# ЧЕТЫРНАДЦАТАЯ КОЛМОГОРОВСКАЯ СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Цифры после номера задачи или пункта означают номера курсов, которые решают данную задачу или пункт. Если таких цифр нет, задачу или пункт решают все курсы. Запись "н.о.р." означает "независимые одинаково распределенные".

**Задача 1.** Петя бросает монету до тех пор, пока не выпадут два герба подряд, а Федя независимо от него — до тех пор, пока не выпадет пара "герб, решка"(в таком порядке). Кому из них в среднем придется ждать меньше?

**Задача 2.** Пусть $A$ и $B$ — две симметричные вещественные матрицы порядка $n$, причем $trA > 0$ и $trB < 0$. Доказать, что существует такой вектор $x \in \mathbb{R}^n$, что $(Ax, x) > 0$ и $(Bx, x) < 0$.

**Задача 3.** Пусть случайный вектор $(X_1^n, \ldots, X_n^n)$ имеет равномерное распределение на множестве $\{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n,\ \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$, $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что последовательность $\{nX_1^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ имеет предел по распределению при $n \to \infty$, и найти его.

**Задача 4.** Рассматривается случайное блуждание $S_0 = 0$, и $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$, где $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — н.о.р. случайные величины, $\mathsf{P}(X_i = 1) = 1 - \mathsf{P}(X_i = -1) = p > 1/2$. Найти математическое ожидание числа нулей последовательности $\{S_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$.

**Задача 5.** Имеется круглая поверхность стола (без ножек). Плотник случайным образом приделывает к ней $n > 3$ ножек (каждая прикрепляется в равномерно распределенной точке на границе круга, перпендикулярно его плоскости, независимо от расположения предыдущих ножек; все ножки одинаковой длины). Найти вероятность, что после этого стол можно будет поставить на пол.

**Задача 6.** Многоугольник в трехмерном пространстве проецируется на случайно выбранную плоскость (т.е. единичная нормаль к плоскости равномерно распределена на сфере). Найти математическое ожидание площади проекции, если $S$ — площадь многоугольника.

**Задача 7.** Случайный вектор равномерно распределен на единичной сфере в $\mathbb{R}^n$, а случайная величина $\xi$ — это его первая координата. Найти а) $\mathsf{E}\xi^2$; б) $\mathsf{E}\xi^4$.

**Задача 8 (3-5).** Назовем случайную величину $X$ хорошей, если она имеет плотность $p$ и эта плотность пропорциональна ее характеристической функции $\varphi$, т.е. существует $C > 0$ такое, что $p \equiv C\varphi$ (пример: $X \sim N(0, 1)$). Привести пример хорошей негауссовской случайной величины.

**Задача 9.** Пусть н.о.р. случайные величины $X$ и $Y$ симметричны и имеют конечную дисперсию, причем для любого $t > 0$ выполняется неравенство $\mathsf{P}(|X+Y|/\sqrt{2} \geq t) \geq \mathsf{P}(|X| \geq t)$. Доказать, что а) на самом деле неравенство всегда обращается в равенство; б) **(3-5)** эти случайные величины гауссовские.