].size(); i++)</pre>
45.
           {
46.
                 int v = graph[u][i].first;
47.
                 int w = graph[u][i].second;
48.
                 if (!visited[v] && dist[v] > w)
49.
50.
                       dist[v] = w;
51.
                       pq.push(make pair(v, w));
52.
                       path[v] = u;
53.
54.
            } //end for
55.
       } //end while
56.
57.
```



```
58. int main()
59. {
         int u, v, w;
60.
         cin >> N >> M;
61.
         memset(path, -1, sizeof(path));
62.
         for (int i = 0; i < M; i++)</pre>
64.
             cin >> u >> v >> w;
65.
              graph[u].push back(make pair(v, w));
66.
              graph[v].push back(make pair(u, w));
67.
68.
         int s = 0;
69.
         prims(s);
70.
         printMST();
71.
         return 0;
72.
73. }
```



MÃ NGUỒN MINH HỌA BẰNG PYTHON





Khai báo thư viện và các biến toàn cục:

```
import queue
INF = 1e9
class Node:
def __init__(self, id, dist):
self.dist = dist
self.id = id
def __lt__(self, other):
return self.dist <= other.dist</pre>
```



In ra cây khung nhỏ nhất tìm được:



```
17. def prims(src):
        pq = queue.PriorityQueue()
18.
        pq.put(Node(src, 0))
19.
        dist[src] = 0
20.
       while pq.empty() == False:
21.
            top = pq.get()
22.
            u = top.id
23.
            visited[u] = True
24.
            for neighbor in graph[u]:
25.
                 v = neighbor.id
26.
                w = neighbor.dist
27.
                 if visited[v] == False and w < dist[v]:</pre>
28.
                     dist[v] = w
29.
                     pq.put(Node(v, w))
30.
                     path[v] = u
31.
```



Hàm main chương trình

```
if __name__ == '__main__':
       n, m = map(int, input().split())
33.
       graph = [[] for i in range(n)]
34.
       dist = [INF for i in range(n)]
35.
       path = [-1 for i in range(n)]
36.
       visited = [False for i in range(n)]
37.
       for i in range(m):
38.
           u, v, w = map(int, input().split())
39.
           graph[u].append(Node(v, w))
40.
           graph[v].append(Node(u, w))
41.
       prims(∅)
42.
       printMST()
43.
```



MÃ NGUỒN MINH HỌA BẰNG JAVA





```
import java.util.ArrayList;
   import java.util.Arrays;
   import java.util.PriorityQueue;
   import java.util.Scanner;
   class Node implements Comparable<Node> {
       public Integer id;
6.
       public Integer dist;
7.
       public Node(Integer id, Integer dist) {
8.
           this.id = id;
9.
           this.dist = dist;
10.
11.
       @Override
12.
       public int compareTo(Node other) {
13.
           return this.dist.compareTo(other.dist);
14.
15.
16.
```



```
17. class Main {
       private static int[] dist;
18.
       private static int[] path;
19.
       private static boolean[] visited;
20.
       private static void printMST() {
21.
            int n = dist.length;
22.
            int ans = 0;
23.
            for (int i = 0; i < n; i++) {
24.
                if (path[i] == -1) {
25.
                     continue;
26.
27.
                ans += dist[i];
28.
                System.out.printf("%d %d: %d\n", path[i], i, dist[i]);
29.
30.
            System.out.printf("Weight of MST: %d", ans);
31.
       }
32.
```



```
public static void prims(int src, ArrayList<ArrayList<Node>> graph) {
       PriorityQueue<Node> pq = new PriorityQueue<Node>();
34.
       int n = graph.size();
35.
       dist = new int[n];
36.
       path = new int[n];
37.
       visited = new boolean[n];
38.
       Arrays.fill(dist, Integer.MAX_VALUE);
39.
       Arrays.fill(path, -1);
40.
       Arrays.fill(visited, false);
41.
       pq.add(new Node(src, ∅));
42.
       dist[src] = 0;
43.
```



```
while (!pq.isEmpty()) {
44.
            Node top = pq.poll();
45.
            int u = top.id;
46.
            visited[u] = true;
47.
            for (int i = 0; i < graph.get(u).size(); i++) {</pre>
48.
                 Node neighbor = graph.get(u).get(i);
49.
                 int v = neighbor.id, w = neighbor.dist;
50.
                 if (!visited[v] && w < dist[v]) {</pre>
51.
                     dist[v] = w;
52.
                     pq.add(new Node(v, w));
53.
                     path[v] = u;
54.
55.
56.
57.
58. }
```



```
public static void main (String[] args) {
       Scanner sc = new Scanner(System.in);
60.
       int n = sc.nextInt(), m = sc.nextInt();
61.
       ArrayList<ArrayList<Node>> graph = new ArrayList<ArrayList<Node>>();
62.
       for (int i = 0; i < n; i++) {
63.
            graph.add(new ArrayList<Node>());
64.
       }
65.
       for (int i = 0; i < m; i++) {
66.
            int u = sc.nextInt(), v = sc.nextInt(), w = sc.nextInt();
67.
            graph.get(u).add(new Node(v, w));
68.
            graph.get(v).add(new Node(u, w));
69.
70.
       prims(∅, graph);
71.
       printMST();
72.
73.
```



LƯU Ý ĐỂ CẢI TIẾN THUẬT TOÁN PRIM GIỐNG TRƯỜNG HỢP DIJKSTRA







```
if (dist[u]!=w)
    continue;
```

```
if dist[u] != w:
    continue
```

```
if (dist[u]!=w)
    continue;
```





