УДК 519.21
ББК 22.171
Л64

Р е ц е н з е н т ы:
докт. физ.-мат. наук, проф. Я.Ю. Никитин (С.-Петерб. гос. ун-т),
докт. физ.-мат. наук, проф. А.Н. Бородин (ПОМИ РАН)

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
С.-Петербургского государственного университета

Лифшиц М.А.
Л64 Устойчивые распределения, случайные величины и процессы: Учебно-метод. пособие. — СПб., 2007. — 20 с.

Пособие посвящено одному из важнейших классов вероятностных распределений – устойчивым законам, а также возникающим на их основе устойчивым случайным процессам с независимыми приращениями. Рассматриваются спектральные представления устойчивых распределений, различные виды их параметризации, а также схемы суммирования независимых случайных величин, в которых устойчивые законы появляются в качестве предельных.

Предназначено для студентов старших курсов и аспирантов математических специальностей.

ББК 22.171

© М.А. Лифшиц, 2007

© С.-Петербургский государственный университет, 2007

1. Введение

Устойчивые величины и распределения вот уже семьдесят лет являются неотъемлемой частью классической теории вероятностей и теории случайных процессов, причем интерес к ним в последнее время только возрастает. Им посвящен ряд монографий, однако учебной литературы, по которой студент мог бы быстро познакомиться с соответствующими понятиями, практически не существует. Данные лекции призваны хотя бы отчасти заполнить этот парадоксальный пробел.

Мы пойдем от простого к сложному и рассмотрим цепочку (Нормальный закон и распределение Коши) $\curvearrowright$ (Симметричные устойчивые законы) $\curvearrowright$ (Строго устойчивые законы) $\curvearrowright$ (Общие устойчивые законы).

Эти лекции предназначены для студентов старших курсов и аспирантов-математиков. От читателя потребуются знания в объеме стандартного годового курса теории вероятностей для математиков и некоторое представление о простейших случайных процессах.

2. Симметричные устойчивые законы

Случайная величина X и ее распределение называются *симметричными устойчивыми*, если характеристическая функция величины X имеет вид

$$f(t) = \mathbb{E}e^{itX} = \exp\{-a^\alpha |t|^\alpha\}, \tag{1}$$

где $a \geq 0$, $\alpha \in (0, 2]$. Параметр a называется параметром масштаба, а α – параметром устойчивости. При $\alpha > 2$ и $\alpha < 0$ указанная выше формула не соответствует никакому распределению.

Распределение X имеет симметричную непрерывную ограниченную плотность $p(\cdot)$ (равную преобразованию Фурье от f), явный вид которой неизвестен за исключением двух случаев. При $\alpha = 2$ получается центрированный нормальный закон, а при $\alpha = 1$ – закон Коши с плотностью

$$p(x) = \frac{a}{\pi}\ (x^2 + a^2)^{-1}. \qquad (2)$$

Интерес представляет поведение распределения X на бесконечности. Оказывается, за исключением нормального случая ($\alpha = 2$) хвосты распределения убывают степенным образом. А именно при $0 < \alpha < 2$ верно

$$p(x) = p(-x) \sim C_\alpha\ a^\alpha\ x^{-\alpha-1}, \qquad x \to +\infty,$$

откуда, конечно, следует

$$\mathbb{P}\{X < -x\} = \mathbb{P}\{X > x\} \sim C_\alpha\ \frac{a^\alpha}{\alpha}\ x^{-\alpha}, \qquad x \to +\infty.$$

В этих формулах постоянная C_α зависит только от параметра α, причем довольно сложным образом. Из формулы (2) следует, что при $\alpha = 1$ верно $C_\alpha = \pi^{-1}$. В общем случае

$$C_\alpha = \frac{\Gamma(\alpha)}{\pi}\ \sin(\frac{\pi}{2}\alpha)\ .$$

Рассматриваемое семейство величин устойчиво относительно масштабирования. Если X величина с параметрами a, α, то cX будет иметь параметры $|c|a$, α.

Однако определяющим свойством данного семейства является его устойчивость при суммировании независимых случайных величин (свертке распределений). Если $X_1, \dots, X_n$ независимы, имеют общий параметр устойчивости α и параметры масштаба $a_1, \dots a_n$, то сумма $S = \sum_{j=1}^n X_j$ также будет симметричной устойчивой с параметрами α и $[\sum_{j=1}^n a_j^\alpha]^{1/\alpha}$. Именно это свойство и дало название семейству устойчивых распределений. Оно мгновенно следует из 1).

Комбинируя два свойства устойчивости, мы можем сформулировать следующее утверждение. Если $X, X_1, \dots, X_n$ независимые одинаково распределенные симметричные устойчивые величины с параметром устойчивости α, а $b_1, \dots, b_n \geq 0$, то

$$S := \sum_{j=1}^{n} b_j X_j \overset{\mathcal{L}}{=} B\ X, \tag{3}$$

где знак $\overset{\mathcal{L}}{=}$ означает равенство по распределению,

$$B = \left[\sum_{j=1}^{n} b_j^{\alpha} \right]^{1/\alpha}.$$

Величины и распределения, удовлетворяющие уравнению (3), называются *строго устойчивыми*. При этом существуют несимметричные строго устойчивые распределения, которые мы пока не рассматривали.

Обобщением формулы (3) является

$$\sum_{j=1}^{n} b_j X_j \overset{\mathcal{L}}{=} B\ X + A, \tag{4}$$

что является определением еще более широкого класса *устойчивых* величин и распределений. Например, если X – симметричная устойчивая случайная величина, то сдвинутая величина $X+c$ относится к классу (разумеется, несимметричных) устойчивых величин. Контрольный вопрос: в каком случае $X + c$ будет *строго* устойчивой ?

3. Спектральные представления

Ключом к пониманию природы устойчивых величин общего вида является спектральное разложение, т.е. представление случайной величины в виде суммы пуассоновских случайных величин бесконечно малой интенсивности. Этим мы сейчас и займемся.

3.1. Распределение Пуассона. Говорят, что случайная величина X имеет распределение Пуассона $\mathcal{P}(l, \lambda)$ с шагом $l \neq 0$ и интенсивностью $\lambda > 0$, если

$$\mathbb{P}(X = kl) = e^{-\lambda}\ \frac{\lambda^k}{k!}, \qquad k = 0, 1, 2, ...$$

При этом $\mathbb{E}X = l\lambda$, $\mathbb{D}\,X = l^2\lambda$ и $\mathbb{E}e^{itX} = \exp\{(e^{itl} - 1)\lambda\}$.

3.2. Составное распределение Пуассона. Пусть заданы $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$ и ненулевые $l_1, \ldots, l_n \in \mathbb{R}$. Пусть X_j независимы и имеют распределения $\mathcal{P}(l_j, \lambda_j)$. Положим $Y = \sum_{j=1}^n X_j$ и будем говорить, что Y имеет *составное распределение Пуассона*[1] со *спектральной мерой* $\Lambda = \sum_{j=1}^n \lambda_j \delta_{l_j}$. Все характеристики Y выражаются через Λ:

$$\mathbb{E}Y = \sum_{j=1}^n l_j \lambda_j = \int l \Lambda(dl),$$

$$\mathbb{D}\, Y = \sum_{j=1}^n l_j^2 \lambda_j = \int l^2 \Lambda(dl),$$

и

$$\mathbb{E}\; e^{itY} = \exp\left\{ \int (e^{itl} - 1) \Lambda(dl) \right\}. \tag{5}$$

Центрированной величиной с составным спектром Λ назовем величину $\bar{Y} = Y - \mathbb{E}Y$. Для нее очевидно

$$\mathbb{E}\bar{Y} = 0,$$

$$\mathbb{D}\, \bar{Y} = \sum_{j=1}^n l_j^2 \lambda_j = \int l^2 \Lambda(dl),$$

и

$$\mathbb{E}\; e^{it\bar{Y}} = \exp\left\{ \int (e^{itl} - 1 - itl) \Lambda(dl) \right\}. \tag{6}$$

3.3. Спектры общего вида. Следующий шаг состоит в предельном переходе к произвольным спектральным мерам. При этом класс спектров, к которым можно перейти, *различен* для нецентрированного и центрированного случаев. В дальнейшем всегда предполагается, что Λ – положительная мера в $\mathbb{R}$ *без нагрузки в нуле*. Тогда, если Λ – конечная мера, то ей соответствует случайная величина Y с характеристической функцией (5). Если же мера Λ не обязательно конечна, но удовлетворяет условию

[1]Compound Poisson distribution.

$$\int \min\{|l|, l^2\}\Lambda(dl) < \infty, \tag{7}$$

то ей соответствует случайная величина $\bar{Y}$ с характеристической функцией (6). В обоих случаях будем говорить, что мера Λ является спектральной мерой случайной величины.

Для конечности математических ожиданий и дисперсий в обоих случаях необходимо и достаточно, чтобы сходились интегралы

$$\int |l|\Lambda(dl) \quad \text{и} \quad \int l^2\Lambda(dl)$$

соответственно. Если они сходятся, то верны приведенные выше формулы для моментов.

Разумеется, не всякая конечная мера удовлетворяет условию (7) и не всякая мера, удовлетворяющая условию (7), является конечной – она может иметь бесконечную массу в любой окрестности нуля.

Если мера Λ непрерывна, то величину Y можно воспринимать как сумму бесконечного числа пуассоновских случайных величин бесконечно малой интенсивности, о чем и говорилось ранее.

3.4. Безгранично делимые случайные величины. Разобьем вещественную ось на два множества – внутреннее и внешнее, положив $\mathcal{I} = [-1, 1]$, $\mathcal{O} = \mathbb{R}\backslash\mathcal{I} = \{l : |l| > 1\}$. Такое разбиение достаточно произвольно, но оно совершенно необходимо для дальнейшего. Пусть мера Λ удовлетворяет условию

$$\int \min\{1, l^2\}\Lambda(dl) < \infty. \tag{8}$$

Пусть $\Lambda_{\mathcal{I}}$ и $\Lambda_{\mathcal{O}}$ – сужения меры Λ на $\mathcal{I}$ и $\mathcal{O}$ соответственно. Тогда мера $\Lambda_{\mathcal{O}}$ конечна, а мера $\Lambda_{\mathcal{I}}$ удовлетворяет условию (7). Соответственно корректно определены случайная величина $\bar{Y}_{\mathcal{I}}$, отвечающая $\Lambda_{\mathcal{I}}$ и случайная величина $Y_{\mathcal{O}}$, отвечающая $\Lambda_{\mathcal{O}}$ (будем считать их независимыми). Поэтому для любого числа $c \in \mathbb{R}$, играющего роль сдвига, мы можем определить величину $Z = \bar{Y}_{\mathcal{I}} + Y_{\mathcal{O}} + c$, чья характеристическая функция $\mathbb{E}\, e^{itZ}$ имеет вид

$$\exp\left\{\int_{\mathcal{I}}(e^{itl}-1-itl)\Lambda(dl)+\int_{\mathcal{O}}(e^{itl}-1)\Lambda(dl)+ict\right\} \qquad (9)$$

и полностью определяется спектром Λ и сдвигом c. Величина Z представляет собой общую форму *безгранично делимых* случайных величин. Мы не будем останавливаться на определении этого класса, так как нас интересует только весьма частный случай.

4. Устойчивые величины и распределения общего вида

4.1. Семейство устойчивых распределений. Рассмотрим теперь частный случай формулы (9), в которой спектральная мера выбрана специальным образом, а именно пусть Λ имеет плотность вида

$$\lambda(l)=\begin{cases} w_-\ |l|^{-\alpha-1} & ,l<0;\\ w_+\ |l|^{-\alpha-1} & ,l>0.\end{cases}$$

Здесь $w_-\geq 0, w_+\geq 0$ и обязательно хотя бы одна из этих величин отлична от нуля. Таким образом, мы получаем семейство случайных величин, чьи распределения зависят от четырех параметров α, w_-, w_+, c. Это и есть *устойчивые распределения общего вида.* Будем обозначать их $\mathcal{S}(\alpha, w_-, w_+, c)$.

Заметим, что условие (8), которое необходимо для корректности определения, выполнено именно при $0<\alpha<2$.

Параметры α, w_- и w_+ отражают фундаментальные свойства распределения, в то время как параметр сдвига c не имеет особого смысла, так как его значение определяется выбором множеств $\mathcal{I}$ и $\mathcal{O}$.

Обсудим свойство устойчивости в смысле суммирования независимых величин. Если независимые X и X' имеют распределения $\mathcal{S}(\alpha, w_-, w_+, c)$ и $\mathcal{S}(\alpha, w'_-, w'_+, c')$, то $X+X'$ будет (проверьте вычислением характеристических функций!) иметь распределение $\mathcal{S}(\alpha, w_-+w'_-, w_++w'_+, c+c')$. С другой стороны, если величина X имеет распределение $\mathcal{S}(\alpha, w_-, w_+, c)$ и $b>0$, то bX будет (тоже проверьте вычислением характеристических функций!) иметь распределение $\mathcal{S}(\alpha, b^\alpha w_-, b^\alpha w_+, c_b)$, где

$$c_b = \begin{cases} bc + \frac{(w_- - w_+)(b - b^\alpha)}{1-\alpha} & \text{при } \alpha \neq 1, \\ bc + (w_- - w_+) b \ln b & \text{при } \alpha = 1. \end{cases} \tag{10}$$

Разница между двумя случаями возникает при вычислении интеграла $\int_1^b \frac{du}{u^\alpha}$.

Из сказанного с очевидностью следует, что случайные величины из семейства $\mathcal{S}$ удовлетворяют условию устойчивости (4).

4.2. Симметричный спектр. Если $w_- = w_+$ и $c = 0$, то распределение называется симметричным устойчивым, и мы уже имели с ним дело в разделе 1. Действительно, в этом случае характеристическая функция имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\, e^{itZ} &= \exp\left\{-2\int_0^\infty (-\cos(tl)+1)\ \frac{w_+}{l^{1+\alpha}}\ dl\right\} \\ &= \exp\left\{-2\int_0^\infty (1-\cos u)\ \frac{w_+}{u^{1+\alpha}}\ du\ |t|^\alpha\right\} \\ &= \exp\left\{-a^\alpha |t|^\alpha\right\}, \end{aligned}$$

где

$$a^\alpha = 2\int_0^\infty (1-\cos u)\ \frac{du}{u^{1+\alpha}}\ \ w_+\ = \frac{\pi}{\Gamma(\alpha+1)\sin(\frac{\pi}{2}\alpha)}\ w_+.$$

4.3. Односторонний спектр. Если один из параметров w_-, w_+ равен нулю, то такое распределение называется односторонним устойчивым[2]. Заметим, однако, что односторонние устойчивые распределения совсем не обязательно соответствуют положительным (отрицательным) случайным величинам, во-первых, из-за наличия сдвига и, во-вторых, (что важнее) из-за центрирования. На самом деле, знакоопределенные устойчивые случайные величины возможны только при $0 < \alpha < 1$.

Рассмотрим один пример такой знакоопределенности. Пусть $W(t)$ – винеровский процесс и T_x – момент первого выхода W на уровень $x > 0$. Положим $T = T_1$. Легко проверить, что при любом x верно $T_x \stackrel{\mathcal{L}}{=} x^2 T$ (самоподобие винеровского процесса). С другой стороны, если заданы $x_1, ..., x_n > 0$, то выход на уровень $S = \sum x_j$ складывается из выхода на уровень x_1, затем подъема с уровня x_1 до уровня $x_1 + x_2$ и т.д. Длительности этих подъемов независимы (марковское свойство W) и равнораспределены

[2] Totally skewed stable law.

с соответствующими величинами T_{x_j}. Поэтому мы получаем

$$S^2 T \overset{\mathcal{L}}{=} T_S = \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \; T^{(j)},$$

где $T^{(j)}$ равнораспределены с T.

Таким образом, распределение неотрицательной величины T строго устойчиво в смысле формулы (3), причем $\alpha = 1/2$ и $b_j = x_j^2$. Это еще один (помимо нормального закона и закона Коши) редчайший случай, когда устойчивое распределение можно выписать в явном виде. Действительно, по известному закону отражения

$$\mathbb{P}\left\{\max_{0\le t\le\theta} W(t) < r\right\} = 2\mathbb{P}\left\{0 < W(\theta) < r\right\} = \hat{\Phi}(r/\theta^{1/2}),$$

где $\hat{\Phi}$ функция распределения модуля стандартной нормальной величины (иначе говоря, функция распределения отраженного нормального закона). Теперь из определения T следует, что для любого $\theta > 0$

$$\mathbb{P}\left\{T > \theta\right\} = \mathbb{P}\left\{\max_{0\le t\le\theta} W(t) < 1\right\} = \hat{\Phi}(1/\theta^{1/2}).$$

Немедленно получаем формулу для плотности,

$$p(\theta) = -\frac{d}{d\theta}\; \hat{\Phi}(1/\theta^{1/2}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\; \frac{1}{2\theta^{3/2}} \exp\{-\theta^{-1}/2\}.$$

Рассматривая *семейство* случайных величин $\{T_x, x > 0\}$, мы получаем устойчивый монотонно возрастающий случайный процесс, называемый *устойчивым субординатором.*

Если заменить винеровский процесс на какой-нибудь другой самоподобный процесс $\tilde{W}$ с однородными независимыми приращениями, не имеющий положительных скачков, то моменты выхода снова окажутся устойчивыми величинами с односторонним спектром. При этом показатель устойчивости $\alpha \in (0,1)$.

Контрольный вопрос: чем мешали бы положительные скачки $\tilde{W}$?

4.4. Строго устойчивые распределения. Пусть (X_j) – независимые случайные величины с одинаковым распределением $\mathcal{S}(\alpha, w_-, w_+, c)$. Пусть $b_1, \ldots, b_n > 0$ и $S = \sum b_j X_j$. Положим $B = [\sum b_j^\alpha]^{1/\alpha}$ и $\beta = \sum b_j$. В соответствии с изложенными выше правилами суммирования устойчивых величин сумма S будет иметь, при $\alpha \neq 1$, распределение

$$\begin{aligned} & \mathcal{S}(\alpha, B^\alpha w_-, B^\alpha w_+, \beta c + \frac{(w_- - w_+)(\beta - B^\alpha)}{1-\alpha}) \\ = \quad & \mathcal{S}\left(\alpha, B^\alpha w_-, B^\alpha w_+, \beta\left(c + \frac{w_- - w_+}{1-\alpha}\right) - \ B^\alpha \ \frac{(w_- - w_+)}{1-\alpha}\right). \end{aligned}$$

В то же время величина BX будет иметь распределение

$$\begin{aligned} & \mathcal{S}(\alpha, B^\alpha w_-, B^\alpha w_+, Bc + \frac{(w_- - w_+)(B - B^\alpha)}{1-\alpha}) \\ = \quad & \mathcal{S}\left(\alpha, B^\alpha w_-, B^\alpha w_+, B\left(c + \frac{w_- - w_+}{1-\alpha}\right) - \ B^\alpha \ \frac{(w_- - w_+)}{1-\alpha}\right). \end{aligned}$$

Для *строгой* устойчивости X в смысле (3), т.е. для того чтобы два распределения совпадали, при $\alpha \neq 1$ необходимо и достаточно выполнение условия

$$c = \frac{w_- - w_+}{\alpha - 1} \ . \tag{11}$$

Таким образом, каждая устойчивая случайная величина при $\alpha \neq 1$ может быть сдвинута единственным образом, так, чтобы получилась строго устойчивая. Эта процедура несколько напоминает центрирование. И, действительно, при $\alpha > 1$ строго устойчивые величины как раз (проверьте!) удовлетворяют условию $\mathbb{E}X = 0$. Однако при $\alpha < 1$ смысл условия (11) совершенно иной (математическое ожидание X здесь вообще не определено). Строгая устойчивость здесь означает, что центрирование пуассоновских величин в зоне $\mathcal{I}$ не нужно. Действительно, при выполнении (11) получается, что константа уничтожает центрирующий член:

$$-\int_{\mathcal{I}} l \, \lambda(dl) + c = 0$$

и характеристическую функцию распределения строго устойчивого закона при $\alpha < 1$ можно записать в виде

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\, e^{itZ} &= \exp\left\{\int_{\mathbb{R}} (e^{itl}-1)\lambda(l)\, dl\right\}\\ &= \exp\left\{\int_{\mathbb{R}} (e^{itl}-1)\frac{w_{sign(l)}}{|l|^{\alpha+1}}\, dl\right\}.\end{aligned}$$

С частным случаем такого закона мы уже имели дело, когда рассматривали устойчивый субординатор.

При $\alpha = 1$ появление логарифмического члена в (10) делает ситуацию совершенно иной. Здесь любой сдвиг распределения Коши (что соответствует $w_- = w_+$) является строго устойчивым, зато никакой устойчивый закон с несимметричным спектром вообще нельзя сделать строго устойчивым за счет сдвига.

4.5. Двойственность. В классе строго устойчивых законов существует интересная двойственность. Каждому такому закону $\mathcal{S}$ с показателем $\alpha \geq 1$ можно сопоставить строго устойчивый закон $\tilde{\mathcal{S}}$ с показателем $1/\alpha \in (1/2, 1]$ так, что выполняется соотношение между плотностями

$$p(x) = x^{-1-\alpha}\, \tilde{p}(x^{-\alpha}), \qquad x > 0.$$

Подробнее вопрос рассмотрен в [2, гл. 2.3].

5. Большие уклонения, зоны притяжения, предельные теоремы

5.1. Большие уклонения и моменты. Пусть X устойчивая случайная величина с распределением $\mathcal{S}(\alpha, w_-, w_+, c)$. Тогда ее односторонние большие уклонения определяются спектром:

$$\mathbb{P}\{X > x\} \sim \Lambda[x, \infty) = \frac{w_+}{\alpha}\, x^{-\alpha}, \qquad x \to +\infty\ ; \tag{12}$$

$$\mathbb{P}\{X < -x\} \sim \Lambda(-\infty, -x] = \frac{w_-}{\alpha}\, x^{-\alpha}, \qquad x \to +\infty. \tag{13}$$

Отметим отдельно случай односторонних законов. Если, для определенности, $w_- = 0$, то при $\alpha < 1$ соответствующий (левый) хвост просто нулевой, а при $\alpha \geq 1$ левый хвост присутствует, но он экспоненциально мал. Главные члены асимптотики больших уклонений здесь имеют вид

$$\mathbb{P}\{X < -x\} \approx \begin{cases} \exp\{-K_\alpha {w_+}^{-1/(\alpha-1)} x^{\alpha/(\alpha-1)}\} & \text{при } \alpha > 1; \\ \exp\{-K_1 e^{x/w_+}\} & \text{при } \alpha = 1. \end{cases}$$

Здесь K_α – некоторые известные положительные постоянные. Более точные выражения можно найти в [2, гл. 2.5].

Приведенные формулы (12)–(13) имеют содержательную интерпретацию. Если U безгранично делимая случайная величина, спектр которой совпадает с сужением Λ на множество $[x, \infty)$, то мы имеем такую же асимптотику

$$\mathbb{P}\{U \neq 0\} = 1 - e^{-\Lambda[x,\infty)} \sim \Lambda[x, \infty), \qquad x \to +\infty.$$

Можно поэтому сказать, что большие уклонения устойчивой величины всегда определяются одним большим пуассоновским слагаемым.

Из (12)–(13) следуют свойства моментов: для $\beta > 0$ величина $\mathbb{E}|X|^\beta$ конечна тогда и только тогда, когда $0 < \beta < \alpha$. В частности, дисперсии устойчивых величин всегда бесконечны (за исключением нормального распределения), а математические ожидания конечны при $\alpha > 1$.

5.2. Зоны притяжения и предельные теоремы. Пусть $X, X_1, X_2, \ldots$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин. Положим $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$. Говорят, что распределение X относится к *зоне притяжения* распределения $\mathcal{S}$, если при некоторых $B_n > 0$ и $A_n \in \mathbb{R}$ верна слабая сходимость

$$\frac{S_n - A_n}{B_n} \Rightarrow \mathcal{S}, \qquad n \to \infty.$$

Заметим, что притягивающий закон здесь определен с точностью до констант сдвига и масштаба. Например, хорошо известно, что в зону притяжения нормального закона попадают все распределения с конечным вторым моментом (причем не только они). Однако зона притяжения каждого устойчивого закона с показателем $\alpha < 2$ оказывается значительно более узкой. Для попадания в такую зону распределение должно иметь правильно меняющиеся хвосты, причем правый и левый хвосты должны вести себя согласованным образом. Верно следующее.

Для того чтобы распределение случайной величины X принадлежало зоне притяжения устойчивого закона $\mathcal{S}(\alpha, w_-, w_+, c)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\mathbb{P}\{X > x\} \sim \ w_+ \ L(x) \ x^{-\alpha}, \qquad x \to +\infty \ ; \tag{14}$$

$$\mathbb{P}\{X < -x\} \sim \ w_- \ L(x) \ x^{-\alpha}, \qquad x \to +\infty, \tag{15}$$

где $L(x)$ – медленно меняющаяся положительная функция.

При этом нормирующий множитель B_n можно выбрать как решение уравнения

$$\mathbb{P}\{|X| > B_n\} = \frac{1}{n}.$$

Тогда в силу (14)–(15)

$$B_n = [(w_- + w_+)n]^{1/\alpha} L_*(n),$$

где L_* – некоторая медленно меняющаяся функция, которую иногда называют сопряженной к L.

Что касается выбора центрирующей последовательности A_n, то при $\alpha > 1$ годится обычное центрирование $A_n = n\mathbb{E}X$. При $\alpha < 1$ центрирование вообще не нужно, здесь можно положить $A_n = 0$. Для $\alpha = 1$ ситуация несколько сложнее (центрирование не линейно по n). Здесь можно выбрать

$$A_n = n \ B_n \ \mathbb{E}\frac{X}{X^2 + B_n^2} \ .$$

Здесь очевидно сходство (с точностью до медленно меняющегося множителя) хвостов распределения X и хвостов притягивающего закона (12)–(13).

Отметим один важный частный случай. Если $L(x) = const$, то говорят, что распределение X относится к *зоне нормального притяжения* распределения $\mathcal{S}(\alpha, w_-, w_+, c)$. В этом случае нормирующий множитель имеет особенно простой вид $B_n = n^{1/\alpha}$. Очевидно, что термин «нормальное притяжение» не имеет никакого отношения к нормальному закону распределения.

Зоны притяжения устойчивых законов подробно рассмотрены в [3, гл. 2.6].

Заметим, что класс распределений, имеющих непустые зоны притяжения, в точности совпадает с классом устойчивых распределений. Это и послужило причиной открытия и изучения устойчивых распределений в 30-х годах XX века.

6. Устойчивые процессы

6.1. Процессы, связанные с устойчивыми распределениями. Пусть $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\alpha, w_-, w_+, c)$ устойчивое распределение. Тогда существует случайный процесс $\{X(t), t \geq 0\}$ с однородными независимыми приращениями, такой что $X(0) = 0$ и $X(1)$ имеет распределение $\mathcal{S}$. Процесс X называется устойчивым процессом, ассоциированным с $\mathcal{S}$. Его траектории могут быть выбраны непрерывными справа, имеющими пределы слева функциями. Таким образом, распределение X сосредоточено на пространстве Скорохода D (подробнее об этом пространстве см. [1]), причем оно однозначно определяется распределением $\mathcal{S}$. Для любых $s \leq t$ приращение $X(t) - X(s)$ имеет устойчивое распределение $\mathcal{S}(\alpha, (t-s)w_-, (t-s)w_+, (t-s)c)$. В частности, величина $X(t)$ имеет распределение $\mathcal{S}(\alpha, tw_-, tw_+, tc)$.

Если распределение $\mathcal{S}$ *строго* устойчиво, то процесс X обладает свойством самоподобия (автомодельности): для любого $C > 0$ верно

$$C^{-1/\alpha} X(C\cdot) \stackrel{\mathcal{L}}{=} X(\cdot) \ .$$

Отметим существенное различие отечественной и зарубежной терминологии. Описанные выше процессы за рубежом называются устойчивыми процессами Леви (причем под процессами Леви понимаются все процессы с однородными независимыми приращениями [7]). Понятие же устойчивого процесса в зарубежной литературе не включает свойства независимости приращений. Там процесс $\{Y(t), t \in T\}$, называется α-устойчивым, если любая линейная комбинация $\sum c_j Y(t_j)$ имеет устойчивое распределение с параметром устойчивости α.

6.2. Примеры

1. Процесс, ассоциированный со стандартным нормальным распределением, – это, конечно, винеровский процесс.

2. Процесс, ассоциированный с распределением Коши, называется процессом Коши.

3. Процесс, ассоциированный с односторонним строго устойчивым распределением индекса $\alpha \in (0,1)$ называется устойчивым субординатором порядка α. Он является скачкообразным монотонным процессом.

6.3. Устойчивые меры с независимыми значениями. Пусть $(\mathcal{R}, \mathcal{A}, \nu)$ – измеримое пространство с конечной мерой ν. Семейство случайных величин $\{Y_A, A \in \mathcal{A}\}$ называется случайной симметричной устойчивой мерой с независимыми значениями, подчиняющейся мере контроля ν, если:

а) для любых не пересекающихся множеств $A_1, \dots, A_m$ величины $Y_{A_1}, \dots, Y_{A_m}$ независимы,

б) для любого A характеристическая функция Y_A имеет вид

$$\mathbb{E}\, e^{itY_A} = \exp\{-\nu(A)|t|^\alpha\}.$$

Стохастический интеграл по случайной мере Y определяется для любой ступенчатой функции $f(u) = \sum_i c_i \mathbf{1}_{A_i}(u)$ формулой

$$\int_{\mathcal{R}} f(u) Y(du) := \sum_i c_i\, Y_{A_i}\ .$$

При этом характеристическая функция имеет вид

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \exp\left\{ it \int_{\mathcal{R}} f(u) Y(du) \right\} &= \exp\{-\sum_i |c_i|^\alpha \nu(A_i) |t|^\alpha\} \\ &= \exp\left\{ -\int_{\mathcal{R}} |f(u)|^\alpha \nu(du)\ |t|^\alpha \right\}.\end{aligned}$$

Определенный таким образом интеграл легко распространяется на множество функций $\mathbf{L}_\alpha(\mathcal{R}, \nu) = \left\{ f : \int_{\mathcal{R}} |f(u)|^\alpha \nu(du) < \infty \right\}$, причем будут выполнены естественные свойства линейности интеграла и сохранится справедливость формулы

$$\mathbb{E}\ \exp\left\{ it \int_{\mathcal{R}} f(u) Y(du) \right\} = \exp\left\{ -\int_{\mathcal{R}} |f(u)|^\alpha \nu(du)\ |t|^\alpha \right\}.$$

Стохастический интеграл позволяет строить самые разнообразные устойчивые случайные функции (в широком смысле этого термина) $\{X(t), t \in T\}$, базируясь на детерминированных ядрах:

$$X(t) := \int_{\mathcal{R}} f(t,u)Y(du).$$

Изучение свойств X по свойствам ядра f представляет собой интересную, но трудную задачу [8].

Конструкция устойчивой меры с независимыми значениями и стохастического интеграла по ней легко обобщается на случай бесконечной меры контроля ν, а базовое симметричное устойчивое распределение можно заменить на любое строго устойчивое.

6.4. Принцип инвариантности. Пусть задана последовательность независимых случайных величин $\{X_j\}$, последовательность $\{B_n\}$, числовой массив $\{a_{n,m}\}$ и моменты времени $\{t_{n,m}\}$, $1 \le m \le n$, причем $0 = t_{n,0} \le ... \le t_{n,m} = 1$. Положим $S_0 = 0$,

$$S_m = \sum_{1}^{m} X_j, \ 1 \le m \le n.$$

В пространстве Скорохода $D = D[0,1]$ определим случайные ступенчатые функции z_n формулой

$$z_n(t) = \frac{S_m}{B_n} - a_{n,m}, \quad t_{n,m-1} \le t < t_{n,m}, \quad 1 \le m \le n.$$

При разумном определении массива $\{t_{n,m}\}$ и нормирующих постоянных $\{B_n\}, \{a_{n,m}\}$ распределения z_n сходятся к распределению некоторого предельного процесса с независимыми приращениями. Эта сходимость называется принципом инвариантности. Напомним две типичные схемы такого рода.

П р и м е р 1. X_j – центрированные величины с конечными моментами второго порядка, $\mathbb{E}X_j^2 = \sigma_j^2 < \infty$. Тогда следует положить $B_n^2 = \sum_{j=1}^n \sigma_j^2; t_{n,m} = \frac{B_m^2}{B_n^2}$. В качестве предельного здесь будет выступать винеровский процесс. Это – классический принцип инвариантности Донскера–Прохорова.

П р и м е р 2. X_j – независимые одинаково распределенные величины, общее распределение которых принадлежит области притяжения некоторого устойчивого закона $\mathcal{S}$. Пусть

$$\frac{S_n - A_n}{B_n} \Rightarrow \mathcal{S}.$$

Тогда следует положить $t_{n,m} = \frac{m}{n}, a_{n,m} = \frac{m}{n}\frac{A_n}{B_n}$. Предельным процессом в этой схеме будет однородный устойчивый процесс, ассоциированный с распределением $\mathcal{S}$ ([6; 4, гл. 3.2]).

Литература

1. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. М., 1977.

2. *Золотарев В.М.* Одномерные устойчивые распределения. М., 1983.

3. *Ибрагимов И.А., Линник Ю.В.* Суммы независимых и стационарно связанных величин. М., 1965.

4. *Прохоров Ю.В.* Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей // Теория вероятностей и ее применения. Т. 1. С. 177–237.

5. *Скороход А.В.* Случайные процессы с независимыми приращениями. М., 1986.

6. *Скороход А.В.* (1955) О предельном переходе от последовательности сумм независимых случайных величин к однородному случайному процессу с независимыми приращениями // Докл. АН СССР. Т. 104. С. 364–367.

7. *Bertoin J.* Lévy Processes. Cambridge, 1996.

8. *Samorodnitsky G., Taqqu. M.S.* Stable non-Gaussian Random Processes. New York, 1994.

Оглавление

1. Введение ... 3
2. Симметричные устойчивые законы ... 3
3. Спектральные представления ... 5
3.1. Распределение Пуассона ... 5
3.2. Составное распределение Пуассона ... 6
3.3. Спектры общего вида ... 6
3.4. Безгранично делимые случайные величины ... 7
4. Устойчивые величины и распределения общего вида ... 8
4.1. Семейство устойчивых распределений ... 8
4.2. Симметричный спектр ... 9
4.3. Односторонний спектр ... 9
4.4. Строго устойчивые распределения ... 11
4.5. Двойственность ... 12
5. Большие уклонения, зоны притяжения, предельные теоремы ... 12
5.1. Большие уклонения и моменты ... 12
5.2. Зоны притяжения и предельные теоремы ... 13
6. Устойчивые процессы ... 15
6.1. Процессы, связанные с устойчивыми распределениями ... 15
6.2. Примеры ... 15
6.3. Устойчивые меры с независимыми значениями ... 16
6.4. Принцип инвариантности ... 17
Литература ... 18

У ч е б н о е и з д а н и е

Михаил Анатольевич Лифшиц

УСТОЙЧИВЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ, СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ПРОЦЕССЫ

Учебно-методическое пособие

Зав.редакцией Г.И. Чередниченко
Редактор Ф.С. Бастиан
Техн. редактор Л.Н. Иванова
Обложка А.В. Калининой
Компьютерная верстка автора

Подписано в печать с оригинала-макета 15.01.2007.
Ф-т 60x84/16. Усл. печ. л. 1,63. Уч.-изд. л. 1,5. Тираж 100 экз.

Заказ №

РОПИ С.-Петербургского государственного университета.
199034, С.-Петербург, Университетская наб., 7/9.

Отпечатано в отделе оперативной полиграфии НИИХ СПбГУ
с оригинала-макета заказчика.
198504, С.-Петербург, Старый Петергоф. Университетский пр., 26.

Предназначено для учебного процесса.