Санкт-Петербургский Государственный Университет
Математико-механический факультет
Кафедра теории вероятностей и математической статистики

ДИПЛОМНАЯ РАБОТА

студентки 513 группы
Валландер Александры Сергеевны

Случайное размещение дуг на окружности.

Допущена к защите.
Зав. кафедрой:
профессор Никитин Я. Ю.

Научный руководитель
доцент Ананьевский С.М.

Рецензент
доцент Солев В.Н.

Санкт-Петербург
2009 г.

Содержание

1 Введение. **2**

2 Предварительные формулы. **3**

3 Асимптотика математического ожидания. **5**

4 Предельное распределение длин дуг. **11**

5 Заключение. **17**

1 Введение.

Настоящая дипломная работа посвящена некоторым вероятностным задачам, связаным с размещением дуг на окружности. Сходные задачи, относящиеся к размещению отрезков на прямой принято называть задачами о парковке. Подобными задачами занимались Реньи (1958) [1], Маньон (1976, 1979) [2][3], Келли (1991) [4], Коффман, Меллоус и Поонен (1994) [5].

Мы основываемся на статье Коффмана, Меллоуса и Поонена "Установка дуг на окружности с применением в одномерных сетях связи.". В ней рассматривается следующая модель. Вдоль замкнутого пути связи на одинаковых расстояниях расположено огромное число станций. Запрос станции r со станцией s обозначается (r, s) и удовлетворяется, если один из двух путей (дуг), связывающих две станции, выделяется для эксклюзивного использования. Авторы аппроксимируют эту модель непрерывным ее вариантом и предполагают, что кольцо имеет единичную длину, а запрос (r, s) - пара независимых случайных величин, равномерно распределенных на $[0, 1]$. Первоначально кольцо пустое, а запросы рассматриваются в порядке поступления. Запрос считается выполенным, если новая дуга не накладывается на установленные ранее. Остальные запросы теряются.

В [5] для задачи на отрезке изучена асимптотика математического ожидания числа N_n удовлетворенных запросов и эмпирического распределения размера щелей между ними. Основываясь на этих результатах, мы получили уточненную формулу для математического ожидания, включающую второй член асимптотики. Кроме того, для задачи на окружности нами получена асимптотика эмпирического распределения размера щелей.

Приводимые в дипломной работе рассуждения являются модификацией метода Коффмана, Меллоуса и Поонена [5]. В частности, при выводе второго члена асимптотики мы используем более сложный контур интегрирования, а при выводе асимптотики в задаче на окружности эксплуатируется связь между задачами на отрезке и окружности, кратко отмеченная в [5].

Перейдем к более точному изложению постановки задачи. Рассмотрим окружность единичной длины, получаемую отождествлением точек 0 и 1 отрезка $[0, 1]$.

Пусть $(r_1, s_1), ..., (r_n, s_n)$ - последовательность дуг (запросов), $0 \leq r_i, s_i \leq 1$. Первый запрос всегда выполняется резервированием или парковкой более короткой из 2-х дуг между r_1 и s_1. Далее, одна из двух дуг между r_i и s_i считается установленной, если она не накладывается на какие-то ранее установленные дуги. Предполагаем, что r_i, s_i - 2n независимых равномерно распределенных на $[0, 1]$ случайных величин.

2 Предварительные формулы.

Чтобы сосчитать ожидаемое число EN_n установленных дуг, или, что то же самое, ожидаемое число щелей между установленными дугами, мы сначала сводим задачу на окружности к задаче на интервале. На окружности первая дуга всегда припаркована и ее длина равномерно распределена на $[0, 1]$, так как мы берем кратчайшую из двух дуг с определенными концами. Следовательно, оставшаяся щель равномерно распределена на $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

$$EN_n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^{1} E_{n-1}(x)\, dx,\ n \geq 1,\ k \geq 0, \tag{1.1}$$

где

$$E_n(x) = E(N_n(x)) \text{ и } N_n(x) = N_n[0, x]$$

- число щелей в $[0, x]$ после последовательных попыток установки n случайных интервалов с концами, которые независимо и равномерно выбирают из $[0, 1]$. Более общим образом, пусть $E_n^{(k)}(x)$ обозначает ожидаемое значение суммы k-х степеней длин щелей после попыток установки n интервалов на $[0, x]$. Тогда $E_n(x) = E_n^{(0)}(x)$.

Построим рекуррентное соотношение для $E_n^{(k)}(x)$. Первый запрос (r, s) не попадает в $[0, x]$ с вероятностью $1 - x^2$; в этом случае испытываются оставшиеся запросы на предмет попадания в тот же интервал $[0, x]$. Это дает первое слагаемое в выписанной ниже формуле (1.2) Если же (r, s) подходит, а это так если $0 \leq r, s \leq x$, то образуются 2 непересекающиеся щели длины r и r-s (если $r < s$) или s и x - s (если $s < r$) и задача приводится к испытанию оставшихся $(n-1)$ запросов в этих щелях. Беря математическое ожидание и используя симметрию между r и s, приходим к

$$E_n^{(k)}(x) = \left(1 - x^2\right) E_{n-1}^{(k)}(x) + 2 \int_{r=0}^{x} \int_{s=r}^{x} drds \left[E_{n-1}^{(k)}(r) + E_{n-1}^{(k)}(x-s)\right], \tag{1.2}$$

для $n \geq 1$. Интегрируя формулу (1.2), и меняя порядок интегрирования, получаем

$$\int_{r=0}^{x} \int_{s=r}^{x} drds \left[E_{n-1}^{(k)}(r) + E_{n-1}^{(k)}(x-s)\right] =$$

$$= \int_{r=0}^{x} \left(\int_{s=r}^{x} E_{n-1}^{(k)}(r)\, ds + \int_{s=r}^{x} E_{n-1}^{(k)}(x-s)\, ds\right) dr = \int_{r=0}^{x} (x-r)\, E_{n-1}^{(k)}(r)\, dr +$$

$$+ \int_{s=0}^{x} \int_{r=0}^{s} E_{n-1}^{(k)}(x-s)\, drds = \int_{r=0}^{x} (x-r)\, E_{n-1}^{(k)}(r)\, dr +$$

$$+ \int_{s=0}^{x} E_{n-1}^{(k)}(x-s)\, sds = 2 \int_{0}^{x} (x-r)\, E_{n-1}^{(k)}(r)\, dr.$$

Таким образом

$$E_n^{(k)}(x) = \left(1 - x^2\right) E_{n-1}^{(k)}(x) + 4 \int_{0}^{x} (x-r)\, E_{n-1}^{(k)}(r)\, dr. \tag{1.3}$$

Вместе с $E_0^{(k)}(x) = x^k$, это полностью определяет $E_n^{(k)}(x)$.

Индукцией по n легко проверить из (1.3), что $E_n^{(k)}(x)$ полиномы вида

$$E_n^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{n} u_{n,j}^{(k)} x^{k+2j}, \text{ где } u_{n,0}^{(k)} = 1, n \geq 0, u_{n,m}^{(k)} = 0, \text{ при } m > n \tag{1.4}$$

остальные коэффициенты которых находятся из рекурентных соотношений

$$u_{n,j}^{(k)} = u_{n-1,j}^{(k)} - u_{n-1,j-1}^{(k)}\left(1 - \frac{4}{k+2j-1} + \frac{4}{k+2j}\right) = u_{n-1,j}^{(k)} - h_{k+2j}u_{n-1,j-1}^{(k)}, \qquad (1.5)$$

$j \geq 1$, где $h_l = 1 - \frac{4}{l(l-1)}$.
проверка:
База индукции очевидна: $E_0^{(k)}(x) = x^k$.
Проверим индукционный переход:

$$E_{n+1}^{(k)}(x) = \left(1-x^2\right)E_n^{(k)}(x) + 4\int_0^x (x-r)\,E_n^{(k)}(r)\,dr = \left(1-x^2\right)\sum_{j=0}^{n} u_{n,j}^{(k)}x^{k+2j} +$$

$$+4\int_0^x (x-r)\left(\sum_{j=0}^{n} u_{n,j}^{(k)} r^{k+2j}\right)dr = \sum_{j=0}^{n} u_{n,j}^{(k)}x^{k+2j} -$$

$$-\sum_{j=0}^{n} u_{n,j}^{(k)}x^{k+2+2j} + 4\int_0^x x\left(\sum_{j=0}^{n} u_{n,j}^{(k)} r^{k+2j}\right)dr - 4\int_0^x \sum_{j=0}^{n} u_{n,j}^{(k)} r^{k+1+2j}dr =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} u_{n,j}^{(k)}x^{k+2j} - \sum_{j=0}^{n} u_{n,j}^{(k)}x^{k+2+2j} + 4x\left(\sum_{j=0}^{n} u_{n,j}^{(k)}\int_0^x r^{k+2j}dr\right) -$$

$$-4\sum_{j=0}^{n} u_{n,j}^{(k)}\int_0^x r^{k+1+2j}dr = \sum_{j=0}^{n} u_{n,j}^{(k)}x^{k+2j} - \sum_{j=0}^{n} u_{n,j}^{(k)}x^{k+2+2j} +$$

$$+4\sum_{j=0}^{n} u_{n,j}^{(k)}\frac{x^{k+2+2j}}{k+1+2j} - 4\sum_{j=0}^{n} u_{n,j}^{(k)}\frac{x^{k+2+2j}}{k+2+2j} =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} u_{n,j}^{(k)}x^{k+2j} - \sum_{j=1}^{n+1} u_{n,j-1}^{(k)}x^{k+2j} + 4\sum_{j=1}^{n+1} u_{n,j-1}^{(k)}\frac{x^{k+2j}}{k+2j-1} -$$

$$-4\sum_{j=1}^{n+1} u_{n,j-1}^{(k)}\frac{x^{k+2j}}{k+2j}.$$

При j = 0:

$$u_{n+1,0}^{(k)} = u_{n,0}^{(k)} = ... = u_{0,0}^{(k)} = \left[E_0^{(k)}(x) = \underbrace{1}_{u_{0,0}^{(k)}}x^k\right] = 1.$$

При $m > n$ $u_{n,m}^{(k)} = 0$, и коэффициент при x^{k+2j} выражается как

$$u_{n+1,j}^{(k)} = u_{n,j}^{(k)} - u_{n,j-1}^{(k)} + \frac{4u_{n,j-1}^{(k)}}{k+2j-1} - \frac{4u_{n,j-1}^{(k)}}{k+2j} =$$

$$= u_{n-1,j}^{(k)} - u_{n-1,j-1}^{(k)}\left(1 - \frac{4}{k+2j-1} + \frac{4}{k+2j}\right) =$$

$$= u_{n-1,j}^{(k)} - h_{k+2j}u_{n-1,j-1}^{(k)}, j \geq 1,$$

где

$$h_l = 1 - \frac{4}{l\,(l-1)}.$$

Пусть $\pi_0^{(k)} = 1$, $\pi_j^{(k)} = \prod_{l=1}^{j} h_{k+2l}$, $j \geq 1$ и $v_{n,j}^{(k)} = \frac{(-1)^j u_{n,j}^{(k)}}{\pi_j^{(k)}}$. Тогда (1.5) принимает вид

$$(-1)^j\, v_{n,j}^{(k)} \pi_j^{(k)} = (-1)^j\, v_{n-1,j}^{(k)} \pi_j^{(k)} - \underbrace{h_{k+2j} \pi_{j-1}^{(k)}}_{=\pi_j^{(k)}} (-1)^{j-1}\, v_{n-1,j-1}^{(k)}. \tag{1.6}$$

Следовательно,

$$v_{n,j}^{(k)} = v_{n-1,j}^{(k)} + v_{n-1,j-1}^{(k)}, 1 \leq j \leq n,$$

с $v_{n,0}^{(k)} = 1$, $n \geq 0$, $v_{0,j}^{(k)} = 0$ для $j \neq 0$, поэтому для $0 \leq j \leq n$,

$$v_{n,j}^{(k)} = \binom{n}{j} \text{ (треугольник Паскаля)} \tag{1.7}$$

$$u_{n,j}^{(k)} = (-1)^j \binom{n}{j} \pi_j^{(k)}, \tag{1.8}$$

и следовательно

$$E_n^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \pi_j^{(k)} x^{k+2j}, n \geq 0. \tag{1.9}$$

3 Асимптотика математического ожидания.

Теперь немного усовершенствуем полученую формулу. Заметим следующее:

$$1 - \frac{4}{(2m-1)\,2m} = \frac{m^2 - \frac{1}{2}m - 1}{m^2 - \frac{1}{2}m} = \frac{(m-\alpha-1)(m-\beta-1)}{m\left(m-\frac{1}{2}\right)}, \tag{2.1}$$

где $\alpha = \frac{\sqrt{17}-3}{4} = 0,28...$, $\beta = -\alpha - \frac{3}{2} = -1,78...$. Таким образом, используя (2.1), можно написать:

$$\pi_j^{(k)} = \prod_{l=1}^{j} \left(1 - \frac{4}{(k+2l)(k+2l-1)}\right) = \prod_{l=1}^{j} \frac{\left(\frac{k+2l}{2} - \alpha - 1\right)\left(\frac{k+2l}{2} - \beta - 1\right)}{\frac{k+2l}{2}\left(\frac{k+2l}{2} - \frac{1}{2}\right)}.$$

Введем функцию $\Phi(z) = \frac{\Gamma(z-\alpha)\Gamma(z-\beta)}{\Gamma(z+1)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)}$ и преобразуем отношение

$$\frac{\Phi\left(\frac{k}{2}+j\right)}{\Phi\left(\frac{k}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}+j-\alpha\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}+j-\beta\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}+j+1\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}+j+\frac{1}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}-\alpha\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}-\beta\right)}.$$

Имеем

$$\frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}+j+1\right)} = [\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)] =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)}{\left(\frac{k}{2}+j\right)\left(\frac{k}{2}+j-1\right)...\left(\frac{k}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)} = \prod_{l=1}^{j} \frac{1}{\frac{k}{2}+l.}$$

Аналогично (для α и β одинаково):

$$\frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}+j-\alpha\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}-\alpha\right)} = \prod_{l=1}^{j} \left(\frac{k+2l}{2} - \alpha - 1\right).$$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}+j+\frac{1}{2}\right)} = \prod_{l=1}^{j} \frac{1}{\left(\frac{k+2l}{2}-\frac{1}{2}\right)}.$$

Таким образом, (1.8) можно переписать в виде:

$$E_n^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \frac{\Phi\left(\frac{k}{2}+j\right)}{\Phi\left(\frac{k}{2}\right)} x^{k+2j}, \text{ где } \Phi(z) \text{ определена выше.}$$

Далее заметим следующее: $(-1)^j \binom{n}{j}$ - вычет функции $\Psi_n(z) = \frac{(-1)^n n!}{z(z-1)...(z-n)}$ в простом полюсе $z = j$, поэтому для $x > 0$ верно равенство

$$E_n^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{n} Res_{z=j} \left(\Psi_n(z) \frac{\Phi\left(z+\frac{k}{2}\right)}{\Phi\left(\frac{k}{2}\right)} x^{k+2z} \right). \tag{2.2}$$

Используя это, авторы статьи доказывают следующую теорему:
Теорема 1. ([**5**])
Для фиксированного $k \geq 0$ и $\delta \in (0,1)$

$$E_n^{(k)}(x) = c_k n^{\alpha-\frac{k}{2}} x^{2\alpha} + O\left(n^{-\frac{1}{2}-\frac{k}{2}}\right) \tag{2.3}$$

равномерно по $x \in [\delta, 1]$ при $n \to \infty$, где

$$c_k = \frac{\Gamma\left(2\alpha+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\Gamma(\alpha+1)\Gamma\left(\frac{k}{2}+\alpha+\frac{3}{2}\right)}.$$

Доказательство:

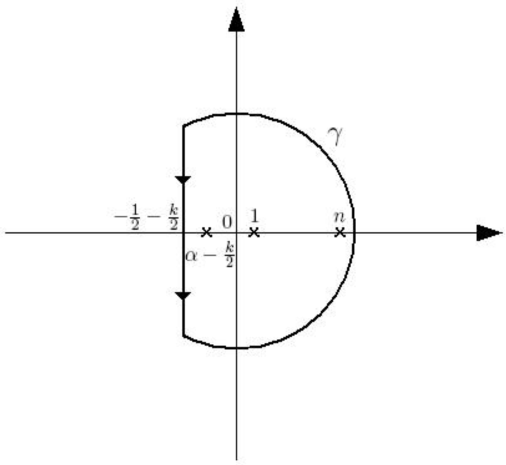

Рис. 1: Контур γ

Рассмотрим контур γ, показанный на рисунке 1, состоящий из дуги окружности с центром в нуле и вертикального отрезка вдоль прямой $Re z = -\frac{1}{2} - \frac{k}{2}$. Радиус окружности $R > n, k$. По интегральной формуле Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\Psi_n(z)\frac{\Phi\left(z+\frac{k}{2}\right)}{\Phi\left(\frac{k}{2}\right)}x^{k+2z}dz = \sum_{j=0}^{n} Res_{z=j}\left(\Psi_n(z)\frac{\Phi\left(z+\frac{k}{2}\right)}{\Phi\left(\frac{k}{2}\right)}x^{k+2z}\right) +$$

$$+Res_{z=\alpha-\frac{k}{2}}\left(\Psi_n(z)\frac{\Phi\left(z+\frac{k}{2}\right)}{\Phi\left(\frac{k}{2}\right)}x^{k+2z}\right), \tag{2.4}$$

так как полюса $\Phi\left(z+\frac{k}{2}\right)$ это $\alpha - \frac{k}{2}$, $\alpha - 1 - \frac{k}{2}$, ..., $\beta - \frac{k}{2}$, $\beta - 1 - \frac{k}{2}$, ..., и все они лежат вне γ, кроме $\alpha - \frac{k}{2}$.
Так как $(-\alpha) + (-\beta) = 1 + \frac{1}{2}$, получаем, что $\Phi(z)$ ограничена всюду в комплексной плоскости после удаления небольших шариков радиуса ϵ вокруг полюсов. Авторы [5] ссылаются в этом месте на [6] стр.7. Отсюда $\Phi\left(z+\frac{k}{2}\right)$ ограничена на γ, и граница не зависит от R. То же верно и для x^{k+2z}, так как $x \in (0,1]$. Но $\Psi_n(z) \sim z^{-(n+1)}$ при $z \to \infty$, поэтому интеграл по дуговой части контура стремится к 0 при $R \to \infty$. Тем самым, если мы возьмем предел при $R \to \infty$ в (2.4) и подставим в (2.2), то получим:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\frac{1}{2}-\frac{k}{2}+i\sqrt{R^2-\left(1+\frac{k}{2}\right)^2}}^{-\frac{1}{2}-\frac{k}{2}-i\sqrt{R^2-\left(1+\frac{k}{2}\right)^2}}\Psi_n(z)\frac{\Phi\left(z+\frac{k}{2}\right)}{\Phi\left(\frac{k}{2}\right)}x^{k+2z}dz =$$

$$= E_n^{(k)}(x) + Res_{z=\alpha-\frac{k}{2}}\left(\Psi_n(z)\frac{\Phi\left(z+\frac{k}{2}\right)}{\Phi\left(\frac{k}{2}\right)}x^{k+2z}\right). \tag{2.5}$$

Покажем далее, что левая часть есть $O\left(n^{-\frac{1}{2}-\frac{k}{2}}\right)$. Как отмечалось ранее, $\frac{\Phi\left(z+\frac{k}{2}\right)}{\Phi\left(\frac{k}{2}\right)}x^{k+2z}$ ограничено на контуре, поэтому будет достаточно оценить

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\Phi_n\left(-\frac{1}{2}-\frac{k}{2}+iy\right)\right|dy, \text{ при } n \to \infty. \tag{2.6}$$

Из произведения, определяющего $\Psi_n(z)$, мы видим, что

$$|\Psi_n(x+iy)| \leq |\Psi_n(x)|, \; \forall x, y \in \mathbf{R}, x < 0. \tag{2.7}$$

Более того,

$$\frac{|\Psi_n(x+iy)|}{|\Psi_n(x)|} = \prod_{j=0}^{n}\left|\frac{x-j}{x+iy-j}\right| \leq \left|\frac{x}{x+iy}\right|\left|\frac{x-1}{x+iy-1}\right| \leq \frac{c(x)}{y^2}, \tag{2.8}$$

для некоторой константы $c(x) > 0$, не зависящей от n. Из (2.7) и (2.8) выводим, что:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\Psi_n\left(-\frac{1}{2}-\frac{k}{2}+iy\right)\right|dy \leq c'(k)\left|\Psi_n\left(-\frac{1}{2}-\frac{k}{2}\right)\right| \tag{2.9}$$

для некоторой константы $c'(k) > 0$, не зависящей от n. Однако для фиксированного z,

$$\Psi_n(z) = -\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(-z)}{\Gamma(-z+n+1)} = -n^z\Gamma(-z)\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \tag{2.10}$$

при $n \to \infty$, согласно формуле 4 из [6] это есть $O\left(n^{-\frac{1}{2}-\frac{k}{2}}\right)$, если $z = -\frac{1}{2} - \frac{k}{2}$, что и требовалось. Теперь по (2.5) и (2.10) мы видим, что

$$E_n^{(k)}(x) = -Res_{z=\alpha-\frac{k}{2}}\left(\Psi_n(z)\frac{\Phi\left(z+\frac{k}{2}\right)}{\Phi\left(\frac{k}{2}\right)}x^{k+2z}\right) + O\left(n^{-\frac{1}{2}-\frac{k}{2}}\right) =$$

$$= -\Psi_n\left(\alpha-\frac{k}{2}\right)\frac{Res_{z=\alpha}\Phi(z)}{\Phi\left(\frac{k}{2}\right)}x^{k+2\left(\alpha-\frac{k}{2}\right)} + O\left(n^{-\frac{1}{2}-\frac{k}{2}}\right) =$$

$$= n^{\alpha-\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}-\alpha\right)\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\frac{Res_{z=\alpha}\Phi(z)}{\Phi\left(\frac{k}{2}\right)}x^{2\alpha} + O\left(n^{-\frac{1}{2}-\frac{k}{2}}\right). \tag{2.11}$$

Ошибка в первом произведении поглощается остаточным членом, и мы остаемся с $n^{\alpha-\frac{k}{2}}x^{2\alpha}$, умноженным на константу (зависящую от k), которая есть

$$\frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}-\alpha\right)Res_{z=\alpha}\Phi(z)}{\Phi\left(\frac{k}{2}\right)} = \frac{\Gamma(\alpha-\beta)\Gamma\left(\frac{k}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\Gamma(\alpha+1)\Gamma\left(\frac{k}{2}-\beta\right)} = c_k, \tag{2.12}$$

так как $\beta = -\alpha - \frac{3}{2}$. Теорема доказана.

Следствие 1.

Ожидаемое число установленных интервалов внутри начального интервала $[0,1]$ после n попыток равно

$$c_0 n^{\alpha} - 1 + O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right). \tag{2.13}$$

Заметим, что $c_0 \approx 1.84$.

Доказательство.

Число интервалов, установленных в $[0,1]$, на 1 меньше, чем число щелей, которое равно $E_n^{(0)}(1)$.

Следствие 2.

Для ожидаемого числа парковок на окружности

$$EN_n = (1.5581..)\,n^{\alpha} + o(1).$$

Доказательство

По (1.1) :

$$EN_n = 2\int_{\frac{1}{2}}^{1} E_{n-1}(x)\,dx = [\text{по т. } 1] = 2\int_{\frac{1}{2}}^{1} c_0(n-1)^{\alpha}x^{2\alpha}dx + O\left((n-1)^{-\frac{1}{2}}\right) =$$

$$= 2c_0(n-1)^{\alpha}\frac{x^{2\alpha+1}}{2\alpha+1}\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} + O\left((n-1)^{-\frac{1}{2}}\right) = \left[(n-1)^{\alpha} = n^{\alpha} + o(1)\right] =$$

$$= \frac{2c_0 n^{\alpha}}{2\alpha+1}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2\alpha+1}\right) + o(1) = (1.5581..)\,n^{\alpha} + o(1).$$

Теперь выведем более точную асимптотическую оценку, используя контур, который простирается дальше налево и включает в себя больше полюсов.

Теорема 1′.
Для фиксированного $k \geq 0$ и $\delta \in (0,1)$

$$E_n^{(k)}(x) = c_k n^{\alpha-\frac{k}{2}} x^{2\alpha} + a_k n^{\alpha-\frac{k}{2}-1} x^{2\alpha-2} + O\left(n^{-1-\frac{k}{2}}\right) \qquad (2.3')$$

равномерно по $x \in [\delta, 1]$ при $n \to \infty$, где

$$c_k = \frac{\Gamma\left(2\alpha+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\alpha+1\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}+\alpha+\frac{3}{2}\right)},$$

$$a_k = \frac{-\left(\frac{k}{2}-\alpha\right)\Gamma\left(2\alpha+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\alpha\right)\Gamma\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}+\alpha+\frac{3}{2}\right)}.$$

Доказательство
Рассуждения аналогичны рассуждениям в докательстве теоремы 1.

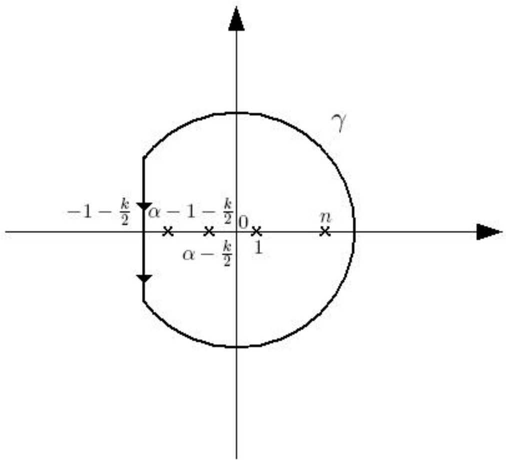

Рис. 2: Контур γ

Рассмотрим контур γ, показанный на рисунке 2, состоящий из дуги окружности с центром в нуле и вертикального отрезка прямой $Rez = -1 - \frac{k}{2}$. Радиус окружности $R > n, k$. По интегральной формуле Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \Psi_n(z)\frac{\Phi\left(z+\frac{k}{2}\right)}{\Phi\left(\frac{k}{2}\right)}x^{k+2z}dz = \underbrace{\sum_{j=0}^{n} Res_{z=j}\left(\Psi_n(z)\frac{\Phi\left(z+\frac{k}{2}\right)}{\Phi\left(\frac{k}{2}\right)}x^{k+2z}\right)}_{(*)} +$$

$$+Res_{z=\alpha-\frac{k}{2}}\left(\Psi_n(z)\frac{\Phi\left(z+\frac{k}{2}\right)}{\Phi\left(\frac{k}{2}\right)}x^{k+2z}\right) + Res_{z=\alpha-1-\frac{k}{2}}\left(\Psi_n(z)\frac{\Phi\left(z+\frac{k}{2}\right)}{\Phi\left(\frac{k}{2}\right)}x^{k+2z}\right), \qquad (2.4')$$

так как полюса $\Phi\left(z+\frac{k}{2}\right)$ - это точки $\alpha-\frac{k}{2}$, $\alpha-1-\frac{k}{2}$, ..., $\beta-\frac{k}{2}$, $\beta-1-\frac{k}{2}$, ..., и все они лежат вне γ, кроме $\alpha-\frac{k}{2}$ и $\alpha-1-\frac{k}{2}$.

Так же, как в теореме 1, доказывается, что интеграл по дуговой части контура стремится к 0 при $R \to \infty$. Поэтому, если мы возьмем предел при $R \to \infty$ в $(2.4')$ и учтем, что $(*) = E_n^{(k)}(x)$, мы получим:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-1-\frac{k}{2}+i\sqrt{R^2-\left(1+\frac{k}{2}\right)^2}}^{-1-\frac{k}{2}-i\sqrt{R^2-\left(1+\frac{k}{2}\right)^2}} \Psi_n(z)\,\frac{\Phi\left(z+\frac{k}{2}\right)}{\Phi\left(\frac{k}{2}\right)}x^{k+2z}dz =$$

$$= E_n^{(k)}(x) + Res_{z=\alpha-\frac{k}{2}}\left(\Psi_n(z)\,\frac{\Phi\left(z+\frac{k}{2}\right)}{\Phi\left(\frac{k}{2}\right)}x^{k+2z}\right)+$$

$$+Res_{z=\alpha-1-\frac{k}{2}}\left(\Psi_n(z)\,\frac{\Phi\left(z+\frac{k}{2}\right)}{\Phi\left(\frac{k}{2}\right)}x^{k+2z}\right). \tag{2.5'}$$

Точно так же, как в теореме 1, доказывается, что левая часть есть $O\left(n^{-1-\frac{k}{2}}\right)$. Оцениваем $\int_{-\infty}^{\infty}\left|\Phi_n\left(-1-\frac{k}{2}+iy\right)\right|dy$:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\Psi_n\left(-1-\frac{k}{2}+iy\right)\right|dy \le c'(k)\left|\Psi_n\left(-1-\frac{k}{2}\right)\right| \tag{2.9'}$$

для некоторой константы $c'(k) > 0$, не зависящей от n. Однако для фиксированного z,

$$\Psi_n(z) = -\frac{\Gamma(n+1)\,\Gamma(-z)}{\Gamma(-z+n+1)} = -n^z\Gamma(-z)\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \tag{2.10'}$$

при $n \to \infty$, согласно формуле 4 из [6] это есть $O\left(n^{-1-\frac{k}{2}}\right)$, если $z = -1-\frac{k}{2}$, что и требовалось. Теперь по $(2.5')$ мы видим, что

$$E_n^{(k)}(x) = -\underbrace{Res_{z=\alpha-\frac{k}{2}}\left(\Psi_n(z)\,\frac{\Phi\left(z+\frac{k}{2}\right)}{\Phi\left(\frac{k}{2}\right)}x^{k+2z}\right)}_{(1)}-$$

$$\underbrace{-Res_{z=\alpha-1-\frac{k}{2}}\left(\Psi_n(z)\,\frac{\Phi\left(z+\frac{k}{2}\right)}{\Phi\left(\frac{k}{2}\right)}x^{k+2z}\right)}_{(2)}+O\left(n^{-1-\frac{k}{2}}\right). \tag{2.11'}$$

$(1) = c_k n^{\alpha-\frac{k}{2}}x^{2\alpha}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$, где c_k определяется как раньше.

$$(2) = -\Psi_n\left(\alpha-1-\frac{k}{2}\right)\frac{Res_{z=\alpha-1}\Phi(z)}{\Phi\left(\frac{k}{2}\right)}x^{k+2\left(\alpha-1-\frac{k}{2}\right)} =$$

$$= n^{\alpha-1-\frac{k}{2}}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\underbrace{\Gamma\left(1+\frac{k}{2}-\alpha\right)\frac{Res_{z=\alpha-1}\Phi(z)}{\Phi\left(\frac{k}{2}\right)}}_{a_k}x^{2\alpha-2}$$

Посчитаем a_k:
1. $\Gamma\left(\frac{k}{2}-\alpha+1\right) = \left(\frac{k}{2}-\alpha\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}-\alpha\right)$

2. $\Phi\left(\frac{k}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}-\alpha\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}+\alpha+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}+\frac{1}{2}\right)}$

3. $Res_{z=\alpha-1}\Phi\left(z\right)=\frac{\Gamma\left(2\alpha+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)\Gamma\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)}Res_{z=\alpha-1}\Gamma\left(z-\alpha\right)=$
$=\left[\Gamma\left(z-\alpha\right)=\frac{\Gamma(z-\alpha+1)}{\Gamma(z-\alpha)}=\frac{\Gamma(z-\alpha+2)}{(z-\alpha)(z-\alpha+1)}\right]=-\frac{\Gamma\left(2\alpha+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)\Gamma\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)}$,
таким образом:

$$a_k=\frac{-\left(\frac{k}{2}+\alpha\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}-\alpha\right)\Gamma\left(2\alpha+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\alpha\right)\Gamma\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}-\alpha\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}+\alpha+\frac{3}{2}\right)}=$$

$$=\frac{-\left(\frac{k}{2}-\alpha\right)\Gamma\left(2\alpha+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\alpha\right)\Gamma\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}+\alpha+\frac{3}{2}\right)},$$

что и требовалось.

Следствие 1′. Ожидаемое число установленных интервалов внутри начального интервала $[0,1]$ после n попыток равно $c_0n^{\alpha}+a_0n^{\alpha-1}-1+O\left(\frac{1}{n}\right)$. Заметим, что $c_0\approx 1.84$, $a_0\approx -0.02995$.
Доказательство.
Число интервалов установленных в $[0,1]$ на 1 меньше, чем число щелей, которое равно $E_n^{(0)}\left(1\right)$.

4 Предельное распределение длин дуг.

В статье [5] найдено асимптотическое поведение распределения щелей после попытки парковать n интервалов в $[0,1]$. Определим функцию распределения

$$F_n\left(t\right)=\frac{\text{ожидаемое число щелей длины }\leq\frac{t}{\sqrt{n}}}{\text{общее ожидаемое число щелей}}.$$

Теорема 2 ([**5**])
Для t >0,
$\lim_{n\to\infty}F_n\left(t\right)=F\left(t\right)$, где $F\left(t\right)$ имеет плотность распределения

$$f\left(x\right)=2\pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\alpha+\frac{3}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}}\exp^{-\frac{x^2}{2}}W_{-\alpha-\frac{1}{4},\frac{1}{4}}\left(x^2\right),$$

$x\geq 0$,
где $W_{k,\mu}\left(x\right)$ - конфлюентная гипергеометрическая функция Уиттекера(см. [6]).

Рассмотрим случай парковки дуг на окружности.
Определим функцию распределения следующим образом:

$$F_n\left(t\right)=\frac{\text{ожидаемое число дуг длины }\leq\frac{t}{\sqrt{n}}}{\text{общее ожидаемое число дуг}}.\qquad(3.1)$$

Теорема 2′
Для t > 0,
$\lim_{n\to\infty} F_n(t) = F(t)$, где $F(t)$ имеет плотность распределения

$$f(x) = 2\pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\alpha+\frac{3}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}}\exp^{-\frac{x^2}{2}}W_{-\alpha-\frac{1}{4},\frac{1}{4}}\left(x^2\right),$$

$x \geq 0$,
где $W_{k,\mu}(x)$ - конфлюентная гипергеометрическая функция Уиттекера.

Доказательство.
Общее ожидаемое число дуг равно $EN_n^0(1)$, где $EN_n^k(x)$ - ожидаемое значение суммы k-х степеней длин дуг после попыток установки n дуг на окружность длины x.
Таким образом, по (3.1) ожидаемое число дуг длины $\leq x$ есть $EN_n^0 F_n(x\sqrt{n})$.
Из этого получаем ожидаемую сумму k-х степеней длин дуг:

$$\int_0^\infty x^k d\left(EN_n^0 F_n(x\sqrt{n})\right) = [x\sqrt{n} = y] =$$

$$= EN_n^0 \int_0^\infty \left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right)^k dF_n(y) = \frac{EN_n^0}{n^{\frac{k}{2}}}\int_0^\infty y^k dF_n(y).$$

С другой стороны (по определению),
EN_n^k - ожидаемая сумма k-х степеней длин дуг.
Таким образом, получаем:

$$\int_0^\infty y^k dF_n(y) = \frac{EN_n^k n^{\frac{k}{2}}}{EN_n^0}. \tag{3.2}$$

Предложение 1.

$$\frac{EN_n^k}{E_n^{(k)}(1)} \overset{n\to\infty}{\to} \frac{1+\sqrt{17}}{4}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}\right) = A,$$

$E_n^{(k)}(1)$ - ожидаемое значение суммы k-х степеней длин щелей после попыток установки n интервалов на $[0,1]$.
Доказательство:
Как отмечалось ранее,

$$EN_n^k = 2\int_{\frac{1}{2}}^1 E_{n-1}^{(k)}(x)\,dx,\ n\geq 1,\ k\geq 0,$$

где

$$E_n^{(k)}(x) = E\left(N_n^{(k)}(x)\right) \text{ и } N_n^{(k)}(x) = N_n^{(k)}[0,x]$$

- сумма k-х степеней длин щелей в $[0,x]$ после последовательных попыток установки n случайных интервалов с концами, которые независимо и равномерно выбирают из $[0,1]$.
Используя доказанную теорему 1, получаем:

$$E_n^{(k)} = 2\int_{\frac{1}{2}}^1 c_k(n-1)^{\alpha-\frac{k}{2}}x^{2\alpha}dx + O\left((n-1)^{-\frac{1}{2}-\frac{k}{2}}\right) =$$

$$= 2c_k(n-1)^{\alpha-\frac{k}{2}}\frac{x^{2\alpha+1}}{2\alpha+1}\Big|_{\frac{1}{2}}^1 + O\left((n-1)^{-\frac{1}{2}-\frac{k}{2}}\right) =$$

$$= [(n-1)^\alpha = n^\alpha + o(\alpha)] = \frac{2c_k n^{\alpha-\frac{k}{2}}}{2\alpha+1}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2\alpha+1}\right) + O\left(n^{-\frac{1}{2}-\frac{k}{2}}\right).$$

Снова по теореме 1
$$E_n^{(k)}(1) = c_k n^{\alpha-\frac{k}{2}} + O\left(n^{-\frac{1}{2}-\frac{k}{2}}\right).$$
Итого
$$\frac{EN_n^{(k)}}{E_n^{(k)}(1)} = \frac{\frac{2c_k n^{\alpha-\frac{k}{2}}}{2\alpha+1}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2\alpha+1}\right) + O\left(n^{-\frac{1}{2}-\frac{k}{2}}\right)}{c_k n^{\alpha-\frac{k}{2}} + O\left(n^{-\frac{1}{2}-\frac{k}{2}}\right)} =$$
$$= \frac{\frac{2}{2\alpha+1}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2\alpha+1}\right) + O\left(n^{-\frac{1}{2}-\alpha}\right)}{1 + O\left(n^{-\frac{1}{2}-\alpha}\right)} \overset{n\to\infty}{\to}$$
$$\to \frac{2}{2\alpha+1}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2\alpha+1}\right) = \left[\alpha = \frac{\sqrt{17}-3}{4}\right] = \frac{1+\sqrt{17}}{4}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}\right).$$
Предложение 1 доказано.

Таким образом, равенство (3.2) можно записать так:
$$\int_0^\infty y^k dF_n(y) = \frac{EN_n^{(k)} n^{\frac{k}{2}}}{EN_n^{(0)}} = \frac{\frac{EN_n^{(k)}}{E_n^{(k)}(1)} n^{\frac{k}{2}}}{\frac{EN_n^{(0)}}{E_n^{(0)}(1)}} \frac{E_n^{(k)}(1)}{E_n^{(0)}(1)}$$
Тем самым, можно воспользоваться теоремой 1:
$$\frac{\frac{EN_n^{(k)}}{E_n^{(k)}(1)}}{\frac{EN_n^{(0)}}{E_n^{(0)}(1)}} \frac{E_n^{(k)}(1)\, n^{\frac{k}{2}}}{E_n^{(0)}(1)} = \frac{\frac{EN_n^{(k)}}{E_n^{(k)}(1)}}{\frac{EN_n^{(0)}}{E_n^{(0)}(1)}} \frac{\left(c_k n^{\alpha-\frac{k}{2}} + O\left(n^{-\frac{1}{2}-\frac{k}{2}}\right)\right) n^{\frac{k}{2}}}{c_0 n^\alpha + O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)} = \underbrace{\frac{\frac{EN_n^{(k)}}{E_n^{(k)}(1)}}{\frac{EN_n^{(0)}}{E_n^{(0)}(1)}}}_{\to 1} \underbrace{\frac{c_k n^\alpha + O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)}{c_0 n^\alpha + O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)}}_{\to \frac{c_k}{c_0}}$$
Таким образом, правая часть (3.2) сходится к $\frac{c_k}{c_0}$ при $n \to \infty$.

Предложение 2.
$$\frac{\frac{c_k}{c_0}}{k!} \to 0, k \to \infty.$$

Доказательство:
В доказательстве пользуемся формулой Стирлинга:
$$k! \sim \sqrt{2\pi k}\left(\frac{k}{e}\right)^k \text{ и } \Gamma(k) = (k-1)!.$$
Посмотрим сначала на отношение в числителе:
$$\frac{c_k}{c_0} = \frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)}{\Gamma(1)} \frac{\Gamma\left(\alpha+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}+\alpha+\frac{3}{2}\right)} = \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\right] =$$
$$= \frac{\Gamma\left(\alpha+\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \frac{\left(\frac{k-1}{2}\right)!\left(\frac{k}{2}\right)!}{\left(\frac{k+1}{2}+\alpha\right)!} \sim \frac{\Gamma\left(\alpha+\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{2\pi\frac{k-1}{2}}\left(\frac{k-1}{2e}\right)^{\frac{k-1}{2}} \sqrt{2\pi\frac{k}{2}}\left(\frac{k}{2e}\right)^{\frac{k}{2}}}{\sqrt{2\pi\frac{k+1+2\alpha}{2}}\left(\frac{k+1+2\alpha}{2e}\right)^{\frac{k+1+2\alpha}{2}}} =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\alpha+\frac{3}{2}\right)(k-1)^{\frac{k}{2}}\,k^{\frac{k+1}{2}}\,(2e)^{\frac{k+1+2\alpha}{2}}}{(2e)^{\frac{2k-1}{2}}\,(k+1+2\alpha)^{\frac{k+2\alpha+2}{2}}} = \frac{\Gamma\left(\alpha+\frac{3}{2}\right)(k-1)^{\frac{k}{2}}\,k^{\frac{k+1}{2}}}{(2e)^{\frac{k-2-2\alpha}{2}}\,(k+1+2\alpha)^{\frac{k+2\alpha+2}{2}}}.$$

Вернемся к исходному отношению:

$$\frac{\frac{c_k}{c_0}}{k!} \sim \frac{e^k\Gamma\left(\alpha+\frac{3}{2}\right)(k-1)^{\frac{k}{2}}\,k^{\frac{k+1}{2}}}{\sqrt{2\pi k}k^k\,(k+1+2\alpha)^{\frac{k+2\alpha+2}{2}}\,(2e)^{\frac{k-2-2\alpha}{2}}} =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\alpha+\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}}\underbrace{\frac{(k-1)^{\frac{k}{2}}}{k^{\frac{k}{2}}}}_{(1)}\underbrace{\frac{e^k}{(k+1+2\alpha)^{\frac{k+2\alpha+2}{2}}\,(2e)^{\frac{k-2-2\alpha}{2}}}}_{(2)}\,(*)\,.$$

Имеем

$$(1) = \left(\frac{k-1}{k}\right)^{\frac{k}{2}} = \left(1-\frac{1}{k}\right)^{\frac{k}{2}} \sim e^{-\frac{1}{2}}$$

$$(2) = \underbrace{\left(\frac{e^2}{(k+1+2\alpha)\,2e}\right)^{\frac{k}{2}}}_{\to 0}\underbrace{\frac{(2e)^{\alpha+1}}{(k+1+2\alpha)^{\alpha+1}}}_{\to 0} \to 0,\ k\to\infty.$$

Таким образом $(*) \to 0$, при $k\to\infty$, и предложение 2 доказано.

В книге [7] есть следующая теорема (30.1):
Пусть μ - вероятностная мера на прямой, имеющая конечные моменты $a_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \mu(dx)$ всех порядков, причем степенной ряд $\sum_k a_k \frac{r^k}{k!}$ имеет положительный радиус сходимости. Тогда μ - единственная вероятностная мера с моментами $a_1,\ a_2,\ \ldots$.

У нас $\sum_k \frac{\frac{c_k}{c_0}}{k!} r^k$ сходится при $|r| < 1$.
Построим распределение $F(t)$ с этими моментами (по теореме оно единственно). То есть, мы хотим найти $F(t)$ с плотностью $f(t)$, такой что:

$$\int_0^\infty t^k f(t)\,dt = \frac{c_k}{c_0} \tag{3.3}$$

для всех вещественных $k \geq 0$.
Сделаем замену: $k = 2s,\ t = \sqrt{x}$, положим

$$g(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} f\left(\sqrt{x}\right) \tag{3.4}$$

и перепишем теперь (3.3) так:

$$t^k = \left(\sqrt{x}\right)^k = x^{\frac{k}{2}} = x^s,$$

$$f(t) = f\left(\sqrt{x}\right) = 2\sqrt{x}g(x)\,,$$

$$dt = d\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx.$$

Следовательно,

$$\int_0^\infty x^s g(x)\,dx = \frac{c_{2s}}{c_0} =$$

$$= \frac{\Gamma\left(2\alpha+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(s+1\right)\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\alpha+1\right)\Gamma\left(\alpha+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\alpha+1\right)\Gamma\left(s+\alpha+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(2\alpha+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1\right)} =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\alpha+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(s+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(s+\alpha+\frac{3}{2}\right)} = \left[\Gamma\left(s+1\right)=s!\right] = s!\frac{\Gamma\left(\alpha+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(s+\alpha+\frac{3}{2}\right)} \tag{3.5}$$

Это равенство (3.5) утверждает следующее: $E\left(X^s\right) = E\left(Y^s\right)E\left(Z^s\right)$, где
X - случайная величина с плотностью $g\left(x\right)$,
Y имеет единично-экспоненциальную плотность e^{-y}, $y \geq 0$,
Z имеет B-плотность распределения с показателями $\frac{1}{2}$, $\alpha+1$:

$$\frac{\Gamma\left(\alpha+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\alpha+1\right)} z^{-\frac{1}{2}}\left(1-z\right)^{\alpha},\ 0 \leq z \leq 1.$$

Замечание. Это вытекает из

$$\int_0^\infty y^s e^{-y} dy = \left[\Gamma\left(x\right) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt\right] = \Gamma\left(s+1\right) = s!$$

и формулы для $E\left(Z^s\right)$, выводимой ниже. Напомним определение $B-$функции Эйлера:

$$B\left(\alpha,\ \beta\right) = \int_0^1 x^{\alpha-1}\left(1-x\right)^{\beta-1}dx$$

и ее связь с $\Gamma-$функцией:

$$\frac{\Gamma\left(\alpha+\beta\right)}{\Gamma\left(\alpha\right)\Gamma\left(\beta\right)} = \frac{1}{B\left(\alpha,\beta\right)}$$

Эти замечания объясняют формулу для $B-$плотности.
Возьмем Z с описаной плотностью и посчитаем $E\left(Z^s\right)$:

$$\int_0^1 z^s \frac{\Gamma\left(\alpha+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\alpha+1\right)} z^{-\frac{1}{2}}\left(1-z\right)^{\alpha}dz = \frac{\Gamma\left(\alpha+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\alpha+1\right)}\int_0^1 z^{s-\frac{1}{2}}\left(1-z\right)^{\alpha}dz =$$

$$= \left[\text{по опред. } B\left(\alpha,\ \beta\right)\right] = \frac{\Gamma\left(\alpha+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\alpha+1\right)} B\left(s+\frac{1}{2},\ \alpha+1\right) =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\alpha+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\alpha+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\alpha+1\right)\Gamma\left(s+\alpha+\frac{3}{2}\right)}.$$

Положим $\widetilde{X} = YZ$, считая Y и Z независимыми. Тогда

$$E\left(\widetilde{X}^s\right) = E\left(Y^s\right)E\left(Z^s\right).$$

Значит, у $\widetilde{X}$ и X одинаковые моменты, а по единственности они одинаково распределены, то есть имеют одну и ту же плотность.
Вычислим плотность $\widetilde{X}$ (что то же самое, что плотность X) :

$$P\left(YZ < x\right) =$$

$$= \int\int_{\{(y,z):\, 0<y<\infty,\, 0<z<1,\, yz<x\}} e^{-y}\varphi\left(z\right)dz = \int_0^1 \varphi\left(z\right)\left(\int_0^{\frac{x}{z}} e^{-y}dy\right)dz,$$

где $\varphi(z)$ - плотность Z. Отсюда

$$g(x) = \frac{d}{dx} P(YZ < x) = \int_0^1 \varphi(z) e^{-\frac{x}{z}} \frac{1}{z} dz = \left[y = \frac{x}{z} \right] =$$

$$= \int_x^\infty \varphi\left(\frac{x}{y}\right) e^{-y} \underbrace{\frac{y}{z}}_{\frac{1}{z}} \underbrace{\frac{x}{y^2}}_{-dz} dy = \int_x^\infty \varphi\left(\frac{x}{y}\right) e^{-y} y^{-1} dy =$$

$$= \left[\text{подставляем } \varphi\left(\frac{x}{y}\right)\right] = \underbrace{\pi^{-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\alpha + \frac{3}{2}\right)}{\Gamma(\alpha+1)}}_{const} \int_x^\infty \left(\frac{x}{y}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{x}{y}\right)^\alpha e^{-y} y^{-1} dy =$$

$$= const \int_x^\infty e^{-y} (xy)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{x}{y}\right)^\alpha dy.$$

Сделаем замену:

$$y = x(1+u) \Rightarrow \ u \in (0, \infty),$$

$$-y = -x - xu,$$

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{1+u} \Rightarrow \left(1 - \frac{x}{y}\right)^\alpha = u^\alpha (1+u)^{-\alpha},$$

$$dy = xdu,$$

$$xy = x^2(1+u) \Rightarrow (xy)^{-\frac{1}{2}} = x^{-1}(1+u)^{-\frac{1}{2}}.$$

Таким образом,

$$g(x) = \pi^{-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\alpha + \frac{3}{2}\right)}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^\infty e^{-x-xu} x^{-1} (1+u)^{-\frac{1}{2}} u^\alpha (1+u)^{-\alpha} xdu =$$

$$= \pi^{-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\alpha + \frac{3}{2}\right)}{\Gamma(\alpha+1)} e^{-x} \int_0^\infty e^{-xu} (1+u)^{-\alpha-\frac{1}{2}} u^\alpha du.$$

В [6] приводится интегральное представление гипергеометрической функции Уиттекера

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - k + \mu\right) W_{k,\mu}(x) = e^{-\frac{1}{2}x} x^{\mu+\frac{1}{2}} \int_0^\infty e^{-tx} t^{-\frac{1}{2}-k+\mu} (1+t)^{-\frac{1}{2}+k+\mu} dt,$$

$$Re(\mu - k) > -\frac{1}{2}, \ Rex > 0.$$

Таким образом, по интегральному представлению:

$$g(x) = \pi^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\alpha + \frac{3}{2}\right) x^{-\frac{3}{4}} e^{-\frac{x}{2}} W_{-\alpha-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}}(x). \tag{3.6}$$

Обращая (3.4), получаем: $f(x) = 2xg(x^2)$ - плотность распределения $\sqrt{X}$.
Заменим $g(x^2)$ по полученной формуле (3.6):

$$f(x) = 2x\pi^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\alpha + \frac{3}{2}\right) x^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} W_{-\alpha-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}}\left(x^2\right) =$$

$$= 2\pi^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\alpha + \frac{3}{2}\right) x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} W_{-\alpha-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}}\left(x^2\right), \ x \geq 0.$$

Воспользуемся теоремой из книги [7] (теорема 30.2):
Предположим, что распределение X определяется его моментами, X_n имеет моменты всех порядков и $\lim_n E\left[X_n^r\right] = E\left[X^r\right]$ для r = 1, 2,..., тогда $X_n \Rightarrow X$.

В нашем случае F определяется ее моментами, k-ый момент F_n стремится к k-му моменту F для всех $k \geq 0$, таким образом по сформулированной выше теореме $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ слабо сходится к F. Так как $F(t)$ непрерывна (есть плотность) на $[0, \infty)$ $\lim_{n\to\infty} F_n(t) = F(t)$ в каждой точке.

Примеры.

При k = 1:

$$\int_0^\infty y^1 dF_n(y) \to \frac{c_1}{c_0} \approx \frac{0.74}{1.84} \approx 0.4,\ n \to \infty$$

При k = 2:

$$\int_0^\infty y^2 dF_n(y) \to \frac{c_2}{c_0} \approx \frac{0.52}{1.84} \approx 0.28,\ n \to \infty$$

При k = 3:

$$\int_0^\infty y^3 dF_n(y) \to \frac{c_3}{c_0} \approx \frac{0.49}{1.84} \approx 0.27,\ n \to \infty$$

5 Заключение.

В дипломной работе получено более точное, по сравнению с результатом в статье, разложение математического ожидания суммы k-х степеней длин щелей и обобщена теорема об асимптотике эмпирического распределения размера щелей для задачи на окружности.

Список литературы

[1] Renyi, A. *On a one-dimensional problem concerning space filling.* – Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci., 1958, 3, 109-127.

[2] Mannion, D. *Random packing of an interval.* – Adv. in Appl. Probab., 1976, 8, 477-501.

[3] Mannion, D. *Random packing of an interval, II.* – Adv. in Appl. Probab., 1979, 11, 591-602.

[4] Kelly, F.P. *Loss networks.* – Ann. Appl. Probab., 1991, 1, 319-378.

[5] Coffman, E.G., Jr., Mallows, C.L., Poonen, B. *Parking arcs on the circle with applications to one-dimensional communication networks.* – Ann. Appl. Probab., 1994, 4, 1098-1111.

[6] Erdelyi, A. *Higher Transcendental Functions* 1. – McGraw-Hill, New York, 1953.

[7] Billingsley, P. *Probability and Measure.* – Wiley, New York, 1979.