# Темы курсовых работ для 2-го курса (2008–2009 учебный год)

**Проф. Никитин Я.Ю.**

1) Как измерить связь между количественными и качественными признаками? Первое знакомство с понятием корреляции и измерением ее в математической статистике. Для начала прочесть первую главу книги М.Кендэла "Ранговые корреляции", М., Финансы и Статистика, 1975. Это классический труд, немного устаревший, зато простой. Задание по согласованию с руководителем.

2) Математическая теория броуновского движения на физическом уровне строгости. Процесс броуновского движения – один из центральных объектов изучения в современной теории случайных процессов. Предлагается ознакомиться с простейшими (и довольно красивыми) фактами этой теории по книге С.Карлин, Основы теории случ. процессов, М., 1971, гл.10 и решить несколько задач по выбору студента в конце главы. (Книга есть в библиотеке мат-меха).

**Проф. Лифшиц М.А.**

Теория вероятностей и практика казино. Тема предполагает решение ряда задач, простых и не очень, возникающих в практике казино с точки зрения игроков и владельцев казино. Некоторые задачи потребуют познакомиться с нетривиальными законами теории вероятностей. Литература: 1. Буклет казино “Montego Bay” (Невада, США). 2. А.Н.Бородин. Элементарный курс теории вероятностей и математической статистики. СПб., Лань, 1998.

**Проф. Мартикайнен А.И.**

Санкт-петербургский парадокс. Литература: Г. Секей, Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике.

**Проф. Петров В.В.**

Нормальное приближение для биномиального распределения. Литература: В.Феллер, Введение в теорию вероятностей и ее приложения, том 1, 1984, глава 7, первые 3 параграфа (стр. 190-201).

**Проф. Бородин А.Н.**

Предельные теоремы для последовательных испытаний (схема Бернулли). Литература: А.Н.Бородин, "Элементарный курс теории вероятностей и математической статистики", §8 и §9.

**Проф. Невзоров В.Б.**

1) Производящие функции в теории вероятностей. В работе предполагается познакомиться с производящими функциями, их свойствами и некоторыми вероятностными задачами, решаемыми с помощью этих функций. Литература: В. Феллер, “Введение в теорию вероятностей и ее приложения”, том 1, глава 11.

2) Основные вероятностные распределения. По книге “A primer on probability distributions” (которую можно будет взять у руководителя темы) разобраться с основными вероятностными распределениями и решить ряд несложных задач.

**Проф. Судаков В.Н.**[1]

1) Проверка независимости нескольких событий.

2) Независимость и некоррелированность.

**Проф. Фролов А.Н.**

Задача о разорении игрока. Литература: В.Феллер. Введение в теорию вероятн. и ее приложения. Т.1, гл. 14, п.1-3.

**Доц. Русаков О.В.**

Функции полезности как инструмент измерения риска и субъективные оценки вероятностей. Литература: «Справочник по прикладной статистике под ред. Э.Ллойда, У.Ледермана» т.2, Финансы и Статистика, М. 1990. Г.Фельмер, А.Шид «Введение в стохастические финансы. Дискретное время», МЦНМО М. 2008.

**Доц. Гордин М.И.**

1) Динамика обыкновенных цепных дробей. Преобразование единичного отрезка, связанное с цепными дробями, привело Гаусса к вопросу, решённому лишь в прошлом столетии. Предлагается сравнить решения Р.О. Кузьмина (по книге А.Я. Хинчина "Цепные дроби") и П. Леви (по книге Д. Кнута "Искусство программирования"). См. также П. Биллингсли "Эргодическая теория и информация."

2) Урновая схема Пойа и симметрично зависимые величины. Литература: В.Феллер. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М., 1984, т.1, гл.5, разд.2 и разд.8, задачи 18-26, и т.2,гл.7, разд.3,4.

**Доц. Ананьевский С.М.**

Будущее не зависит от прошлого (при фиксированном настоящем). Данная тема предполагает начальное, но довольно глубокое знакомство с теорией

[1]тел.2333553

вероятностей через решение значительного числа несложных задач, а также знакомство с замечательной литературой. Необходимо познакомиться с 3-м разделом замечательной книги Е.Б.Дынкина и В.А.Успенского “Математические беседы” и порешать имеющиеся в ней задачи.

**Доц. Солев В.Н.**
Информация и энтропия.

**Доц. Малов С.В.**
Использование вероятностных методов в биологии.

**Доц. Валландер С.С.**
Задачи о случайных блужданиях. Литература: Ф.Спицер. Принципы случайного блуждания. М., Мир, 1969. Гл.1.

## Темы курсовых работ для 3-го курса (2008–2009 учебный год)

**Проф. Никитин Я.Ю.**
1) Случайные блуждания на одномерных и многомерных решетках: переплетение теории вероятностей, анализа и математической физики. Предлагается прочесть гл.1 знаменитой книги Е.Б.Дынкин, А.А.Юшкевич «Теоремы и задачи о процессах Маркова», М.,Наука, 1967 и решить небольшую часть задач в конце главы. Дальнейшая работа – по согласованию с руководителем.

2) Броуновское движение и полиномы Бернштейна. Прочесть и разобрать статью французского математика Ковальски на английском языке. Обратить внимание на моделирование броуновского движения с помощью полиномов Бернштейна. Дальнейшая работа по согласованию с руководителем.

**Проф. Петров В.В.**
1) Локальная предельная теорема для решетчатых распределений. Литература: Б.В.Гнеденко. Курс теории вероятностей, издание шестое, 1988, глава 8, параграф 41 (стр. 257-262).

2) Локальная предельная теорема для плотностей. Литература: В.В.Петров, Суммы независимых случайных величин, 1972, глава 7, параграф 2 (стр. 243-250).

**Проф. Лифшиц М.А.**

1) Азартные игры и теория вероятностей. Анализ задач, из которых возникла теория вероятностей. Литература: А.Реньи, Трилогия о математике. М., Мир, 1980, с. 286-313.

2) Парадоксы теории вероятностей. Выборочный анализ парадоксальных результатов теории вероятностей. Литература: Г.Секей, Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике.Москва-Ижевск, 2003 (гл.1).

**Проф. Мартикайнен А.И.**

Страхование, выгодное и для клиента и для страховой компании. Литература: Г.Секей. Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике. М.Мир,стр.70-71.

**Проф. Невзоров В.Б.**

1) Порядковые статистики и их распределения. Разобраться с определениями и простейшими соотношениями, справедливыми для распределений порядковых статистик. Решить ряд задач. Литература: Невзоров В.Б. “Рекорды. Математическая теория”, 2000, Изд-во ФАЗИС, Москва (прочитать Лекцию 2 из этой книги).

2) Рекордные моменты и рекордные величины. Познакомиться с основными понятиями математической теории рекордов. Литература: Невзоров В.Б. “Рекорды. Математическая теория”, 2000, Изд-во ФАЗИС, Москва (прочитать Лекции 13-16, 26, 29 из этой книги).

**Проф. Бородин А.Н.**

Характеризационное свойство винеровского процесса. Литература: А.В. Скороход и Н.П. Слободенюк, "Предельные теоремы для случайных блужданий", §1 гл.3

**Проф. Судаков В.Н.**[2]

1) Случайные величины, их математические ожидания и условные математические ожидания относительно другой случайной величины, принимающей не более счётного множества значений.

2) Дискретный вариант эргодической теоремы Дж. Биркгофа.

**Проф. Фролов А.Н.**

Одномерные устойчивые распределения. Литература: В.Феллер. Введение в теорию вероятн. и ее приложения. Т.2, гл. 6, п.1-2.

**Доц. Ананьевский С.М.**

[2]тел.2333553

1) Функции концентрации и их свойства. Литература. Хенгартнер В., Теодореску Р. Функции концентрации. М. Наука, 1980.

2) Случайные заполнения и случайные покрытия. Литература. D. Mannion, Random packing of an interval, – статья, которая имеется у руководителя.

**Доц. Гордин М.И.**

1) Случайные множества и графики случайных процессов. Литература: Матерон. Случайные множества и интегральная геометрия. М., 1978, гл.2.

2) Случайное блуждание Бозе-Эйнштейна. Распределение частиц по ячейкам, известное как статистика Бозе-Эйнштейна, является стационарным распределением цепи Маркова, имеющей много замечательных свойств. Литература: P. Diaconis. Analysis of a Bose-Einstein Markov chain. Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. v.41, 2005, No3, 409–418.

**Доц. Валландер С.С.**

Стохастические интегралы. Литература: Г.Маккин. Стохастические интегралы. М., Мир, 1972.

**Доц. Русаков О.В.**

1) Фракталы в финансах: модели и их реализации. Литература: А.Н. Ширяев «Основы стохастической финансовой математики. Факты. Модели. т.1» Фазис. М. 1998. Р.М. Кроновер «Фракталы и хаос в динамических системах» Постмаркет М. 2000. М. Шредер «Фракталы, хаос, степенные законы» R&C Dynamics Москва. Ижевск, 2005. В работе желательно проделать некоторое компьютерное моделирование.

2) Построение броуновского движения Литература. А.В. Булинский, А.Н. Ширяев «Теория случайных процессов», Физматлит, М., 2003. П.Биллингсли «Сходимость вероятностных мер», Наука, М. 1977.

**Доц. Малов С.В.**

1) Многомерные распределения и копулы.

2) Интервальные вероятности.

**Доц. Солев В.Н.**

1) Теорема МакДайармида о концентрации мер.

2) Оценивание сигнала наблюдаемого на фоне стационарного шума.

## Темы курсовых работ для 4-го курса (2008–2009 учебный год)

**Проф. Никитин Я.Ю.**

1) Вероятностные задачи для дробного броуновского движения. Литература и детали у руководителя.

2) Новый критерий экспоненциальности типа Колмогорова-Смирнова. Литература и детали у руководителя.

**Проф. Бородин А.Н.**

Распределение интегральных функционалов от процесса броуновского движения. Литература: А.В. Скороход и Н.П. Слободенюк, "Предельные теоремы для случайных блужданий", §5 гл.3.

**Проф. Мартикайнен А.И.**

Обобщенный процесс восстановления. Литература у руководителя.

**Проф. Невзоров В.Б.**

Характеризационные задачи, связанные с распределением Стьюдента В последнее время появился ряд работ, в которых получены различные характеризации распределения Стьюдента с двумя степенями свободы свойствами порядковых статистик и последовательных максимумов. Нужно будет разобраться в методах, используемых в этих работах, и составить небольшой обзор полученных в них результатов. Копии нужных статей можно будет получить у руководителя темы.

**Проф. Петров В.В.**

1) Теорема Колмогорова о законе повторного логарифма. Литература: В.В. Петров, Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин, 1987, глава 7, параграф 1 (стр. 253-263).

2) Оценка порядка роста сумм независимых случайных величин почти наверное с помощью суммы моментов этих величин. Литература: В.В. Петров, Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин, 1987, глава 6, параграф 4 (стр. 233-239).

**Проф. Фролов А.Н.**

Предельные теоремы для приращений винеровского процесса. Литература: M. Csörgö, P.Révész. Strong approximation in probability & statistics. NY 1981 (есть у руководителя).

**Доц. Валландер С.С.**

Распределение Пуассона-Дирихле. Литература: Дж.Кингман. Пуассоновские процессы. М., МЦНМО, 2007. Гл.9.

**Доц. Русаков О.В.**

Итерации случайных функций и стохастические фракталы. Литературу взять у руководителя...

**Доц. Солев В.Н.**

1) Ядерные оценки плотности.

2) Неравенства концентрации меры.

**Доц. Гордин М.И.**

Неравенства Чигера и Гросса-Соболева для цепей и процессов Маркова. Литература: G.F. Lawler, A.D. Sokal. Bounds on the spectrum for Markov chains and Markov processes: a generalization of Cheegers's inequality. Trans. of the AMS, vol.309 (1988) N 2, 557-580.

**Доц. Малов С.В.**

1. Использование копул при построении криериев однородности и независимости.

2. Информационные критерии и их применение в биостатистике.

## Темы дипломных работ (V курс)

**Проф. Ибрагимов И.А.**

1-2) Предельные теоремы для функционалов, определенных на случайном блуждании.

Рассмотрим блуждание $S_k = \sum_1^k \xi_j$ и аддитивные функционалы от него вида $F_n = \sum_1^n f(S_k)$. Более сложно определяются полиаддитивные функционалы. Изучается предельное поведение $F_n$. В книге Ибрагимова и Бородина 1994 г. некоторые результаты для полиаддитивных функционалов сформулированы, но не доказаны. Для начала требуется эти теоремы доказать. Это заведомо получится, хотя и потребует значительного труда. Далее можно изучать новые постановки задачи. Материала хватит на две работы.

**Проф. Никитин Я.Ю.**

1) Статистики, построенные по проинтегрированному эмпирическому процессу, и их предельные свойства. Пусть $X_n(t) = \sqrt{n}(F_n(t) - t)$ - классический эмпирический процесс. Функционалы от него являются знаменитыми

статистиками ( Колмогорова, Крамера-фон Мизеса и пр.) и изучались в сотнях работ. Гораздо менее изучен проинтегрированный эмпирический процесс $Y_n(t) = \int_0^t X_n(u)du$ и свойства функционалов от него. Возможно, соответствующие статистики окажутся эффективнее классических. Литература, в частности, статьи Никитина и Хенце, у руководителя.

2) Вариации на тему ранговых коэффициентов корреляции. Ранговые коэффициенты корреляции Спирмена, Кендэла и Джини давно вошли в репертуар статистиков и широко используются, в частности, для проверки независимости. В последние годы предложены их многомерные аналоги и новые коэффициенты, свойства которых пока изучены недостаточно. Предлагается продолжить исследования этих более сложных объектов, изучить их предельные свойства и эффективности. Литература довольно обширна, справки у руководителя.

**Проф. Лифшиц М.А.**

Аппроксимация случайных полей, зависящих от большого числа параметров. Рассмотрим случайное поле $X(\omega, t_1, ..., t_d)$, зависящее от большого числа параметров d. В работете будет рассматриваться вопрос о том, насколько хорошо можно приблизить поле X более простыми полями вида $\sum_{j=1}^{n} x_j(\omega) f_j(t_1, ...t_d)$ где $x_j$ – случайные величины, а $f_j$ - детерминированные функции. Такие представления важны, например, для компьютерного моделирования случайных полей. Нужно будет изучить имеющиеся (не очень сложные) результаты и дополнить их новыми. Литература: Lifshits M. A., Tulyakova E. V. Curse of dimensionality in approximation of random fields. Probab. Math. Stat., 2006, v. 26, no 1, 83-98.

**Проф. Мартикайнен А.И.**

Асимптотическое поведение монотонных блоков наблюдений и их приращений. Литература у руководителя. Рассматривается последовательность независимых одинаково и непрерывно распределенных случайных величин. Среди первых n величин выделяются блоки возрастающих (или блоки убывающих) наблюдений. Длина наидлиннейшего такого блока обозначается $L(n)$. Исследуются асимптотические свойства $L(n)$ при $n$ стремящемся к бесконечности.

**Проф. Невзоров В.Б.**

О максимальном числе рекордов в последовательности дискретных случайных величин. Литература: [1] R. Grubel, A. Reimers, On the total time spent in records by a discrete uniform sequence, J. Appl. Probab., v.38, pp.768-775

(2001) - копия статьи будет предоставлена научным руководителем. [2] В.Б. Невзоров, Рекорды. Математическая теория, Изд-во Фазис, Москва, 2000.

В статье [1] рассматривается последовательность $U_1, U_2, \ldots$ независимых случайных величин, имеющих равномерное распределение на множестве целых чисел $1, 2, \ldots, d$. Пусть $Y_d$ – число верхних рекордов в этой последовательности, а $S_d$ - сумма значений этих рекордов. Получены различные асимптотические соотношения (при $d \to \infty$) для $Y_d$ и $S_d$.

Задание.

1) Изучить методы, используемые в статье [1]. Попытаться перенести полученные в [1] результаты на случай так называемых "слабых рекордных величин" (когда повторение рекорда засчитывается как рекорд).

2) Попытаться в похожей постановке найти распределение ( не обязательно равномерное!) , заданное на множестве $\{1, 2, \ldots, d\}$, для которого число рекордов (или сумма всех рекордов) в последовательности $U_1, U_2, \ldots, U_n$ (при фиксированном $n$) имеет максимальное математическое ожидание.

**Проф. Петров В.В.**

1) Обобщения леммы Бореля-Кантелли. Имеется ряд обобщений второй части леммы Бореля-Кантелли, в которых условие взаимной независимости рассматриваемых случайных событий заменяется более слабыми условиями. Предлагается продолжить эти актуальные исследования. Стартовой позицией могут служить следующие статьи (тексты которых можно взять у ВВП): V.V.Petrov, A generalization of the Borel-Cantelli lemma, Statistics and Probability Letters, 2004, vol. 67, 233-239. T.K.Chandra,The Borel-Cantelli lemma under dependence conditions, тот же журнал, 2008, vol. 78, 390-395.

2) Неравенства для моментов сумм независимых случайных величин.

Предлагается получить обобщения и уточнения некоторых известных неравенств для моментов произвольного порядка сумм независимых случайных величин. Литература: В.В. Петров, Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин, изд-во "Наука", М. 1987, гл. 3, параграф 5. В.В.Сазонов, Теория вероятностей и ее применения, 1974, том 19, N 2, 383-386

**Проф. Фролов А.Н.**

Скорость сходимости в предельных теоремах для приращений сумм независимых случайных величин и случайных процессов.

Дипломная работа будет посвящена исследованию асимптотического п.н. (почти наверное) поведения приращений сумм независимых случайных величин и/или случайных процессов. В достаточно обширной литературе, в том числе в работах руководителя, получен целый ряд предельных теорем о п.н. сходимости максимальных приращений независимых случайных величин, случайных полей, процессов восстановления, процессов с независимыми приращениями и некоторых других случайных процессов. Имеется также ряд работ, посвященных оцениванию скорости сходимости в упомянутых результатах. Однако есть значительное число результатов, в которых скорость сходимости еще не оценивалась. В работе предполагается получить новые оценки скоростей сходимости в результатах для приращений. При этом можно рассматривать либо суммы независимых случайных величин, либо какие-либо из упомянутых выше случайных процессов. Основным методом получения упомянутых результатов является техника анализа вероятностей больших уклонений.

**Проф. Судаков В.Н.**[3]

1) Архитектура различных броуновских мостов. Существует несколько вариантов определения броуновского моста на отрезке $[0,1]$, различных по существу или только формально. Броуновский мост – близкий родственник винеровского процесса, который обладает множеством важных для теории вероятностей свойств. Обычно броуновский мост определяют как гауссовский процесс либо заданием корреляционной функции, либо прямым явным выражением через винеровский процесс. Можно, однако, определять броуновский мост, используя условные распределения на элементах аффинного разбиения пространства с гауссовской мерой, порождаемого значением винеровского процесса в последний момент времени ($t = 1$). Предлагается доказать это утверждение в конечномерном и в полном бесконечномерном вариантах и рассмотреть, по совету руководителя, некоторые обобщения. По-видимому, придется рассматривать «нестандартные» винеровские процессы – процессы, винеровские с широкой точки зрения. Интересные вопросы возникают при изучении винеровского процесса или броуновского моста как кривых в гильбертовом пространстве гауссовских случайных величин. Подробности при беседе с руководителем.

2) Оценивание параметра сдвига минимумом расстояния Канторовича между сдвиговым семейством и выборочным распределением. Представление о характере задания понятно из заголовка. Дипломанту предстоит познакомиться с метрикой Канторовича, в частности—с критерием оптимальности "плана перевозок". Подробности при беседе с руководителем.

**Проф. Бородин А.Н.**

---

[3]тел.2333553

Распределение функционалов от броуновского движения со скачками, остановленного в случайный момент времени. Предполагается, основываясь на имеющихся результатах (будут представлены), развить теорию для различных моментов остановки, которые ренее для скачкообразных процессов не рассматривались. Целый класс таких моментов можно построить с помощью операций минимума и максимума из моментов, изученных ранее. Ожидается, что в качестве приложения уже имеющихся результатов, будут получены явные формулы, относящиеся к распределению некоторых функционалов от броуновского движения со скачками.

**Доц. Ананьевский С.М.**

1) О случайном размещении дуг на окружности. Рассматривается процесс случайного заполнения единичной окружности дугами случайной длины. В этой задаче можно изучать разные вопросы, например, если заполнение происходит последовательно и без пересечений, то сколько дуг окажется на окружности после N попыток разместить очередную дугу? Ясно, что число размещенных дуг – это случайная величина. Какие свойства у распределения этой случайной величины? И т.п. Литература: Статья "Parking arcs on the circle with applications to one-dimensional communication networks". The Annals of Applied Probability, 1994, v.4, N4, 1089-1111.

2) Процессы разбиения и заполнения множеств. В этой работе предполагается изучить различные процессы заполнения отрезка большой длины интервалами, длина которых много меньше. Существуют и рассматриваются различные способы, например, с равномерным распределением положения интервалов фиксированной длины или, другой способ, распределение положения интервалов отлично от равномерного и т.п. Предполагается, отталкиваясь от работы английского математика Д.Мэниона, для начала изучить схему описания подобных процессов, и используя это описание, исследовать некоторые свойства этих процессов. Литература: D.Mannion, Random packing of an interval. Publ. J. Adv. Appl. Prob., 1976, N8.

**Доц. Русаков О.В.**

1) Применение преобразований Фурье и Лапласа для вычисления рациональных цен финансовых производных. Литература у руководителя. Подразумевается компьютерное моделирование.

2) Аппроксимация случайных процессов деревьями в задачах стохастических финансов Литература у руководителя. Подразумевается компьютерное моделирование.

**Доц. Валландер С.С.**

Неклассические случайные потоки. Литература: обзорная статья Б.С. Цирельсона (2004), имеется в электронном виде. Классическая точка зрения состоит в том, что процессы с непрерывным временем и независимыми значениями являются некоторой патологией. В последние годы обнаружилось, что это не совсем так. Предлагается познакомиться с тематикой и т. д.

**Доц. Малов С.В.**

О классе критериев для проверки однородности одномерных распределений случайного вектора в случае зависимых компонент. В основе данной работы лежит представление совместной функции распределения в виде композиции функции распределения, имеющего $U(0,1)$ маргинальные распределения (копулы) и функций распределения компонент. В работе Bagdonavicius et all (2008) был предложен статистический критерий проверки однородности в случае, когда копула параметризована вещественным параметром. В рамках данной работы предполагается проверить работоспособность критерия в специальных случаях моделированием, а также построить и исследовать аналогичный критерий в случае цензурированных данных. Литература: Bagdonavicius, V., Malov, S.V., and Nikulin, M. (2008). Testing of the homogeneity of marginal distributions in copula models. Принята к печати в Comptes Rendus de l'Academie des Sciences de Paris.

**Доц. Солев В.Н.**

Оценивание неизвестной функции на фоне стационарного шума.

**Доц. Гордин М.И.**

Свойства одного семейства инвариантных мер автоморфизмов торов.