УДК 519.21
ББК 22.171
Л64

Р е ц е н з е н т ы:
докт. физ.-мат. наук, проф. Я.Ю. Никитин (С.-Петерб. гос. ун-т),
докт. физ.-мат. наук, проф. А.Н. Бородин (ПОМИ РАН)

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
С.-Петербургского государственного университета

Лифшиц М.А.

Л64 Предельные теоремы типа «почти наверное»: Учебно-метод. пособие. — СПб., 2007. — 32 с.

Пособие посвящено новому типу предельных теорем теории вероятностей – предельным теоремам типа «почти наверное» (ПТПН), которые были открыты в 80-х годах XX века и вызывали большой интерес в течение двух последних десятилетий. В лекциях, составляющих содержание данного пособия, дается достаточно полное представление о ПТПН и широком круге смежных результатов. Наряду с классическими предельными теоремами типа «почти наверное», значительная часть излагаемого материала рассказывает об итогах оригинальных научных исследований.

Предназначено для студентов старших курсов и аспирантов математических специальностей.

ББК 22.171

1. Введение

Предельная теорема типа «почти наверное» (ПТПН) – это утверждение о слабой сходимости с вероятностью единица последовательности эмпирических мер, порожденных некоторой последовательностью случайных величин. Это сравнительно новый тип предельных теорем, который был обнаружен относительно недавно и вызывал большой интерес в течение двух последних десятилетий. В этом курсе автор постарался дать об этом оригинальном объекте первое представление и сравнить его с классическими предельными теоремами теории вероятностей. От читателя предполагается хорошее знакомство с базовым курсом теории вероятностей для математиков, а в некоторых (немногих) местах желательно иметь представление о случайных процессах.

Пусть $\{\zeta_k\}$ последовательность случайных величин, определенных на общем вероятностном пространстве и принимающих значения в метрическом пространстве $\mathcal{X}$. Пусть$\{b_k\}$ последовательность положительных чисел, такая что

$$\gamma_n = \sum_{k\le n} b_k \to \infty, \quad n \to \infty.$$

Назовем b_k весами и построим эмпирические меры в $\mathcal{X}$ по формуле

$$Q_n = \frac{1}{\gamma_n} \sum_{k=1}^{n} b_k \delta_{\zeta_k}. \tag{1.1}$$

Знак $\Rightarrow$ в дальнейшем обозначает слабую сходимость мер в $\mathcal{X}$. Будем говорить, что последовательность $\{\zeta_k\}$ удовлетворяет предельной теореме почти наверное (ПТПН), если с вероятностью единица

$$Q_n \Rightarrow G, \tag{1.2}$$

где G – вероятностная мера на $\mathcal{X}$, и записывать $\zeta_k \xrightarrow{b} G$. Во многих случаях (но не всегда) ПТПН является дополнением к классической предельной теореме

$$\mathcal{L}(\zeta_k) \Rightarrow G.$$

Если $\mathcal{X}$ – линейное пространство, G – гауссовская мера, то утверждение (1.2) называют центральной предельной теоремой типа «почти наверное» (ЦПТПН).

Исторически первую ЦПТПН сформулировал без доказательства Леви [19, с. 270] для одного вида мартингалов, но лишь много лет спустя ПТПН была переоткрыта и строго доказана в работах Брозамлера [13] и Шатте [24] для частного случая нормированных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин. Дальнейшие ссылки можно найти в обзоре [9].

Наметим две основных стратегии доказательства ПТПН. Обе они начинаются с того, что (1.2) сводится к проверке утверждения

$$\int f\ dQ_n = \frac{1}{\gamma_n}\sum_{k=1}^{n} b_k f(\zeta_k) \ \ \rightarrow \ \ \int_{\mathcal{X}} f\ dG \tag{1.3}$$

для каждого *фиксированного* ограниченного липшицева функционала f на $\mathcal{X}$ (см. лемму 2.1(ii) ниже). Есть две принципиально разных возможности получить соотношение (1.3). Первая, которую мы будем называть *методом эргодической аппроксимации*, основана на приближении ζ_k подходящими значениями процесса Орнштейна–Уленбека U, с последующей аппроксимацией величины $\int_{\mathcal{X}} f\ dQ_n$ ее аналогом $T_n^{-1}\int_0^{T_n} f(U_t)dt,\ T_n \to \infty$, а сходимость последнего выражения устанавливается с помощью эргодической теоремы. Этот метод применялся в работе [18]. Недавно Майор [21] показал, что для аппроксимации можно использовать и другие эргодические предельные процессы.

Другой способ доказывать (1.3) можно назвать *ковариационным методом*. Если мы покажем, что ковариация $\mathbf{Cov}(f(\zeta_k), f(\zeta_l))$ достаточно мала для индексов k и l, удаленных друг от друга, то к последовательности величин $f(\zeta_k)$ можно применить одну из форм усиленного закона больших чисел для сумм зависимых величин (например, теорему Мори [23]).

2. Базовые утверждения

Пусть $\mathcal{X}$ – сепарабельное метрическое пространство, ζ_k – последовательность $\mathcal{X}$-значных случайных величин, и пусть b_k – последовательность весов, удовлетворяющая условиям из раздела 1. Пусть $G = G(\omega)$ (вообще говоря, случайная, но чаще детерминированная) вероятностная мера в $\mathcal{X}$. Мы пишем $\zeta_k \xrightarrow{b} G$, если верна ПТПН в виде (1.2).

Лемма 2.1. (i) *Существует такое счетное семейство $\mathcal{F}$ ограниченных липшицевых функционалов $f : \mathcal{X} \to \mathbf{R}^1$, что для каждой меры G и каждой последовательности мер Q_n на $\mathcal{X}$ отношения*

$$\int f dQ_n \to \int f dG, \qquad f \in \mathcal{F}, \tag{2.1}$$

обеспечивают $Q_n \Rightarrow G$.

(ii) *Пусть ζ_k последовательность $\mathcal{X}$-значных случайных векторов. Если для каждого ограниченного липшицева функционала $f : \mathcal{X} \to \mathbf{R}^1$ мы имеем*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\gamma_n} \sum_{k \le n} b_k f(\zeta_k) = \int f dG \qquad \textit{почти наверное,}$$

то $\zeta_k \xrightarrow{b} G$.

Замечание 2.2. Этот результат неявно содержится в работе [2] и явно – в работе [20].

Доказательство леммы 2.1. (i) Пусть $\mathcal{X}_0$ – счетное плотное подмножество $\mathcal{X}$. Обозначим $\mathcal{W}$ (счетное) семейство всех конечных объединений открытых шаров с центрами в $\mathcal{X}_0$ и рациональными радиусами. Тогда для каждой вероятностной меры G и каждого открытого множества $V \subset \mathcal{X}$ имеем

$$G(V) = \sup \left\{ G(W);\ W \in \mathcal{W}, W \subset V \right\}. \tag{2.2}$$

Зафиксируем множество $W \in \mathcal{W}$ и определим

$$\rho_W(x) = \inf_{y \notin W} \|x - y\|.$$

Рассмотрим ограниченные липшицевы функционалы

$$f_{m,W}(x) = \min\{1, m\rho_W(x)\}$$

и положим $\mathcal{F} = \{f_{m,W},\ m \in \mathbf{N}, W \in \mathcal{W}\}$. По теореме Лебега о доминированной сходимости и (2.1) для каждого $W \in \mathcal{W}$ имеем

$$G(W) = \lim_{m \to \infty} \int f_{m,W} dG \le \sup_m \int f_{m,W} dG =$$

$$\sup_m \lim_{n \to \infty} \int f_{m,W} dQ_n \le \liminf_{n \to \infty} Q_n(W).$$

Используя (2.2), для каждого открытого множества V получаем

$$G(V) \le \sup_{W \subset V} \liminf_{n \to \infty} Q_n(W) \le \liminf_{n \to \infty} Q_n(V).$$

Последнее соотношение является одной из эквивалентных форм определения слабой сходимости $Q_n \Rightarrow G$ (см. [1, теорема 2.1]). Таким образом, (i) доказано.

(ii) немедленно следует из наших определений и из (i).

3. Суммы независимых величин

В этом разделе мы рассматриваем простейший случай, когда ζ_k – это нормированные суммы случайных величин в линейном пространстве.

Следующий результат взят из работы [4]. Он является одной из наиболее общих ПТПН для независимых слагаемых. Главное условие (3.2) происходит, однако, из предшествовашей работы [11]. В дальнейшем предполагается, что $\mathcal{X}$ – сепарабельное нормированное линейное пространство, а

$$\zeta_k = \sum_{j \le k} X_j / B_k - A_k,$$

где X_j – это $\mathcal{X}$-значные независимые слагаемые, сдвиги $A_k \in \mathcal{X}$, а B_k – возрастающие к бесконечности положительные нормирующие множители.

Теорема 3.1. *Пусть существует предельный вероятностный закон G в $\mathcal{X}$, т.е.*

$$\mathcal{L}(\zeta_k) \Rightarrow G, \qquad k \to \infty, \tag{3.1}$$

и для некоторого $\varepsilon > 0$ верно

$$\sup_k \mathbf{E}(\log_+ \log_+ ||\zeta_k||)^{1+\varepsilon} < \infty. \tag{3.2}$$

Тогда ПТПН с предельным законом G верна для каждой ограниченной весовой последовательности $\{b_k\}$, удовлетворяющей условию $b_k \le c_1 \log(B_k/B_{k-1})$, $k \ge 2$.

Замечание 3.2. Мы покажем, что параметр ε в этом утверждении устранить нельзя.

Следствие 3.3. (Теорема Лейси–Филипа [18].) Пусть $\mathcal{X} = \mathbf{R}^d$. Пусть X_j – последовательность независимых одинаково распределенных величин с нулевым средним и единичным ковариационным оператором; пусть G – стандартный нормальный закон в $\mathbf{R}^d$. Положим $B_n = \sqrt{n}$. Тогда ЦПТПН верна для стандартных логарифмических весов, т.е. для $b_k = \frac{1}{k}$, причем $\gamma_n \sim \log n$.

Действительно, условие (3.1) очевидно выполнено в силу предельной теоремы Леви и для всех k мы имеем

$$\mathbf{E}||\zeta_k||^2 = \mathbf{E}||X_1||^2 = d,$$

значит,

$$\sup_k \mathbf{E}||\zeta_k||^2 = d < \infty,$$

обеспечивая гораздо более сильную равномерную ограниченность моментов, чем (3.2).

Замечание 3.4. Таким же образом можно получить ПТПН для нормированных сумм независимых одинаково распределенных величин, относящихся к области притяжения произвольного устойчивого закона. Не следует, однако, думать, что ПТПН для сумм независимых одинаково распределенных величин верна в точности при тех же предположениях, что и классическая слабая предельная теорема. На самом деле Беркеш и Делинг [12] построили примеры таких последовательностей, которые удовлетворяют ЦПТПН, но относятся всего лишь к области *частичного* притяжения нормального закона.

Следствие 3.5. (ЦПТПН в условиях Линдеберга [8].) Предположим, что $\mathcal{X} = \mathbf{R}^1, \mathbf{E}X_j = 0, B_k^2 = \sum_{j \le k} \mathbf{E}X_j^2$, и выполнено условие Линдеберга: для каждого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{k \to \infty} B_k^{-2} \sum_{j \le k} \mathbf{E}X_j^2 \mathbf{1}_{|X_j| > \varepsilon B_k} = 0. \tag{3.3}$$

Тогда ЦПТПН выполнена с весами $b_k = \frac{B_k - B_{k-1}}{B_k}$.

В этом случае отношение (3.1) превращается в классическую предельную теорему Линдеберга, а (3.2) следует из очевидного

$$\sup_k \mathbf{E}|\zeta_k|^2 = 1.$$

Здесь мы также имеем $b_k \sim \log(B_k/B_{k+1})$, и может быть применена теорема 3.1.

Замечание 3.6. В работе [10] аналогичный метод обобщается дальше для гораздо более широкого класса нелинейных функционалов от независимых величин.

Чтобы избежать долгих вычислений, мы здесь докажем лишь несколько ослабленный вариант теоремы 3.1, а именно заменим условие (3.2) на несколько более сильное. Предположим, что для некоторого $a > 0$ верно

$$\sup_k \mathbf{E}||\zeta_k||^a < \infty. \tag{3.4}$$

В такой форме результат был доказан в работе [2]. Для всех указанных выше приложений условие (3.4) вполне подходит.

Доказательство теоремы 3.1. По лемме 2.1(ii) заключение теоремы 3.1 выполнено, если для любого ограниченного липшицева функционала $f : \mathcal{X} \to \mathbf{R}^1$ и

$$F_n := \int f dQ_n = \frac{1}{\gamma_n} \sum_{k=1}^{n} b_k f(\zeta_k)$$

верно

$$\mathbf{P}\left\{F_n \ \to \ \int f dG\right\} = 1. \tag{3.5}$$

Поэтому зафиксируем f и будем проверять (3.5). Обозначим

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in \mathcal{X}} |f(x)|; \qquad \|f\|_L := \sup_{x \neq y \in \mathcal{X}} |f(x) - f(y)|/\|x - y\|.$$

Пусть $\alpha > 1$. Последовательность целых положительных чисел $\{n_j\}$ зададим формулами

$$n_1 := \inf\,\{n : \gamma_n \geq 1\};$$

$$n_{j+1} := \inf\,\{n : \gamma_n \geq \alpha\,\gamma_{n_j}\}.$$

При таком выборе всегда верно

$$\gamma_{n_j}^{-1} \leq \alpha^{1-j}, \qquad j \geq 1. \tag{3.6}$$

Далее, для всех $j \geq 1, n \in [n_j, n_{j+1})$ имеем

$$\sum_{k=n_j+1}^{n} b_k = \gamma_n - \gamma_{n_j} \le \alpha\gamma_{n_j} - \gamma_{n_j} \le (\alpha-1)\gamma_{n_j} \le (\alpha-1)\gamma_n.$$

Следовательно,

$$\left|F_n - F_{n_j}\right| = \left|\frac{\gamma_{n_j}}{\gamma_n}F_{n_j} + \frac{1}{\gamma_n}\sum_{k=n_j+1}^{n} b_k f(\zeta_k) - F_{n_j}\right| \le$$

$$\frac{|\gamma_{n_j} - \gamma_n|}{\gamma_n}\left|F_{n_j}\right| + (\alpha-1)\|f\|_\infty \le (\alpha-1)\left(\left|F_{n_j}\right| + \|f\|_\infty\right).$$

Поэтому для (3.5) достаточно доказать

$$\mathbf{P}\left\{F_{n_j} \;\to\; \int f dG\right\} = 1 \tag{3.7}$$

при каждом $\alpha > 1$, и перейти к пределу при $\alpha \searrow 1$. Далее, по лемме Бореля–Кантелли и неравенству Чебышева, сходимость (3.7) следует из соотношений

$$\lim_n \; \mathbf{E}F_n = \int f dG \tag{3.8}$$

и

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{Var} F_{n_j} < \infty. \tag{3.9}$$

Сходимость в (3.8) следует из гипотезы о слабой сходимости (3.1). В самом деле,

$$\lim_k \mathbf{E}f(\zeta_k) = \int f dG, \qquad \gamma_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \;\to\; \infty,$$

откуда

$$\mathbf{E}F_n = \frac{1}{\gamma_n}\sum_{k=1}^{n} b_k \; \mathbf{E}f(\zeta_k) \;\to\; \int f dG.$$

Для доказательства (3.9) запишем

$$\mathbf{Var} F_n \le \frac{2}{\gamma_n^2}\sum_{1\le k\le n}\sum_{1\le \ell\le k} b_\ell \; b_k \; \mathbf{Cov}(f(\zeta_\ell), f(\zeta_k)).$$

Теперь займемся поиском верхних оценок для ковариаций. Зафиксируем пару натуральных чисел $\ell < k$ и запишем тождество

$$\zeta_k = \frac{B_\ell}{B_k}\zeta_\ell + \left(\frac{A_\ell B_\ell}{B_k} - A_k + \frac{1}{B_k}\sum_{j=\ell+1}^{k} X_j\right) := \frac{B_\ell}{B_k}\zeta_\ell + \eta_{k,\ell}\ , \quad (3.10)$$

причем $\eta_{k,\ell}$ и ζ_ℓ независимы. Поэтому

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{E}f(\zeta_k)f(\zeta_\ell) & \leq & \mathbf{E}f(\eta_{k,\ell})f(\zeta_\ell) + |\mathbf{E}\left(f(\eta_{k,\ell}) - f(\zeta_k)\right)f(\zeta_\ell)| \\ & \leq & \mathbf{E}f(\eta_{k,\ell})\mathbf{E}f(\zeta_\ell) + \|f\|_\infty \mathbf{E}\left|f(\eta_{k,\ell}) - f(\zeta_k)\right| \\ & \leq & \mathbf{E}f(\zeta_k)\mathbf{E}f(\zeta_\ell) + 2\|f\|_\infty \mathbf{E}\left|f(\eta_{k,\ell}) - f(\zeta_k)\right|. \end{array}$$

Заметим также, что

$$\begin{array}{rcl} |f(\eta_{k,\ell}) - f(\zeta_k)| & \leq & \min\left\{\|f\|_L \|\eta_{k,\ell} - \zeta_k\|; 2\|f\|_\infty\right\} \\ & \leq & \max\left\{\|f\|_L; 2\|f\|_\infty\right\}\min\left\{\|\eta_{k,\ell} - \zeta_k\|; 1\right\} \\ & = & \max\left\{\|f\|_L; 2\|f\|_\infty\right\}\min\left\{\frac{B_\ell}{B_k}\|\zeta_\ell\|; 1\right\}. \end{array}$$

Следовательно,

$$\mathbf{Cov}(f(\zeta_\ell), f(\zeta_k)) \leq c_2 \mathbf{E}\min\left\{\frac{B_\ell}{B_k}\|\zeta_\ell\|; 1\right\},$$

где

$$c_2 = 2\|f\|_\infty \max\left\{\|f\|_L; 2\|f\|_\infty\right\}.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что параметр a в (3.4) не превосходит единицы. Тогда для некоторой постоянной c_3 и всех $y \in \mathbf{R}$ имеем

$$\min\{|y|; 1\} \leq c_3 |y|^a.$$

Отсюда

$$\mathbf{Cov}(f(\zeta_\ell), f(\zeta_k)) \leq c_4 \frac{B_\ell^a}{B_k^a},$$

где постоянная c_4 зависит от f, a и супремума в (3.4). Таким образом,

$$\mathbf{Var}F_n \leq \frac{c_5}{{\gamma_n}^2} \sum_{1\leq k\leq n} \frac{b_k}{B_k^a} \sum_{1\leq \ell\leq k} b_\ell B_\ell^a.$$

Та часть суммы, которая относится к $\ell = 1$, допускает оценку

$$b_1 \sum_{1\leq k\leq n} \frac{b_k B_1^a}{B_k^a} \leq b_1 \gamma_n.$$

Для внутренней суммы остальной части воспользуемся оценкой из условия теоремы 3.1

$$b_\ell \le \min\left\{\sup_k b_k; c_1 \log \frac{B_\ell}{B_{\ell-1}}\right\}$$

и элементарной оценкой вида

$$\min\{1; \log y\} \le c_6(1 - y^{-a}), \qquad y \ge 1,$$

которую мы применим при $y = \frac{B_\ell}{B_{\ell-1}}$. Получится

$$b_\ell \le c_7 \left(1 - \frac{B_\ell^{-a}}{B_{\ell-1}^{-a}}\right)$$

и

$$b_\ell B_\ell^a \le c_7(B_\ell^a - B_{\ell-1}^a).$$

Теперь имеем

$$\sum_{2\le\ell\le k} b_\ell B_\ell^a \le c_7 \sum_{2\le\ell\le k} (B_\ell^a - B_{\ell-1}^a) = c_7(B_k^a - B_1^a).$$

Соответственно и для двойной суммы получим

$$\sum_{1\le k\le n} \frac{b_k}{B_k^a} \sum_{2\le\ell\le k} b_\ell B_\ell^a \le c_7 \sum_{1\le k\le n} b_k = c\gamma_n.$$

Можем сделать вывод, что

$$\mathbf{Var} F_n \le \frac{c_8}{\gamma_n} \ ,$$

причем постоянная c_8 зависит от системы весов b_k, показателя a, супремума в (3.4), функционала f, но не зависит от n. Теперь сходимость ряда (3.9) мгновенно следует из оценки (3.6).

Замечание 3.7. Единственное место, где мы воспользовались конкретным видом векторов $\{\zeta_n\}$, – это представление (3.10). Однако для вывода оценки (3.9) вполне достаточно иметь более общее представление вида

$$\zeta_k = \frac{B_l}{B_k}\pi_{k,l}(\zeta_l) + \eta_{k,l},$$

где ζ_l и $\eta_{k,l}$ независимы, а оператор $\pi_{k,l} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ ограничен относительно нормы $||\cdot||$. При изучении принципа инвариантности встретится именно такая ситуация.

4. Принцип инвариантности

Пусть задана последовательность вещественных независимых случайных величин $\{\chi_j\}_{j\geq 1}$, возрастающая числовая последовательность $\{B_n\}$, числовой массив $\{a_{n,m}\}$ и моменты времени $\{t_{n,m}\}$, где $1 \leq m \leq n$, причем $0 = t_{n,0} \leq ... \leq t_{n,m} = 1$.

Положим $S_0 = 0$ и $S_m = \sum_1^m \chi_j$, $1 \leq m \leq n$, а в пространстве Скорохода $\mathcal{X} = D = D[0,1]$ определим случайные ступенчатые функции ζ_n формулой

$$\zeta_n(t) = \frac{S_m}{B_n} - a_{n,m}, \quad t_{n,m-1} \leq t < t_{n,m}, \quad 1 \leq m \leq n. \tag{4.1}$$

При разумном определении массива $\{t_{n,m}\}$, нормирующих постоянных $\{B_n\}$ и $\{a_{n,m}\}$ распределения ζ_n сходятся к распределению некоторого предельного процесса с независимыми приращениями. Эта сходимость называется *принципом инвариантности*. Напомним две типичные схемы такого рода.

Пример 4.1. χ_j – центрированные величины с конечными моментами второго порядка, $\mathbf{E}\chi_j^2 = \sigma_j^2 < \infty$. Тогда следует положить $B_n^2 = \sum_{j=1}^n \sigma_j^2; t_{n,m} = \frac{B_m^2}{B_n^2}$. В качестве предельного здесь будет выступать винеровский процесс. Это – классический принцип инвариантности Донскера–Прохорова [1, гл. 2–3].

Пример 4.2. χ_j – независимые одинаково распределенные величины, общее распределение которых принадлежит области притяжения некоторого устойчивого закона $\mathcal{G}$, т.е.

$$\mathbf{P}\left\{\frac{S_n}{B_n} - A_n \in A\right\} \to \mathcal{G}(A), \qquad A \subset \mathbf{R}^1.$$

Тогда следует положить $t_{n,m} = \frac{m}{n}, a_{n,m} = \frac{m}{n}A_n$. Предельным процессом в этой схеме будет однородный устойчивый процесс, ассоциированный с распределением $\mathcal{G}$ [5, § 3.2; 7].

Принцип инвариантности типа «почти наверное» выглядит следующим образом.

Теорема 4.1. *Пусть ζ_n – элементы пространства D, заданные соотношением* (4.1), *а эмпирические меры Q_n определены в* (1.1), *причем веса b_k удовлетворяют условиям теоремы* 3.1. *Пусть*

$B_n \nearrow \infty$, распределения ζ_n сходятся к некоторому предельному распределению G и для некоторого $a > 0$ выполнено условие

$$\sup_{n,t} \mathbf{E}|\zeta_n(t)|^a < \infty.$$

Тогда $\zeta_n \xrightarrow{b} G$.

Доказательство. Мы не можем напрямую воспользоваться теоремой 3.1, так как пространство D не является нормированным. Однако вся та часть рассуждений в доказательстве теоремы 3.1, которая относится к конкретному функционалу, а также замечание 3.7 остаются актуальными. Действительно, при $l \le k$ между ζ_l и ζ_k есть соотношение

$$\zeta_k = \frac{B_l}{B_k}\pi_{k,l}(\zeta_l) + \eta_{k,l}, \tag{4.2}$$

где $\eta_{k,l}$ не зависит от ζ_l, а оператор $\pi_{k,l} : D \to D$ определен формулой

$$\pi_{k,l}(\zeta)(t) = \zeta(\tau(t)), \qquad \forall \zeta \in D,$$

при помощи кусочно-линейной функции $\tau : [0,1] \to [0,1]$, переводящей $t_{k,m}$ в $t_{l,m}$ при $m \le l$ и в 1 при $m \ge l$. Рассматривая на D равномерную норму

$$||\zeta|| = \sup_{0\le t\le 1} |\zeta(t)|,$$

отмечаем, что оператор $\pi_{k,l}$ является сжимающим относительно нее. Кроме того, для любого процесса с независимыми приращениями справедлива следующая оценка равномерной нормы.

Лемма 4.2. *Пусть $\zeta_t, t \in [0,1]$, – сепарабельный процесс с независимыми приращениями. Тогда для каждого $a > 0$ справедливо $\mathbf{E}||\zeta||^a \le c_a \sup_t \mathbf{E}|\zeta(t)|^a$.*

Доказательство. Положим $E = \sup_t \mathbf{E}|\zeta(t)|^a, r = 2(4E)^{1/a}$. Очевидно

$$\sup_t \mathbf{P}\left\{|\zeta(t) - \zeta(1)| > r\right\} \le 2\sup_t \mathbf{P}\{|\zeta_t| > r/2\} \le 2E(r/2)^{-a} \le \frac{1}{2}.$$

Воспользуемся обобщенным неравенством Колмогорова [6, §1.1]: если $X(t), 0 \le t \le 1$, стохастически непрерывный процесс с независимыми приращениями, то для всех $R, r > 0$ верно

$$P\{\sup_t |X(t)| > R + r\} \le \frac{1}{1-\alpha} P\{|X(1)| > R\},$$

где $\alpha = \sup_t P\{|X(1) - X(t)| > r\}$. Это неравенство позволяет заключить, что при любом $R > 0$

$$\mathbf{P}\left\{||\zeta|| = \sup_t |\zeta(t)| > R\right\} \leq 2\mathbf{P}\left\{|\zeta(1)| + r > R\right\},$$

откуда

$$\mathbf{E}||\zeta||^a \leq 2\mathbf{E}\left(|\zeta(1)| + r\right)^a \leq 2^{1+a}(\mathbf{E}|\zeta(1)|^a + r^a) \leq c_a E.$$

Таким образом, условие (3.4) выполнено для величин ζ и равномерной нормы. Если f – ограниченный липшицев функционал на пространстве D, причем липшицевость понимается относительно метрики пространства D, то f будет также липшицевым относительно равномерной нормы. Поэтому применимы все рассуждения из доказательства теоремы 3.1, показывающие, что с вероятностью единица $\int f dQ_n \to \int f dG$. Применение леммы 2.1($ii$) заканчивает доказательство теоремы 4.1.

Все гипотезы теоремы 4.1 выполняются в примерах 4.1 и 4.2.

В примере 4.1 можно перенести рассмотрение из пространства D в пространство $C[0,1]$. Для этого достаточно заменить кусочно-постоянные функции ζ_n из (4.1) на соответствующие ломаные, линейные на отрезках $[t_{n,m-1}, t_{n,m}]$. Поскольку соотношение (4.2) попрежнему имеет место, а оператор $\pi_{k,l}$ снова будет сжимающим в равномерной норме, все приведенные аргументы остаются в силе (здесь непосредственно применима комбинация теоремы 3.1 и замечания 3.7).

В примере 4.2, благодаря регулярности последовательности нормирующих множителей B_n, теорема применима к классической последовательности весов, т.е. к $b_k = k^{-1}$.

Принцип инвариантности почти наверное, связанный с примером 4.1, имеется в работе [8]. Результат, получающийся в схеме примера 3.2, и другие принципы инвариантности «почти наверное» см. в [11, §2].

5. Разница между обычной предельной теоремой и ПТПН

В этом разделе мы приведем построенный в работе [4] пример последовательности независимых (неодинаково распределенных) вещественных случайных величин с нулевыми средними и конечными дисперсиями, которая удовлетворяет обычной центральной предельной теореме (ЦПТ), но не удовлетворяет центральной предельной теореме типа «почти наверное» (ЦПТПН). Этот пример наглядно показывает, почему логарифмическое моментное условие Беркеша–Делинга (3.2) практически оптимально.

Пусть $a > 1, \alpha \in (\frac{1}{2}, \frac{a}{2})$ и

$$X_j := Y_j + Z_j,$$

где $\{Y_j, Z_j\}$ независимы, $\mathcal{L}(Y_j) = \mathcal{N}(0,1)$, и $Z_j = 0$ для всех j за исключением последовательности $n_m := [\exp\{a^m\}]$. Пусть $Z_{n_m} := \pm U_m$ с равными вероятностями $\frac{1}{2m}$ и амплитудой $U_m := n_m^\alpha$; положим $Z_{n_m} := 0$ с остающейся вероятностью $1 - \frac{1}{m}$.

Рассмотрим нормированные частичные суммы

$$\zeta_n := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} X_j.$$

Теорема 5.1. *Последовательность $\{X_j\}$ удовлетворяет условию*

$$\sup_n \mathbf{E} \ln_+ \ln_+ |\zeta_n| < \infty$$

и центральной предельной теореме, т.е.

$$\mathcal{L}(\zeta_n) \Rightarrow \mathcal{N}(0,1),$$

но она не удовлетворяет центральной предельной теореме типа «почти наверное».

Замечание 5.2. Напомним еще раз, что теорема 3.1 показывает, что ЦПТ влечет ЦПТПН при условии

$$\sup_n \mathbf{E} \left(\ln_+ \ln_+ |\zeta_n|\right)^{1+\varepsilon} < \infty$$

со сколь угодно малым $\varepsilon > 0$. Теорема 5.1 устанавливает точность этого результата: параметр ε исключить нельзя.

Доказательство теоремы 5.1.

1. *Центральная предельная теорема.* Пусть

$$\zeta_n^Y := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n Y_j, \qquad \zeta_n^Z := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n Z_j.$$

Зафиксируем целое m и рассмотрим $n \in [n_m, n_{m+1})$. Тогда

$$\zeta_n = \zeta_n^Y + \zeta_n^Z = \zeta_n^Y + \frac{\sum_{j=1}^{m-1} Z_{n_j}}{\sqrt{n}} + \frac{Z_{n_m}}{\sqrt{n}}. \tag{5.1}$$

Для первого слагаемого имеем $\mathcal{L}(\zeta_n^Y) = \mathcal{N}(0,1)$. Третье слагаемое из (5.1) стремится к нулю по вероятности (когда $m \to \infty$), поскольку $\mathbf{P}\{Z_{n_m} \neq 0\} \to 0$. Для второго слагаемого из (5.1) имеем оценку

$$\left| \sum_{j=1}^{m-1} Z_{n_j} \right| \le \sum_{j \le m-1} U_j \le m\ U_{m-1} = m\ n_{m-1}^{\alpha} \le m\ (2n_m)^{\alpha/a}, \tag{5.2}$$

в то время как $\sqrt{n} \ge \sqrt{n_m}$. Поскольку $\frac{\alpha}{a} < \frac{1}{2}$, отсюда следует

$$\frac{\left| \sum_{j=1}^{m-1} Z_{n_j} \right|}{\sqrt{n}} \le m\ 2^{\alpha/a}\ n_m^{\alpha/a - 1/2}\ \to\ 0 \qquad (m \to \infty). \tag{5.3}$$

Теперь ЦПТ следует из представления (5.1).

2. *Отсутствие ЦПТПН.* Обозначим

$$Q_n := \frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \delta_{\zeta_k}$$

эмпирические меры, ассоциированные с последовательностью величин $\{\zeta_k\}$. Выберем $\beta \in (1, 2\alpha)$. Мы покажем, что для каждого $R > 0$ почти наверное выполнено

$$\limsup_{n\ \to\ \infty}\ Q_n \{x : |x| \ge R\} \ge \frac{\beta - 1}{\beta},$$

т.е. семейство мер $\{Q_n\}$ не является плотным, и уж тем более не имеет предела. Полагая $R = R_m/2$, где $R_m := n_m^{\alpha - \beta/2} \to \infty$, мы будем следить только за последовательностью индексов $n_m^* := [n_m^{\beta}] > n_m$ и покажем, что

$$\limsup_{m\to\infty} Q_{n_m^*}\{x : |x| \ge R_m/2\} \ge \frac{\beta-1}{\beta}. \tag{5.4}$$

Идея рассуждения – показать как редкие, но большие скачки Z_j инициируют долгие блуждания процесса частных сумм вдали от нуля. Они являются настолько долгими даже в логарифмической шкале времени, что препятствуют выполнению ЦПТПН.

Рассмотрим независимые события $\Omega_m^{(1)} = \{\omega : Z_{n_m} \ne 0\}$. Пусть

$$\Omega_\infty^{(1)} = \limsup_{m\to\infty} \Omega_m^{(1)}.$$

Так как $\mathbf{P}\{\Omega_m^{(1)}\} = \frac{1}{m}$, то по лемме Бореля–Кантелли $\mathbf{P}\{\Omega_\infty^{(1)}\} = 1$. Нам также потребуются некоторые события, связанные с законом повторного логарифма для гауссовских величин, а именно, $\Omega_m^{(2)} = \{\omega : \forall n \ge n_m\ |\zeta_n^Y| \le 2\sqrt{\ln_2 n}\}$. О них известно, что

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{P}\{\Omega_m^{(2)}\} \to 1.$$

Зафиксируем целое m и $n \in [n_m, n_m^*]$. В силу представления (5.1),

$$|\zeta_n| \ge \frac{|Z_{n_m}|}{\sqrt{n}} - |\zeta_n^Y| - \frac{\left|\sum_{j=1}^{m-1} Z_{n_j}\right|}{\sqrt{n}}. \tag{5.5}$$

Если $\omega \in \Omega_m^{(1)}$, то для первого слагаемого имеем

$$\frac{|Z_{n_m}|}{\sqrt{n}} = \frac{U_m}{\sqrt{n}} \ge \frac{U_m}{\sqrt{n_m^*}} \ge n_m^{\alpha-\beta/2} = R_m.$$

Если $\omega \in \Omega_m^{(2)}$ и m достаточно велико, для второго слагаемого в (5.5) имеем следующую оценку:

$$|\zeta_n^Y| \le 2\sqrt{\ln_2 n_m^*} \le 2\sqrt{\ln_2 n_m + \ln\beta} < R_m/4.$$

Наконец, неравенство (5.2) обеспечивает оценку третьего слагаемого в (5.5):

$$\frac{\left|\sum_{j=1}^{m-1} Z_{n_j}\right|}{\sqrt{n}} \le \frac{m\ (2n_m)^{\alpha/a}}{\sqrt{n}} = m\ 2^{\alpha/a}\ n_m^{\alpha/a-\alpha}\ \frac{U_m}{\sqrt{n}} = o(1)\ \frac{U_m}{\sqrt{n}}$$

при $m \to \infty$. Заметим, что для $\omega \in \Omega_m^{(1)}$ третье слагаемое мало в сравнении с первым.

Комбинируя все эти неравенства, видим, что для достаточно больших m, всех $\omega \in \Omega_m^{(1)} \cap \Omega_m^{(2)}$, и всех $n \in [n_m, n_m^*]$ верно $|\zeta_n| \ge$

$R_m/2$. Соответствующая масса эмпирической меры $Q_{n_m^*}$ будет не меньше, чем

$$\frac{1}{\ln(n_m^*)}\sum_{k=n_m}^{n_m^*}\frac{1}{k}\sim\frac{\ln(n_m^*)-\ln(n_m)}{\ln(n_m^*)}\ \to\ \frac{\beta-1}{\beta}.$$

Мы, таким образом, доказали справедливость (5.4) для

$$\omega\in\bigcap_M\bigcup_{m=M}^{\infty}\left(\Omega_m^{(1)}\cap\Omega_m^{(2)}\right).$$

С другой стороны, для каждого натурального M верно

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left\{\bigcup_{m=M}^{\infty}\left(\Omega_m^{(1)}\cap\Omega_m^{(2)}\right)\right\} &\geq \mathbf{P}\left\{\Omega_\infty^{(1)}\cap\Omega_M^{(2)}\right\}\\ &= \mathbf{P}\left\{\Omega_\infty^{(1)}\right\}\mathbf{P}\left\{\Omega_M^{(2)}\right\}=\mathbf{P}\left\{\Omega_M^{(2)}\right\}.\end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left\{\bigcup_{m=M}^{\infty}\left(\Omega_m^{(1)}\cap\Omega_m^{(2)}\right)\right\} &\geq \lim_{M_1\,\to\,\infty}\mathbf{P}\left\{\bigcup_{m=M_1}^{\infty}\left(\Omega_m^{(1)}\cap\Omega_m^{(2)}\right)\right\}\\ &\geq \lim_{M_1\,\to\,\infty}\mathbf{P}\left\{\Omega_{M_1}^{(2)}\right\}=1.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}\left\{\bigcap_M\bigcup_{m=M}^{\infty}\left(\Omega_m^{(1)}\cap\Omega_m^{(2)}\right)\right\}=1.$$

Таким образом, соотношение (5.4) доказано с вероятностью 1, и возможность выполнения ЦПТПН исключена.

3. *Равномерная оценка логарифмических моментов.* По определению Z_j и в силу оценки (5.2), для каждого m и всех $n\in[n_m,n_{m+1})$

$$|\zeta_n^Z|\leq\frac{|\sum_{j=1}^{m-1}Z_{n_j}|}{\sqrt{n}}+\frac{|Z_{n_m}|}{\sqrt{n}}\leq\frac{m\ (2n_m)^{\alpha/a}}{\sqrt{n_m}}+n_m^\alpha\mathbf{1}_{\{Z_{n_m}\neq0\}}.$$

Поскольку $\frac{\alpha}{a}<\frac{1}{2}$, первое слагаемое этой оценки, которое не является случайным, стремится к нулю. Для второго слагаемого имеем

$$\mathbf{E}\ln_+\ln_+\left(n_m^\alpha \mathbf{1}_{\{Z_{n_m}\neq 0\}}\right) = \frac{\ln\ln(n_m^\alpha)}{m} \le \frac{\ln\alpha + m\ \ln a}{m} \le \ln(\alpha a).$$

Получается

$$\sup_n \mathbf{E}\ln_+\ln_+|\zeta_n^Z| < \infty.$$

Поскольку значение $\mathbf{E}\ln_+\ln_+|\zeta_n^Y|$ не зависит от n, то и для суммы $\zeta_n = \zeta_n^Z + \zeta_n^Y$ имеем

$$\sup_n \mathbf{E}\ln_+\ln_+|\zeta_n| < \infty.$$

Теорема доказана.

6. Сходимость на неограниченных функциях

Если h непрерывная, но не ограниченная функция, то из соотношения $\zeta_n \xrightarrow{b} G$, т.е. слабой сходимости эмпирических мер $Q_n \Rightarrow G$, вообще говоря, уже не следует сходимость обобщенных моментов

$$\int h\ dQ_n = \frac{1}{\gamma(n)}\sum_{k=1}^n b_k h(\zeta_k) \ \rightarrow \ \int h\ dG. \qquad (6.1)$$

В этом направлении можно получить следующий результат из [17], расширяющий теорему Лейси–Филипа. Мы приводим его как хорошую иллюстрацию применения метода эргодической аппроксимации.

Теорема 6.1. *Пусть $\{X_j\}$ независимые одинаково распределенные величины, $\mathbf{E}X_j = 0, \mathbf{E}X_j^2 = 1$. Пусть Q_n – эмпирические меры из (1.1) с логарифмическими весами $b_k = k^{-1}$, а G – стандартное нормальное распределение. Тогда для любой непрерывной функции h, удовлетворяющей условию*

$$|h(x)| \le C\exp\left\{\frac{x^2}{2} - c|x|\right\}, \qquad (6.1)$$

верно

$$\mathbf{P}\left\{\lim_{n\,\to\,\infty}\int h\ dQ_n = \int h\ dG\right\} = 1. \qquad (6.2)$$

Доказательство. Воспользуемся сильным принципом инвариантности Майора [21]. Он гарантирует существование таких чисел $\sigma_j^2 \to 1, B_k^2 = \sum_{j=1}^k \sigma_j^2$, что можно построить на одном вероятностном пространстве последовательность $\{X_j\}$ и винеровский процесс W, удовлетворяющие соотношению

$$\Delta_k = k^{-1/2}\left(\sum_{j=1}^{k} X_j - W(B_k^2)\right) \ \to\ 0 \text{ почти наверное при } k \to \infty.$$

Запишем интересующие нас нормированные суммы в виде

$$\zeta_k = k^{-1/2}\sum_{j=1}^{k} X_j = \Delta_k + k^{-1/2}W(B_k^2) = \Delta_k + B_k k^{-1/2} U(\tau_k),$$

где $U(\tau) = e^{-\tau/2}W(e^\tau)$ – процесс Орнштейна–Уленбека, и $\tau_k = \ln B_k^2 \sim \ln k \sim \gamma(k)$. Изучим предельное поведение величины

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{\gamma(n)}{\tau_n}\int h dQ_n \\ &= \frac{1}{\tau_n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\, h\left(\Delta_k + B_k k^{-1/2}U(\tau_k)\right) \\ &= \frac{1}{\tau_n}\sum_{k=1}^{n}\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} e_k h\left(\Delta_k + \ell_k U(\tau_k)\right) d\tau, \end{aligned}$$

где

$$e_k = \frac{1}{k(\tau_k - \tau_{k-1})} = \frac{1}{k\ln\left(1 + \frac{\sigma_k^2}{B_{k-1}^2}\right)} \ \to\ 1, \qquad \ell_k = B_k k^{-1/2} \ \to\ 1.$$

Для каждого $\varepsilon > 0$ определим стационарный процесс

$$H_\varepsilon(\tau) = \sup_{0 \le |\theta_0|,|\theta_1|,\theta_2,\theta_3 \le \varepsilon} (1+\theta_0)\, h(\theta_1 + (1-\theta_2)U(\tau+\theta_3)).$$

Для достаточно больших k и всех $\tau \in [\tau_{k-1}, \tau_k]$ имеем

$$e_k h\left(\Delta_k + \ell_k U(\tau_k)\right) \le H_\varepsilon(\tau).$$

Поэтому

$$\limsup_{n\to\infty} I_n \le \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\tau_n}\int_0^{\tau_n} H_\varepsilon(\tau)d\tau. \tag{6.3}$$

Если

$$\mathbf{E}|H_\varepsilon(0)| \le \mathbf{E} \sup_{0\le v\le\varepsilon} |H_v(0)| < \infty, \tag{6.4}$$

то правая часть (6.3) в силу эргодической теоремы Биркгофа равна $\mathbf{E}H_\varepsilon(0)$. Учитывая, что в силу непрерывности функции h и процесса U верно $\lim_{\varepsilon\,\to\,0} H_\varepsilon(0) = h(U(0))$, находим

$$\limsup_{n\,\to\,\infty} I_n \le \inf_\varepsilon \mathbf{E}H_\varepsilon(0) \le \lim_{\varepsilon\,\to\,0} \mathbf{E}H_\varepsilon(0) = \mathbf{E}h(U(0)) = \int hdG.$$

Аналогично получаем

$$\liminf_{n\,\to\,\infty}\ I_n \ge \int hdG.$$

Осталось показать, что из (4.3) следует (4.6). Выберем число A настолько большим, что при $A' = (1-\varepsilon)A - \varepsilon$ функция $\beta(x) = \frac{x^2}{2} - c|x|$ монотонна на лучах $(-\infty, -A']$ и $[A', \infty)$. Пусть $0 \le |\theta_1|, \theta_2, \theta_3 \le \varepsilon$. Если $|U(\theta_3)| \le A$, то

$$|h(\theta_1 + (1-\theta_2)U(\theta_3))| \le \sup\{|h(x)|,\ |x| \le A + \varepsilon\} < \infty.$$

Если $|U(\theta_3)| \ge A$, то в силу (4.3)

$$|h(\theta_1 + (1-\theta_2)U(\theta_3))| \le C\exp\{\beta(|U(\theta_3)| + \varepsilon)\} \le C\exp\{\beta(S_\varepsilon + \varepsilon)\},$$

где $S_\varepsilon = \sup_{0\le\theta\le\varepsilon} |U(\theta)|$. Остается проверить, что конечна величина

$$\mathbf{E}\exp\{\beta(S_\varepsilon+\varepsilon)\} = \int_0^\infty \beta'(x)\exp\{\beta(x)\}\mathbf{P}\{S_\varepsilon \ge x - \varepsilon\}dx. \tag{6.5}$$

Очевидно

$$\beta'(x)\exp\{\beta(x)\} \sim x\exp\left\{\frac{x^2}{2} - cx\right\}.$$

Как хорошо известно из теории гауссовских процессов [3, §14, пример 2],

$$\mathbf{P}\{S_\varepsilon \ge u\} \le C_\varepsilon u^2 \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\}.$$

Поэтому при $\varepsilon < c$ интеграл (6.5) сходится и теорема 6.1 доказана.

Замечание 6.2. Доказанную теорему можно сопоставить с таким результатом С.Н. Бернштейна: если величины X_j независимы, $\mathbf{E}X_j^\alpha < \infty, \alpha > 2$, и дробь Ляпунова порядка α стремится к нулю, то моменты нормированных сумм всех порядков, не превосходящих α, сходятся к моментам нормального закона.

Замечание 6.3. Можно ставить задачу отыскания минимальных условий, при которых верно утверждение теоремы 6.1. Минимальным условием, при котором наше утверждение еще имеет смысл, будет

$$\int h\ dG < \infty.$$

Само по себе такое условие еще недостаточно (нужна еще определенная регулярность функции h), но верен весьма близкий результат, который представляется оптимальным [2].

Теорема 6.2. *Пусть* $\{X_j\}$ *– независимые одинаково распределенные случайные величины с* $\mathbf{E}X_j = 0, \mathbf{E}X_j^2 = 1$. *Пусть* $A, H_0 > 0$ *и* $f : [A, \infty) \to \mathbf{R}_+$ *такая неубывающая функция, что функция* $f(x)\exp\{-H_0 x^2\}$ *не возрастает и верно*

$$\int_A^\infty f\ dG < \infty. \tag{6.6}$$

Тогда для любой непрерывной функции h*, удовлетворяющей*

$$|h(x)| \le f(|x|), \qquad |x| \ge A, \tag{6.7}$$

справедливо (6.2).

К сожалению, доказательство этой более тонкой теоремы заметно сложнее изложенного здесь.

7. ПТПН для мартингалов

В этом разделе в качестве ζ_k рассматривается нормированный мартингал с дискретным временем. В отличие от случая сумм независимых величин, здесь классическая предельная теорема не обязательно влечет ПТПН даже при сильных моментных предположениях. Все же удается получить ПТПН при условиях, достаточно близких к тем, при которых обычно доказываются классические предельные теоремы. Интересная особенность мартингальной ситуации – довольно естественное появление *случайной* предельной меры.

Сначала введем основные обозначения и напомним типичную формулировку теоремы о слабой сходимости распределений мартингалов, которую мы примем за образец. Это – приспособленная к нашим целям версия теорем 3.2 и 3.3 из книги [15], в которой можно найти дальнейшие ссылки.

Пусть $\{X_j\}$ – квадратично-интегрируемая мартингал-разность относительно фильтрации $\{\mathcal{F}_j\}$, $B_k \nearrow \infty$ – числовая последовательность, η – неотрицательная случайная величина. Пусть

$$\zeta_k = \frac{1}{B_k} \sum_{j \le k} X_j, \quad U_k^2 = \sum_{j \le k} X_j^2.$$

Теорема 7.1. *Предположим, что*

$$\max_{j \le k} X_j / B_k \xrightarrow{p} 0, \tag{7.1}$$

$$U_k^2 / B_k^2 \xrightarrow{p} \eta, \tag{7.2}$$

и что

$$c_{\max} = \sup_k \mathbf{E} \max_{j \le k} |X_j|^2 / B_k^2 < \infty. \tag{7.3}$$

Тогда распределения величин ζ_k слабо сходятся к η-смеси нормальных законов, т.е. к распределению с характеристической функцией

$$\phi(t) = \mathbf{E} \exp\{-\eta t^2/2\}.$$

Если $\eta > 0$ почти наверное, то

$$\frac{1}{U_k} \sum_{j \le k} X_j \Rightarrow \mathcal{N}(0,1).$$

Теперь сформулируем ЦПТПН. Следующая теорема, построенная по образцу предыдущей, интересна еще и тем, что в качестве предельного распределения выступает *случайный* нормальный закон. Пусть b_k – последовательность весов (см. раздел 1).

Теорема 7.2. *Пусть $X_j, B_k, \zeta_k, U_k, b_k$ – определенные выше последовательности. Предположим, что выполнено* (7.3), *что почти наверное имеется сходимость*

$$X_j / B_j \to 0 \tag{7.4}$$

и что

$$U_k^2 / B_k^2 \xrightarrow{b} \delta_\eta. \tag{7.5}$$

Пусть веса $\{b_k\}$ подчиняются оценке

$$b_k \le \frac{B_k - B_{k-1}}{B_k}.$$

Тогда

$$\zeta_k \xrightarrow{b} \mathcal{N}(0,\eta) \tag{7.6}$$

и

$$\frac{1}{U_k} \sum_{j \le k} X_j \xrightarrow{b} \mathcal{N}(0,1). \tag{7.7}$$

Интересно сравнить предположения двух последних теорем. Условие (7.3) одно и то же в обоих случаях. Условие (7.4) сильнее, чем (7.1). Это цена, которую мы вынуждены платить за получение ПТПН. Как мы увидим ниже, без такого условия слагаемые X_j, превышающие по порядку нормировки B_j, могут полностью дестабилизировать предельное поведение эмпирических мер. Интересно было бы найти более слабое достаточное для ПТПН условие, чем (7.4). Отметим, однако, что альтернативный подход из работы [14] также, хотя и неявно, содержит гипотезу (7.4). Наконец, условия (7.2) и (7.5) имеют один и тот же смысл, хотя формально они не сравнимы. Оба они слабее, чем простое условие

$$U_k^2/B_k^2 \to \eta \qquad \text{почти наверное.}$$

Интересно также понять, почему мартингалы ведут себя в отношении ПТПН не совсем так, как суммы независимых величин, а именно почему моментные предположения не позволяют превращать обычную предельную теорему в ПТПН.

В качестве первого шага в этом направлении мы построим систему событий, чьи свойства представляют определенный интерес сами по себе (а также в связи с невозможностью определенных обобщений леммы Бореля–Кантелли).

Лемма 7.3. *На любом неатомическом вероятностном пространстве* $(\Omega, \mathbf{P})$ *найдется последовательность событий* A_m*, для которой верно*

$$\mathbf{P}\{A_m\} \searrow 0, \qquad (m \to \infty) \tag{7.8}$$

но почти наверное

$$\limsup_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{m \le N} \mathbf{1}_{A_m} = 1. \tag{7.9}$$

Доказательство. Рассмотрим такой треугольный массив событий $B_{i,j}, 1 \le j \le i < \infty$, что

$$\mathbf{P}\{B_{i,j}\} = \frac{1}{i}, \quad B_{i,j_1} \cap B_{i,j_2} = \emptyset, \text{ если } j_1 \ne j_2.$$

Пусть $r = r(i,j) = i(i-1)/2 + j$ естественная нумерация пар (i,j), $r = 1, 2, ...$ Организуем повторения, полагая для каждой пары (i,j),

$$A_m = B_{i,j}, \qquad m \in [r^r, (r+1)^{r+1}), \qquad r = r(i,j).$$

Для почти всех $\omega \in \Omega$ и каждого i найдется такое j, что $\omega \in B_{i,j}$. Полагая $r = r(i,j)$, $N = N(i,\omega) = (r+1)^{r+1}$, получаем

$$\frac{1}{N} \sum_{m \le N} \mathbf{1}_{A_m}(\omega) \ge \frac{1}{N} \sum_{r^r \le m < N} 1 = \frac{(r+1)^{r+1} - r^r}{(r+1)^{r+1}} \ge 1 - \frac{1}{r+1} \to 1$$

при $i \to \infty$. Лемма доказана.

Замечание 7.4. По закону больших чисел Колмогорова свойства (7.8) и (7.9) несовместны для *независимых* событий.

Теорема 7.4. *Существует класс квадратично интегрируемых мартингал-разностей, удовлетворяющих условию Линдеберга и центральной предельной теореме, но для которых не выполняется ЦПТПН.*

Доказательство. Пусть $\{Y_j, \mathcal{F}_j\}$ – произвольная эргодическая квадратично-интегрируемая мартингал-разность и пусть $\{A_m\}$ – последовательность событий, удовлетворяющих условиям (7.8) и (7.9). Предположим также, что $A_m \in \mathcal{F}_0$ для всех m. Зафиксируем целое $b \ge 5$ и положим

$$q_m = \min\left\{\mathbf{P}\{A_m\}^{-1/3};\ b^{m/3}\right\}.$$

Очевидно, $q_m \nearrow \infty$. Пусть $\{X_m\}$ – это $\mathcal{F}_{b^m}$-измеримые величины с распределением Бернулли, удовлетворяющие условиям

$$\mathbf{E}(X_m|\mathcal{F}_{b^m-1}) = 0.$$

Положим

$$Z_j = Y_j + \sum_m q_m b^{m/2} X_m \mathbf{1}_{A_m} \mathbf{1}_{j=b^m}.$$

Очевидно для каждого j все слагаемые нулевые, кроме, быть может, одного. Последовательность $\{Z_j, \mathcal{F}_j\}$ в данном случае будет мартингал-разностью. Нетрудно проверить, что условие Линдеберга выполнено и центральная предельная теорема верна. Покажем, однако, что ЦПТПН не выполняется. Пусть $\zeta_k = \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{j\le k} Z_j$ и проверим, что ассоциированные эмпирические меры

$$Q_n = \frac{1}{\log n} \sum_{k\le n} \frac{1}{k} \delta_{\zeta_k}$$

не сходятся. Мы покажем, что для любого $M > 0$

$$\limsup_{n\,\to\,\infty} Q_n\{x : |x| > M\} = 1 \qquad \text{почти наверное.} \tag{7.10}$$

Рассмотрим события $B_k^M = \{|\sum_{j\le k} Y_j| > M\sqrt{k}\}$. В силу ЦПТПН для $\{Y_j\}$ имеем

$$\lim_{n\,\to\,\infty} \frac{1}{\log n} \sum_{k\le n} \frac{1}{k} \mathbf{1}_{B_k^M} = \mathcal{N}\{x : |x| > M\}, \text{ где } \mathcal{N} = \mathcal{N}(0, \mathbf{E}Y_1^2).$$

В частности, для любой фиксированной последовательности M_k, такой, что $M_k \to \infty$, было бы почти наверное для $B_k = B_k^{M_k}$

$$\lim_{n\,\to\,\infty} \frac{1}{\log n} \sum_{k\le n} \frac{1}{k} \mathbf{1}_{B_k} = 0. \tag{7.11}$$

В дальнейшем мы полагаем $M_k = hq_m$ для малого $h = h(b)$ и всех $k \in [b^m, b^{m+1})$. Рассмотрим такое целое m, что случайное событие A_m произошло. Тогда для всех $k \in [b^m, b^{m+1})$ имеем

$$|\zeta_k| = \left|\frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{j\le k} Z_j\right| \ge \frac{b^{m/2} q_m}{\sqrt{k}} - \sum_{\mu<m} b^{\mu/2} \frac{q_\mu}{\sqrt{k}} - \frac{|\sum_{j\le k} Y_j|}{\sqrt{k}}$$

$$\ge \frac{(b^{m/2} - \sum_{\mu<m} b^{\mu/2}) q_m}{\sqrt{b^{m+1}}} - \frac{|\sum_{j\le k} Y_j|}{\sqrt{k}} \ge c(b) q_m - \frac{|\sum_{j\le k} Y_j|}{\sqrt{k}}.$$

В последнем выражении $c(b) > 0$, т.к. $b \ge 5$. Положим теперь $h = c(b)/2$ и предположим, что для некоторого k случайное событие B_k

не происходит. Тогда получится оценка hq_m для последнего члена и мы имеем

$$|\zeta_k| \geq hq_m = M_k. \tag{7.12}$$

Определим теперь события D_k, ассоциированные с (7.12). Согласно предыдущим вычислениям, для всех целых N

$$\frac{1}{\log b^N} \sum_{k \leq b^N} \frac{1}{k}\ \mathbf{1}_{D_k} \geq$$

$$\frac{1}{N \log b} \sum_{m<N} \mathbf{1}_{A_m} \left(\sum_{b^m \leq k < b^{m+1}} \frac{1}{k} \right) - \frac{1}{N \log b} \sum_{k \leq b^N} \frac{1}{k} \mathbf{1}_{B_k}. \tag{7.13}$$

Напомним, что

$$\lim_{m \to \infty} \sum_{b^m \leq k < b^{m+1}} \frac{1}{k} = \log b.$$

Отсюда и из свойства (7.9) следует, что верхний предел первого выражения в (7.12) равен единице, а второе выражение стремится к нулю в силу (7.11). Таким образом, мы доказали, что

$$\limsup_{N \to \infty} \frac{1}{\log b^N} \sum_{k \leq b^N} \frac{1}{k}\ \mathbf{1}_{D_k} \geq 1 \qquad \text{почти наверное.}$$

Это даже сильнее заявленного утверждения (7.10), несовместимого с ЦПТПН. Теорема доказана.

Замечание 7.6. Часто в теории слабой сходимости мартингалов квадратичную вариацию U_k^2 заменяют на

$$\mathcal{V}_k^2 = \sum_{j \leq k} \mathbf{E}\{X_j^2 | \mathcal{F}_{j-1}\}$$

и рассматривают величины

$$\zeta'_k = \frac{1}{\mathcal{V}_k} \sum_{j \leq k} Z_j.$$

Нетрудно убедиться, что ЦПТПН неверна и для этой последовательности.

8. Большие уклонения в ЦПТПН

Сначала сформулируем общий принцип больших уклонений. Пусть $\{Y_n\}$ – семейство случайных элементов некоторого топологического пространства M. Пусть $I : M \to [0, \infty]$ – полунепрерывная снизу функция, т.е. множества $\{x \in M : I(x) \le z\}$ замкнуты (часто даже предполагают, что они компактны). Наконец, пусть задана неотрицательная последовательность ψ_n, монотонно стремящаяся к бесконечности. Говорят, что последовательность $\{Y_n\}$ удовлетворяет принципу больших уклонений с функцией уклонений I и скоростью ψ_n, если для любого замкнутого множества $F \subset M$ и любого открытого множества $G \subset M$ верно

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\psi_n} \log \mathbf{P}\{Y_n \in F\} \le -\inf_{x\in F} I(x)$$

и

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{\psi_n} \log \mathbf{P}\{Y_n \in G\} \ge -\inf_{x\in G} I(x).$$

Как правило, рассматриваются ситуации, когда распределения величин Y_n слабо сходятся к δ-мере, сосредоточенной в некоторой точке $a \in M$, а $I(x)$ определяет степень «удаленности» x от a. Типичный пример: Y_n есть нормированная сумма независимых одинаково распределенных случайных величин $X_1 \dots X_n$, имеющих конечные экспоненциальные моменты. Тогда $a = \mathbf{E}X_1$, $\psi_n = n$ и

$$I(r) = \sup_\gamma (r\gamma - \log \mathbf{E} \exp\{\gamma X_1\}).$$

Другой пример, который нам в данный момент более интересен, касается ситуации в пространстве мер. Пусть $\mathcal{M}(\mathbf{R})$ – пространство конечных неотрицательных борелевских мер на $\mathbf{R}$ (с топологией слабой сходимости, т.е. в качестве полунорм, порождающих топологию, используются интегралы непрерывных ограниченных функций). Рассмотрим процесс Орнштейна–Уленбека U_t и его эмпирическую меру

$$\mu_T = \frac{1}{T} \int_0^T \delta_{U_t} dt.$$

Согласно эргодической теореме Биркгофа, для каждой ограниченной функции f почти наверное справедливо

$$\int f d\mu_T = \frac{1}{T}\int_0^T f(U_t)dt \to \mathbf{E}f(U_0) = \int f d\mathcal{N}(0,1).$$

Лемма 2.1 гарантирует, что $\mu_T \Rightarrow \mathcal{N}(0,1)$. Согласно общей теории Донскера и Варадана, для больших уклонений эмпирических мер марковских процессов, меры μ_T подчиняются принципу больших уклонений в пространстве $\mathcal{M}(\mathbf{R})$ с некоторой функцией уклонений I_U и скоростью T.

Теперь мы можем сформулировать принцип больших уклонений в схеме ЦПТПН, соответствующей условиям Лейси–Филипа. Пусть X_j – последовательность независимых одинаково распределенных величин с нулевым средним и единичной дисперсией. Положим $\zeta_k = k^{-1/2}\sum_{j\le k} X_j$. Рассмотрим стандартные логарифмические веса, т.е. $b_k = \frac{1}{k}, \gamma_n \sim \log n$, и соответствующие эмпирические меры Q_n из (1.1). Согласно замечанию 3.3, они сходятся почти наверное к стандартному нормальному закону.

Теорема 8.1. *(Марч и Сеппелайнен* [22]*; Хек* [16]*.) Предположим, что* $E|X_1|^m < \infty$ *для всех* $m > 0$. *Тогда случайные меры* Q_n *в пространстве* $\mathcal{M}(\mathbf{R})$ *удовлетворяют принципу больших уклонений со скоростью* $\psi_n = \log n$ *и функцией уклонений Орнштейна–Уленбека* $I_U : \mathcal{M}(\mathbf{R}) \to [0,\infty]$.

Литература

1. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. М., 1977.

2. *Ибрагимов И.А., Лифшиц М.А.* О предельных теоремах типа «почти наверное»// Теория вероятностей и ее применения. 1999. Т. 44. С. 328–350.

3. *Лифшиц М.А.* Гауссовские случайные функции. Киев, 1995.

4. *Лифшиц М.А.* Предельная теорема типа «почти наверное» для сумм случайных векторов // Зап. научн. семин. ПОМИ. 1999. Т. 260. С. 186–201.

5. *Прохоров Ю.В.* Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей // Теория вероятностей и ее применения. 1956. Т. 1. С. 177–237.

6. *Скороход А.В.* Случайные процессы с независимыми приращениями. М., 1986.

7. *Скороход А.В.* О предельном переходе от последовательности сумм независимых случайных величин к однородному случайному процессу с независимыми приращениями // Докл. АН СССР. 1955. Т. 104. С. 364–367.

8. *Atlagh M.* Théorème central limite presque sûr et la loi du logarithme itéré pour des sommes de variables aléatoires indépendantes // Comptes Rendus Acad. Sci. Paris. Ser. I. 1993. T. 316. P. 929–933.

9. *Berkes I.* Results and problems related to the pointwise central limit theorem // Asymptotic Methods in Probability and Statistics. 1988. P. 59–97.

10. *Berkes I., Csáki E.* A universal result in almost sure limit theory // Stoch. Proc. Appl. 2001. Vol. 94. P. 105–134.

11. *Berkes I., Dehling H.* Some limit theorems in log density // Ann. Probab. 1993. Vol. 21. P. 1640–1670.

12. *Berkes I., Dehling H.* On the almost sure central limit theorems for random variables with infinite variance // J. Theor. Probab. 1994. Vol. 7. P. 667–680.

13. *Brosamler G.A.* An almost everywhere central limit theorem // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 1988. Vol. 104. P. 561–574.

14. *Chaâbane F.* Version forte du théorème de la limite centrale pour les martingales // Comptes Rendus Acad. Sci. Paris. Ser. I. 1996. T. 323. P. 195–198.

15. *Hall P., Heyde C.C.* Martingale Limit Theory and its Application. London, 1980.

16. *Heck M.K.* The principle of large deviations for almost everywhere central limit theorem // Stoch. Proc. Appl. 1998. Vol. 76. P. 61–75.

17. *Ibragimov I.A., Lifshits M.A.* Convergence of generalized moments in almost sure limit theorems // Statist. Probab. Letters. 1998. Vol. 40. P. 343–351.

18. *Lacey M., Philipp W.* A note on the almost sure central limit theorem // Statist. Probab. Letters. 1990. Vol. 9. P. 201–205.

19. *Lévy P.* Théorie de l'addition des variables aléatoires. Paris, 1937.

20. *Lifshits M.A.* Almost sure limit theorem for martingales // Limit Theorems in Probability and Statistics. Vol. II. Budapest, 2002. P. 367–390.

21. *Major P.* An improvement of Strassen's invariance principle // Ann. Probab. 1979. Vol. 7. P. 55–61.

22. *March P., Seppäläinen T.* Large deviations from the almost everywhere central limit theorem // J. Theor. Probab. 1997. Vol. 10. P. 935–967.

23. *Mori T.F.* On the strong law of large numbers for logarithmically weighted sums // Ann. Univ. Sci. Budapest. 1993. Vol. 36. P. 35–46.

24. *Schatte P.* On strong versions of the almost sure central limit theorem // Math. Nachr. 1988. Vol. 137. P. 249–256.

Оглавление

Учебное издание

Михаил Анатольевич Лифшиц

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ
ТИПА «ПОЧТИ НАВЕРНОЕ»

Учебно-методическое пособие

Зав. редакцией Г.И. Чередниченко
Редактор Ф.С. Бастиан
Техн. редактор Л.Н. Иванова
Обложка А.В. Калининой
Компьютерная верстка автора

Подписано в печать с оригинала-макета 15.01.2007.
Ф-т 60x84/16. Усл. печ. л. 1,86. Уч.-изд. л. 1,6. Тираж 100 экз.
Заказ №
РОПИ С.-Петербургского государственного университета.
199034, С.-Петербург, Университетская наб., 7/9.

Отпечатано в отделе оперативной полиграфии НИИХ СПбГУ
с оригинала-макета заказчика.
198504, С.-Петербург, Старый Петергоф. Университетский пр., 26.
Предназначено для учебного процесса.