М.А.Лифшиц

Программа годового спецкурса

ТЕОРИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

IV курс (кафедра ТВиМС), осень 2007

Основные понятия. Мотивировка: случайные функции в практических задачах (экономика, метеорология, радиотехника). Определения случайной функции, процесса, поля, последовательности. Траектории и версии случайных функций. Непрерывность траектории как свойство, зависящее от выбора версии. Стационарные процессы. Процессы со стационарными приращениями. Процессы с независимыми приращениями. Конечномерные распределения случайного процесса. Примеры - винеровский процесс, процесс Пуассона, процесс Орнштейна– Уленбека, броуновский мост. Корреляционная функция. Свойства винеровского процесса - самоподобие, независимость и стационарность приращений. Инверсия времени. Теорема Леви-Бакстера о квадратичных приращениях. Свойства пуассоновского процесса - отсутствие нестандартных скачков, распределение интервалов между скачками. [3], Гл.1.

Гауссовские случайные функции. Многомерные гауссовские распределения. Корреляционные операторы (матрицы). Случайные поля Винера–Ченцова и Леви. Дробное броуновское движение. Эквивалентность двух определений. Свойства автомодельности (самоподобия), стационарности и независимости приращений в многопараметрическом случае. Характеризация гауссовского процесса его корреляционной функцией.

Случайные меры. Случайные меры с некоррелированными значениями. Два определения и их эквивалентность. Меры с независимыми значениями. Примеры - пуассоновская случайная мера и гауссовский белый шум. Интегрирование детерминированных L_2-функций по мере с некоррелированными значениями. Интеграл как изоморфизм (изометрия) пространств функций и случайных величин. Комплексные случайные величины, меры и интегралы.

Интегральные представления гауссовских процессов. Винеровский процесс, броуновский мост, дробное броуновское движение, поле Винера–Ченцова, броуновская функция Леви.

Однородные процессы с независимыми приращениями (процессы Леви). Формула Леви–Хинчина для безгранично делимых распределений. Сложные процессы Пуассона. Скачкообразные процессы общего вида. Процессы с непрерывной и дискретной компонентой. Устойчивые процессы [4]. Интерпретация спектральной меры как среднего числа скачков. Свойства траекторий (непрерывные процессы и cadlag-процессы).

Существование случайных процессов. Согласованность по проекциям. Согласованность по перестановкам. Теорема Колмогорова о существовании процесса с заданной системой согласованных конечномерных распределений. Существование гауссовского процесса с заданным средним и корреляционной функцией. [3], Гл.5.

Спектральные представления. Положительно определенные функции и их представления. Спектральное представление стационарного процесса в виде интеграла по комплексной мере с некоррелированными значениями. Спектральная мера и спектральная плотность. Представление в терминах вещественных процессов и мер. Представления стационарных случайных полей, периодических процессов и последовательностей. Линейные преобразования случайных процессов и последовательностей: усиление, ускорение, задержка, простое и кратное дифференцирование, интегральное преобразование. Переходная и передаточная функция. Композиция интегральных преобразований. Примеры: интегрирующая цепь, авторегрессионная последовательность. [3], Гл.4.

Прогнозирование стационарных последовательностей. Понятие прогноза и линейного прогноза. Ошибка прогноза. Регулярные и сингулярные процессы. Примеры таких процессов. Геометрическая интерпретация задачи прогнозирования. Аналитическая интерпретация задачи прогнозирования. Различные пространства функций, связанные с понятиями "прошлого" и "будущего". Достаточные условия построения прогноза. Построение прогноза в случае факторизуемой спектральной плотности. Примеры таких плотностей и прогнозов, в том числе для авторегрессионной последовательности. Вычисление ошибки прогноза. Построение факторизации спектральной плотности при помощи разложения логарифма в ряд Фурье. Определение ошибки прогноза на один шаг в общем случае. Критерий сингулярности стационарной последовательности. Рациональные спектральные плотности. Приведение их к каноническому виду, факторизация и построение прогноза. Совпадение решений общей и линейной задач прогноза для гауссовских процессов. [3]

Сходимость процессов. Сходимость конечномерных распределений. Определения слабой сходимости процессов и их эквивалентность. Плотность семейства распределений. Теорема Прохорова об эквивалентности относительной компактности и плотности. Теорема о необходимых и достаточных условиях слабой сходимости процессов в $C[0,1]$. Моментное условие плотности семейства мер в $C[0,1]$. Принцип инвариантности в $C[0,1]$. Предельные теоремы для распределения максимума и времени первого выхода для случайного блуждания. [2], Гл.5.

Определение и свойства пространства $D[0,1]$. Теорема Арцела–Асколи в $D[0,1]$. Условия плотности семейства процессов в $D[0,1]$. Пример семейства процессов, не являющегося плотным. Достаточные условия сходимости процессов в $D[0,1]$. Примеры сходимости процессов в $D[0,1]$: принцип инвариантности (случаи сходимости к винеровскому и устойчивому процессу), сходимость эмпирических процессов (для зависимых и независимых наблюдений). [1]

Стохастическое интегральное и дифференциальное исчисление. Стохастический интеграл от случайной функции по винеровскому процессу. Свойства интеграла. Формализм стохастических дифференциалов - полная и краткая форма. Стохастический интеграл общего вида. Стохастическое дифференциальное уравнение (СДУ). Диффузионный процесс. Формула Ито - одномерная и многомерная.Стохастическое интегрирование по частям. Примеры решения СДУ и вычисления стохастических дифференциалов. Броуновский мост и процесс Орнштейна–Уленбека как решения СДУ. [2], Гл.8, [3], Гл.11-12.

Энтропийный подход к изучению случайных процессов. Энтропия и емкость в абстрактном метрическом пространстве. Энтропия гауссовского процесса. Интеграл Дадли. Теорема Дадли об оценке математического ожидания максимума через энтропию процесса. Непрерывность процесса с конечным интегралом Дадли. Теорема Пизье. Оценка математического ожидания супремума процесса снизу по Судакову. Теорема Ферника о непрерывности стационарного процесса.

Список литературы

[1] П.Биллингсли. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977.

[2] А.В. Булинский и А.Н. Ширяев. Теория случайных процессов. М. Физматлит, 2003.

[3] А.Д. Вентцель. Курс теории случайных процессов. Наука (Физматлит), здания 1975 и 1996.

[4] М.А. Лифшиц. Устойчивые распределения, случайные величины и процессы. СПбГУ, 2007.

[5] Ю.А. Розанов. Случайные процессы. М.: Наука, издания 1971 и 1979.

[6] Ю.А. Розанов. Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1982.