

Программа спецкурса
ГАУССОВСКИЕ СЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ
матмех, V курс, осень 2007

Многомерные гауссовские распределения. Барицентр, корреляционный оператор. Стандартное гауссовское распределение и построение с его помощью произвольного гауссовского распределения. Характеристический функционал и преобразование Лапласа.

Примеры гауссовских случайных функций. Винеровский процесс и его свойства (независимость приращений, самоподобие). Броуновский мост и его связь с винеровским процессом. Поле Винера-Ченцова. Броуновская функция Леви. Дробное броуновское движение. Процесс Орнштейна-Уленбека.

Бесконечномерные распределения. Меры в линейном пространстве: барицентр, корреляционный оператор. Существование барицентра и корреляционного оператора. Гауссовская мера. Примеры - стандартная гауссовская мера, гауссовская мера в гильбертовом пространстве. Корреляционные операторы интегрального типа.

Измеримые линейные функционалы и ядро. Каноническое вложение пространства измеримых функционалов в пространство значений гауссовского вектора. Ядро гауссовской меры и построение в нем структуры гильбертова пространства. Тождественность ядра и множества допустимых сдвигов. Формула Камерона – Мартина для плотности сдвинутой меры. Примеры: ядро стандартной гауссовской меры; ядро гауссовской меры в гильбертовом пространстве. Теорема о нахождении ядра с помощью факторизации корреляционного оператора. Поведение ядра при линейном преобразовании. Ядра винеровской меры и распределения броуновского моста. Ядро поля Винера – Ченцова. Ядро распределения дробного броуновского движения. Ядро распределения процесса Орнштейна – Уленбека.

Изопериметрия. Изопериметрическая задача для меры Лебега в терминах поверхностной меры и в терминах окрестностей множеств. Изопериметрическая задача для сферы. Предельная конструкция Пуанкаре. Изопериметрическая задача для гауссовской меры. Изопериметрическое неравенство Борелля и Судакова-Цирельсона в R^n и в бесконечномерном пространстве. Принцип

концентрации для распределений липшицевых функций. Применение принципа концентрации к супремуму гауссовского процесса.

Неравенства. Неравенство Эрхарда. Выпуклость гауссовской меры по Бореллю. Неравенство Андерсона. Сдвиг-изопериметрические неравенства. Корреляционная гипотеза.

Принцип больших уклонений. Общая формулировка принципа больших уклонений. Принцип больших уклонений для гауссовской меры - вывод верхней и нижней оценок. Примеры экстремальных задач, возникающих при анализе больших уклонений винеровского процесса и броуновского моста.

Разложения гауссовского вектора в ряд. Теорема об эквивалентности трех видов сходимости рядов. Две постановки задачи о разложении гауссовского вектора и их решение с помощью базиса ядра. Разложения винеровского процесса по различным базисам.

ФЗПЛ. Понятие предельного множества. Следствия для функционалов. Теоремы Штрассена о функциональном законе повторного логарифма и сильном принципе инвариантности. Следствия и обобщения. Сильный принцип инвариантности.

Метрическая энтропия. Энтропия и емкость в абстрактном метрическом пространстве. Энтропия гауссовского процесса. Интеграл Дадли. Теорема Дадли об оценке математического ожидания максимума через энтропию процесса. Непрерывность процесса с конечным интегралом Дадли. Оценка математического ожидания супремума процесса снизу по Судакову. Теорема Ферника о непрерывности стационарного процесса.