Предельные теоремы теории вероятностей - I

Глава 1. Сильные предельные теоремы.

1. **Лемма Бореля-Кантелли и закон нуля или единицы.**

Приведем формулировку леммы.

Лемма Бореля-Кантелли. *Пусть $\{A_n\}$ - последовательность событий. Если $\sum P(A_n) < \infty$, то $P(A_n \text{ б.ч.}) = 0$. Если события A_n попарно независимы и $\sum P(A_n) = \infty$, то $P(A_n \text{ б.ч.}) = 1$.*

Напомним, что

$$\{A_n \text{ б.ч.}\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \quad P(A_n \text{ б.ч.}) = \lim P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right).$$

Мы опустим хорошо известное доказательство этого результата. Связь леммы Бореля-Кантелли со сходимостью к нулю почти наверное такова. Пусть $\{Z_n\}$ - последовательность случайных величин. Для того чтобы $Z_n \to 0$ п.н. достаточно, а при попарной независимости Z_n и необходимо, выполнение условия: $\sum P(|Z_n| > \varepsilon) < \infty$ при каждом $\varepsilon > 0$.

Следующая теорема дополняет лемму Бореля-Кантелли.

Теорема 1. *Пусть $\{A_n\}$ и $\{B_n\}$ -две последовательности событий, причем события A_n попарно независимы, при каждом n события A_n и B_n независимы,*

$$P = \liminf P(B_n) > 0.$$

Если $P(A_nB_n \text{ б.ч.}) = 0$, то $\sum P(A_n) < \infty$.

Доказательство. Поскольку

$$P(A_nB_n \text{ б.ч.}) \geq \limsup P(A_nB_n) = \limsup P(A_n)P(B_n),$$

имеем $P(A_n) \to 0$. С помощью неравенства Бонферрони получаем

$$\begin{aligned} P(\bigcup_n^m A_kB_k) &\geq \sum_n^m P(A_kB_k) - \sum_{n\leq j<k\leq m} P(A_jB_jA_kB_k) \\ &\geq \sum_n^m P(A_kB_k) - \sum_{n\leq j<k\leq m} P(A_jA_k) \\ &\geq \sum_n^m P(A_k)\left(P(B_k) - \sum_n^m P(A_j)\right). \end{aligned} \tag{1}$$

Предположим, что $\sum P(A_n) = \infty$. При $n \to \infty$ и $m = m(n)$, подобранном так, что $\sum_n^m P(A_k) \to P/2$, имеем

$$0 = P(A_nB_n \text{ б.ч.}) \geq \liminf P\left(\bigcup_{k=n}^{m} A_kB_k\right) \geq P^2/4,$$

то есть приходим к противоречию. Поэтому $\sum P(A_n) < \infty$,

Теорема 2. *Пусть $\{A_{n,k}\}$ и $\{B_{n,k}\}$ -два набора событий, $1 \le k \le k_n, n = 1, 2, \ldots$ Предположим, что $P(B_{n,k}) \ge \tau > 0$ при всех достаточно больших n и k; при фиксированном n события $A_{n,k}$ попарно независимы; при фиксированных n и k события $A_{n,k}$ и $B_{n,k}$ независимы.*

Если $P(\bigcup_k A_{n,k}B_{n,k}) \to 0$, то $\sum_k P(A_{n,k}) \to 0$.

Доказательство повторяет рассуждения, использованные в предыдущей теореме. Поскольку

$$P(\bigcup_k A_{n,k}B_{n,k}) \ge \max_k P(A_{n,k}B_{n,k}),$$

имеем $\max_k P(A_{n,k}) \to 0$. Как и в (1) получаем при $1 \le m_n \le k_n$

$$P(\bigcup_{k=1}^{m_n} A_{n,k}B_{n,k}) \ge \sum_{k=1}^{m_n} P(A_{n,k}) \left(P(B_{n,k}) - \sum_{j=1}^{m_n} P(A_{n,j}) \right).$$

Если $\sum_{j=1}^{k_n} P(A_{n,j}) \not\to 0$, то при некотором $\delta > 0$ и для бесконечного числа значений n выполняется $\sum_{j=1}^{k_n} P(A_{n,j}) > \delta$. Можно считать, что $\delta \le \tau$. Для таких n существуют $m_n \le k_n$ такие, что $\sum_{j=1}^{m_n} P(A_{n,j}) \to \delta/2$. Отсюда

$$P(\bigcup_k A_{n,k}B_{n,k}) \ge (\tau + o(1) - \delta/2)(\delta/2 + o(1)),$$

что приводит к противоречию, поскольку левая часть стремится к нулю. Итак, $\sum_{j=1}^{k_n} P(A_{n,j}) \to 0$.

В дальнейшем мы будем использовать *закон нуля или единицы Колмогорова,* который состоит в следующем. Пусть $X_1, X_2, \ldots$ - последовательность (взаимно) независимых случайных величин. Построим по этой последовательности остаточную (хвостовую) σ-алгебру как пересечение по $n = 1, 2, \ldots$ σ-алгебр, порожденных наборами случайных величин $X_n, X_{n+1}, \ldots$. Закон 0 или 1 утверждает, что вероятность любого события из остаточной σ-алгебры равна 0 или 1.

Например, если C постоянная, $b_n \to \infty$, то событие $\{\limsup(X_1 + \cdots + X_n)/b_n > C\}$ принадлежат остаточной σ-алгебре и, следовательно, его вероятность равна 0 или 1. Отсюда нетрудно вывести, что $\limsup$ либо бесконечен с вероятностью 1, либо конечен и равен некоторой постоянной с вероятностью 1. Эти рассуждения применимы и к $\liminf$, $\lim$.

Упражнения.

1. Пусть выполнены условия теоремы 1. Для каждого $0 < P \le 1$ приведите пример, в котором $P(A_nB_n \text{ б.ч.}) = P$.

2. Пусть $r \in \{1, 2, \ldots\}$.. Докажите, что в лемме Бореля-Кантелли условие попарной независимости A_n можно заменить более слабым условием: события A_j и A_k независимы при $|j - k| \ge r$.

2. От сильных предельных теорем к вероятностям больших уклонений

В этом параграфе $\{X_n\}$ -последовательность независимых случайных величин, $S_n = X_1 + \cdots + X_n, b_n$ -последовательность положительных чисел, $b_0 = 1$, $b_n \nearrow \infty$.

К сильным предельным теоремам относятся среди прочих *обобщенный закон повторного логарифма*

$$\limsup \frac{S_n}{b_n} = C \qquad \text{п.н.},$$

и *усиленный закон больших чисел*

$$\lim \frac{S_n}{b_n} = 0 \qquad \text{п.н.}$$

Отметим, что при некоторых дополнительных условиях обобщенный ЗПЛ выполняется с $b_n = (2DS_n \log\log DS_n)^{1/2}$, $C = 1$, и тогда он называется законом повторного логарифма.

В последующих двух теоремах описываются условия применимости обобщенного ЗПЛ и УЗБЧ. В обоих случаях описание производится с помощью рядов из вероятностей больших уклонений.

Для $c > 1$ индексы $i_n = i_n(c)$ определяются при $n \geq 0$ неравенствами $b_{i_n} \leq c^n < b_{i_n+1}$.

Теорема 3. Предположим, что $C \geq 0$,

$$S_n/b_n \xrightarrow{P} 0. \tag{2}$$

1. Если для любого $c > 1, \varepsilon > C$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(S_{i_n} > \varepsilon b_{i_n}) < \infty,$$

то

$$\limsup \frac{S_n}{b_n} \leq C \quad \text{п.н.}$$

2. Всегда

$$\limsup \frac{S_n}{b_n} \geq 0 \quad \text{п.н.}$$

3. Если $C > 0$ и для любого $\varepsilon < C$ существует $c > 1$ такое, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(S_{i_n} - S_{i_{n-1}} > \varepsilon b_{i_n}) = \infty,$$

то

$$\limsup \frac{S_n}{b_n} \geq C \quad \text{п.н.}$$

Доказательство. Для доказательства первого утверждения нам понадобится следующий вариант неравенства Леви, который мы приводим без доказательства (оно содержится в курсе теории вероятностей).

Лемма. *Пусть $X_1, \ldots, X_n$ - независимые случайные величины, $S_k = X_1 + \cdots + X_k$. Если при $k = 1, \ldots, n-1$, выполнено условие $P(S_n - S_k > -\delta) \geq q > 0$, то*

$$P(\max_{1 \leq k \leq n} S_k > x) \leq \frac{1}{q} P(S_n > x - \delta).$$

При каждом $\delta > 0$ имеем в силу (2)

$$\max_{k < i_n} P(S_{i_n} - S_k < -\delta b_{i_n}) \leq \max_{k < i_n} P(|S_k| > \delta b_{i_n}/2) + P(|S_{i_n}| > \delta b_{i_n}/2) \to 0.$$

Обозначим $T_n = \max_{0 < k \leq i_n} S_k$. С помощью леммы получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(T_n > \varepsilon b_{i_n}) < \infty$$

при каждом $\varepsilon > C$. По лемме Бореля-Кантелли,

$$\limsup \frac{T_n}{b_{i_n}} \leq C \quad \text{п.н.}$$

Отсюда

$$\limsup \frac{S_n}{b_n} = \limsup \max_{i_{n-1} < k \leq i_n} \frac{S_k}{b_k} \leq cC \quad \text{п.н.}$$

Заметим, что c можно сколь угодно приблизить к 1. Первое утверждение теоремы доказано.

Второе утверждение достаточно очевидно, поскольку при $\delta > 0$

$$P(S_n > -\delta b_n \text{ б.ч.}) \geq \limsup P(S_n > -\delta b_n) = 1.$$

Докажем третье утверждение. Пусть $\delta > 0$. Введем события

$$A_n = \{S_{i_n} - S_{i_{n-1}} > \varepsilon b_{i_n}\}, B_n = \{S_{i_{n-1}} > -\delta b_{i_n}\}$$

Очевидно, $P(B_n) \to 1$. При каждом n события A_n и B_n независимы. Кроме того, события A_n попарно независимы, $\sum P(A_n) = \infty$. К последовательностям A_n и B_n применим теорему 1:

$$P(S_{i_n} > (\varepsilon - \delta) b_{i_n} \text{ б.ч.}) \geq P(A_n B_n \text{ б.ч.}) > 0.$$

Таким образом, с положительной вероятностью

$$\limsup \frac{S_n}{b_n} \geq \limsup \frac{S_{i_n}}{b_{i_n}} \geq \varepsilon - \delta.$$

В силу закона нуля или единицы верхний предел является константой с вероятностью 1. При $\delta \searrow 0, \varepsilon \nearrow C$ получаем третье утверждение теоремы.

Теорема доказана.

Пользуясь теоремой 3 (применяя ее к суммам случайных величин X_j и к суммам случайных величин $-X_j$), нетрудно получить достаточное условие для применимости усиленного закона больших чисел в форме

$$\lim \frac{S_n}{b_n} = 0 \quad \text{п.н.}$$

Именно, усиленный закон имеет место, если выполняется слабый закон больших чисел (2) и

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|S_{i_n}| > \varepsilon c^n) < \infty$$

при каждом $\varepsilon > 0$. Здесь $c > 1$ - фиксированная постоянная.

На самом деле, нетрудно сформулировать необходимые и достаточные условия применимости усиленного закона больших чисел.

Теорема 4. *Пусть $c > 1$. Для того чтобы выполнялось соотношение*

$$\lim \frac{S_n}{b_n} = 0 \quad \text{п.н.},$$

необходимо и достаточно выполнение соотношения (2) и условия

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|S_{i_n} - S_{i_{n-1}}| > \varepsilon b_{i_n}) < \infty$$

при каждом $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Необходимость. Имеем почти наверное $S_{i_n}/b_{i_n} \to 0, S_{i_{n-1}}/b_{i_n} \to 0$, и, следовательно,

$$(S_{i_n} - S_{i_{n-1}})/b_{i_n} \to 0 \quad \text{п.н.}$$

Поскольку приращения $S_{i_n} - S_{i_{n-1}}$ независимы, с помощью леммы Бореля-Кантелли завершаем доказательство необходимости.

Достаточность. Обозначим $T_n = \max_{i_{n-1}<k\le i_n} |S_k - S_{i_{n-1}}|$. Так же как и при доказательстве теоремы 3, получаем

$$\limsup \frac{T_n}{c^n} \le \limsup \frac{T_n}{b_{i_n}} \le \varepsilon \quad \text{п.н},$$

Учитывая, что

$$\max_{i_{n-1}<k\le i_n} |S_k| \le T_n + T_{n-1} + \dots,$$

получаем

$$\limsup \max_{i_{n-1}<k\le i_n} \frac{|S_k|}{b_k} \le c \limsup \max_{i_{n-1}<k\le i_n} \frac{|S_k|}{c^n} \le c\varepsilon D \quad \text{п.н},$$

где $D = 1 + c^{-1} + c^{-2} + \dots < \infty$. Поскольку $\varepsilon > 0$ можно выбрать сколь угодно малым, достаточность доказана.

Ценой некоторого усложнения формулировки аналогичные необходимые и достаточные условия можно указать и для обобщенного закона повторного логарифма (см. упр. ниже).

Упражнения.

1. Докажите справедливость следующего результата.

Теорема 3' Предположим, что $S_n/b_n \xrightarrow{P} 0, C \ge 0$. Для того чтобы выполнялось соотношение

$$\limsup \frac{S_n}{b_n} \le C \quad \text{п.н.},$$

необходимо и достаточно выполнение условия:

$$\sum_{n=r}^{\infty} P(S_{i_n} - S_{i_{n-r}} > \varepsilon c^n) < \infty$$

при всех $\varepsilon > C, c > 1, r \in \{1, 2, \ldots\}$.

Указание. При $i_{n-1} < k \le i_n$

$$S_k = (S_k - S_{i_{n-r}}) + (S_{i_{n-r}} - S_{i_{n-2r}}) + \cdots$$

См. также упр. 2 в п. 1.

2. Покажите, что для сумм $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ независимых случайных величин со стандартным нормальным распределением справедлив закон повторного логарифма:

$$\limsup \frac{S_n}{(2n \log\log n)^{1/2}} = 1 \quad \text{п.н.}$$

Указание: $P(X > x) = 1 - \Phi(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}x} e^{-x^2/2}$ при $x \to \infty$ (проверяется с помощью правила Лопиталя).

3. Вспомните доказательство неравенства Леви и докажите следующее ее усиление: если $P(S_j \ge -\delta) \ge q > 0$ при $j < n$, то

$$P(\max_{0 \le j < k \le n} (S_k - S_j) > x) \le \frac{1}{q^2} P(S_n > x - \delta).$$

3. Закон больших чисел.

Закон больших чисел является "слабой" предельной теоремой (еще и потому, что сходимость к 0 по вероятности может быть переформулирована на языке слабой сходимости распределений). Однако, как видно из результатов предыдущего параграфа, он неизбежно проявляется при изучении сильных предельных теорем.

Теорема 5. *Пусть $X_1, X_2, \ldots$ - последовательность попарно независимых случайных величин, $S_n = X_1 + \cdots + X_n, b_n \nearrow \infty$. Для применимости закона больших чисел*

$$S_n / b_n \xrightarrow{P} 0$$

достаточно, а при дополнительном условии взаимной независимости $X_1, X_2, \ldots,$ и необходимо выполнение условий

$$(A) \quad \sum_{k=1}^{n} P(|X_k| > b_n) \to 0,$$

$$(B) \quad \frac{1}{b_n^2} \sum_{k=1}^{n} DY_{n,k} \to 0,$$

$$(C) \quad \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^{n} EY_{n,k} \to 0.$$

Здесь $Y_{n,k} = X_k I\{|X_k| \le b_n\}$ - усеченные случайные величины.

Доказательство. Достаточность. Обозначим $T_n = \sum_{k=1}^n Y_{n,k}$. Пусть $\varepsilon > 0$. Пользуясь последовательно условиями (C), (A) и (B), получаем при всех достаточно больших n

$$P(|S_n| > \varepsilon b_n) \le P(|T_n| > \varepsilon b_n) + P\left(\bigcup_{k=1}^n \{|X_k| > b_n\}\right)$$

$$\le P(|T_n - ET_n| > \varepsilon b_n/2) + o(1) \le \frac{4}{\varepsilon^2 b_n^2} DT_n + o(1) = o(1).$$

Мы применили здесь неравенство Чебышева.

Необходимость. Обозначим $A_{n,k} = \{X_k > b_n\}, B_{n,k} = \{S_n - X_k > -b_n/2\}$. При фиксированном n события $A_{n,k}$ попарно независимы. Кроме того, события $A_{n,k}$ и $B_{n,k}$ также независимы (здесь используется взаимная независимость X_j). Очевидно,

$$\frac{X_n}{b_n} = \frac{S_n}{b_n} - \frac{S_{n-1}}{b_n} \xrightarrow{P} 0, \quad \max_{1\le k\le n} P(|X_k| > \varepsilon b_n) \to 0$$

при $\varepsilon > 0$. Поскольку

$$P(|S_n - X_k| > b_n/2) \le P(|S_n| > b_n/4) + P(|X_k| > b_n/4),$$

получаем $\min_{1\le k\le n} P(B_{n,k}) \to 1$. Воспользуемся теоремой 2, согласно которой $\sum_{j=1}^n P(A_{n,j}) \to 0$. Аналогично $\sum_{j=1}^n P(X_j < -b_n) \to 0$, так что условие (A) выполнено.

Для доказательства (B) нам потребуется лемма.

Лемма. *Пусть X - симметрично распределенная ограниченная случайная величина, $|X| \le M$, $\sigma^2 = EX^2$, $f(t)$ - ее характеристическая функция. При $|t|M \le 1$ справедливо неравенство*

$$f(t) \le e^{-0.45\sigma^2 t^2}.$$

Доказательство. Учитывая, что $EX^k = 0$ при нечетных k, $X^k \le M^{k-2}\sigma^2$ при $k \ge 2$, получаем

$$f(t) = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^k}{k!} i^k EX^k \le 1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \frac{\sigma^2 t^4}{4!} M^2 + \frac{\sigma^2 t^8}{8!} M^6 + \cdots$$

$$\le 1 + \sigma^2 t^2 (-\frac{1}{2} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{12!} + \cdots) \le 1 - 0.45\sigma^2 t^2 \le e^{-0.45\sigma^2 t^2}.$$

Вернемся к доказательству (B). Из (A) следует, что

$$P(|T_n| > \varepsilon b_n) \le P(|S_n| > \varepsilon b_n) + P\left(\bigcup_{k=1}^n \{|X_k| > b_n\}\right) \to 0.$$

Применим лемму к симметризованным[1] случайным величинам $Y_{n,j}^s / b_n$, ограниченным по модулю константой 2. Если $f_{n,j}$ - характеристическая функция такой величины,

[1] Пусть X случайная величина, X' -ее независимая копия. Симметрично распределенная случайная величина $X^s = X - X'$ называется симметризованной.

f_n - характеристическая функция симметризованной суммы T_n^s/b_n, то при $2|t|DY_{n,j} \leq b_n^2$ имеем

$$f_{n,j}(t) \leq e^{-0.9DY_{n,j}t^2/b_n^2}$$

(напомним, что при симметризации дисперсия удваивается). Конечно, $DY_{n,j} \leq b_n^2$. Отсюда при $|t| < 0.5$

$$f_n(t) = \prod_{j=1}^{n} f_{n,j}(t) \leq \exp(-0.9t^2 \sum_{j=1}^{n} DY_{n,j}/b_n^2).$$

Обе части неравенства не превосходят 1. Учитывая, что $T_n^s \xrightarrow{P} 0$, так что по теореме непрерывности для характеристических функций левая часть стремится к 1, заключаем, что и правая часть стремится к 1, а показатель экспоненты - к нулю. Условие (B) доказано.

В силу неравенства Чебышева, при $\varepsilon > 0$

$$P(|T_n - ET_n| > \varepsilon b_n) \leq \frac{1}{\varepsilon^2 b_n^2} DT_n \to 0.$$

Ранее было показано, что $P(|T_n| > \varepsilon b_n) \to 0$. Отсюда $ET_n/b_n \to 0$.

Теорема доказана.

Применим к эту теорему к независимым одинаково распределенным слагаемым.

Следствие 1. *Пусть $X, X_1, X_2, \ldots$ - последовательность попарно независимых одинаково распределенных случайных величин, $S_n = X_1 + \cdots + X_n, b_n \nearrow \infty$. Для применимости закона больших чисел*

$$S_n/b_n \xrightarrow{P} 0$$

достаточно, а при дополнительном условии взаимной независимости $X_1, X_2, \ldots$ и необходимо выполнение условий

$$(A) \quad nP(|X| > b_n) \to 0,$$

$$(B') \qquad \frac{n}{b_n^2} EY_n^2 \to 0,$$

$$(C) \qquad \frac{n}{b_n} EY_n \to 0.$$

Здесь $Y_n = XI\{|X| \leq b_n\}$ - усеченные случайные величины.

Доказательство. Если $EX^2 < \infty$, то, очевидно, $(B') \wedge (C) \leftrightarrow (B) \wedge (C)$. Если $EX^2 = \infty$, то эквивалентность (B) и (B') вытекает из известного соотношения

$$(EXI\{|X| < t\})^2 = o(EX^2 I\{|X| < t\}), \quad t \to \infty. \tag{3}$$

Иногда условия (B') и (C) оказываются излишними

Следствие 2. *Считаем выполненными предположения следствия 1. Если*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{b_k^2}{k^2} = O\left(\frac{b_n^2}{n}\right), \tag{4}$$

то для применимости закона больших чисел достаточно выполнения условий (A) и (C). Если

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{k^2} = O\left(\frac{b_n}{n}\right), \tag{5}$$

то для применимости закона больших чисел достаточно выполнения условия (A). Если

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{b_k}{k^2} = O\left(\frac{b_n}{n}\right), \tag{6}$$

то для применимости закона больших чисел достаточно выполнения условий (A),(B') и $EX = 0$.

Отметим, что условие $EX = 0$ является необходимым для закона больших чисел, если $X_1, X_2, \ldots$ взаимно независимы и выполнено (6).

Доказательство. Докажем первое утверждение, для чего выведем (B') из (A). Обозначим $Q_k = P(|X| > b_k)$. Можно считать, что $b_0 = 0$. Пусть $\varepsilon > 0$ и n_ε таково, что $nQ_n < \varepsilon$ при $n \geq n_\varepsilon$. Имеем

$$\begin{aligned} EY_n^2 &= \sum_{k=1}^{n} EX^2 I\{b_{k-1} < |X| \leq b_k\} \leq \sum_{k=1}^{n} b_k^2 (Q_{k-1} - Q_k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} b_{k+1}^2 Q_k - \sum_{k=1}^{n} b_k^2 Q_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} (b_{k+1}^2 - b_k^2) Q_k \\ &\leq O(1) + \varepsilon \sum_{k=n_\varepsilon}^{n-1} \frac{b_{k+1}^2 - b_k^2}{k} = O(1) + \varepsilon \left(\sum_{k=n_\varepsilon+1}^{n} \frac{b_k^2}{k-1} - \sum_{k=n_\varepsilon}^{n-1} \frac{b_k^2}{k} \right) \\ &\leq O(1) + \varepsilon \left(\frac{b_n^2}{n-1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k^2}{k^2} \right). \end{aligned}$$

Из условия (4) немедленно следует, что величины b_n^2/n отделены при $n \geq 1$ от нуля и даже $b_n^2/n \to \infty$. Поэтому (B') вытекает из (4) и полученной выше оценки.

Доказательство второго и третьего утверждений совершенно аналогично. Во втором случае мы используем импликацию (5) $\Rightarrow$ (4). В третьем случае мы доказываем, что из условий (A),(6) и $EX = 0$ вытекает

$$EY_n = -EXI\{|X| > b_n\} = O(b_n/n).$$

Доказательство импликации $(6) \wedge (A) \Rightarrow EX = 0$ тоже аналогично (вместо (6) достаточно иметь сходимость ряда $\sum b_n^2/n^2$.

В заключение заметим, что условие (4) выполнено, если последовательность $b_n/n^{\delta+1/2}$ не убывает при некотором $\delta > 0$. Условие (5) выполнено, если последовательность $b_n/n^{\delta+1}$ не убывает при некотором $\delta > 0$. Условие (6) выполнено, если последовательность $b_n/n^{1-\delta}$ не возрастает при некотором $\delta > 0$.

Упражнения.
1. Убедитесь в справедливости утверждений предыдущего абзаца.
2. Докажите (3).

4. Вероятности больших уклонений. Оценка сверху для закона повторного логарифма.

Закон повторного логарифма, содержащийся в п. 6 и 7, содержит очень точное описание размаха флюктуаций сумм независимых случайных величин и случайного блуждания. Для доказательства мы воспользуемся теоремой (3). Возникающие там вероятности больших уклонений должны быть оценены сверху и снизу очень точно. Это будет сделано в параграфах 4 и 5 соответственно с помощью характерной для вероятностей больших уклонений техники.

Теорема 6. *Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ -независимые случайные величины с нулевыми средними и конечными дисперсиями, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Предположим, что $X_k \le M_n$ при всех $k \le n$, где M_n - постоянная, $B_n = EX_1^2 + \cdots + EX_n^2 > 0$. Обозначим $E_n = \sum_{k=1}^n EX_k I(X_k \ge -M_n)$. При $E_n < x \le B_n/M_n$ справедливо неравенство.*

$$\log P(S_n > x) \le -\frac{(x-E_n)^2}{2B_n}\left(1 - \frac{xM_n}{2B_n}\right).$$

Доказательство.

Лемма. *Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ -независимые случайные величины с нулевыми средними и конечными дисперсиями, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Предположим, что $|X_k| \le M_n$ при всех $k \le n$, где M_n - постоянная, $B_n = EX_1^2 + \cdots + EX_n^2 > 0, D_n \ge B_n$ - также постоянная. Тогда при $0 < xM_n \le D_n$ справедливо неравенство*

$$\log P(S_n > x) \le -\frac{x^2}{2D_n}\left(1 - \frac{xM_n}{2D_n}\right).$$

Доказательство леммы. При $D_n = B_n$ лемму можно найти, например, в книге В.В.Петрова. Общий случай доказывается аналогично. Именно, при $0 < hM_n \le 1$ имеем

$$\begin{aligned}
Ee^{hX_k} &= 1 + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{h^j}{j!} EX_k^j \le 1 + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{h^j}{j!} M_n^{j-2} EX_k^2 \\
&= 1 + h^2 EX_k^2 \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(hM_n)^{j-2}}{j!} \\
&\le 1 + h^2 EX_k^2 \left(\frac{1}{2} + hM_n \sum_{j=3}^{\infty} \frac{1}{j!}\right) \\
&\le 1 + \frac{h^2}{2} EX_k^2 \left(1 + hM_n/2\right) \\
&\le \exp\left(\frac{h^2}{2} EX_k^2 \left(1 + hM_n/2\right)\right).
\end{aligned}$$

Перемножая оценки по $k \le n$, получаем

$$Ee^{hS_n} \le \exp\left(\frac{h^2}{2}B_n\left(1 + hM_n/2\right)\right) \le \exp\left(\frac{h^2}{2}D_n\left(1 + hM_n/2\right)\right).$$

Далее,

$$P(S_n \ge x) \le e^{-hx}Ee^{hS_n} \le \exp\left(-hx + \frac{h^2}{2}D_n\left(1 + hM_n/2\right)\right)$$

Полагая $h = x/D_n$, получаем утверждение леммы.

Вернемся к доказательству теоремы. Обозначим $Y_k = X_k I(X_k \ge -M_n)$, $R_n = Y_1 + \cdots + Y_n$. Имеем $E_n = ER_n$, $S_n \le R_n$. Отсюда

$$P(S_n \ge x) \le P(R_n \ge x) = P(R_n - ER_n \ge x - E_n).$$

Остается воспользоваться леммой с $D_n = B_n \ge DR_n$.

5. Вероятности больших уклонений. Оценка снизу для закона повторного логарифма.

Мы переходим к формулировке самой трудно доказываемой теоремы курса.

Теорема 7. *Пусть $X_{n,1}, X_{n,2}, \dots, X_{n,n}$ - последовательность серий независимых в каждой серии случайных величин с нулевыми средними и конечными дисперсиями, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Предположим, что $B_n = EX_{n,1}^2 + \cdots + EX_{n,n}^2 \to \infty$. Обозначим $T_n = (B_n/\log\log B_n)^{1/2}$. Если при каждом $\varepsilon > 0$*

$$L_n := \sum_{j=1}^{n} EX_{n,j}^2 I\{|X_{n,j}| > \varepsilon T_n\} = o(B_n), \tag{7}$$

то при $C > 0$

$$\log P(S_n > Cb_n) \ge -(C^2 + o(1))\log\log B_n.$$

Доказательство. Мы можем вывести диагональным методом из условия (7) существование последовательности постоянных M_n таких, что $M_n = o(T_n)$ и

$$\sum_{j=1}^{n} EX_{n,j}^2 I\{|X_{n,j}| > M_n\} = o(B_n). \tag{8}$$

Если скорость роста M_n увеличить, так чтобы условие $M_n = o(T_n)$ все еще выполнялось, то условие (8) будет выполняться попрежнему. Можно считать (и будем считать), что

$$L_n/B_n = o(M_n/T_n), L_n/B_n = o((M_n/T_n)^2). \tag{9}$$

Предположим вначале, что выполнено условие:

$$X_{n,j} \le M_n \quad \text{при } j \le n.$$

Пусть $h = h_n > 0$. Функция $F_{n,k}^h(x) = Ee^{hX_{n,k}} I(X_{n,k} < x)/Ee^{hX_{n,k}}$ является функцией распределения (неотрицательна, не убывает, в $-\infty$ равна нулю, в $+\infty$

единице, может считаться непрерывной слева). Ее иногда называют сопряженной к $F_{n,k}(x) = P(X_{n,k} < x)$ функцией распределения. Пусть $\xi_{n,k}$ - независимые случайные величины с функциями распределения $F^h_{n,k}(x), \eta_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$. Построим сопряженную функцию распределения к $G_n(x) = P(S_n < x)$ и обозначим ее $G^h_n(x)$. Сравнивая характеристические функции нетрудно проверить, что $G^h_n(x)$ совпадает с функцией распределения случайной величины η_n.

В дальнейшем положим $h = s/T_n$, где s - положительная постоянная. Предварим доказательство теоремы двумя леммами о моментах сопряженного распределения.

Лемма 1. $E\eta_n \sim sb_n/\sqrt{2}$.

Доказательство. Очевидно, $E\xi_{n,k} = EX_{n,k}e^{hX_{n,k}}/Ee^{hX_{n,k}}$, причем все эти величины неотрицательны (производная числителя по h неотрицательна, а при $h = 0$ числитель обращается в нуль). Поскольку $e^x \geq 1 + x$, имеем $Ee^{hX_{n,k}} \geq 1 + hEX_{n,k} = 1$. С другой стороны, $Ee^{hX_{n,k}} \leq e^{hM_n} \to 1$. Итак,

$$Ee^{hX_{n,k}} \to 1$$

равномерно по k. Отсюда

$$E\eta_n = (1 + o(1)) \sum_{k=1}^{n} EX_{n,k}e^{hX_{n,k}}.$$

Далее, пусть $\delta > 0$. В некоторой окрестности нуля справедливы неравенства

$$x + (1-\delta)x^2 \leq xe^x \leq x + (1+\delta)x^2. \tag{10}$$

Отсюда при достаточно больших n и всех $k \leq n$

$$EX_{n,k}e^{hX_{n,k}} \leq EX_{n,k}e^{hX_{n,k}}I(X_{n,k} \geq -M_n) \leq EX_{n,k}I(X_{n,k} \geq -M_n) + (1+\delta)hEX^2_{n,k}.$$

причем первое слагаемое в правой части не превосходит

$$-EX_{n,k}I(X_{n,k} < -M_n) \leq EX^2_{n,k}I(|X_{n,k}| > M_n)/M_n.$$

Суммируя по k и вспоминая (9), получаем

$$\sum_{k=1}^{n} EX_{n,k}e^{hX_{n,k}} \leq \frac{L_n}{M_n} + (1+\delta)hB_n = (1 + \delta + o(1))\frac{s}{\sqrt{2}}b_n.$$

С учетом произвольности $\delta > 0$,

$$E\eta_n \leq (1 + o(1))\frac{s}{\sqrt{2}}b_n.$$

С другой стороны, поскольку $xe^x \geq -e^{-1}$ при $x < 0$,

$$EX_{n,k}e^{hX_{n,k}} \geq -\frac{1}{eh}P(X_{n,k} < -M_n) + EX_{n,k}e^{hX_{n,k}}I(X_{n,k} \geq -M_n).$$

Пользуясь (10) и учитывая, что $EX_{n,k}I(X_{n,k} \geq -M_n) \geq 0$, получаем

$$\begin{aligned} EX_{n,k}e^{hX_{n,k}} &\geq -\frac{1}{eh}P(X_{n,k} < -M_n) + (1-\delta)hEX^2_{n,k}I(X_{n,k} \geq -M_n) \\ \geq -\frac{EX^2_{n,k}I(|X_{n,k}| > M_n)}{ehM^2_n} &+ (1-\delta)hEX^2_{n,k} - (1-\delta)hEX^2_{n,k}I(X_{n,k} < -M_n) \\ &\geq (1-\delta)hEX^2_{n,k} - EX^2_{n,k}I(|X_{n,k}| > M_n)\left(\frac{1}{ehM^2_n} + (1-\delta)h\right) \end{aligned}$$

Суммируя по k и вновь вспоминая (9), получаем

$$E\eta_n \geq (1-\delta+o(1))hB_n = (1-\delta+o(1))sb_n/\sqrt{2}.$$

Здесь $\delta > 0$ произвольно. Лемма доказана.

Лемма 2. $D\eta_n = o(b_n^2)$.

Доказательство. Очевидно, $x^2e^x < 1$ при $x < 0$. Кроме того, $x^2e^x \leq (1+\delta)x^2$ в некоторой окрестности нуля. Поскольку $Ee^{hX_{n,k}} \geq 1$,

$$E\xi_{n,k}^2 = EX_{n,k}^2 e^{hX_{n,k}}/Ee^{hX_{n,k}} \leq \frac{1}{h^2}P(X_{n,k} < -M_n) + (1+\delta)EX_{n,k}^2.$$

Отсюда и из (9)

$$D\eta_n \leq \sum_{k=1}^n E\xi_{n,k}^2 \leq \frac{1}{h^2}\sum_{k=1}^n P(X_{n,k} < -M_n) + (1+\delta)B_n \leq \frac{L_nT_n^2}{s^2M_n^2} + o(b_n^2) = o(b_n^2).$$

Лемма доказана.

Пусть $C < B$. Имеем

$$\begin{aligned} P(S_n > Cb_n) = \int_{Cb_n}^{\infty} G_n(dx) \geq e^{-hBb_n} \int_{Chb_n}^{Bhb_n} e^{hx} G_n(dx) \\ = e^{-hBb_n} Ee^{hS_n} P_n, \end{aligned}$$

где

$$P_n = \int_{Chb_n}^{Bhb_n} G_n^h(dx) = P(Bb_n \geq \eta_n > Cb_n).$$

Пришло время выбрать s. Положим $s = (B+C)/\sqrt{2}$, поскольку в этом случае $E\eta_n$ попадает примерно в середину промежутка (Cb_n, Bb_n). С помощью леммы 1, неравенства Чебышева и леммы 2 заключаем, что при больших n и $0 < t < (B-C)/2$

$$P_n \geq 1 - P(|\eta_n - E\eta_n| > tb_n) \geq 1 - D\eta_n/t^2b_n^2 \to 1.$$

Оценим снизу Ee^{hS_n}. В силу неравенства $e^x \geq 1+x+(1-\delta)x^2/2$, справедливого в некоторой окрестности нуля,

$$\begin{aligned} Ee^{hX_{n,k}} \geq Ee^{hX_{n,k}} I(X_{n,k} \geq -M_n) \\ \geq P(X_{n,k} \geq -M_n) + hEX_{n,k}I(X_{n,k} \geq -M_n) + (1-\delta)h^2EX_{n,k}^2 I(X_{n,k} \geq -M_n). \end{aligned}$$

Второе слагаемое в правой части неотрицательно и может быть пропущено. Первое слагаемое оценивается снизу величинами

$$1 - P(X_{n,k} < -M_n) \geq 1 - \frac{1}{M_n^2}EX_{n,k}^2 I(X_{n,k} < -M_n).$$

Таким образом,

$$Ee^{hX_{n,k}} - 1 \geq (1-\delta)\frac{h^2}{2}EX_{n,k}^2 - \left(\frac{1}{M_n^2} + \frac{h^2}{2}\right) EX_{n,k}^2 I(X_{n,k} < -M_n).$$

Левая часть неравенства неотрицательна. Более того, она бесконечно мала равномерно по k. Пусть $0 < \tau < 1$. В некоторой окрестности нуля справедливо неравенство $1 + x \geq e^{\tau x}$. Отсюда при достаточно больших n и всех $k \leq n$

$$Ee^{hX_{n,k}} \geq e^{\tau(Ee^{hX_{n,k}}-1)}.$$

Подставляя сюда оценку для $Ee^{hX_{n,k}} - 1$ и перемножая неравенства по $k \leq n$, получаем

$$Ee^{hS_n} \geq \exp\left(\tau(1-\delta)\frac{h^2}{2}B_n - \left(\frac{1}{M_n^2} + \frac{h^2}{2}\right) L_n\right)$$

Вспоминая (9), заключаем, что

$$Ee^{hS_n} \geq \exp\left((1+o(1))\tau(1-\delta)\frac{h^2}{2}B_n\right).$$

Отсюда

$$Ee^{hS_n} \geq \exp\left((1+o(1))\frac{h^2}{2}B_n\right).$$

Итак,

$$\begin{aligned}\log P(S_n > Cb_n) &\geq -hBb_n + (1+o(1))h^2B_n/2 \\ &= (-sB\sqrt{2} + s^2/2 + o(1))\log\log B_n.\end{aligned}$$

Подставляя s, получим коэффициент при $\log\log B_n$, стремящийся к $-C^2$ при $B \searrow C$.

Теорема доказана в предположении $X_{n,j} \leq M_n$ при $j \leq n$. Для доказательства общего случая применим метод усечения. Обозначим $Y_{n,j} = X_{n,j}I\{X_{n,j} \leq M_n\}$ и их сумму $R_n = Y_{n,1} + \cdots + Y_{n,n}$. Очевидно,

$$P(S_n > Cb_n) \geq P(R_n > Cb_n).$$

Случайные величины $Y_{n,1}, \ldots, Y_{n,n}$ удовлетворяют при больших n всем условиям теоремы за исключением одного - их математические ожидания могут отличаться от нуля (быть отрицательными), причем у некоторых настолько сильно, что центрированные случайные величины $Y_{n,j} - EY_{n,j}$ оказываются не ограниченными сверху нужным образом.

Предлагается следующий выход. Разобьем множество индексов $\{1, \ldots, n\}$ на два подмножества V_n и V_n'. В подмножество V_n включим те индексы j, для которых $|EY_{n,j}| \leq M_n$. Остальные индексы попадают в V_n'. Множество V_n' содержит сравнительно мало элементов, его мощность оценивается так:

$$\begin{aligned}|V_n'| &\leq \sum_{j\in V_n'} |EY_{n,j}|/M_n = \sum_{j\in V_n'} EX_{n,j}I\{X_{n,j} > M_n\}/M_n \\ &\leq \sum_{j\in V_n'} EX_{n,j}^2 I\{X_{n,j} > M_n\}/M_n^2 \leq \frac{L_n}{M_n^2} = o(\log\log B_n).\end{aligned}$$

Суммарная дисперсия, приходящаяся на случайные величины с индексами из V_n' тоже относительно мала:

$$\sum_{j\in V_n'} EY_{n,j}^2 \leq L_n + M_n^2|V_n'| = o(B_n). \tag{11}$$

Обозначим $R_{V_n} = \sum_{j\in V_n} Y_{n,j}$ и $R_{V_n'} = \sum_{j\in V_n'} Y_{n,j}$ соответствующие суммы усеченных случайных величин. Поскольку $R_{V_n}/b_n \to 0$ по вероятности, то

$$P(R_n > Cb_n) \geq P(R_{V_n} > (C+\tau)b_n)P(R_{V_n'} > -\tau b_n) \sim P(R_{V_n} > (C+\tau)b_n)$$

при любом $\tau > 0$. Далее, поскольку

$$0 \leq -ER_{V_n} \leq -ER_n \leq \frac{1}{M_n}\sum_{j=1}^{n} EX_{n,j}^2 I\{|X_{n,j}| > M_n\} = o(b_n),$$

получаем

$$P(R_{V_n} > (C+\tau)b_n) \geq P(R_{V_n} - ER_{V_n} > (C+2\tau)b_n)$$

при всех достаточно больших n. К последней вероятности уже применима доказанная часть теоремы. В частности, $Y_{n,j} - EY_{n,j} \leq 2M_n$. Учитывая, что $DR_{V_n} \sim B_n$ благодаря (11), имеем

$$\log P(S_n > Cb_n) \geq -(1+o(1))(C+2\tau)^2 \log\log B_n.$$

Устремляя τ к нулю, завершаем доказательство.

6. Закон повторного логарифма Колмогорова и его обобщение.

Всюду далее $\log x = \ln(x \vee 2)$.

Теорема 8. *Пусть $X_1, X_2, \ldots$ -последовательность независимых случайных величин, $EX_j = 0, EX_j^2 < \infty, S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Предположим, что $B_n = EX_1^2 + \cdots + EX_n^2 \to \infty$. Обозначим $T_n = (B_n/\log\log B_n)^{1/2}$. Если для любого $\varepsilon > 0$*

$$\frac{1}{B_n}\sum_{j=1}^{n} EX_j^2 I\{|X_j| > \varepsilon T_n\} \to 0, \tag{12}$$

то

$$\limsup \frac{S_n}{(2B_n \log\log B_n)^{1/2}} \geq 1 \quad \text{п.н.}$$

Если к тому же $X_n \leq \delta T_n$, где δ - положительная постоянная. то

$$1 \leq \limsup \frac{S_n}{(2B_n \log\log B_n)^{1/2}} \leq C_\delta \quad \text{п.н.}$$

Здесь C_δ - функция, зависящая лишь от δ, $C_\delta \to 1$ при $\delta \searrow 0$.

Теорема 9. *Пусть $X_1, X_2, \ldots$ -последовательность независимых случайных величин, $EX_j = 0, EX_j^2 < \infty, S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Предположим, что $B_n = EX_1^2 + \cdots + EX_n^2 \to \infty$. Обозначим $T_n = (B_n/\log\log B_n)^{1/2}$. Если для любого $\varepsilon > 0$*

$$\frac{1}{B_n}\sum_{j=1}^{n} EX_j^2 I\{|X_j| > \varepsilon T_n\} \to 0, \tag{13}$$

$X_n \leq M_n$, где M_j - постоянные, удовлетворяющие условию $M_n = o(T_n)$, то

$$\limsup \frac{S_n}{(2B_n \log\log B_n)^{1/2}} = 1 \quad \text{п.н.}$$

Критерии выполнения последнего равенства обычно называют законом повторного логарифма. Один из наиболее известных результатов в этой области - закон повторного логарифма Колмогорова.

Следствие (ЗПЛ Колмогорова). *Пусть* $X_1, X_2, \dots$ *-последовательность независимых случайных величин,* $EX_j = 0, EX_j^2 < \infty, S_n = X_1 + \dots + X_n$. *Предположим, что* $B_n = EX_1^2 + \dots + EX_n^2 \to \infty$. *Если* $|X_j| \le M_j$, *где* M_j *- постоянные, удовлетворяющие условию*

$$M_n = o\left(B_n / \log\log B_n\right)^{1/2},$$

то

$$\limsup \frac{S_n}{(2B_n \log\log B_n)^{1/2}} = 1 \quad \text{п.н.}, \qquad \liminf \frac{S_n}{(2B_n \log\log B_n)^{1/2}} = -1 \quad \text{п.н.}$$

Доказательство теоремы 8. Обозначим $b_n = (2B_n \log\log B_n)^{1/2}$.

Воспользуемся теоремой 3. Она применима, поскольку по неравенству Чебышева, $S_n/b_n \to 0$ по вероятности. Из условия (13) следует, что $EX_n^2 \le \varepsilon^2 T_n^2 + EX_n^2 I\{|X_n| > \varepsilon T_n\} = o(B_n)$ и, следовательно, $B_{n+1}/B_n \to 1$. Поэтому для вводимых в теореме 3 индексов i_n имеем

$$b_{i_n} \sim c^n, \;\; \log\log B_{i_n} \sim \log\log b_{i_n} \sim \log n.$$

Докажем вначале второе утверждение теоремы (точнее, оценку сверху для верхнего предела). Ограничимся рассмотрением достаточно малых $\delta > 0$. Воспользуемся теоремой 6 с $x = Cb_n, M_n = \delta T_n$. Условие $x \le B_n/M_n$ выполнено для всех C из некоторой окрестности 1,

$$0 \le E_n \le \frac{1}{M_n} \sum_{j=1}^{n} EX_j^2 I\{|X_j| > M_n\} = o(b_n),$$

поэтому условие $x > E_n$ также выполнено при достаточно больших n. По теореме 6 имеем с $C' = 1 - C\delta/\sqrt{2}$

$$\log P(S_n > Cb_n) \le -\frac{x^2}{2B_n}(C' + o(1)) \sim -C'C^2 \log\log B_n \sim -C'C^2 \log n$$

Итак,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(S_{i_n} > Cb_{i_n}) < \infty$$

при $C^2(1 - C\delta/\sqrt{2}$, и по теореме 3

$$\limsup \frac{S_n}{b_n} \le C_\delta \quad \text{п.н.},$$

с $C_\delta = 1/\sqrt{1-\delta^2}$ (при достаточно малых $\delta > 0$).

Докажем первое утверждение теоремы. Имеем

$$B_{i_n} \sim b_{i_n}^2 / 2\log\log b_{i_n} \sim c^{2n}/2\log n, \quad B_{i_n} - B_{i_{n-1}} \sim B_{i_n}(1 - c^{-2}).$$

Теорему 7 применим к сериям случайных величин $X_{i_{n-1}+1}, \dots, X_{i_n}$:

$$\log P(S_{i_n} - S_{i_{n-1}} > Cb'_{i_n}) \geq -(C^2 + o(1)) \log\log(B_{i_n} - B_{i_{n-1}}) \sim -C^2 \log n.$$

Здесь $b'_{i_n} = (2(B_{i_n} - B_{i_{n-1}}) \log\log(B_{i_n} - B_{i_{n-1}}))^{1/2} \sim \sqrt{1-c^{-2}}\, b_{i_n}$. Имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(S_{i_n} - S_{i_{n-1}} > C\sqrt{1-c^{-2}} b_{i_n}) = \infty$$

при $c > 1, C < 1$. По теореме 3

$$\limsup \frac{S_n}{b_n} \geq 1 \quad \text{п.н.}$$

Упражнение. Докажите, что в условиях ЗПЛ Колмогорова множество предельных (при сходимости почти наверное) точек последовательности $S_n/(2B_n \log\log B_n)^{1/2}$ совпадает с вероятностью 1 с отрезком $[-1, 1]$.

7. Закон повторного логарифма Хартмана-Винтнера и его обращение.

Теорема 10. *Пусть $X, X_1, X_2, \dots$ -последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $S_n = X_1 + \dots + X_n$.*

1. Если $EX = 0, \sigma^2 = EX^2 < \infty$, то

$$\limsup \frac{S_n}{(2n \log\log n)^{1/2}} = \sigma \quad \text{п.н.}$$

2. Если

$$-\infty < \limsup \frac{S_n}{(2n \log\log n)^{1/2}} < \infty \quad \text{п.н.},$$

то $EX = 0, EX^2 < \infty$.

Первое утверждение теоремы называют законом повторного логарифма Хартмана-Винтнера, а второе является его обращением. Здесь и далее $\log x = \ln(x \vee 2)$.

Доказательство. Докажем первое утверждение. Из теоремы 11 с $B_n = nEX^2$ сразу следует, что $\limsup$ больше или равен σ.

Лемма Кронекера. *Пусть $\{u_n\}$ и $\{b_n\}$ - две последовательности постоянных, $b_n \nearrow \infty$. Если $\sum u_n/b_n < \infty$, то $(u_1 + \dots + u_n)/b_n \to 0$.*

Доказательство этого известного результата мы опустим.

Пусть $\delta > 0$. Положим $b_n = (2n \log\log n)^{1/2}, T_n = (n/\log\log n)^{1/2}$, $Y_n = X_n I\{X_n \leq \delta T_n\}, Z_n = X_n I\{X_n > \delta T_n\}$, так что $X_n = Y_n + Z_n$. Покажем, что

$$\sum_n |EY_n|/b_n = \sum_n EZ_n/b_n < \infty, \tag{14}$$

так что ряд $\sum Z_n/b_n$ сходится почти наверное.

Имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{EZ_n}{b_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n} \sum_{k=n}^{\infty} EXI\{\delta T_k < X \leq \delta T_{k+1}\} = \sum_{k=1}^{\infty} EXI\{\delta T_k < X \leq \delta T_{k+1}\} \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{b_n}.$$

Переходя к интегралам, нетрудно установить, что

$$\sum_{n=1}^{k} 1/b_n \sim 0.5 \left(\frac{k}{\log\log k} \right)^{1/2} = 0.5 T_k$$

при $k \to \infty$. Напомним, что $EX^2 < \infty$ и, следовательно, (14) выполнено.

В силу леммы Кронекера это приводит к соотношениям $\sum_{k=1}^{n} EY_k/b_n \to 0, \sum_{k=1}^{n} Z_k/b_n \to 0$ почти наверное. С другой стороны, в силу теоремы 8

$$1 \le \limsup \frac{\sum_{k=1}^{n}(Y_k - EY_k)}{(2B'_n \log\log B'_n)^{1/2}} \le C_\delta \quad \text{п.н.},$$

где $B'_n = DY_1 + \cdots + DY_n$. Учитывая, что $DY_n \to EX^2$, заключаем, что $B'_n \sim B_n$. Поэтому

$$(EX^2)^{1/2} \le \limsup \frac{\sum_{k=1}^{n} Y_k}{b_n} = C_\delta (EX^2)^{1/2} \quad \text{п.н.}$$

Эти неравенства сохраняются после замены $\sum_{k=1}^{n} Y_k$ на S_n. Поскольку $C_\delta \to 1$ при $\delta \searrow 0$, первое утверждение теоремы доказано.

Второе утверждение теоремы оставим без доказательства.

Глава 2. Функциональные предельные теоремы.

Представление Скорохода.

В этой главе будет доказана теорема Донскера, которую иногда называют функциональной центральной предельной теоремой. Далее будет доказан функциональный вариант закона повторного логарифма (теорема Штрассена). Также будет сформулирован *принцип инвариантности*, который и оправдывает фунциональный подход.

Функциональными эти теоремы называются по следующей причине. Рассмотрим последовательность сумм независимых одинаково распределенных случайных величин $S_0, S_1, S_2, \dots$ (здесь $S_0 = 0$). При ($n \geq 1$) построим непрерывные случайные ломаные $g_n(t), 0 \leq t \leq 1$ таким образом: $g_n(k/n) = S_k/\sqrt{n}$ при $0 \leq k \leq n$; на отрезках $[k/n, (k+1)/n]$ эти функции линейны. Если распределения случайных величин $S_n/\sqrt{n}$ сходятся слабо к стандартному нормальному, то можно ожидать, что и распределение случайной функции g_n сходится слабо к распределению винеровского процесса, рассматриваемого на отрезке $[0,1]$ Почти все траектории винеровского процесса можно считать непрерывными, поэтому (почти) вся задача погружается в пространство непрерывных функций $C[0,1]$. Аналогично строится функциональная версия ЗПЛ (то есть исследуюся предельные при сходимости почти наверное в $C[0,1]$ точки последовательности функций $g_n(t)/\sqrt{2n \log\log n}$. Для доказательства будет использован совершенно новый метод (или представление Скорохода), описываемый в пар. 2 и пар. 3. Представление Скорохода может заменить при доказательстве предельных теорем вероятности больших уклонений. Также предстоит обсудить, что такое случайный элемент в $C[0,1]$, что такое распределение случайной функции (и, в частности, винеровского процесса) в $C[0,1]$, что такое слабая сходимость в $C[0,1]$. Это будет сделано в пар. 4 и ?.

1. Некоторые свойства винеровского процесса и его приращений.

Пусть $w_t = w(t), t \geq 0$ -винеровский процесс. Начнем с простого неравенства: при $x > 0, t > 0$

$$P(w_t > x) \leq e^{-x^2/2t}. \tag{15}$$

Доказательство. $P(w_t > x) = P(\frac{w_t}{\sqrt{t}} > \frac{x}{\sqrt{t}}) = 1 - \Phi(\frac{x}{\sqrt{t}})$. Покажем, что функция $U(y) = 1 - \Phi(y) - e^{-y^2/2}$ отрицательна на положительной полуоси. Производная $U'(y) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} + y e^{-y^2/2}$ обращается в 0 в точке $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, в которой $U(y)$ имеет максимум. Нетрудно проверить, что U в этой точке отрицательна. Ч.т.д.

При $x > 0, t > 0$ справедливы еще три неравенства:

$$P(\sup_{0 \leq s \leq t} w_s > x) \leq 2P(w_t > x),$$
$$P(\sup_{0 \leq s \leq t} |w_s| > x) \leq 2P(|w_t| > x),$$
$$P(\sup_{0 \leq s,u \leq t} |w_s - w_u| > x) \leq 4P(|w_t| > x/2). \tag{16}$$

Первое содержится в курсе теории вероятностей (несколько труднее доказать, что оно всегда обращается в равенство; возможно это доказано в курсе теории случайных процессов). Второе неравенство, конечно, вытекает из первого, поскольку $-w_t$ также винеровский процесс. Для доказательства третьего неравенства заметим лишь, что его левая часть не превосходит $2P(\sup_{0\le s\le t}|w_s| > x/2)$.

Теорема 11. *При* $u \ge v > 0$ *справедливо неравенство*

$$P(\sup_{0\le s,t\le u,|s-t|\le v}|w_t - w_s| > x) \le 8\frac{u}{v}e^{-x^2/16v}$$

Правая часть этого неравенства стремится к нулю при $v \searrow 0$.

Доказательство. Левая часть не превосходит

$$\sum_{k=0}^{[u/v]} P(\sup_{kv\le t,s\le(k+2)v}|w_t - w_s| > x) = [u/v]P(\sup_{0\le t,s\le 2v}|w_t - w_s| > x). \tag{17}$$

Остается применить неравенства (16) и (15).

Теорема 12. (ЗПЛ для приращений винеровского процесса) *Для любого* $\varepsilon > 0$ *справедливо соотношение*

$$\limsup_{u\to\infty}\frac{\sup_{0\le s,t\le u,|s-t|\le\varepsilon u}|w_t - w_s|)}{\sqrt{2u\log\log u}} \le 4\sqrt{\varepsilon} \qquad \textit{п.н.}$$

Доказательство. Пусть $0 < \varepsilon \le 1$. Положим $\chi_u = \sqrt{2u\log\log u}$ при $u > 8$. Супремум в левой части неравенства обозначим H_u. По теореме 13 имеем при $x > 0$

$$P(u) := P(H_u > x\chi_u) \le \frac{8}{\varepsilon}\exp(-\frac{x^2\chi_u^2}{16\varepsilon u}) = \frac{8}{\varepsilon}\exp(-\frac{x^2}{16\varepsilon}\log\log u) = \frac{8}{\varepsilon}\frac{1}{(\log u)^{x^2/16\varepsilon}}.$$

При $c > 1, x > 4\sqrt{\varepsilon}$ имеем $\sum P(c^n) < \infty$. По лемме Бореля-Кантелли $P(H_{c^n} > x\chi_{c^n}$ б.ч.$) = 0$, так что

$$\limsup\frac{H_{c^n}}{\chi_{c^n}} \le 4\sqrt{\varepsilon} \qquad \text{п.н.}$$

Заметим, что $\chi_{c^n} \sim \sqrt{c}\chi_{c^{n-1}}$, и функция H_u не убывает. Поэтому

$$\limsup\frac{H_u}{\chi_u} \le 4\sqrt{c\varepsilon} \qquad \text{п.н.}$$

Приближая c к единице, получаем утверждение теоремы.

Теорема 13. (ЗПЛ для винеровского процесса)

$$\limsup_{u\to\infty}\frac{w_u}{\sqrt{2u\log\log u}} = 1 \quad \textit{п.н.}, \qquad \limsup\frac{w_n}{\sqrt{2n\log\log n}} = 1 \quad \textit{п.н.}$$

Второе утверждение теоремы вытекает из теоремы 10. Первое утверждение вытекает из второго и теоремы 12.

2. Представление Скорохода - построение.

Пусть $w_t, t \geq 0$, -винеровский процесс с непрерывными траекториями, $a > 0$ и $b > 0$ - постоянные. Обозначим τ -момент первого достижения винеровским процессом границ отрезка $[-b, a]$. Случайная величина τ является моментом остановки или марковским моментом. Известно, что $E\tau = ab$ и

$$P(w_\tau = a) = \frac{b}{a+b},\ P(w_\tau = -b) = \frac{a}{a+b}.$$

Пусть теперь X -случайная величина с $EX = 0, P(X = 0) = 0, w_t, t \geq 0,$ - винеровский процесс с непрерывными траекториями, τ -момент первого достижения винеровским процессом границ случайного отрезка $[-V, U]$, задаваемого с помощью функции распределения случайного вектора (U, V)

$$F(x,y) = \frac{1}{\gamma}\int_0^x \left(\int_{-\infty}^y (u-v)F(dv)\right) F(du), \quad y < 0 < x.$$

Здесь $\gamma = \frac{1}{2}E|X| = EX^+ = EX^-, X^+$ и X^- -положительная и отрицательная части $X = X^+ - X^-$. Кроме того, предполагается, что вектор (U, V) и процесс w_t независимы. Ясно, что случайная величина U положительна с вероятностью 1, а V отрицательна. Заметим, кстати, что

$$\begin{aligned} F(\infty, 0) &= \frac{1}{\gamma}\int_0^\infty \left(\int_{-\infty}^0 uF(dv)\right) F(du) - \frac{1}{\gamma}\int_0^\infty \left(\int_{-\infty}^0 vF(dv)\right) F(du) \\ &= \frac{1}{\gamma}(EX^+P(X<0) + EX^-P(X>0)) = P(X \neq 0) = 1, \end{aligned}$$

то есть это действительно функция распределения.

Введенная выше случайная величина τ играет ключевую роль в построении представления Скорохода.

Теорема 14. *Если* $EX = 0, P(X = 0) = 0$, *то*

$$X \stackrel{d}{=} w_\tau.$$

Кроме того,

$$E\tau = EX^2 \leq \infty,$$
$$E\tau^k \leq C_k EX^{2k} \leq \infty$$

при $k = 2, 3, \ldots$ *Постоянные* C_k *зависят лишь от* k.

Равенство распределений $X \stackrel{d}{=} w_\tau$ называют представлением Скорохода: случайная величина с достаточно произвольным распределением может рассматриваться, как винеровский процесс в случайный момент времени.

Доказательство. Переходя к условной вероятности при фиксированном значении случайного вектора (U, V), имеем для $x > 0$

$$\begin{aligned} P(w_\tau > x) &= EP_{(U,V)}(w_\tau > x) = EP_{(U,V)}(w_\tau = U, U > x) \\ &= EP_{(U,V)}(w_\tau = U)I(U > x) = E\frac{-V}{U-V}I(U > x) \\ &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^0 \frac{-v}{u-v} I(u > x)F(du, dv) \\ &= \frac{1}{\gamma}\int_x^\infty \left(\int_{-\infty}^0 (-v)F(dv)\right) F(du) = P(X > x). \end{aligned}$$

Аналогично при $x < 0$ доказывается равенство $P(w_\tau < x) = P(X < x)$. Таким образом, $X \overset{d}{=} w_\tau$. Далее,

$$E\tau = EE_{(U,V)}\tau = -EUV$$
$$= -\int_0^\infty \int_{-\infty}^0 uvF(du,dv) = -\frac{1}{\gamma}\int_0^\infty \left(\int_{-\infty}^0 uv(u-v)F(dv)\right) F(du)$$
$$= \frac{1}{\gamma}(E(X^+)^2 EX^- + E(X^-)^2 EX^+) = E(X^+)^2 + E(X^-)^2 = EX^2.$$

Последнее утверждение теоремы оставим без доказательства.

В заключение отметим, что с помощью некоторого усложнения конструкции можно отказаться от предположения $P(X = 0) = 0$. Утверждение теоремы останется в силе.

Упражнение.

Пусть X -случайная величина с плотностью распределения $p(y)$ и $EX = 0$. Обозначим $suppX = \{y : p(y) > 0\}$. Функцию G определим на $suppX$ уравнением
$$\int_x^{G(x)} yp(y)\,dy = 0.$$
Ясно, что величины x и $G(x)$ имеют разные знаки (за исключением случая $x = G(x) = 0$, если $0 \in suppX$). Пусть w_t -винеровский процесс, не зависящий от X, τ -момент первого достижения этим процессом границ случайного отрезка $[X, G(X)]$ (или $[G(X), X]$ в зависимости от знака X). Оказывается, что утверждения теоремы 15 остаются справедливыми для так определенного τ. Докажите первые два утверждения теоремы.

3. Представление Скорохода для суммы независимых случайных величин. Первое применение.

Теорема 15. *Пусть $X_1, X_2, \dots$ - последовательность независимых случайных величин с $EX_j = 0, j = 1, 2, \dots, S_n = X_1 + \dots + X_n, w(t)$ - винеровский процесс. Тогда существует последовательность независимых неотрицательных случайных величин $\tau_1, \tau_2, \dots,$ такая, что*

A) $(S_1, \dots, S_n) \overset{d}{=} (w(\tau_1), \dots, w(\tau_1 + \dots + \tau_n)$ при $n \geq 1$;

B) $EX_j^2 = E\tau_j, \quad j \geq 1$;

C) если X_j одинаково распределены, то и τ_j одинаково распределены.

Доказательство. Винеровский процесс обозначим теперь $w_1(t)$. С помощью теоремы 14 построим представление Скорохода для первой случайной величины: $X_1 \overset{d}{=} w_1(\tau_1)$. Процесс $w_2(t) = w_1(t + \tau_1) - w_1(\tau_1), t \geq 0$ снова является не зависящим от τ_1 винеровским процессом, поскольку τ_1 - момент остановки w_1. С помощью w_2 и теоремы **??** построим представление Скорохода для второй случайной величины: $X_2 \overset{d}{=} w_2(\tau_2)$. Учитывая независимость X_1 и X_2, получаем

$$(X_1, X_2) \overset{d}{=} (w_1(\tau_1), w_2(\tau_2)) = (w_1(\tau_1), w_1(\tau_1 + \tau_2) - w_1(\tau_1)),$$

$$(X_1, X_1+X_2) \overset{d}{=} (w_1(\tau_1), w_1(\tau_1+\tau_2)).$$

И т.д.

Теперь можно объяснить основную идею, лежащую в основе предлагаемого в этой главе метода. Пусть $X_1, X_2, \dots$ -последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевым средним и единичной дисперсией. В силу теоремы 16 распределение суммы $S_n = X_1 + \dots + X_n$ совпадает с распределением $w(\tau_1+\dots+\tau_n)$. Поскольку случайные величины τ_j независимы и одинаково распределены, то они подчиняются усиленному закону больших чисел: $(\tau_1+\dots+\tau_n)/n \to E\tau_1 = 1$ почти наверное. Таким образом, распределение S_n сближается с распределением $w(n)$, а распределение $S_n/\sqrt{n}$ сближается с распределением $w(n)/\sqrt{n}$, то есть со стандартным нормальным распределением. Что делает центральную предельную теорему Леви почти очевидной. При этом характеристические функции не используются. Поскольку в этом рассуждении случайную величину S_n можно заменить на случайный вектор $(S_1, \dots S_n)$, а также на какую-нибудь функцию от случайного вектора, то выглядит правдоподобной возможность переноса многих предельных теорем для винеровского процесса на соответствующие предельные теоремы для сумм независимых одинаково распределенных случайных величин.

Перейдем к точным формулировкам и доказательствам.

Теорема 16. *Пусть $X, X_1, X_2, \dots$ -последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $EX = 0, EX^2 = 1, S_n = X_1+\dots+X_n$. Эта последовательность может быть переопределена (естественно, с сохранением распределений) на одном (достаточно богатом) вероятностном пространстве с некоторым винеровским процессом $w(t)$ таким образом, что при каждом $\varepsilon > 0$*

$$P(\max_{1\le k\le n} |S_k - w(k)| > \varepsilon\sqrt{n}) \to 0.$$

Доказательство. По теореме 15 $(S_1, \dots, S_n) \overset{d}{=} (w(t_1), \dots, w(t_n)$, где $t_k = \tau_1+\dots+\tau_k$. Согласно усиленному закону больших чисел, $t_n/n \to E\tau = EX^2 = 1$ почти наверное, или $\max_{1\le k\le n} |t_k - k|/n \to 0$ почти наверное и по вероятности. Отсюда при $\delta, \varepsilon > 0$

$$P(\max_{1\le k\le n} |S_k - w(k)| > \varepsilon\sqrt{n}) = P(\max_{1\le k\le n} |w(t_k) - w(k)| > \varepsilon\sqrt{n})$$
$$\le P(\max_{1\le k\le n} |t_k - k| > \delta\sqrt{n}) + P(\sup_{0\le t,s\le(1+\delta)n, |t-s|\le\delta n} |w(t) - w(s)| > \varepsilon\sqrt{n})$$
$$\le o(1) + \frac{8(1+\delta)}{\delta} e^{-\varepsilon^2/16\delta}.$$

В последнем неравенстве мы воспользовались теоремой 11. При $\delta \searrow 0$ и $n \to \infty$ правая часть стремится к нулю. Ч.т.д.

Следствие 1. *В условиях предыдущей теоремы распределение $S_n/\sqrt{n}$ сходится слабо к стандартному нормальному.*

Очевидно, поскольку распределение $w(n)/\sqrt{n}$ и является стандартным нормальным.

Следующий результат прокладывает мостик к исследованию случайных ломаных.

Следствие 2. *Пусть $g_n(t)$ -случайная функция на $[0, 1], g_n(0) = 0, g_n(j/n) = S_j/\sqrt{n}, 0 < j \le n, g_n$ линейна на отрезках $[(j-1)/n, j/n]$. Пусть выполнены* *условия теоремы 16. Последовательность $\{X_j\}$ можно переопределить на одном вероятностном пространстве с последовательностью винеровских процессов $w_n(t)$ таким образом, что*

$$\sup_{0\le t\le 1} |g_n(t)-w_n(t)| \xrightarrow{P} 0.$$

Доказательство. Имеем $\max_{1\le j\le n} |g_n(j/n)-w(j)/\sqrt{n}| \xrightarrow{P} 0$ по теореме 16. Теперь утверждение следствия с $w_n(t)=w(nt)/\sqrt{n}$ вытекает из линейности g_n на отрезках $[(j-1)/n, j/n]$ и соотношений

$$\max_{1\le j\le n} |g_n(j/n)-g_n((j-1)/n)| \le \max_{1\le j\le n} \frac{|X_j|}{\sqrt{n}} \xrightarrow{P} 0$$

(поскольку $EX^2<\infty$ и, следовательно, $nP(|X|>\varepsilon\sqrt{n})\to 0$),

$$\sup_{0\le t,s\le n, |t-s|\le 1} \frac{|w(t)-w(s)|}{\sqrt{n}} \overset{d}{=} \sup_{0\le t,s\le 1, |t-s|\le 1/n} |w(t)-w(s)| \xrightarrow{P} 0.$$

4. Снова к закону повторного логарифма. Теорема Штрассена.

Теорема 17. (Штрассен) *Последовательность $X, X_1, X_2, \ldots$ независимых одинаково распределенных случайных величин с $EX=0, EX^2=1, S_n=X_1+\cdots+X_n$ может быть переопределена на одном вероятностном пространстве с некоторым винеровским процессом $w(t)$ таким образом, что*

$$\frac{S_n-w(n)}{\sqrt{2n\log\log n}} \to 0 \quad \textit{п.н.}$$

Доказательство. Положим $\chi_n=\sqrt{2n\log\log n}$. В силу теоремы 15 конечномерные распределения последовательности $S_1, S_2, \ldots$ совпадают с конечномерными распределениями последовательности $w(t_1), w(t_2), \ldots$ где $t_n=\tau_1+\cdots+\tau_n$. Винеровский процесс можно считать независимым от $S_1, S_2, \ldots$ Поэтому достаточно доказать, что

$$\frac{w(t_n)-w(n)}{\chi_n} \to 0 \quad \text{п.н.}$$

Согласно усиленному закону больших чисел, $t_n/n\to E\tau_1=1$ почти наверное. Поэтому при всех $\varepsilon>0$, почти всех $\omega, n\ge n_{\omega,\varepsilon}$

$$\frac{|w(t_n)-w(n)|}{\chi_n} \le \sup_{(1-\varepsilon)n\le t\le(1+\varepsilon)n} \frac{|w(t)-w(n)|}{\chi_n}.$$

По теореме 12 верхний предел правой части при сходимости почти наверное не превосходит C_ε, причем $C_\varepsilon\to 0$ при $\varepsilon\searrow 0$.

Следующие две теоремы, приводимые без доказательства, показывают. что при дополнительных моментных предположениях скорость сближения случайного блуждания S_n с подходящим винеровским процессом улучшается. Наилучшая возможная скорость сближения - логарифмическая.

Теорема 18. (Комлош, Майор, Тушнади) *Пусть* $r > 2$. *Последовательность* $X, X_1, X_2, \ldots$ *независимых одинаково распределенных случайных величин с* $EX = 0, EX^2 = 1, E|X|^r < \infty, S_n = X_1 + \cdots + X_n$ *может быть переопределена на одном вероятностном пространстве с некоторым винеровским процессом* $w(t)$ *таким образом, что*

$$\frac{S_n - w(n)}{n^{1/r}} \to 0 \quad \textit{п.н.}$$

Теорема 19. (Комлош, Майор, Тушнади) *Пусть* $h > 0$. *Последовательность* $X, X_1, X_2, \ldots$ *независимых одинаково распределенных случайных величин с* $EX = 0, EX^2 = 1, Ee^{h|X|} < \infty, S_n = X_1 + \cdots + X_n$ *может быть переопределена на одном вероятностном пространстве с некоторым винеровским процессом* $w(t)$ *таким образом, что*

$$\limsup \frac{|S_n - w(n)|}{\log n} < \infty \quad \textit{п.н.}$$

Известно также следующее. Если в последнем соотношении вместо конечности верхнего предела имеется сходимость к нулю п.н., то распределение независимых одинаково распределенных случайных величин $X, X_1, X_2, \ldots$ является стандартным нормальным.

Теорему 19 называют иногда КМТ-принципом. Изложенными в этой главе методами она не может быть доказана. Рззработанный в работах Комлоша, Майора, Тушнади метод является довольно трудным, громоздким и принципиально иным.

5. Случайные элементы в пространстве $C[0,1]$. Теорема Донскера и связанный с ней принцип инвариантности.

Ограничимся здесь минимальным изложением. Подробнее см. в известной книге: П.Биллингсли, Сходимость вероятностных мер.

Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ - вероятностное пространство, $C[0,1]$ -пространство непрерывных функций (с супремальной нормой). Случайным элементом или случайной функцией пространства $(C, \mathfrak{A})$ называется отображение $g : \Omega \times [0,1] \to R$, у которого при каждом $\omega \in \Omega$ функция $g(\omega, t)$ является непрерывной по t и при каждом t $g(\omega, t)$ является случайной величиной.

Винеровский процесс $w(t), 0 \le t \le 1$, может иметь непрерывные траектории и тогда оказывается случайным элементом $C[0,1]$. Обозначим

$$\chi_n = \sqrt{2n \log\log n}, w_n(t) = w(nt)/\chi_n, 0 \le t \le 1.$$

Если $g, g_1, g_2, \ldots$ -последовательность случайных элементов в $C[0,1]$, то слабая сходимость их распределений

$$\mathfrak{L}_{g_n} \xrightarrow{w} \mathfrak{L}_g$$

определяется как сходимость интегралов от всевозможных ограниченных непрерывных функцмй h :

$$\int_\Omega h(g_n) d\, P(\omega) \to \int_\Omega h(g) d\, P(\omega).$$

Эта сходимость эквивалентна такой:

$$P(g_n \in B) \to P(g \in B)$$

для любого борелевского множества B из $C[0,1]$, такого, что $P(g \in \partial B) = 0$. Напомним, что борелевские множества заполняют минимальную $\sigma-$алгебру, содержащую открытые шары $S_f(r)$ с централи в различных $f \in C[0,1]$ и произвольными радиусами r.

Понятие слабой сходимости распределений вводится аналогичным образом для случайных элементов в произвольном метрическом пространстве.

Теорема 20. *Пусть $X, X_1, X_2, \ldots$ - последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $S_n = X_1 + \cdots + X_n, n \geq 1, S_0 = 0$, случайная функция g_n линейна на отрезках $[(k-1)/n, k/n], k = 1, \ldots, n$. В точках излома (и точках 0 и 1) она определяется равенствами $g_n(k/n) = S_k/\sqrt{n}$. Если $EX = 0, EX^2 = 1$, то $\mathfrak{L}_{g_n} \xrightarrow{w} \mathfrak{L}_w$, где $w(t), 0 \leq t \leq 1$, -винеровский процесс.*

Доказательство.

Лемма 1. *Пусть g_n и w_n -две последовательности случайных элементов $C[0,1]$. Если $\mathfrak{L}_{w_n} \xrightarrow{w} \mathfrak{L}_w$, где w -случайный элемент $C[0,1]$, и $g_n - w_n \xrightarrow{P} 0$, то $\mathfrak{L}_{g_n} \xrightarrow{w} \mathfrak{L}_w$.*

Простое и стандартное оказательство леммы опустим. Теорема 20 вытекает теперь из теоремы 17.

Следующая лемма лежит в основе *принципа инвариантности.*

Лемма 2. *Пусть $g, g_1, g_2, \ldots$ -последовательность случайных элементов $C[0,1]$. Если $\mathfrak{L}_{g_n} \xrightarrow{w} \mathfrak{L}_g$ и h непрерывное отображение из $C[0,1]$ в метрическое пространство (S, ρ), то $\mathfrak{L}_{h(g_n)} \xrightarrow{w} \mathfrak{L}_{h(g)}$,*

Доказательство вытекает из определений непрерывности и слабой сходимости. Опустим его. Продемонстрируем на примерах действие принципа инвариантности, предполагая, что выполнены условия и используются обозначения теоремы 20.

1. Пусть вначале $h(f) = f(1)$. Имеем $h(w) = w(1), h(g_n) = S_n/\sqrt{n}$, так что распределения $S_n/\sqrt{n}$ сходятся слабо к стандартному нормальному распределению (теорема Леви).

2. Пусть теперь $h(f) = \max_{0 \leq t \leq 1} f(t)$. Тогда $h(g_n) = \max_{0 \leq j \leq n} S_j/\sqrt{n}$. Вычислим предельное распределение $h(w) = \sup_{o \leq t \leq 1} w(t)$. Обозначим τ момент первого достижения винеровским процессом $w(t), t \geq 0$, значения $x > 0$. Благодаря закону повторного логарифма τ вполне определена (с вероятностью 1). В момент времени (момент остановки) τ винеровский процесс стартует из точки x заново и, если $\tau < t$, то в момент t он с равными вероятностями окажется либо выше либо ниже уровня x, то есть

$$P(\tau < t, w(t) > x) = P(\tau < t, w(t) < x).$$

В сумме эти вероятности дают $P(\tau < t)$. Учитывая, что траектории $w(s)$ непрерывны, имеем

$$P(\sup_{0 \leq s \leq t} w(s) > x) = P(\tau < t) = 2P(\tau < t, w(t) > x) = 2P(w(t) > x).$$

Итак, в условиях теоремы 20 при $x > 0$ получаем

$$P(\max_{0\le j\le n} S_j > x\sqrt{n}) \to 2(1-\Phi(x)) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_x^\infty e^{-y^2/2}dy.$$

При $x \le 0$ эти вероятности стремятся к единице.

3. Пусть $h(f) = \max_{0\le t\le 1}|f(t)|$. В этом случае предельное распределение $h(w) = \sup_{o\le t\le 1}|w(t)|$ не удается найти таким простым способом (на самом деле, оно представляется в виде суммы некоторого сходящегося устрашающего ряда). Принцип инвариантности позволяет вычислить его с помощью следующего приема. Независимые случайные величины X_j с $P(X=-1) = P(X=1) = 1/2$ удовлетворяют условиям теоремы 20. Для простейшего симметричного случайного блуждания S_n с помощью комбинаторных соображений (и рекуррентных соотношений) удается последовательно вычислять вероятности $P(\max_{0\le j\le n}|S_j| > x\sqrt{n})$. Переходя к пределу при $n\to\infty$ находим искомое предельное распределение.

С помощью подобного приема в упоминавшейся книге Биллингсли находится не только предельное распределение из примера 3, но и совместное предельное распределение нескольких аналогичных статистик (то есть h действует из $C[0,1]$ в R^d).

6. Функциональный закон повторного логарифма.

Пусть w -винеровский процесс с непрерывными траекториями, $w_n(t) = w(nt)/\chi_n$, где $\chi_n = \sqrt{2n\log\log n}$.

Закон повторного логарифма для винеровского процесса (см. пар. 1) можно переписать в такой форме:

$$\limsup ||w_n|| = 1 \qquad \text{п.н.}$$

Другими словами, для почти всех ω множество w_n равномерно ограниченно: $|w_n(t)| \le C_\omega$ при $n\ge 1, 0\le t\le 1$. Аналогичным образом, закон повторного логарифма для приращений винеровского процесса означает, что для почти всех ω множество w_n равностепенно непрерывно: для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta_\omega > 0$ такое, что $|w_n(t) - w_n(s)| < \varepsilon$ при $|t-s| < \delta_\omega, 0\le t,s\le 1, n\ge 1$.

В силу теоремы Арцела-Асколи, получаем следующий результат.

Теорема 21. *С вероятностью 1 множество w_n относительно компактно.*

Переходим к формулировке основных результатов этого параграфа. Как и раньше, $\chi_s = \sqrt{2s\log\log s}$.

Теорема 22. (Штрассен) *Пусть $w(t), t\ge 0$, - винеровский процесс с непрерывными траекториями, $w_n(t) = w(nt)/\chi_n$ - случайные элементы пространства $C[0,1]$. Множество $\{w_n\}$ с вероятностью 1 относительно компактно и множество его п.н. предельных точек совпадает с*

$$K = \{f\in C[0,1] : f(0) = 0, f \text{ абсол. непрерывна, } V_f := \int_0^1 (f'(t))^2dt \le 1\}.$$

Множество K называют шаром Штрассена. Функции, входящие в него обладают следующими свойствами:

a) при $0 \le s < t \le 1$

$$|f(t) - f(s)| = |\int_s^t f'(u)du| \le \sqrt{t-s}\sqrt{V_f} \le \sqrt{t-s}$$

и, конечно, $|f(t)| \le \sqrt{t}$.

b) K относительно компактно. Согласно теореме Арцела-Асколи, для этого необходима и достаточна равномерная ограниченность элементов K и их равностепенная непрерывность. И то и другое следует из a).

c) K компактно.

Легче всего оператор V_f подсчитывается для непрерывной кусочно-линейной функции f, заданной на $[0,1]$, точки перелома которой лежат на решетке $j/r, r = 0, 1, \ldots, r$. Пусть $f(0) = 0$. Тогда $f'(t) = r(f(j/r) - f((j-1)/r))$ при $(j-1)/r < t < j/r$ и, следовательно,

$$V_f = \sum_{j=1}^{r} \int_{(j-1)/r}^{j/r} (f'(t))^2 dt = r \sum_{j=1}^{r} \left(f\left(\frac{j}{r}\right) - f\left(\frac{j-1}{r}\right)\right)^2. \tag{18}$$

Не случайно, в последующем доказательстве мы будем стараться свести вычисления V_f именно к этому случаю.

Теорема 23. (Штрассен) *Пусть $X, X_1, X_2, \ldots$ последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с $EX = 0, EX^2 = 1, S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Случайная функция g_n линейна на отрезках $[(k-1)/n, k/n], k = 1, \ldots, n$. В точках излома она определяется равенствами $g_n(k/n) = S_k/\chi_n, g_n(0) = 0$. Функции g_n являются случайными элементами пространства $C[0,1]$. Множество $\{g_n\}$ с вероятностью 1 относительно компактно и множество его п.н. предельных точек совпадает с*

$$K = \{f \in C[0,1] : f(0) = 0, f \text{ абсол. непрерывна, } V_f := \int_0^1 (f'(t))^2 dt \le 1\}.$$

Теорема 23 вытекает из теорем 22 и 17 (последняя утверждает, что $||g_n - w_n|| \to 0$ почти наверное).

Информация, предоставляемая теоремой 23, позволяет изучить поведение длинных отрезков траекторий последовательности сумм $S_1, S_2, \ldots$

6. Доказательство теоремы 22.

Поскольку относительная компактность $\{w_n\}$ уже содерхится в предыдущей теореме, нам остается доказать, что

1) вне K нет предельных точек для $\{w_n\}$;

2) если $f \in K$, то f является предельной точкой.

Начнем с доказательства 1). Покажем, что расстояние $\rho(w_n, K)$ от w_n до K стремится к нулю почти наверное. Пусть $r > 1$ целое, $\tilde{w}_n$ случайная ломаная, совпадающая с w_n на границах отрезков вида $[(j-1)/r, j/r], j = 1, \ldots, r$, и линейная в каждом отрезке. Если $\varepsilon > 0$, то с учетом (18) имеем

$$P(V_{\tilde{w}_n} \ge 1 + \varepsilon) = P\left(r \sum_{j=1}^{r} \left(w_n\left(\frac{j}{r}\right) - w_n\left(\frac{j-1}{r}\right)\right)^2 > 1 + \varepsilon \right) =$$

$$= P\left(\sum_{j=1}^{r}\frac{(w(\frac{j}{r}n) - w(\frac{j-1}{r}n))^2}{n/r} > (1+\varepsilon)2\log\log n\right).$$

Случайная величина $\sum_{j=1}^{r}\dots$ под знаком последней вероятности имеет χ^2-распределение с r степенями свободы. Для таких величин известна оценка $P(\chi_r^2 > x) \le e^{-x/2}$ при достаточно больших x. Поскольку ряд $\sum\exp(-(1+\varepsilon)\log\log c^n)$ сходится при $\varepsilon > 0, c > 1$, то $\sum P(V_{\tilde{w}_{c^n}} \ge (1+\varepsilon)) < \infty$, и по лемме Бореля-Кантелли

$$P(V_{\tilde{w}_{c^n}} \ge 1+\varepsilon \text{ б.ч.}) = 0.$$

Если $V_{\tilde{w}_n} < 1+\varepsilon, 0 < \varepsilon < 1$, то $V_{\tilde{w}_n/\sqrt{1+\varepsilon}} < 1$ и $\tilde{w}_n/\sqrt{1+\varepsilon} \in K$, а так как

$$\left|\left|\tilde{w}_n - \frac{\tilde{w}_n}{\sqrt{1+\varepsilon}}\right|\right| \le \frac{\varepsilon}{2}||\tilde{w}_n|| \le \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{V_{\tilde{w}_n}} \le \frac{\varepsilon}{2}(1+\varepsilon) < \varepsilon,$$

то $\rho(\tilde{w}_{c^n}, K) < \varepsilon$. По теореме 12

$$\limsup ||\tilde{w}_n - w_n|| \le \limsup \frac{\sup_{s,t\le n, |t-s|\le n/r}|w(s) - w(t)|}{\chi_n} \le \frac{4}{\sqrt{r}} \quad \text{п.н.}$$

При достаточно больших r, почти всех ω и $n \ge n_\omega$ получаем $\rho(w_{c^n}, K) < 2\varepsilon$.

Для доказательства 1) остается показать, что

$$\limsup \sup_{k:c^{n-1}<k\le c^n} ||w_k - w_{c^n}|| \le \varepsilon \quad \text{п.н.}$$

при достаточно малых $c > 1$. Это делается совсем просто:

$$\sup_{k:c^{n-1}<k\le c^n} ||w_k - w_{c^n}|| \le \sup_{t,s\le c^n, |t-s|<c^n(c-1)} \frac{|w_t - w_s|}{\chi_{c^{n-1}}} + \sup_{t\le c^n}|w_t|\left(\frac{1}{\chi_{c^{n-1}}} - \frac{1}{\chi_{c^n}}\right).$$

Перейдем к верхнему пределу при $n \to \infty$. Благодаря закону повторного логарифма для приращений винеровского процесса верхний предел первого слагаемого в правой части мал при c близких к 1. Верхний предел второго слагаемого мал при c близких к 1 благодаря закону повторного логарифма для винеровского процесса и соотношению

$$\frac{1}{\chi_{c^{n-1}}} - \frac{1}{\chi_{c^n}} \sim (\sqrt{c}-1)\frac{1}{\chi_{c^n}}.$$

В завершающей части доказательства мы покажем, что f является предельной точкой последовательности $\{w_n\}$, если $f \in K$.

Достаточно доказать это для какого-либо плотного в K подмножества. Будем предполагать, что f кусочно-линейна с точками перелома $k/r, 0 < k < r; r = 1, 2, \dots$ Пусть $V_f < 1$. Зафиксируем такую функцию f и $c > 1$. Покажем, что

$$P(||w_{c^n} - f|| < \varepsilon \text{ б.ч.}) = 1.$$

При положительном m вида $m = lr$, где l целое, имеем

$$\{||w_n - f|| < \varepsilon\} \supset A_n \cap B_n \cap C_n,$$

где

$$A_n = \{ \sup_{t \le 1/m} |w_n(t) - f(t)| < \varepsilon/3\},$$

$$B_n = \{ \max_{1 \le k \le m} |w_n(k/m) - f(k/m) - w_n(1/m) + f(1/m)| < \varepsilon/3\},$$

$$C_n = \{ \sup_{t,s \le 1, |t-s| \le 1/m} |w_n(t) - f(t) - w_n(s) + f(s)| < \varepsilon/3\}.$$

По теореме 11

$$\limsup \sup_{t \le 1/m} |w_n(t)| = 1/\sqrt{m} \quad \text{п.н.},$$

так что $\sup_{t \le 1/m} |w_n(t)| < \varepsilon/6$ при $m > m_\varepsilon, n > n_\omega$. Кроме того, $|f(t)| < \varepsilon/6$ при $t < 1/m, m > m_\varepsilon$, так как $f \in K$. Отсюда следует, что при правильном выборе m для почти всех ω справедливо $\omega \in A_n$ при всех достаточно больших n. Аналогичное утверждение справедливо и для C_n (с использованием теоремы 12 и равномерной непрерывности f). Остается доказать, что

$$P(B_{c^n} \text{ б.ч.}) = 1. \tag{19}$$

События B_{c^n} взаимно независимы при $c^{n-1} \le c^n/m$, то есть при $c \ge m$.

Готовясь воспользоваться леммой Бореля-Кантелли, оценим снизу вероятности $P(B_n)$. Обозначим

$$\Delta_{w_n}(k) = w_n\left(\frac{k}{m}\right) - w_n\left(\frac{k-1}{m}\right), \ \Delta_f(k) = f\left(\frac{k}{m}\right) - f\left(\frac{k-1}{m}\right)$$

приращения w_n и f соответственно. Нам также понадобятся интервалы $J_k = (\Delta_f(k) - \frac{\varepsilon}{3m}, \Delta_f(k) + \frac{\varepsilon}{3m}) := (x_k, y_k)$. Очевидно,

$$\bigcap_{k=2}^{m} \{\Delta_{w_n}(k) \in J_k\} \subset B_n.$$

С учетом независимости приращений винеровского процесса имеем

$$P(B_n) \ge \prod_{k=2}^{m} P_n(k),$$

где

$$P_n(k) = P\left(\Delta_{w_n}(k) \in J_k\right).$$

Если k таково, что $\Delta_f(k) = 0$, то $P_n(k) \to 1$, поскольку случайная величина $\Delta_{w_n}(k) \stackrel{d}{=} \Delta_{w_n}(1) = w(n/m)/\chi_n$ имеет нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией $1/2m \log\log n$. Для всех остальных k (обозначим их множество M), выбирая $\varepsilon > 0$ достаточно малым можем добиться, чтобы интервалы J_k не включали точку ноль и, более того, не имели ее на границе. В этих случаях вероятности $P_n(k)$ стремятся к нулю со скоростью, которую легко подсчитать. Пусть, например, $x_k > 0$. Учитывая экспоненциальную скорость убывания хвоста нормального распределения, получаем

$$\begin{aligned} P_n(k) = P(N > x_k\sqrt{2m\log\log n}) - P(N > y_k\sqrt{2m\log\log n}) \\ \sim P(N > x_k\sqrt{2m\log\log n}). \end{aligned}$$

Здесь N - случайная величина со стандартным нормальным распределением. Поэтому при достаточно больших n

$$P_n(k) > \exp(-x_k^2 m \log\log n) > \exp(-\Delta_f^2(k) m \log\log n)$$

поскольку $0 < x_k < \Delta_f(k)$.

Аналогичным образом последняя оценка выводится и для случая, когда $y_k < 0$ (с заменой x_k^2 на y_k^2) Перемножая эти оценки, получаем

$$P(B_n) \geq \exp\left(-(1+o(1))\sum_{k\in M}\Delta_f^2(k) m \log\log n\right).$$

Сумму $\sum_{k\in M}$ можно заменить на равную ей сумму по всем k. Вспоминая (18), получаем при достаточно больших n

$$P(B_n) \geq \exp\left(-V_f \log\log n\right)(1+o(1)).$$

Поскольку $V_f < 1$, ряд $\sum_n P(B_{c^n})$ расходится. По лемме Бореля-Кантелли получаем (19).

7. Принцип инвариантности в функциональном законе повторного логарифма.

Начнем с простых утверждений, которые можно найти в курсе функционального анализа. Пусть $h : (C, \rho) \to (M, \tilde{\rho})$ непрерывное отображение пространства непрерывных функций с супремальной метрикой в некоторое метрическое пространство. Если множество $D \subset C[0,1]$ относительно компактно, то и $h(D)$ относительно компактно. Кроме того, если K -множество предельных точек множества D в (C, ρ), то $h(K)$ -множество предельных точек $h(D)$ в $(M, \tilde{\rho})$.

Это позволяет генерировать новые предельные теоремы для функций от сумм $S_1, S_2, \ldots$ либо для функций от траекторий винеровского процесса.

В приводимых ниже примерах предполагается, что выполнены условия теоремы 23. Случайные функции g_n также построены в пар. 5.

Пример 1. Пусть $h : C[0,1] \to R$ определено так: $h(f) = f(1)$. Тогда $f(g_n) = S_n/\chi_n$. Нетрудно видеть, что $h(K) = [-1,1]$. Действительно, $h(K) \supset [-1,1]$, поскольку $|f(t)| \leq \sqrt{t}$ при $f \in K$. Обратное включение легко установить, проверяя, какие линейные функции вида $f(t) = \alpha t$ попадают в K.

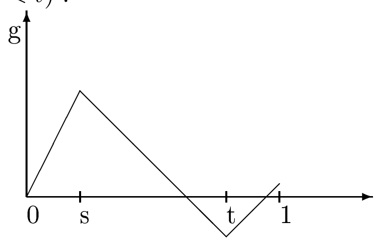
Отсюда вновь получаем закон повторного логарифма Хартмана-Винтнера: последовательность случайных величин $\{S_n/\chi_n\}$ ограниченна с вероятностью 1 и множество ее предельных точек (при сходимости почти наверное) совпадает с отрезком $[-1,1]$.

Пример 2. Если $h(f) = \sup_{0\leq t\leq 1} f(t)$, то множество предельных точек последовательности $h(g_n) = \max_{0\leq k\leq n} S_k/\chi_n$ совпадает с вероятностью 1 с множеством $h(K) = [0,1]$.

Пример 3. Пусть $h(f) = (\inf_{0\leq t\leq 1} f(t), \sup_{0\leq t\leq 1} f(t))$. Тогда

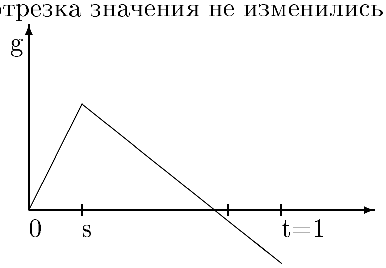
$$h(g_n) = (\min_{0\leq k\leq n} S_k/\chi_n, \max_{0\leq k\leq n} S_k/\chi_n).$$

Найдем теперь множество $h(K)$. Предположим, что $f \in K$, супремум f достигается в точке s, а инфимум - в точке t. Обозначим $S = f(s), T = f(t)$ и начнем с самого интересного случая, когда S положительно, а T отрицательно. Пусть g -кусочно-линейная непрерывная функция, совпадающая с f в точках перелома $0, s, t, 1$ (некоторые из этих точек могут совпадать). Например, такая (случай $s < t$) :



Ясно, что $V_g \leq V_f$. Если $t < 1$ и $s < 1$, изменим g следующим образом. Откажемся от условия $g(1) = f(1)$, пусть g остается постоянной на последнем отрезке линейности.

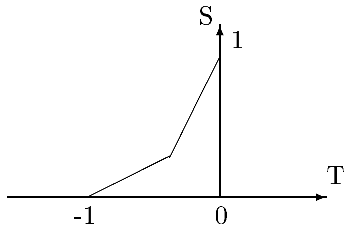
Значение оператора V могло еще уменьшиться. И, наконец, два последних (правых) отрезка линейности соединим в один, так чтобы на концах соединенного отрезка значения не изменились.



Все эти преобразования, уменьшая, возможно, значение оператора V, не меняли значения супремума S и инфимума T функции. Очевидно, $h(K) = h(L)$, где L - подмножество K, содержащее функции из последнего рисунка, а также эти функции, взятые с обратным знаком. Оказывается, значение оператора V можно еще уменьшить, если выбрать s оптимальным образом. Имеем

$$V_g = \frac{1}{s}S^2 + \frac{1}{1-s}(S-T)^2.$$

Рассматривая это выражение как функцию от $s \in (0, 1)$, находим, что минимум достигается при $s = S/(2S - T)$ и равен он $(2S - T)^2$. Теперь условие $V_g \leq 1$ приводит к неравенству $2S - T \leq 1$. Аналогично, если $s > t$, приходим к неравенству $S-2T \leq 1$. В результате, множество $h(K)$ совпадает с объединением двух треугольников:



Рассмотрение случаев $S = 0$ и $T = 0$ не приводит к увеличению множества $h(K)$.

Единственная трудность при доказательстве предельных теорем таким способом состоит в описании множества $h(K)$, что собственно говоря и не относится к теории вероятностей.

Глва 3. Предельные теоремы для максимальных приращений и случайных полей.

1. Изучаемые максимальные приращения.

Пусть $X, X_1, X_2, \ldots$ последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Основными объектами, асимптотику которых мы будем изучать, являются следующие максимальные статистики:

$$U_n = \max_{0 \le k \le n - a_n} (S_{k+a_n} - S_k), \quad W_n = \max_{0 \le j < k \le j + a_n \le n} (S_k - S_j).$$

В первом случае рассматриваются максимумы приращений по промежуткам длины a_n, во втором случае - по промежуткам длины не более a_n. Наряду с ними рассматривсются и сами приращения $S_n - S_{n-a_n}$. Относительно последовательности положительных целых чисел a_n делаются следующие предположения: $a_n = [a(n)]$, где функция $a(t)$ такова, что $1 \le a(t) \le t$ и

$$a(t) \nearrow \infty, \;\; a(t)/t \searrow .$$

Асимптотика рассматриваемых статистик качественно зависит от скорости роста a_n. Пограничным является случай, когда a_n растет с логарифмической скоростью, то есть $a(t) = c \log t$.

Если $a_n / \log n \to \infty$ (длинные приращения), то при выполнении условия Крамера асимптотика не зависит от распределения (если, конечно, среднее равно нулю, а дисперсия единице). Мы рассмотрим этот случай детально, получим закон повторного логарифма, аналог усиленного закона больших чисел. Основной нормирующей последовательностью будет являться

$$x_n = \left(2a_n \left(\log \frac{n}{a_n} + \log\log n \right) \right)^{1/2}.$$

Данная зона изменения a_n называется зоной инвариантности и наши доказательства сводят с помощью КМТ-принципа все к исследованию статистик, построенных по нормальной выборке.

В пограничном (логарифмическом) случае нормирующую последовательность можно брать логарифмической, но значение предела зависит сложным образом от распределения. КМТ-принцип здесь не применим, применима техника вероятностей больших уклонений.

Наконец, в случае, когда $a_n / \log n \to 0$ (короткие приращения), нормирующая последовательность сложным образом зависит от распределения. Это - зона сильной неинвариантности.

2. Закон повторного логарифма Чорге-Ревеса.

Теорема 24. *Предположим, сто* $EX = 0, EX^2 = 1, Ee^{h|X|} < \infty$ *при некотором* $h > 0$. *Если* $a_n / \log n \to \infty$, *то*

$$\limsup \frac{U_n}{x_n} = \limsup \frac{W_n}{x_n} = \limsup \frac{S_n - S_{n-a_n}}{x_n} = 1 \quad \text{п.н.}$$

Доказательство. Очевидно, что $x_n/\log n \to \infty$. Благодаря КМТ-принципу (см. теорему 19) достаточно доказать теорему для X со стандартным нормальным распределением. Разобьем доказательство на два этапа.

Лемма 1.

$$\limsup \frac{S_n - S_{n-a_n}}{x_n} \geq 1 \quad \textit{п.н.}$$

Доказательство. Пусть вначале $a_n \sim n$. Тогда $x_n \sim (2n \log\log n)^{1/2}$. По закону повторного логарифма

$$\limsup \frac{S_n}{x_n} = 1, \quad \lim \frac{S_{n-a_n}}{x_n} = 0 \quad \text{п.н.},$$

так что лемма доказана.

Пусть теперь $a_n/x_n \to d < 1$ (напомним, что эта последовательность монотонна). Последовательность индексов k_n определим при $n > 1$ так, чтобы $k_n - a_{k_n} = k_{n-1}; k_1 = 1$ (это вполне возможно, поскольку последовательность $n - a_n$ не убывая заполняет все натуральные значения). Ясно, что $k_n \to \infty$. Приращения $S_{k_n} - S_{k_n - a_{k_n}}$ являются независимыми, и в силу леммы Бореля-Кантелли достаточно показать, что при $t < 1$

$$\sum_{n=2}^{\infty} P(S_{k_n} - S_{k_n - a_{k_n}} > t x_{k_n}) = \infty. \tag{20}$$

Имеем

$$P_n = P(S_n - S_{n-a_n} > t x_n) = P(S_{a_n} > t x_n) = P(N > t x_n/\sqrt{a_n}).$$

При $t^2 < s < 1$ получаем для всех достаточно больших n

$$P(N > t x_n/\sqrt{a_n}) > e^{-s x_n^2/2a_n} = \frac{1}{(\log n)^s} \left(\frac{a_n}{n}\right)^s \geq \frac{1}{(\log n)^s} \frac{a_n}{n}.$$

Воспользуемся неравенством $x \geq -C_z \log(1-x)$, справедливым при $x \leq z < 1$ (здесь $C_z > 0$). При $d < z < 1$ и всех достаточно больших n имеем $a_n/n < z$ и

$$\sum_{j=n_0}^{m} P_{k_j} \geq \frac{1}{(\log k_m)^s} \sum_{j=n_0}^{m} \frac{a_{k_j}}{k_j} \geq \frac{C_z}{(\log k_m)^s} \sum_{j=n_0}^{m} \left(-\log\left(1 - \frac{a_{k_j}}{k_j}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{(\log k_m)^s} \sum_{j=n_0}^{m} \log \frac{k_j}{k_{j-1}} = \frac{(\log k_m)^{1-s}}{\log k_{n_0-1}} \to \infty.$$

Отсюда следует (20).

Лемма 2.

$$\limsup \frac{W_n}{x_n} \leq 1 \quad \textit{п.н.}$$

Доказательство. Для того, чтобы справиться с двойным макимумом, нам понадобится следующее усиление неравенства Леви (см. упражнение 3 к гл. 1, пар. 2): если $P(S_j \geq -s) \geq q > 0$ при $j < n$, то

$$P(\max_{0 \leq j < k \leq n} (S_k - S_j) > x) \leq \frac{1}{q^2} P(S_n > x - s).$$

Учитывая симметричность нормального распределения (с нулевым средним), получаем

$$P(\max_{0\le j<k\le n}(S_k-S_j)>x)\le 4P(S_n>x).$$

Поскольку множество индексов в определении W_n представимо при любом целом m в виде

$$\{(j,k):0\le j<k\le j+a_n\le n\}=\bigcup_{0\le l<mn/a_n} A_l,$$

где

$$A_l=\{(j,k):\frac{la_n}{m}\le j<k\le\frac{((l+m+1)a_n}{m},k\le n\},$$

имеем

$$P(W_n>tx_n)\le\sum_{0\le l<mn/a_n}P\left(\max_{(j,k)\in A_l}(S_k-S_j)>tx_n\right)$$

$$\le\frac{mn}{a_n}P\left(\max_{(j,k)\in A_0}(S_k-S_j)>tx_n\right)\le 4\frac{mn}{a_n}P\left(S_{[a_n(1+1/m)]}>tx_n\right).$$

При достаточно больших n и $s=t^2/(1+1/m)$ справедлива оценка

$$P(W_n>tx_n)\le 4\frac{mn}{a_n}e^{-sx_n^2/2a_n}=4m\left(\frac{n}{a_n}\right)^{1-s}\frac{1}{(\log n)^s}.$$

Пусть $t>1$. Подберем m так, что $s>1$. Тогда правая часть не превосходит $4s(\log n)^s$, так что при $c>1$ ряд $\sum P(W_{c^n}>tx_{c^n})$ сходится. По лемме Бореля-Кантелли и с учетом произвольности $t>1$

$$\limsup\frac{W_{c^n}}{x_{c^n}}\le 1\quad\text{п.н.}$$

Числитель и знаменатель являются неубывающими по n. Из свойств монотонности $a(t)$ нетрудно вывести, что $x_{c^n}\le(c+o(1))x_{c^{n-1}}$. Поскольку $c>1$ можно приблизить к 1, отсюда следует утверждение леммы.

3. Предельная теорема Чорге-Ревеса.

Приводимую ниже теорему часто объединяют с теоремой предыдущего параграфа и называют законом Чорге-Ревеса.

Теорема 25. *Пусть выполнены условия теоремы 24 и, кроме того,*

$$\log\log n=o\left(n/a_n\right).\tag{21}$$

Тогда

$$\lim\frac{U_n}{x_n}=\lim\frac{W_n}{x_n}=1\qquad\textit{п.н.}$$

Условие (21) приводит к тому, что $x_n\sim(a_n\log(n/a_n))^{1/2}$. Оно выполнено, если $a_n<n/(\log n)^{T_n}$, где T_n - некоторая последовательность постоянных, стремящаяся к бесконечности. Таким образом, оно исключает, например, случай

$a_n = n$. Но в этом случае теорема 24 сводится к закону повторного логарифма, в котором

$$\limsup \frac{S_n}{(2n \log\log n)^{1/2}} = 1 \quad \text{п.н.},$$

нижний предел равен -1, а предел не существует. Известно, что и при других a_n, нарушающих условие (21), то есть в ситуации, когда $\log\log n$ существенно влияет на поведение x_n, предел не существует.

Доказательство. Как и предыдущей теореме, $x_n/\log n \to \infty$. Согласно КМТ-принципу, достаточно доказать теорему для X со стандартным нормальным распределением. Пользуясь независимостью и одинаковой распределенностью при фиксированном n приращений $S_{ja_n} - S_{(j-1)a_n}$, получаем

$$P(U_n < tx_n) \le P\left(S_{ja_n} - S_{(j-1)a_n} < tx_n,\ 1 \le j \le n/a_n\right) = P\left(S_{a_n} < tx_n\right)^{[n/a_n]}.$$

Поскольку $1 - x \le e^{-x}$, имеем

$$P(U_n < tx_n) \le e^{-[n/a_n]P(S_{a_n} \ge tx_n)}.$$

По условию (21) $x_n^2 \sim 2a_n \log(n/a_n)$. При $r > s > t^2$ и всех достаточно больших n справедливы неравенства

$$P(S_{a_n} \ge tx_n) \ge e^{-sx_n^2/2a_n} \ge e^{-r\log(n/a_n)} = (n/a_n)^{-r}$$

Пусть $r < 1$. Согласно (21), имеем $\log\log n < \frac{1-r}{2}\log(n/a_n)$ при больших n, так что $(n/a_n)^{1-r} > (\log n)^2$. Отсюда

$$P(U_n < tx_n) \le e^{-2\log n}.$$

Ряд $\sum P(U_n < tx_n)$ сходится при $t < r < 1$. По лемме Бореля-Кантелли,

$$\liminf \frac{U_n}{x_n} \ge 1 \qquad \text{п.н.}$$

Согласно теореме 24 верхний предел равен единице почти наверное. Теорема 25 доказана.

4. Предельные теоремы для случайных полей.

Последовательностью с мультииндексом или случайным полем будем называть множество случайных величин $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in N^d\}$, нумеруемых $d-$мерным индексом с натуральными координатами. Суммы $S_{\mathbf{n}}$ определяются как суммы по параллелепипедам: $S_{\mathbf{n}} = \sum_{\mathbf{1} \le \mathbf{k} \le \mathbf{n}}$, порядок в неравенствах между мультииндексами покоординатный, $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)$. Для $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_d)$ обозначим $|\mathbf{k}| = k_1 \cdots k_d$, то есть модуль - это произведение координат. Будем называть $\mathbf{n}$ верхней вершиной параллелепипеда $\{\mathbf{k} : \mathbf{k} \le \mathbf{n}\}$.

Сходимость $S_{\mathbf{n}}$ здесь можно понимать двояко: либо при $|\mathbf{n}| \to \infty$, либо при $\min_j n_j \to \infty$. В общем случае эти два понимания приводят к различным предельным теоремам. При дополнительном условии независимости и одинаковой распределенности $X_{\mathbf{k}}$ они оказываются эквивалентными во многих предельных теоремах, так произойдет в теоремах, приводимых ниже. Мы ограничимся рассмотрением случая $|\mathbf{n}| \to \infty$, отнеся другой в упражнения. Как и раньше, $\log x = \log(x \vee e)$.

Теорема 26. *Предположим, что случайные величины* $\{X, X_{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{n} \in N^d\}$ *независимы и одинаково распределены. Для того чтобы имел место усиленный закон больших чисел*

$$P(S_{\boldsymbol{n}}/|\boldsymbol{n}| \to 0 \text{ при } |\boldsymbol{n}| \to \infty) = 1,$$

необходимо и достаточно выполнение условий $EX = 0, E|X|(\log|X|)^{d-1} < \infty$.

Доказательство. Необходимость. Из усиленного закона больших чисел при $|\mathbf{n}| \to \infty$ следует у.з.б.ч. с $\mathbf{n} = (1, \ldots, 1, n_d), n_d \to \infty$. Необходимым условием для у.з.б.ч. в однопараметрическом случае является $EX = 0$. Итак, $EX = 0$.

Обозначим $G_x = \{\mathbf{k} : |\mathbf{k}| \leq x\}$. Нетрудно проверить, что $card(G_x) \sim C_d x(\log x)^{d-1}$ при $x \to \infty, C_d > 0$.

Лемма 1. *Условие* $E|X|(\log|X|)^{d-1} < \infty$ *эквивалентно условию*

$$\sum P(|X_{\boldsymbol{n}}| > |\boldsymbol{n}|) < \infty. \tag{22}$$

Доказательство леммы. Моментное условие эквивалентно условию

$$\sum 2^n n^{d-1} P(2^{n-1} \leq |X| < 2^n) < \infty,$$

которое в свою очередь эквивалентно условию

$$\sum 2^n n^{d-1} P(|X| \geq 2^n) < \infty.$$

С другой стороны, условие (22) эквивалентно условию

$$\sum_n \sum_{2^{n-1} < \mathbf{k} \leq 2^n} P(|X_{\mathbf{k}}| > 2^n) < \infty.$$

Поскольку $card(G_{2^n} \setminus G_{2^{n-1}})$ растет пропорционально $2^n n^{d-1}$, а $X_{\mathbf{k}}$ одинаково распределены, все эти условия эквивалентны.

Вернемся к доказательству необходимости. Поскольку $X_{\mathbf{n}}$ представима в виде линейной комбинации 2^d сумм $S_{\mathbf{k}}$ с индексами $\mathbf{k}$ такими, что $\mathbf{n}-\mathbf{1} \leq \mathbf{k} \leq \mathbf{n}$, а коэффициенты линейной комбинации не зависят от $\mathbf{n}$, из усиленного закона больших чисел вытекает, что $X_{\mathbf{n}}/|\mathbf{n}| \to 0$ почти наверное. По лемме Бореля-Кантелли получаем (22).

Достаточность. Нам понадобится многопараметрический вариант неравенства Колмогорова, полученный А.Гутом.

Лемма 2. *Пусть* $X_{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{n} \in N^d$ *- независимые одинаково распределенные случайные величины со средним 0 и дисперсией* σ^2. *Тогда*

$$P(\max_{\boldsymbol{k} \leq \boldsymbol{n}} S_{\boldsymbol{k}} > x) \leq 2^d P(S_{\boldsymbol{n}} > x - d\sigma(2|\boldsymbol{n}|)^{1/2}),$$

$$P(\max_{\boldsymbol{k} \leq \boldsymbol{n}} |S_{\boldsymbol{k}}| > x) \leq 2^d P(|S_{\boldsymbol{n}}| > x - d\sigma(2|\boldsymbol{n}|)^{1/2}),$$

Доказательство леммы проводится индукцией по d. Опускается.

Множество индексов G_{2^n} можно накрыть параллелепипедами $\{\mathbf{k} : \mathbf{k} \leq \mathbf{n}\}$ с $\mathbf{n}$ такими, что $|\mathbf{n}| = 2^{n+d-1}$, а координаты n_j являются степенями двойки: $n_j =$

2^{l_j}, $0 \le l_j \le n{+}d{-}1$. Выберем покрытие с наименьшим числом параллелепипедов, это число не превосходит $(n{+}d)^{d-1}$ (поскольку последняя координата определяется предыдущими). Имеем

$$M_n := \max_{\mathbf{n} \in G_{2^n}} |S_{\mathbf{n}}| \le \max T_{\mathbf{n}}.$$

В правой части перебираются все верхние вершины $\mathbf{n}$ параллелепипедов из покрытия,

$$T_{\mathbf{n}} = \max_{\mathbf{k} \le \mathbf{n}} |S_{\mathbf{k}}|.$$

Для оценки вероятности $P(T_{\mathbf{n}} > \varepsilon 2^n)$ воспользуемся методом усечения и леммой 2. Обозначим

$$X_{\mathbf{j},n} = X_{\mathbf{j}} I(|X_{\mathbf{j}}| \le 2^n), \quad S_{\mathbf{k},n} = \sum_{\mathbf{j} \le \mathbf{k}} X_{\mathbf{j},n}, \quad T_{\mathbf{n},n} = \max_{\mathbf{k} \le \mathbf{n}} |S_{\mathbf{k},n} - ES_{\mathbf{k},n}|.$$

Учитывая, что $EX = 0$ и при достаточно больших n

$$|ES_{\mathbf{k},n}| = |\mathbf{k}||E(X - X_{\mathbf{1},n})| \le 2^n E|X| I(|X| > 2^n) < \varepsilon 2^{n-1},$$

имеем

$$P(T_{\mathbf{n}} > \varepsilon 2^n) \le \sum_{\mathbf{j} \le \mathbf{n}} P(|X_{\mathbf{n}}| > 2^n) + P(T_{\mathbf{n},n} > \varepsilon 2^{n-1})$$
$$\le |\mathbf{n}| P(|X| > 2^n) + 2^d P(|S_{\mathbf{n},n} - ES_{\mathbf{n},n}| > \varepsilon 2^{n-1} - d(2^{n+d})^{1/2} \sigma_n),$$

где $\sigma_n^2 = DX_{\mathbf{1},n} \le EX^2 I(|X| \le 2^n) = o(2^n)$. При достаточно больших n получаем

$$P(T_{\mathbf{n}} > \varepsilon 2^n) \le 2^{n+d} P(|X| > 2^n) + 2^d P(|S_{\mathbf{n},n} - ES_{\mathbf{n},n}| > \varepsilon 2^{n-2}).$$

Последняя вероятность по неравенству Чебышева не превосходит

$$\frac{|\mathbf{n}|}{\varepsilon^2 2^{2n-4}} \sigma_n^2 \le \frac{2^{d+3}}{\varepsilon^2 2^n} EX^2 I(|X| \le 2^n).$$

Подставляя это в оценку для $P(T_{\mathbf{n}} > \varepsilon 2^n)$ и суммируя по $\mathbf{n}$ из покрытия, получаем

$$P(M_n > \varepsilon 2^n) \le (n+d)^{d-1} \left(2^{n+d} P(|X| > 2^n) + \frac{2^{d+3}}{\varepsilon^2 2^n} EX^2 I(|X| \le 2^n) \right).$$

Лемма 2. *Если* $E|X|(\log|X|)^{d-1} < \infty$, *то*

$$\sum_n n^{d-1} 2^n P(|X| > 2^n) < \infty, \quad \sum_n \frac{n^{d-1}}{2^n} EX^2 I(|X| \le 2^n) < \infty.$$

Доказательство. В первом случае записать

$$P(|X| > 2^n) = \sum_{k=n}^{\infty} P(2^k < |X| \le 2^{k+1})$$

и изменить порядок суммирования. Во втором случае записать

$$EX^2I(|X| \leq 2^n) \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} EX^2I(2^{k-1} < |X| \leq 2^k)$$

и также изменить порядок суммирования. Рутинные вычисления опускаются.

По лемме $\sum_n P(M_n > \varepsilon 2^n) < \infty$ при любом $\varepsilon > 0$. По лемме Бореля-Кантелли имеем $M_n/2^n \to 0$ с вероятностью 1. Если $\mathbf{k} \in G_{2^n} \setminus G^{2_{n-1}}$, то

$$\frac{S_{\mathbf{k}}}{|\mathbf{k}|} \leq \frac{M_n}{2^{n-1}} \to 0 \quad \text{п.н.}$$

Теорема доказана.

Теорема 27. *Пусть $d \geq 2$. Предположим, что случайные величины $\{X, X_{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{n} \in N^d\}$ независимы и одинаково распределены. Для того чтобы имел место закон повторного логарифма, то есть при $|\boldsymbol{n}| \to \infty$ выполнялись соотношения*

$$\limsup S_{\boldsymbol{n}}/(2|\boldsymbol{n}| \log\log|\boldsymbol{n}|)^{1/2} = \sqrt{d} \quad \textit{п.н.},$$
$$\liminf S_{\boldsymbol{n}}/(2|\boldsymbol{n}| \log\log|\boldsymbol{n}|)^{1/2} = -\sqrt{d} \quad \textit{п.н.},$$

необходимо и достаточно выполнение условий $EX = 0, EX^2(\log|X|)^{d-1}/\log\log|X| < \infty, DX = 1$.

На случай $d = 1$ эта теорема не переносится (ср. с теоремой Хартмана-Винтнера).

Доказательство. Необходимость. Как и в предыдущей теореме представляем $X_{\mathbf{n}}$ в виде линейной комбинации сумм $S_{\mathbf{k}}$ с $\mathbf{n\text{-}1} \leq \mathbf{k} \leq \mathbf{n}$ и заключаем, что

$$\limsup |X_{\mathbf{n}}|/(2|\mathbf{n}| \log\log|\mathbf{n}|)^{1/2} \leq C_d$$

По лемме Бореля-Кантелли

$$\sum_{\mathbf{n}} P(|X| > (C_d + 1) > (2|\mathbf{n}| \log\log|\mathbf{n}|)^{1/2}) < \infty.$$

Остается воспользоваться леммой, доказательство которой совершенно аналогично доказательству леммы 1:

Лемма 4. *Пусть $C > 0$. Условие $EX^2(\log|X|)^{d-1}/\log\log|X| < \infty$ эквивалентно условию*

$$\sum_{\boldsymbol{n}} P(|X_{\boldsymbol{n}}| > C(2|\boldsymbol{n}| \log\log|\boldsymbol{n}|)^{1/2}) < \infty.$$

Доказательство достаточности в теореме 27 аналогично доказательству достаточности в предыдущей теореме. Опускается.