Материалы спецсеминара по теории вероятностей
матмех, IV курс, весна 2009

М.А. Лифшиц

Аннотация

Целью спецсеминара является изучение разнообразных предельных теорем теории вероятности на примере единой прикладной задачи - изучения процесса нагрузки на узел обслуживания за длительный интервал времени. В зависимости от моментных характеристик случайных величин, описывающих процессы обслуживания, могут возникать различные предельные режимы: винеровский процесс, дробное броуновское движение, устойчивый процесс с независимыми приращениями, а также некоторые специальные "телеком-процессы". За основу изложения взята статья Кая и Такку [1].

Содержательной части семинара предшествует вводная, где слушатели могут познакомиться с важными понятиями, по большей части не попадающими в программу читаемых на мат-мехе курсов, но без которых невозможно представить современную теорию случайных процессов. Сюда относятся случайные меры с независимыми значениями (пуассоновская, устойчивая и гауссовский белый шум) и интегралы по этим мерам. Также сообщаются необходимые сведения из теории устойчивых случайных величин и процессов с однородными независимыми приращениями, в том числе сложных пуассоновских и устойчивых.

Содержание

1 Подготовительные материалы **4**
1.1 Пуассоновские меры и интегралы 4
1.2 Случайные процессы и их сходимость 7
1.3 Гауссовские процессы: винеровский процесс и дробное броуновское движение 8
1.4 Сложные пуассоновские процессы 9
1.5 Устойчивые процессы и величины 11
1.6 Устойчивые случайные меры с независимыми значениями и интегралы по ним 15

2 Описание модели узла обслуживания **17**
2.1 Непрерывная модель 17
2.2 Дискретная модель 18

3 Моментные предположения о распределениях **19**
3.1 Основные гипотезы о времени и интенсивности обслуживания 19
3.2 Асимптотический анализ дисперсии 22
3.2.1 Слабая зависимость 22
3.2.2 Сильная зависимость 23

4 Центрированный и нормированный процесс нагрузки **24**

5 Предельные теоремы с конечной дисперсией **25**
5.1 Слабая зависимость в непрерывной модели 25
5.2 Слабая зависимость в дискретной модели 27
5.3 Сильная зависимость 28

6 Предельные теоремы о сходимости к устойчивому процессу **30**
6.1 Случай с доминирующей интенсивностью обслуживания 30
6.2 Случай с доминирующей длительностью обслуживания 32

7 Предельные теоремы о сходимости к телеком-процессам **35**
7.1 Сходимость к устойчивому телеком-процессу 35
7.2 Сходимость к пуассоновскому телеком-процессу 37

8 Многомерное обобщение **39**
8.1 Определение многомерной модели 39
8.2 Связь с одномерной моделью 41
8.3 Связь многомерных результатов с результатами одномерной модели 41
8.4 Многомерные обобщения понятий винеровского процесса и дробного броуновского движения 42
8.4.1 Многомерный аналог винеровского процесса 42
8.4.2 Многомерный аналог дробного броуновского движения 43

1 Подготовительные материалы

1.1 Пуассоновские меры и интегралы

Пусть $(\mathcal{R}, \mu)$ – измеримое пространство с мерой. Обозначим $\mathcal{A} = \{A \subset \mathcal{R}, \mu(A) < \infty\}$. Семейство случайных величин $\{N(A), A \in \mathcal{A}\}$ называется случайной мерой Пуассона[1] или пуассоновской случайной мерой, если выполнено следующее:

- величина $N(A)$ имеет распределение Пуассона $\mathcal{P}(\mu(A))$;
- независимость: если $A_1, \cdots, A_m$ не пересекаются, то случайные величины $N(A_1), \ldots, N(A_m)$ независимы.
- аддитивность: если $A_1, \cdots, A_m$ не пересекаются, то

$$N\left(\cup_1^m A_j\right) = \sum_1^m N(A_j) \qquad \text{почти наверное.}$$

При этом мера μ называется мерой интенсивности[2] для N.

Пуассоновскую случайную меру можно также понимать как случайное локально конечное подмножество $\mathcal{R}$, состоящее из точек (x_j). Иными словами $N(A) = \#\{j : x_j \in A\}$. Здесь и далее $\#V$ означает количество элементов в множествеV.

Семейство величин $\{\tilde{N}(A) = N(A) - \mu(A), A \in \mathcal{A}\}$ называется центрированной случайной мерой Пуассона.

Нам потребуются интегралы от функций $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ по мерам N и $\tilde{N}$. Для ступенчатых функций $f = \sum_j c_j \mathbf{1}_{A_j}$ интегралы определяются естественным образом:

$$\int_{\mathcal{R}} f dN = \sum_j c_j N(A_j), \qquad \int_{\mathcal{R}} f d\tilde{N} = \sum_j c_j \tilde{N}(A_j).$$

При этом легко проверяется, что

$$\mathbb{E} \int_{\mathcal{R}} f dN = \int_{\mathcal{R}} f d\mu, \qquad \mathbb{D} \int_{\mathcal{R}} f dN = \int_{\mathcal{R}} |f|^2 d\mu \tag{1}$$ ed

[1]Poisson point measure.

[2]Intensity measure.

и

$$\mathbb{E}\int_{\mathcal{R}} f d\tilde{N} = 0, \qquad \mathbb{D}\int_{\mathcal{R}} f d\tilde{N} = \int_{\mathcal{R}} |f|^2 d\mu. \qquad (2) \quad \boxed{\texttt{ted}}$$

Приближая функции общего вида ступенчатыми, можно определить интегралы и для них. Свойства (1) и (2) будут по-прежнему верны. Построенные интегралы будут аддитивны, т.е.

$$\int_{\mathcal{R}} (f+g) dN = \int_{\mathcal{R}} f dN + \int_{\mathcal{R}} g dN, \qquad \int_{\mathcal{R}} (cf) dN = c\int_{\mathcal{R}} f dN,$$

и аналогично для $\tilde{N}$.

Зная формулы для дисперсий, из линейности и соотношения

$$\frac{|f|^2 + |g|^2 - |f-g|^2}{2} = fg$$

выводим формулу для ковариаций:

$$cov\left(\int_{\mathcal{R}} f dN, \int_{\mathcal{R}} g dN\right) = cov\left(\int_{\mathcal{R}} f d\tilde{N}, \int_{\mathcal{R}} g d\tilde{N}\right) = \int_{\mathcal{R}} fg d\mu. \qquad (3) \quad \boxed{\texttt{cov}}$$

Сходимость пуассоновских интегралов к нормальному закону

Здесь нашей целью будет установить, при каких условиях последовательность величин $\int_{\mathcal{R}} f_n d\tilde{N}$ сходится к стандартному нормальному закону. Начнем с характеристических функций. Если N – пуассоновская случайная величина с параметром μ, то

$$\mathbb{E}\exp(itN) = \exp(\mu(e^{it} - 1)).$$

Следовательно, для любой ступенчатой функции $f = \sum_j c_j \mathbf{1}_{A_j}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\exp\left(it\int_{\mathcal{R}} f dN\right) &= \exp\left(\sum_j \mu(A_j)(e^{itc_j} - 1)\right) \\ &= \exp\left(\int_{\mathcal{R}} (e^{itf} - 1) d\mu\right) \qquad (4) \quad \boxed{\texttt{chfN}} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\exp\left(it\int_{\mathcal{R}} f d\tilde{N}\right) &= \mathbb{E}\exp\left(it\int_{\mathcal{R}} f dN\right)\exp(-it\mathbb{E}\int_{\mathcal{R}} f dN) \\
&= \exp\left(\int_{\mathcal{R}} (e^{itf}-1)d\mu\right)\exp\left(-it\int_{\mathcal{R}} f d\mu\right) \\
&= \exp\left(\int_{\mathcal{R}} (e^{itf}-1-itf)d\mu\right). \qquad (5)
\end{aligned}$$ chftN

Эти тождества легко распространяются на случай произвольных пуассоновских интегралов. Таким образом, на языке характеристических функций сходимость к нормальному закону будет иметь вид

$$\int_{\mathcal{R}} (e^{itf_n}-1-itf_n)d\mu \to -\frac{t^2}{2}, \qquad \forall t\in\mathbb{R}. \qquad (6)$$ toN

prop:ton **Предложение 1.1** *Предположим, что*

$$\mathbb{D}\int_{\mathcal{R}} f_n dN = \int_{\mathcal{R}} f_n^2 d\mu \to 1$$

и для любого $\varepsilon>0$ *верно*

$$\int_{|f_n|>\varepsilon} f_n^2 d\mu \to 0.$$

Тогда распределения величин $\int_{\mathcal{R}} f_n d\tilde{N}$ *сходятся к стандартному нормальному закону.*

Доказательство: Идея состоит в том, что при малых u верно $e^{iu}-1-iu \approx (iu)^2/2 = -u^2/2$. Более формально, если $|u|\le 1$, то

$$\left|e^{iu}-1-iu-\frac{i^2u^2}{2}\right| \le c|u|^3.$$

Если $|t|\varepsilon \le 1$, то

$$\begin{aligned}
&\int_{|f_n|\le\varepsilon} \left(e^{itf_n}-itf_n-1\right)d\mu \\
=\ &\int_{|f_n|\le\varepsilon} \left(e^{itf_n}-itf_n-1-\frac{i^2t^2f_n^2}{2}\right)d\mu - \int_{|f_n|\le\varepsilon} \frac{t^2f_n^2}{2}d\mu.
\end{aligned}$$

Первое слагаемое мало:

$$\begin{aligned}\int_{|f_n|\le\varepsilon}\left|e^{itf_n}-itf_n-1-\frac{i^2t^2f_n^2}{2}\right|d\mu &\le \int_{|f_n|\le\varepsilon}c|t|^3|f_n|^3d\mu\\ &\le c|t|^3\varepsilon\int_{\mathcal{R}}f_n^2d\mu\to c|t|^3\varepsilon.\end{aligned}$$

Второе слагаемое сходится:

$$\int_{|f_n|\le\varepsilon}\frac{t^2f_n^2}{2}d\mu\to\frac{t^2}{2}\int_{\mathcal{R}}f_n^2d\mu=\frac{t^2}{2}.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}\int_{|f_n|\ge\varepsilon}\left|e^{itf_n}-itf_n-1\right|d\mu &\le \int_{|f_n|\ge\varepsilon}(2+t|f_n|)\,d\mu\\ &\le \left(\frac{2}{\varepsilon^2}+\frac{t}{\varepsilon}\right)\int_{|f_n|\ge\varepsilon}|f_n|^2\,d\mu\to 0.\end{aligned}$$

Суммируя, а затем переходя к пределу по $\varepsilon\to 0$, легко приходим к (6). □

Заметим в заключение, что интеграл $\int_{\mathcal{R}}f dN$ корректно определен, если верно соотношение $\int_{\mathcal{R}}(|f|\wedge 1)d\mu<\infty$, а интеграл $\int_{\mathcal{R}}f d\tilde{N}$ – если $\int_{\mathcal{R}}(|f|^2\wedge |f|)d\mu<\infty$. Это можно понять, глядя на соответствующие характеристические функции (4) и (5).

1.2 Случайные процессы и их сходимость

Если T – некоторый интервал на вещественной оси, то семейство случайных величин $X(t), t\in T$, называется случайным процессом. Элементы T интерпретируются как моменты времени. Для любого набора $t_1,\dots,t_m$ случайный вектор $(X(t_1),\dots,X(t_m))$ принимает значения в $\mathbb{R}^m$ и имеет там распределение $\mathcal{P}_{t_1,\dots,t_m}(A)=\mathbb{P}((X(t_1),\dots,X(t_m))\in A), A\subset\mathbb{R}^m$. Все распределения $\mathcal{P}_{t_1,\dots,t_m}$ называются конечномерными распределениями процесса X. Они полностью определяют его свойства.

Говорят, что последовательность процессов X^n сходится к процессу X в смысле конечномерных распределений, если для любого $m\ge 1$, и любых $t_1,\dots,t_m$ имеет место слабая сходимость распределений $\mathcal{P}^{X^n}_{t_1,\dots,t_m}\Rightarrow\mathcal{P}^{X}_{t_1,\dots,t_m}$. Существуют и гораздо более интересные виды сходимости процессов (особенно слабая сходимость процессов, см. [3]).

1.3 Гауссовские процессы: винеровский процесс и дробное броуновское движение

Если все конечномерные распределения процесса X нормальные, то X называется гауссовским. Как известно, нормальное распределение в $\mathbb{R}^m$ полностью определяется своим математическим ожиданием и своей корреляционной матрицей. Поэтому гауссовский процесс полностью определен своим математическим ожиданием $\mathbb{E}X(t)$, $t \in T$ и своей корреляционной функцией $K(s,t) = cov(X(s), X(t))$, $s, t \in T$. Более подробно о гауссовских процессах рассказано в [6].

Нас будет в первую очередь интересовать один важнейший класс гауссовских процессов – дробные броуновские движения[3] (ДБД). Пусть $H \in (0,1]$ – параметр самоподобия (или параметр Херста[4]). Дробным броуновским движением с параметром H называется гауссовский процесс $B^H(t), t \in \mathbb{R}$, с нулевым средним и корреляционной функцией

$$K_H(s,t) = \frac{1}{2}\left(|s|^{2H} + |t|^{2H} - |s-t|^{2H}\right). \tag{7}$$ KH

Наиболее интересными частными случаями являются $H = 1/2$ и $H = 1$. При $H = 1/2$ получаем

$$K_H(s,t) = \begin{cases} \min(|s|,|t|), & \text{если } st \geq 0, \\ 0, & \text{если } st \leq 0. \end{cases}$$

Иными словами, на положительной и отрицательной полуосях расположены два независимых винеровских процесса.

При $H = 1$ получаем $K(s,t) = st$, откуда следует, что $\mathbb{D}(B^1(t) - tB^1(1)) = 0$, иными словами, $B^1(t) = tB^1(1)$ – вырожденный процесс со случайными линейными траекториями.

Говоря о семействе ДБД в целом, можно сказать, что при $H < 1/2$ приращения процесса отрицательно зависимы, при $H = 1/2$ они независимы и при $H > 1/2$ приращения положительно зависимы, причем степень зависимости возрастает с ростом и достигает максимума при $H = 1$, где коэффициент корреляции приращений доходит до 1. В дальнейшем у нас будут появляться только ДБД с параметром $H \geq 1/2$, так как по своей природе изучаемые процессы обладают свойством неотрицательной зависимости приращений.

Для всех значений H ДБД обладает двумя замечательными свойствами:

---

[3] Fractional Brownian motions.

[4] Hurst.

- Самоподобие. Для любого $c > 0$ процесс $Y(t) = B^H(ct)/c^H$ также является ДБД с тем же параметром (проверьте);

- Стационарность приращений. Для любого $t_0 \in \mathbb{R}$ случайный процесс $Y(t) = B^H(t_0 + t) - B^H(t_0)$ также является ДБД с тем же параметром.

Взятые вместе, гауссовость, стационарность приращений и самоподобие однозначно определяют класс дробных броуновских движений, что и объясняет его важность для предельных теорем.

В заключение заметим, что B^H характеризуется также более простыми формулами $EB^H(t) = 0$, $B^H(0) = 0$, $\mathbb{D}(B^H(t) - B^H(s)) = |t-s|^{2H}$. Проверьте, что отсюда следует выражение для корреляционной функции (7). Мы также видим, что значение H связано не только с самоподобием, но и с гладкостью (гельдеровским свойством) траекторий ДБД.

1.4 Сложные пуассоновские процессы

Простейший класс сложных пуассоновских процессов[5] может быть получен следующим образом. Пусть $(r_j)_{1\le j\le J}$, – ненулевые вещественные числа, $(X_j)_{1\le j\le J}$ – независимые пуассоновские процессы с интенсивностями μ_j. Составим сложный пуассоновский процесс

$$\xi(t) = \sum_{j=1}^{J} r_j X_j(t)$$

и сопоставим ему меру Леви $\mu = \sum_{j=1}^{J} \mu_j \delta_{r_j}$. Тогда ξ – процесс с однородными и независимыми приращениями. Элементарные выкладки с использованием независимости и свойств пуассоновского распределения дают

$$\mathbb{E}\,\xi(t) = t\sum_{j=1}^{J} r_j \mu_j t = t\int r\,d\mu; \tag{8}$$

$$\mathbb{D}\,\xi(t) = t\sum_{j=1}^{J} r_j^2 \mu_j t = t\int r^2\,d\mu; \tag{9}$$

$$\mathbb{E}\,e^{i\tau\xi(t)} = \exp\left\{ t\sum_{j=1}^{J} \left(e^{i\tau r_j} - 1\right)\mu_j \right\} = \exp\left\{ t\int \left(e^{i\tau r} - 1\right) d\mu \right\}. \tag{10}$$

harfun_cp

[5] Compound Poisson processes.

Для центрированного процесса $\tilde{\xi}(t) = \xi(t) - \mathbb{E}\xi(t)$ имеем

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\xi(t) &= 0; \\
\mathbb{D}\xi(t) &= t\int r^2 d\mu; \\
\mathbb{E}e^{i\tau\xi(t)} &= \exp\left\{t\int\left(e^{i\tau r} - 1 - i\tau r\right)d\mu\right\}. \qquad (11) \quad \boxed{\texttt{harfun_ccp}}
\end{aligned}$$

Следующий шаг состоит в построении сложного пуассоновского процесса, отвечающего произвольной конечной мере Леви. Итак, пусть μ конечная мера в $\mathbb{R}$, не имеющая нагрузки в нуле. Пусть $|\mu| := \mu(\mathbb{R})$ – ее полная масса, а (R_j) – последовательность н.о.р. величин с общим распределением $\mu/|\mu|$. Наконец, пусть π – процесс Пуассона с интенсивностью $|\mu|$. Тогда сложный пуассоновский процесс с мерой Леви μ может быть получен по формуле

$$\xi(t) = \sum_{j=1}^{\pi(t)} R_j\ . \qquad (12) \quad \boxed{\texttt{def\_cp}}$$

Можно показать, что это снова будет процесс с однородными и независимыми приращениями, и что все предыдущие формулы сохраняют силу (причем мат. ожидание конечно, если $\int |r| d\mu < \infty$, а дисперсия конечна, если $\int r^2 d\mu < \infty$).

Ограничимся только выводом формулы (10). Имеем

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}e^{i\tau\xi(t)} = \mathbb{E}\ \mathbb{E}\left(e^{i\tau\xi(t)}\middle|\pi\right) \\
= \ & \sum_k \mathbb{P}(\pi(t) = k)\ \mathbb{E}\, e^{i\tau\sum_1^k R_j} \\
= \ & e^{-t|\mu|}\sum_k \frac{(t|\mu|)^k}{k!}\left(\mathbb{E}e^{i\tau R}\right)^k \\
= \ & \exp\left(-t|\mu| + t|\mu|\,\mathbb{E}e^{i\tau R}\right) \\
= \ & \exp\left\{t\int\left(e^{i\tau r} - 1\right)d\mu\right\}.
\end{aligned}$$

В терминах величин R имеем

$$\mathbb{E}\xi(t) = t|\mu|\,\mathbb{E}R, \qquad \mathbb{D}\xi(t) = t|\mu|\,\mathbb{E}R^2. \qquad (13) \quad \boxed{\texttt{eid\_cp}}$$

Заметим еще, что количество скачков процесса ξ на любом интервале $[t_1, t_2]$ равно $\pi(t_2) - \pi(t_1)$ и имеет пуассоновское распределение с параметром $|\mu|(t_2 - t_1)$. В частности, его математическое ожидание равно $|\mu|(t_2 - t_1)$.

1.5 Устойчивые процессы и величины

Формула (11) дает идею представления общих процессов с однородными независимыми приращениями[6]. Пусть мера Леви μ не имеет нагрузки в нуле и удовлетворяет условию

$$\int |r| \wedge r^2 d\mu < \infty.$$

Тогда центрированный процесс с однородными независимыми приращениями и мерой Леви μ имеет хар. функцию (11). Подчеркнем, что здесь мы уже не предполагаем конечности меры μ (у нее может накапливаться бесконечная масса в окрестности нуля). В этом принципиальное отличие от случая сложных пуассоновских процессов. С точки зрения траекторий это означает, что новые процессы могут иметь бесконечное число скачков на любом невырожденном временно́м интервале.

Нас будет интересовать только одно конкретное семейство мер Леви, а именно

$$\mu(dr) = (c_- \mathbf{1}_{r<0} + c_+ \mathbf{1}_{r>0}) \, \frac{dr}{|r|^{1+\alpha}} \ .$$

Здесь хотя бы один из параметров c_-, c_+ должен быть ненулевым, а условие интегрируемости дает $\alpha \in (1, 2)$. Процессы, отвечающие этим мерам называются α-устойчивыми[7]. Если $c_- = c_+$, то процесс называется симметричным, а если $c_- = 0$ или $c_+ = 0$, то он называется односторонним. Нас будут интересовать, главным образом, односторонние процессы, так как скачки процесса всегда интерпретируют положительные нагрузки, т.е. $c_- = 0$.

Аналогичная терминология используется и для случайных величин: с.в. $\tilde{\xi}$ с характеристической функцией

$$\mathbb{E} e^{i\tau\tilde{\xi}} = \exp\left\{ \int \left(e^{i\tau r} - 1 - i\tau r\right) (c_- \mathbf{1}_{r<0} + c_+ \mathbf{1}_{r>0}) \, \frac{dr}{|r|^{1+\alpha}} \right\}. \qquad (14) \quad \boxed{\texttt{chf\_st}}$$

называется центрированной α-устойчивой, а ее распределение обозначается $\mathcal{S}(c_+, c_-, \alpha)$. В частности, для устойчивого процесса значение $\tilde{\xi}(t)$ имеет распределение $\mathcal{S}(c_+ t, c_- t, \alpha)$. Для приведенной выше характеристической функции есть явная формула, но она нам не потребуется.

Рассмотрим свойство устойчивости, которому рассматриваемые случайные величины обязаны своим названием.

[6] Lévy processes.
[7] α-stable.

stab **Предложение 1.2** *Пусть случайные величины $\tilde{\xi}, \tilde{\xi}'$ независимы и имеют одинаковое распределение $\mathcal{S}(c_+, c_-, \alpha)$, и пусть $a, a' \ge 0$. Тогда $a\tilde{\xi}$ имеет распределение $\mathcal{S}(a^\alpha c_+, a^\alpha c_-, \alpha)$, а линейная комбинация $a\tilde{\xi} + a'\tilde{\xi}'$ – распределение $\mathcal{S}((a^\alpha + (a')^\alpha)c_+, (a^\alpha + (a')^\alpha)c_-, \alpha)$. В частности,*

$$a\tilde{\xi} + a'\tilde{\xi}' \stackrel{d}{=} (a^\alpha + (a')^\alpha)^{1/\alpha}\tilde{\xi}.$$

Доказательство: Первое утверждение получается линейной заменой переменных.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}e^{i\tau a\tilde{\xi}} &= \exp\left\{\int \left(e^{ia\tau r} - 1 - ia\tau r\right)\left(c_-\mathbf{1}_{r<0} + c_+\mathbf{1}_{r>0}\right)\frac{dr}{|r|^{1+\alpha}}\right\} \\
&= \exp\left\{\int \left(e^{i\tau v} - 1 - i\tau v\right)\left(c_-\mathbf{1}_{v<0} + c_+\mathbf{1}_{v>0}\right)\frac{a^{1+\alpha}dv}{a|v|^{1+\alpha}}\right\} \\
&= \exp\left\{\int \left(e^{i\tau v} - 1 - i\tau v\right)\left(a^\alpha c_-\mathbf{1}_{v<0} + a^\alpha c_+\mathbf{1}_{v>0}\right)\frac{dv}{|v|^{1+\alpha}}\right\}.
\end{aligned}$$

Второе утверждение получается применением первого и перемножением хар. функций. □

Из предложения вытекает свойство самоподобия устойчивого процесса: для любого $a > 0$ верно

$$\frac{\tilde{\xi}(at)}{a^{1/\alpha}} \stackrel{d}{=} \tilde{\xi}(t). \qquad (15)$$ self_st

Устойчивые величины и процессы играют важную роль в предельных теоремах для сумм независимых случайных величин. Например, верно следующее.

Теорема 1.3 *Пусть (Y_j) – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, причем $\mathbb{E}Y_j = 0$ и хвосты распределений слагаемых имеют степенной вид: при некотором $\alpha \in (1,2)$ верно*

$$P(Y_j \ge r) \sim \frac{c_+}{\alpha r^\alpha}, \qquad \text{при } r \to \infty,$$

$$P(Y_j \le -r) \sim \frac{c_-}{\alpha |r|^\alpha}, \qquad \text{при } r \to \infty.$$

Положим $S_n = \sum_{j=1}^n Y_j$. Тогда

$$\frac{S_n}{n^{1/\alpha}} \Rightarrow \mathcal{S}(c_+, c_-, \alpha).$$

Утверждение теоремы станет более понятно, если заметить, что величины с распределением $\mathcal{S}(c_+, c_-, \alpha)$ сами удовлетворяют его условиям и в этом случае $\frac{S_n}{n^{1/\alpha}}$ имеет такое же распределение $\mathcal{S}(c_+, c_-, \alpha)$, как и слагаемые.

Сходимость пуассоновских интегралов к устойчивому распределению

Сравнивая характеристические функции (14) и (5), мы видим, что интеграл $\int f d\tilde{N}$ по центрированной пуассоновской мере имеет в точности устойчивое распределение $\mathcal{S}(c_+, c_-, \alpha)$, если ядро f имеет соответствующее распределение относительно меры интенсивности μ, т.е. для любого $x > 0$ верно

$$\mu\{f > x\} = \int_x^\infty \frac{c_+ dr}{r^{\alpha+1}} = \frac{c_+}{\alpha x^\alpha}\ , \qquad \mu\{f < -x\} = \frac{c_-}{\alpha x^\alpha}\ .$$

Поэтому основными условиями сходимости распределений последовательности $\int f_n d\tilde{N}$ к $\mathcal{S}(c_+, c_-, \alpha)$ будут

$$\lim_{n\to\infty} \mu\{f_n > x\} = \frac{c_+}{\alpha x^\alpha}\ , \quad \forall x > 0, \tag{16}$$

tailto_st1

$$\lim_{n\to\infty} \mu\{f_n < -x\} = \frac{c_-}{\alpha x^\alpha}\ , \quad \forall x > 0. \tag{17}$$

tailto_st2

Однако этими условиями нельзя ограничиваться, так как могут возникнуть проблемы в нуле и на бесконечности. Проиллюстрируем это на простейших примерах, в которых $c_+ = c_- = 0$.

Пример 1. Пусть $f_n = n^{-1/2}\mathbf{1}_{A_n}$ и $\mu\{A_n\} = n$. Тогда вышеуказанные пределы нулевые, но интегралы сходятся к стандартному нормальному закону по предложению 1.1.

Пример 2. Пусть $f_n = n\,\mathbf{1}_{A_n}$ и $\mu\{A_n\} = n^{-1}$. Снова вышеуказанные пределы нулевые, но интегралы сходятся к -1, так как соответствующие нецентрированные интегралы сходятся к нулю (по распределению), а их математические ожидания равны единице.

С учетом этих примеров следующее предложение уже не выглядит слишком громоздким.

prop:tos **Предложение 1.4** *Предположим, что верны* (16) *и* (17)*, а также*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\ \limsup_{n\to\infty} \int_{|f_n|\le\varepsilon} f_n^2 d\mu = 0 \tag{18}$$

tos2

и для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\ \limsup_{n\to\infty} \int_{|f_n|>\varepsilon} f_n d\mu = \int_{|r|>\varepsilon} \frac{r\,(c_-\mathbf{1}_{r<0} + c_+\mathbf{1}_{r>0})dr}{|r|^{\alpha+1}} = \frac{c_+ - c_-}{(\alpha-1)\varepsilon^{\alpha-1}}\ . \tag{19}$$

tos1

Тогда распределения величин $\int_{\mathcal{R}} f_n d\tilde{N}$ *сходятся к устойчивому закону* $\mathcal{S}(c_+, c_-, \alpha)$.

Доказательство: Проверим сходимость характеристических функций. Для малого $\varepsilon > 0$ разделим выражение в экспоненте (5) на три части

$$\int_{|f_n|\le\varepsilon}(e^{itf_n}-1-itf_n)d\mu+\int_{|f_n|>\varepsilon}(e^{itf_n}-1)d\mu+it\int_{|f_n|>\varepsilon}f_n d\mu.$$

Вторая часть сходится к соответствующей компоненте (14) в силу (16) и (17), а третья – в силу (19). Что касается первой части, то по неравенству

$$\left|e^{iu}-1-iu\right|\le c|u|^2$$

она может быть сделана сколь угодно малой как для предельного выражения так и для допредельного (с учетом (18)) за счет выбора малого параметра ε.□

Можно дать и более простой критерий сходимости.

cor:tos **Следствие 1.5** *Предположим, что верны* (16) *и* (17), *а также равномерная оценка*

$$\mu\{|f_n|>x\}\le\frac{C}{x^\alpha}\ ,\qquad\forall x>0,\forall n\ge1. \tag{20}$$ tailto_st3

Тогда распределения величин $\int_{\mathcal{R}} f_n d\tilde{N}$ *сходятся к устойчивому закону* $\mathcal{S}(c_+,c_-,\alpha)$.

Доказательство: Проверим условия предложения 1.4. Интегрируя по частям и используя равномерную оценку, найдем

$$\begin{aligned}\int_{|f_n|\le\varepsilon}f_n^2d\mu &= -\int_0^\varepsilon r^2d\mu\{r\le|f_n|\le\varepsilon\}\\ &= 2\int_0^\varepsilon r\mu\{r\le|f_n|\le\varepsilon\}dr\le2\int_0^\varepsilon r\mu\{r\le|f_n|\}dr\\ &\le 2C\int_0^\varepsilon r^{1-\alpha}dr=\frac{2C\varepsilon^{2-\alpha}}{2-\alpha},\end{aligned}$$

откуда следует (18). Для проверки второго условия запишем, снова интегрируя по частям,

$$\int_{f_n>\varepsilon}f_nd\mu=-\int_\varepsilon^\infty rd\mu\{f_n\ge r\}=\varepsilon\mu\{f_n\ge\varepsilon\}+\int_\varepsilon^\infty\mu\{f_n\ge r\}dr.$$

Используя предел (16) и теорему Лебега о мажорированной сходимости, а затем выполняя обратное интегрирование по частям, найдем

$$\lim_{n\to\infty} \int_{f_n>\varepsilon} f_n d\mu = \frac{c_+}{(\alpha-1)\varepsilon^{\alpha-1}} \ .$$

Аналогично оценивается и отрицательная часть интеграла. □

Больше об устойчивых величинах и процессах можно прочитать в методичке [7] и книгах Золотарева [4] и Ибрагимова и Линника [5].

1.6 Устойчивые случайные меры с независимыми значениями и интегралы по ним

Следующая конструкция очень напоминает построение пуассоновской случайной меры и соответствующего интеграла.

Пусть $\mathcal{S}(c_+, c_-, \alpha)$ – некоторое устойчивое распределение, а $(\mathcal{R}, \mu)$ – измеримое пространство с мерой. Обозначим $\mathcal{A} = \{A \subset \mathcal{R}, \mu(A) < \infty\}$. Семейство случайных величин $\{M(A), A \in \mathcal{A}\}$ называется устойчивой случайной мерой с независимыми значениями[8], если выполнено следующее:

- величина $M(A)$ имеет распределение $\mathcal{S}(c_+\mu(A), c_-\mu(A), \alpha)$;
- независимость: если $A_1, \cdots, A_m$ не пересекаются, то случайные величины $M(A_1), \ldots, M(A_m)$ независимы.
- аддитивность: если $A_1, \cdots, A_m$ не пересекаются, то

$$M\left(\cup_1^m A_j\right) = \sum_1^m M(A_j) \qquad \text{почти наверное.}$$

Мера μ называется мерой интенсивности[9] для M.

Определим интегралы от функций $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ по мере M. Для *неотрицательных* ступенчатых функций $f = \sum_j c_j \mathbf{1}_{A_j}$ с непересекающимися A_j интегралы определяются естественным образом:

$$\int_{\mathcal{R}} f dM := \sum_j c_j M(A_j).$$

[8] Independently scattered α-stable random measure.

[9] Intensity measure или Control measure.

При этом с помощью предложения 1.2 легко проверяется, что по распределению

$$\int_{\mathcal{R}} f dM \stackrel{d}{=} \mathcal{S}(||f||_\alpha^\alpha c_+, ||f||_\alpha^\alpha c_-, \alpha), \tag{21}$$

law_st

где

$$||f||_\alpha^\alpha = \int_{\mathcal{R}} |f|^\alpha d\mu = \sum_j c_j^\alpha \mu(A_j).$$

Приближая функции общего вида ступенчатыми, можно определить интегралы и для всех неотрицательных функций $f \in L_\alpha(\mathcal{R}, \mu)$. Свойство (21) будет по-прежнему верно. Построенный интегралы будет аддитивен, т.е.

$$\int_{\mathcal{R}} (f+g) dM = \int_{\mathcal{R}} f dM + \int_{\mathcal{R}} g dM, \qquad \int_{\mathcal{R}} (cf) dM = c \int_{\mathcal{R}} f dM.$$

Если устойчивое распределение симметрично ($c_+ = c_-$), то условие неотрицательности интегранда можно отбросить.

Белый шум

Если повторить предыдущую конструкцию с заменой устойчивого распределения на центрированное нормальное, в частности, предполагая, что $M(A)$ имеет распределение $\mathcal{N}(0, \mu(A))$, то получим меру с независимыми значениями, называемую *белым шумом*[10]. Интеграл по белому шуму определен для функций $f \in L_2(\mathcal{R}, \mu)$ и по распределению

$$\int_{\mathcal{R}} f dM \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(0, ||f||_2^2). \tag{22}$$

law_nor

По аналогии с пуассоновским случаем (3) верно

$$cov\left(\int_{\mathcal{R}} f dM, \int_{\mathcal{R}} g dM\right) = \int_{\mathcal{R}} f g d\mu. \tag{23}$$

cov_nor

[10] White noise.

2 Описание модели узла обслуживания

В статье [1] рассматриваются две модели системы обслуживания – непрерывная и дискретная – отличающиеся характером расходования ресурсов.

2.1 Непрерывная модель

Наиболее подробно мы будем рассматривать непрерывную модель[11]. С нее и начнем.

Формальная модель узла обслуживания на основе случайных мер Пуассона выглядит следующим образом. Положим $\mathcal{R} = \{(s,u,r)\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. Каждая точка (s,u,r) имеет смысл процесса обслуживания[12], который начинается в момент s, длится u единиц времени и имеет интенсивность обслуживания[13] r. В узле могут одновременно выполняться несколько процессов обслуживания (без ограничения на суммарную интенсивность, т.е. нагрузку узла).

Исходными параметрами для описания работы узла являются

- $\lambda > 0$ – интенсивность потока процессов обслуживания;
- $F_U(du)$ – распределение длительности обслуживания;
- $F_R(dr)$ – распределение интенсивности обслуживания.

Определим на $\mathcal{R}$ меру интенсивности

$$\mu(ds,du,dr) = \lambda ds\, F_U(du)\, F_R(dr).$$

Пусть N – соответствующая ей случайная мера Пуассона. Реализации (множества троек) можно рассматривать как возможные траектории работы узла, а все характеристики этой работы выражаются в виде соответствующих интегралов.

В частности, нас будет интересовать мгновенная нагрузка[14] на узел в момент t:

$$W(t) = \int_{\mathcal{R}} r \mathbf{1}_{\{s \le t \le s+u\}} dN \tag{24}$$ Wt

[11] Continuous flow.

[12] Session.

[13] Rewards, transmission rate, ...

[14] Instantaneous workload arrival rate.

и интегральная (накопленная) нагрузка[15]

$$W^*(t) = \int_0^t W(\tau)d\tau = \int_{\mathcal{R}} r \int_0^t \mathbf{1}_{\{s\le\tau\le s+u\}} d\tau dN \tag{25}$$

Wtstar

$$= \int_{\mathcal{R}} r \cdot \Big|[s, s+u] \cap [0,t]\Big| dN := \int_{\mathcal{R}} r\ell_t(s,u)dN. \tag{26}$$

Появившееся здесь ядро

$$\ell_t(s,u) := \Big|[s, s+u] \cap [0,t]\Big| \tag{27}$$

ell

нам многократно потребуется и в дальнейшем.

2.2 Дискретная модель

Есть еще альтернативная дискретная модель[16]. В этой модели параметры s и u сохраняют прежний смысл, но на интервале $[s, s+u]$ процесс обслуживания происходит дискретными порциями[17]. Размеры порций независимы и имеют распределение F_R, а моменты обслуживания образуют пуассоновский процесс единичной интенсивности. В сумме нагрузка на узел со стороны процесса обслуживания между моментами s и $s+u$ образует сложный пуассоновский процесс

$$\xi(u) = \sum_{j=1}^{\pi(u)} R_j,$$

где π – стандартный пуассоновский процесс. Это в точности формула составного пуассоновского процесса (12) с двумя особенностями – $|\mu| = 1$ и $R_j > 0$.

Для дискретной модели мгновенная нагрузка не имеет смысла, а интегральная может быть записана в виде интеграла по пуассоновской мере

$$W^*_\#(t) = \int_{\mathcal{R}_\#} \xi\left(\ell_t(s,u)\right) dN, \tag{28}$$

Wdtstar

где $\mathcal{R}_\# = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times D$, а N имеет меру интенсивности

$$\mu_\# = \lambda ds F_U(du)\, \mu_\xi(d\xi).$$

Здесь D – пространство траекторий процесса ξ, а μ_ξ – его распределение.

[15] Aggregated workload.
[16] Compound Poisson.
[17] Packets.

3 Моментные предположения о распределениях

3.1 Основные гипотезы о времени и интенсивности обслуживания

В статье делаются некоторые предположения о распределениях F_R и F_U. Всегда предполагается, что математические ожидания конечны:

$$\nu := \mathbb{E}U = \int_0^\infty u F_U(du) < \infty,$$

$$\rho := \mathbb{E}R = \int_0^\infty r F_R(du) < \infty.$$

На самом деле предполагается нечто большее: либо величины имеют конечный второй момент, либо их распределения имеют регулярные хвосты. А именно, либо

$$\mathbb{P}(U > u) \sim \frac{c_U}{\gamma u^\gamma}\ , \qquad u \to \infty, \qquad 1 < \gamma < 2, c_U > 0,$$

либо

$$\mathbb{E}(U^2) < \infty.$$

В последнем случае формально полагаем $\gamma = 2$. Аналогично, либо

$$\mathbb{P}(R > r) \sim \frac{c_R}{\delta r^\delta}\ , \qquad r \to \infty, \qquad 1 < \delta < 2, c_R > 0,$$

либо

$$\mathbb{E}(R^2) < \infty.$$

В последнем случае формально полагаем $\delta = 2$.

Таким образом, поведение узла будет зависеть от значений параметров $\gamma, \delta \in (1, 2]$.

Например, среднее значение мгновенной нагрузки

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}W(t) &= \mathbb{E}\int_{\mathcal{R}} r\mathbf{1}_{\{s\le t\le s+u\}}dN \\
&= \int_{\mathcal{R}} r\mathbf{1}_{\{s\le t\le s+u\}}d\mu \\
&= \lambda\int_0^\infty rF_R(dr)\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty \mathbf{1}_{\{s\le t\le s+u\}}dsF_U(du) \\
&= \lambda\rho\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty \mathbf{1}_{\{t-u\le s\le t\}}dsF_U(du) \\
&= \lambda\rho\int_0^\infty uF_U(du) \\
&= \lambda\rho\nu.
\end{aligned}$$

Следовательно, $\mathbb{E}W^*(t) = \lambda\rho\nu t$.

Вычисление математического ожидания для дискретной модели приводит к тому же результату. Используя формулу для ожидания сложного пуассоновского процесса, $\mathbb{E}\xi(t) = \mathbb{E}R\cdot t = \rho t$, найдем

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}W^*_\#(t) &= \int_{\mathcal{R}_\#}\xi\left(\ell_t(s,u)\right)\lambda dsF_U(du)\,\mu_\xi(d\xi), \\
&= \int \mathbb{E}\xi\left(\ell_t(s,u)\right)\lambda dsF_U(du), \\
&= \rho\lambda\int \ell_t(s,u)dsF_U(du).
\end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned}
&\int \ell_t(s,u)dsF_U(du) = \int\int_0^t \mathbf{1}_{s\le\tau\le s+u}d\tau dsF_U(du) \\
&= \int_0^t\int \mathbf{1}_{s\le\tau\le s+u}dsF_U(du)d\tau \\
&= \int_0^t\int uF_U(du)d\tau = t\int uF_U(du) = \nu t. \qquad (29) \quad \boxed{\texttt{inted}}
\end{aligned}$$

Получаем

$$\mathbb{E}W^*_\#(t) = \lambda\rho\nu t.$$

Аналогично проводится анализ дисперсий. Согласно общей формуле (1),

$$\begin{aligned}\mathbb{D}W(t) &= \lambda \int_0^\infty r^2 F_R(dr) \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \mathbf{1}_{\{s\le t\le s+u\}} ds F_U(du)\\ &:= \lambda\, \rho_2^2\, \nu.\end{aligned}$$

Видим, что дисперсия конечна, если R имеет конечный второй момент, а U – первый.

Аналогично, для ковариации двух значений мгновенной нагрузки можем найти (проверьте с помощью (3)!)

$$cov(W(t_1), W(t_2)) = \lambda\ \ \rho_2^2 \int_{|t_1-t_2|}^\infty (u - |t_1-t_2|) F_u(du).$$

Теперь проанализируем дисперсию интегральной нагрузки

$$\mathbb{D}W_*(t) = \lambda \int_0^\infty r^2 F_R(dr) \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \ell_t(s,u)^2 ds F_U(du).$$

Фиксируем переменную u и рассмотрим внутреннее выражение $\ell_t(s,u)$ как функцию переменной s. Здесь возникают два случая:

1) $0 \le u \le t$. Тогда ℓ_t равно нулю при $s < -u$ и $s > t$, ℓ_t изменяется линейно (с единичной скоростью) на интервалах $[-u, 0]$ и $[t-u, t]$, и имеет постоянное значение u на интервале $[0, t-u]$. Отсюда следует, что

$$\int_{-\infty}^\infty \ell_t(s,u)^2 ds = 2\int_0^u s^2 ds + (t-u)u^2 = tu^2 - \frac{u^3}{3}\ .$$

2) $t \le u < \infty$. Тогда ℓ_t равно нулю при $s < -u$ и $s > t$, ℓ_t изменяется линейно (с единичной скоростью) на интервалах $[-u, t-u]$ и $[0, t]$, и имеет постоянное значение t на интервале $[t-u, 0]$. Отсюда следует, что

$$\int_{-\infty}^\infty \ell_t(s,u)^2 ds = 2\int_0^t s^2 ds + (u-t)t^2 = t^2u - \frac{t^3}{3}\ .$$

Отсюда заключаем, что

$$\mathbb{D}W_*(t) = \lambda\, \rho_2^2\ \left(\int_0^t \left(tu^2 - \frac{u^3}{3}\right) F_U(du) + \int_t^\infty \left(t^2u - \frac{t^3}{3}\right) F_U(du)\right)\ . \quad (30) \quad \boxed{\texttt{varstar}}$$

Опять-таки дисперсия конечна, если R имеет конечный второй момент, а U – первый.

Для дискретной модели вычисление дисперсии сводится к предыдущему. Используя формулы (13) среднего и дисперсии сложного пуассоновского процесса $\mathbb{E}\xi(t) = \mathbb{E}R \cdot t$, $\mathbb{D}\xi(t) = \mathbb{E}R^2 \cdot t$, получим

$$\mathbb{E}\xi^2(t) = \mathbb{D}\xi(t) + (\mathbb{E}\xi(t))^2 = \mathbb{E}R^2 \cdot t + (\mathbb{E}R)^2 \cdot t^2 = \rho_2^2 t + \rho^2 t^2,$$

и далее, используя (29),

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}W^*_{\#}(t) &= \int_{\mathcal{R}_{\#}} \xi^2\left(\ell_t(s,u)\right)\lambda ds F_U(du)\,\mu_\xi(d\xi), \\
&= \int \mathbb{E}\xi^2\left(\ell_t(s,u)\right)\lambda ds F_U(du) \\
&= \lambda \int \left[\rho_2^2 \ell_t(s,u) + \rho^2 \ell_t^2(s,u)\right] ds F_U(du) \\
&= \lambda \int \left[\rho_2^2 \ell_t(s,u) + \rho^2 \ell_t(s,u)^2\right] ds F_U(du) \\
&= \lambda\rho_2^2 \int \ell_t(s,u) ds F_U(du) + \lambda\rho^2 \int \ell_t(s,u)^2 ds F_U(du). \\
&= \lambda\rho_2^2 \nu t + \frac{\rho^2}{\rho_2^2}\,\mathbb{D}W_*(t).
\end{aligned}$$

3.2 Асимптотический анализ дисперсии

Проанализируем, как себя ведет дисперсия (30), когда $t \to \infty$. Здесь впервые возникает два принципиально различных случая: слабая зависимость[18] и сильная зависимость[19].

3.2.1 Слабая зависимость

Этот случай в основном аналогичен суммированию независимых одинаково распределенных случайных величин и соответственно дисперсия будет расти как t. Математически слабая зависимость описывается условиями конечности вторых моментов $\delta = \gamma = 2$, или

$$\rho_2^2 = \int_0^\infty r^2 F_R(dr) < \infty,\ \ \nu_2^2 := \int_0^\infty u^2 F_U(du) < \infty.$$

[18]Weak dependence.
[19]Long range dependence.

Из четырех интегралов, присутствующих в (30), имеет значение только один:

$$t \int_0^t u^2 F_U(du) \sim \nu_2^2 t.$$

Остальные дают $o(t)$. Действительно,

$$t^3 \int_t^\infty F_U(du) \le t \int_t^\infty u^2 F_U(du) = t\, o(1),$$
$$t^2 \int_t^\infty u F_U(du) \le t \int_t^\infty u^2 F_U(du) = t\, o(1),$$

и для любого $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}\int_0^t u^3 F_U(du) &= \int_0^{\varepsilon t} u^3 F_U(du) + \int_{\varepsilon t}^t u^3 F_U(du) \\ &\le \varepsilon t\, \nu_2^2 + t \int_{\varepsilon t}^\infty u^2 F_U(du) = \varepsilon t\, \nu_2^2 + t\, o(1).\end{aligned}$$

Таким образом при слабой зависимости

$$\mathbb{D} W_*(t) \sim \lambda\ \rho_2^2\ \nu_2^2\ t, \qquad t \to \infty. \tag{31}$$ varweak

Для дискретной модели в условиях слабой зависимости получаем

$$\mathbb{D} W_\#^*(t) = \lambda \rho_2^2 \nu t + \frac{\rho^2}{\rho_2^2}\ \mathbb{D} W_*(t) \sim \lambda(\rho_2^2 \nu + \rho^2 \nu_2^2) t.$$

3.2.2 Сильная зависимость

Математически сильная зависимость описывается условиями $\delta = 2, 1 < \gamma <$ 2,

$$\rho_2^2 < \infty,\ P(U > u) \sim \frac{c_U}{\gamma u^\gamma}.$$

Для простоты вычислений вместо последнего условия предположим, что U имеет плотность распределения

$$f(u) \sim c_U\, u^{-(1+\gamma)}, \qquad u \to \infty.$$

Это совершенно не меняет выводов. В данном случае, все четыре интеграла, присутствующих в (30), имеет один и тот же порядок:

$$t \int_0^t u^2 F_U(du) = t \int_0^t u^2 f(u) du \sim c_U\, t \int^t u^{1-\gamma} du \sim c_U\, \frac{t^{3-\gamma}}{2-\gamma}\ ,$$

$$t^3 \int_t^\infty F_U(du) = t^3 \int_t^\infty f(u)du \sim c_U\, t^3 \int_t^\infty u^{-1-\gamma} du \sim c_U\, \frac{t^{3-\gamma}}{\gamma}\ ,$$

$$t^2 \int_t^\infty uF_U(du) = t^2 \int_t^\infty uf(u)du \sim c_U\, t^2 \int_t^\infty u^{-\gamma} du \sim c_U\, \frac{t^{3-\gamma}}{\gamma - 1}\ ,$$

и

$$\int_0^t u^3 F_U(du) = \int_0^t u^3 f(u)du \sim c_U \int^t u^{2-\gamma} du \sim c_U\, \frac{t^{3-\gamma}}{3-\gamma}\ .$$

Скомбинируем возникшие константы:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2-\gamma} - \frac{1}{3(3-\gamma)} + \frac{1}{\gamma-1} - \frac{1}{3\gamma} &= \frac{1}{(2-\gamma)(\gamma-1)} - \frac{1}{(3-\gamma)\gamma} \\ &= \frac{2}{(2-\gamma)(\gamma-1)(3-\gamma)\gamma}\ . \end{aligned}$$

Таким образом, при сильной зависимости

$$\mathbb{D}W_*(t) \sim \lambda\, \rho_2^2\ \frac{2c_U}{(2-\gamma)(\gamma-1)(3-\gamma)\gamma}\ t^{3-\gamma}, \qquad t \to \infty. \tag{32}$$

varlong

Неудивительно, что при $\gamma = 2$ из этой формулы тоже формально получается линейный рост дисперсии. При $\gamma < 2$ рост дисперсии оказывается быстрее линейного благодаря положительной зависимости между значениями мгновенной нагрузки.

4 Центрированный и нормированный процесс нагрузки

Нас будет интересовать поведение процесса интегральной загрузки на больших интервалах времени. Для того, чтобы получить осмысленный предел, нужно

- центрировать процесс;
- разделить его на подходящий нормирующий множитель;
- сжать (шкалировать) время так, чтобы уместить его на стандартный временной интервал.

Примем за стандартный временной интервал $[0,1]$. Будем (в обозначениях статьи) исследовать нагрузку на длинном интервале времени $[0,a]$, где $a \to \infty$. Это может быть записано в виде $W^*(at), t \in [0,1]$. Центрирование и нормирование на подходящий множитель b приводят нас к процессу

$$Z(t) = \frac{W^*(at) - \lambda\rho\nu at}{b}\ , \qquad t \in [0,1]. \qquad (33) \quad \boxed{\mathtt{Z}}$$

При этом a и λ могут рассматриваться как переменные (хотя бы одна из них должна стремиться к бесконечности), а нормировка b подбирается в зависимости от них, а также от параметров узла γ, δ.

Например, в самом простейшем варианте коротких и не очень интенсивных процессов обслуживания ($\gamma = \delta = 2$) будем иметь $b = (\lambda a)^{1/2}$, по аналогии с центральной предельной теоремой.

Для дискретной модели все аналогично: рассматривается

$$Z_{\#}(t) = \frac{W^*_{\#}(at) - \lambda\rho\nu at}{b}\ , \qquad t \in [0,1]. \qquad (34) \quad \boxed{\mathtt{Zdiscr}}$$

5 Предельные теоремы с конечной дисперсией

5.1 Слабая зависимость в непрерывной модели

Будем искать предельную теорему для Z в случае $\gamma = \delta = 2$, а нормировку выберем так, чтобы $Z(1)$ имела асимптотически единичную дисперсию, т.е.

$$1 \sim \frac{\mathbb{D}W^*(a)}{b^2} \sim \frac{\lambda\ \rho_2^2\ \nu_2^2\ a}{b^2}\,.$$

Таким образом, можно положить

$$b = \lambda^{1/2}\ \rho_2\ \nu_2\ a^{1/2}. \qquad (35) \quad \boxed{\mathtt{bweak}}$$

При такой нормировке будем иметь для каждого $t \in [0,1]$

$$\mathbb{D}Z(t) = \frac{\mathbb{D}W^*(at)}{b^2} \sim \frac{\lambda\ \rho_2^2\ \nu_2^2\ at}{b^2} = t.$$

Заметим также, что для $t_1, t_2 \in [0,1]$ при $t_1 \le t_2$ верно

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}(Z(t_2) - Z(t_1)) &= b^{-2}\mathbb{D}\left(W^*(t_2) - W^*(t_1)\right) \\
&= b^{-2}\mathbb{D}\int_{t_1}^{t_2} W(\tau)d\tau = b^{-2}\mathbb{D}\int_0^{t_2-t_1} W(\tau)d\tau \\
&= b^{-2}\mathbb{D}W^*(t_2 - t_1) = \mathbb{D}Z(t_2 - t_1) \to t_2 - t_1. \qquad (36) \quad \boxed{\mathtt{t12}}
\end{aligned}$$

Наконец из тождества

$$\mathbb{D}(Z(t_2)-Z(t_1)) = \mathbb{D}Z(t_1) + \mathbb{D}Z(t_2) - 2\,cov(Z(t_1), Z(t_2))$$

находим

$$\begin{aligned} cov(Z(t_1), Z(t_2)) &= \frac{1}{2}\left(\mathbb{D}Z(t_1) + \mathbb{D}Z(t_2) - \mathbb{D}(Z(t_2)-Z(t_1))\right) \qquad (37) \quad \boxed{\texttt{ddd}} \\ &\to \frac{1}{2}\left(t_1 + t_2 - (t_2 - t_1)\right) = t_1. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$cov(Z(t_1), Z(t_2)) \to \min(t_1, t_2).$$

В пределе получается ковариация винеровского процесса.

Мы не будем доказывать сходимость всех конечномерных распределений, а ограничимся только сходимостью одномерных.

`prop:ltweak` **Предложение 5.1** *Если* $\gamma = \delta = 2$ *и* $a\lambda \to \infty$, *то при нормировке* (35)

$$Z(t) \Rightarrow \mathcal{N}(0, t) \qquad \forall t \in [0, 1].$$

Доказательство: Будем использовать предложение 1.1. Мы уже знаем, что $\mathbb{D}Z(t) \to t$, так что остается проверить только второе условие предложения. Напомним, что

$$Z(t) = \int_{\mathcal{R}} \frac{r\ell_{at}(s,u)}{(a\lambda)^{1/2}\rho_2\nu_2}\, d\tilde{N},$$

где $\ell_{at}(s,u)$ – ядро из (27). Нам нужно проверить, что

$$\int_{r\ell_{at}/(\lambda a)^{1/2} > \varepsilon} \frac{r^2 \ell_{at}^2(s,u)}{(a\lambda)} F_R(dr) F_U(du) \lambda ds, \to 0.$$

Сначала отбросим зону $(u > at)$. Мы на самом деле видели, что ее вклад в дисперсию пренебрежим, так как при этом условии

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ell_{at}(s,u)^2 ds = (at)^2 u - \frac{(at)^3}{3} \le (at)^2 u\ .$$

и

$$\begin{aligned} \int_{(u>at)} \frac{r^2 \ell_{at}^2(s,u)}{(a\lambda)} F_R(dr) F_U(du) \lambda ds &\le \rho_2^2 a^{-1} \int_{at}^{\infty} (at)^2 u F_U(du) \\ &\le \rho_2^2 t \int_{at}^{\infty} u^2 F_U(du) \to 0. \end{aligned}$$

Далее будем рассматривать зону $(u \le at)$, в которой

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ell_{at}(s,u)^2 ds = (at)u^2 - u^3/3 \le (at)u^2.$$

Кроме того, в ней $\ell_{at} \le u$, поэтому интересующую нас зону $r\ell_{at}/(\lambda a)^{1/2} > \varepsilon$ можем покрыть более широкой $ru/(\lambda a)^{1/2} > \varepsilon$, а эту последнюю накроем двумя более простыми $r > (\lambda a \varepsilon^2)^{1/4}$ и $u > (\lambda a \varepsilon^2)^{1/4}$. Соответственно, получим оценки

$$\int_{\substack{r\ell_{at}/(\lambda a)^{1/2} > \varepsilon \\ u \le at}} f^2 d\mu \le \int_{\substack{r > (\lambda a \varepsilon^2)^{1/4} \\ u \le at}} f^2 d\mu + \int_{u > (\lambda a \varepsilon^2)^{1/4}} f^2 d\mu$$

Для первого интеграла получаем

$$\begin{aligned} &\int_{(\lambda a \varepsilon^2)^{1/4}}^{\infty} r^2 F_R(dr) (a\lambda)^{-1} \lambda \int \int_{-\infty}^{\infty} \ell_{at}(s,u)^2 ds F_U(du) \\ \le &\int_{(\lambda a \varepsilon^2)^{1/4}}^{\infty} r^2 F_R(dr) a^{-1} (at) \int u^2 F_U(du) \to 0, \end{aligned}$$

за счет первого множителя.

Для второго интеграла получаем

$$\begin{aligned} &\int r^2 F_R(dr) (a\lambda)^{-1} \lambda \int_{(\lambda a \varepsilon^2)^{1/4}}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \ell_{at}(s,u)^2 ds F_U(du) \\ \le &\int r^2 F_R(dr) (a)^{-1} (at) \int_{(\lambda a \varepsilon^2)^{1/4}}^{\infty} u^2 F_U(du) \to 0, \end{aligned}$$

за счет второго множителя. □

5.2 Слабая зависимость в дискретной модели

Будем искать предельную теорему для $Z_\#$ в случае $\delta = 2, \gamma = 2$, а нормировку выберем так, чтобы величина $Z_\#(1)$ в пределе имела единичную дисперсию, т.е.

$$1 = \frac{\mathbb{D} W_\#^*(a)}{b^2} \sim \frac{\lambda\ (\rho_2^2\ \nu + \rho^2 \nu_2^2)\ a}{b^2}.$$

Таким образом, можно положить

$$b = (\lambda a)^{1/2}\ (\rho_2^2\ \nu + \rho^2 \nu_2^2)^{1/2}. \tag{38}$$ bweakdiscr

При такой нормировке будем иметь для каждого $t \in [0,1]$

$$\mathbb{D}Z_{\#}(t) = \frac{\mathbb{D}W^*_{\#}(at)}{b^2} = \frac{\lambda\ (\rho_2^2\ \nu + \rho^2\nu_2^2)\ at}{b^2} = t.$$

Мы не будем доказывать сходимость всех конечномерных распределений, а ограничимся только сходимостью одномерных.

prop:ltweakdiscr **Предложение 5.2** *Если* $\delta = 2, \gamma = 2$ *и* $a\lambda \to \infty$*, то при нормировке* (38)

$$Z_{\#}(t) \Rightarrow \mathcal{N}(0,t), \qquad \forall t \in [0,1].$$

Доказательство: Будем использовать предложение 1.1. Мы уже знаем, что $\mathbb{D}Z_{\#}(t) \to t$, так что остается проверить только второе условие предложения. Напомним, что

$$Z_{\#}(t) = \int_{\mathcal{R}_{\#}} \frac{\xi(\ell_{at}(s,u))}{(\lambda a)^{1/2}(\rho_2^2\ \nu + \rho^2\nu_2^2)^{1/2}}\ d\tilde{N}$$

Нам нужно проверить, что

$$\int_{\frac{\xi(\ell_{at}(s,u))}{(\lambda a)^{1/2}} > \varepsilon} \frac{\xi(\ell_{at}(s,u))^2}{a}\ F_U(du) ds \mu_\xi(d\xi) \to 0.$$

Используя (29), находим, что искомое выражение равно

□

5.3 Сильная зависимость

Обозначим $H = \frac{3-\gamma}{2}$. Будем искать предельную теорему для Z в случае $1 < \gamma < 2, \delta = 2$, а нормировку снова выберем так, чтобы $Z(1)$ имела асимптотически единичную дисперсию, т.е.

$$1 \sim \frac{\mathbb{D}W^*(a)}{b^2} \sim \frac{2c_U}{(2-\gamma)(\gamma-1)(3-\gamma)\gamma}\ \frac{\lambda\ \rho_2^2\ \ a^{2H}}{b^2}\,.$$

Таким образом, можно положить

$$b = \left(\frac{2c_U}{(2-\gamma)(\gamma-1)(3-\gamma)\gamma}\right)^{1/2}\ \lambda^{1/2}\ \rho_2\ \ a^H. \qquad (39)$$ bstrong

При такой нормировке будем иметь для каждого $t \in [0,1]$

$$\mathbb{D}Z(t) = \frac{\mathbb{D}W^*(at)}{b^2} \sim \frac{\lambda\ \rho_2^2\ \nu_2^2\ at}{b^2} = t^{2H}.$$

снова для $t_1, t_2 \in [0,1]$ при $t_1 \le t_2$ применим (36)

$$\mathbb{D}(Z(t_2) - Z(t_1)) = \mathbb{D}Z(t_2 - t_1) \to (t_2 - t_1)^{2H}.$$

Наконец из тождества (37) находим

$$cov(Z(t_1), Z(t_2)) \to \frac{1}{2}\left(t_1^{2H} + t_2^{2H} - (t_2 - t_1)^{2H}\right).$$

Таким образом,

$$cov(Z(t_1), Z(t_2)) \to \frac{1}{2}\left(t_1^{2H} + t_2^{2H} - (t_2 - t_1)^{2H}\right).$$

В пределе получается ковариация дробного броуновского движения.

Мы не будем доказывать сходимость всех конечномерных распределений, а ограничимся только сходимостью одномерных.

prop:ltstrong **Предложение 5.3** *Если $\gamma < 2$ и $\delta = 2$ и $\frac{\lambda}{a^{\gamma-1}} \to \infty$, то при нормировке* (39)

$$Z(t) \Rightarrow \mathcal{N}(0, t^{2H}) \qquad \forall t \in [0,1].$$

Доказательство: Будем опять использовать предложение 1.1. Мы уже знаем, что $\mathbb{D}Z(t) \to t^{2H}$, так что остается проверить только второе условие предложения. Напомним, что

$$Z(t) = \int_{\mathcal{R}} \frac{r\ell_{at}(s,u)}{K\lambda^{1/2}a^{(3-\gamma)/2}\,\rho_2}\, d\tilde{N},$$

где ядро $\ell_t(\cdot,\cdot)$ из (27) удовлетворяет неравенству $\ell_{at}(s,u) \le at$. Нам нужно проверить, что

$$\int_{r\ell_{at}/\lambda^{1/2}a^{(3-\gamma)/2} > \varepsilon} \frac{r^2\ell_{at}^2(s,u)}{\lambda a^{3-\gamma}} F_R(dr)F_U(du)\lambda ds \to 0.$$

Пусть сначала $R \le r_0$ – ограниченная величина. Тогда при достаточно больших a область интегрирования просто окажется пустой. Действительно,

$$\frac{r\ell_{at}}{\lambda^{1/2}a^{(3-\gamma)/2}} \le \frac{r_0 at}{\lambda^{1/2}a^{(3-\gamma)/2}} = r_0 t\ \left(\frac{a^{\gamma-1}}{\lambda}\right)^{1/2} \to 0.$$

Теперь рассмотрим общий случай. Здесь

$$\int_{|f|>\varepsilon} f^2 d\mu = \int_{\substack{|f|>\varepsilon \\ r\le r_0}} f^2 d\mu + \int_{\substack{|f|>\varepsilon \\ r>r_0}} f^2 d\mu \le \int_{\substack{|f|>\varepsilon \\ r\le r_0}} f^2 d\mu + \int_{r>r_0} f^2 d\mu,$$

причем первый интеграл, как мы выяснили, исчезает. Для второго легко получается оценка $\int_{r_0}^{\infty} r^2 F_R(dr)\ t^{2H}$, которую можно сделать сколь угодно малой за счет выбора параметра r_0 большим. $\square$

6 Предельные теоремы о сходимости к устойчивому процессу

Мы докажем две теоремы, в которых процесс нагрузки сходится в пределе к устойчивому процессу, причем интерпретация происходящего несколько различна.

6.1 Случай с доминирующей интенсивностью обслуживания

Будем доказывать предельную теорему для Z в случае $\delta < \gamma \le 2$, а нормировку выберем по формуле

$$b = B(\lambda a)^{1/\delta}, \tag{40}$$

bweak_str

где постоянная B определяется соотношением $B^\delta = c_R\,\mathbb{E}(U^\delta)$. Заметим, что при $\delta < \gamma$ соответствующее ожидание заведомо конечно, так как

$$\mathbb{E}(U^\delta) = \int_0^\infty \mathbb{P}(U^\delta > r)dr = \int_0^\infty \mathbb{P}(U > r^{1/\delta})dr \le 1 + const \int_1^\infty r^{-\gamma/\delta}dr < \infty.$$

Мы не будем доказывать сходимость всех конечномерных распределений к распределениям устойчивого процесса, а ограничимся только сходимостью одномерных.

prop:weak_str **Предложение 6.1** *Если $\delta < \gamma \le 2$ и $a \to \infty, a\lambda \to \infty$, то при нормировке* (40) *в непрерывной модели*

$$Z(t) \Rightarrow \mathcal{S}(t, 0, \delta) \qquad \forall\, t \in [0,1].$$

Доказательство: Напомним, что

$$Z(t) = \int_{\mathcal{R}} \frac{r\ell_{at}(s,u)}{B(a\lambda)^{1/\delta}}\, d\tilde{N},$$

где $\ell_{at}(s,u)$ – ядро из (27).

Будем использовать следствие 1.5 предложения 1.4. Нужно проверить предельные соотношения (16) и (17), а также равномерную оценку (20). Ввиду положительности интегрируемых функций соотношение (17) тривиально. Поэтому мы сосредоточимся на проверке (16). Равномерная оценка (20) устанавливается теми же выкладками.

Нам нужно проверить, что

$$\mu\left\{\frac{r\ell_{at}(s,u)}{B(\lambda a)^{1/\delta}} \ge x\right\} \to t\, x^{-\delta}, \qquad a \to \infty.$$

Сначала отбросим зону $(u > ha)$ для сколь угодно малого, но фиксированного $h > 0$. Воспользовавшись неравенством $\ell_{at}(s,u) \le at$ мы видим, что из неравенства $\frac{r\ell_{at}(s,u)}{B(\lambda a)^{1/\delta}} \ge x$ следует $r \ge \frac{xB(\lambda a)^{1/\delta}}{at}$. Поэтому

$$\begin{aligned}
&\mu\left\{\frac{r\ell_{at}(s,u)}{B(\lambda a)^{1/\delta}} \ge x, u > ha\right\} \le \mathbb{P}\left(R \ge \frac{xB(\lambda a)^{1/\delta}}{at}\right)\cdot \lambda \cdot \mathbb{E}\left((U+at)\mathbf{1}_{U>ha}\right)\\
\le\ & const\left(\frac{xB(\lambda a)^{1/\delta}}{at}\right)^{-\delta} \cdot \lambda \cdot \mathbb{E}\left(U\mathbf{1}_{U>ha}\right)\\
=\ & const\left(\frac{(xB)^{-\delta}a^{-1}}{(at)^{-\delta}}\right)\cdot (ha)^{1-\gamma}\\
=\ & const \cdot x^{-\delta}\, a^{\delta-\gamma} \to 0,
\end{aligned}$$

так как $\delta < \gamma$ и $a \to \infty$.

Теперь перейдем к зоне $(u \le ha)$ с малым h. Начнем с верхней оценки интересующей нас меры. Поскольку $\ell_{at}(s,u) \le u$, то из неравенства $\frac{r\ell_{at}(s,u)}{B(\lambda a)^{1/\delta}} \ge x$ следует $ru \ge xB(\lambda a)^{1/\delta}$. С другой стороны, при фиксированных r, u, t длина носителя функции $\ell_{at}(\cdot, u)$ по переменной s не превосходит $at + u \le (t+h)a$. Значит,

$$\mu\left\{\frac{r\ell_{at}(s,u)}{B(\lambda a)^{1/\delta}} \ge x, u \le ha\right\} \le \mathbb{P}\left(RU \ge xB(\lambda a)^{1/\delta}\right)\cdot \lambda \cdot (t+h)a.$$

Воспользуемся тем, что при $x \to \infty$

$$\mathbb{P}(RU \geq x) = \mathbb{E}_U \mathbb{P}(R \geq \frac{x}{U}) \sim \mathbb{E}\frac{c_R U^\delta}{\delta x^\delta} = \frac{c_R \mathbb{E}(U^\delta)}{\delta x^\delta} \ . \qquad (41)$$

rudelta

С учетом определения константы B мы приходим к нужной оценке

$$\mu\left\{\frac{r\ell_{at}(s,u)}{B(\lambda a)^{1/\delta}} \geq x, u \leq ha\right\} \preceq \frac{c_R \mathbb{E}(U^\delta)}{\delta x^\delta B^\delta(\lambda a)} \cdot \lambda \cdot (t+h)a = \frac{c_R \mathbb{E}(U^\delta)}{\delta x^\delta B^\delta}(t+h) = \frac{t+h}{\delta x^\delta} \ .$$

Наконец, дадим нижнюю оценку интересующей нас меры. Воспользуемся тем, что на достаточно большом множестве $\ell_{at}(s,u) = u$. Имеем по определению B и (41)

$$\mu\left\{\frac{r\ell_{at}(s,u)}{B(\lambda a)^{1/\delta}} \geq x, u \leq ha\right\} \geq \mu\left\{\frac{ru}{B(\lambda a)^{1/\delta}} \geq x, s \in [0, at-u], u \leq ha\right\}$$

$$\geq \ \mathbb{P}\left\{\frac{RU}{B(\lambda a)^{1/\delta}} \geq x, U \leq ha\right\} \cdot \lambda \cdot (t-h)a \succeq \frac{t-h}{\delta x^\delta} \ .$$

□

6.2 Случай с доминирующей длительностью обслуживания

Будем доказывать предельную теорему для Z в случае $\gamma < \delta \leq 2$, а нормировку выберем по формуле

$$b = B(\lambda a)^{1/\gamma}, \qquad (42)$$

bweak_stu

где постоянная B определяется соотношением $B^\gamma = c_U \, \mathbb{E}(R^\gamma)$. Опять-таки при $\delta > \gamma$ соответствующее ожидание заведомо конечно.

Мы не будем доказывать сходимость всех конечномерных распределений к распределениям устойчивого процесса, а ограничимся только сходимостью одномерных.

prop:weak_stu

Предложение 6.2 *Если $\gamma < \delta \leq 2$, $a \to \infty, a\lambda \to \infty$, и выполнено условие низкой интенсивности обслуживания:*

$$\frac{\lambda}{a^{\gamma-1}} \to 0, \qquad (43)$$

slow_rate

то при нормировке (42) *в непрерывной модели*

$$Z(t) \Rightarrow \mathcal{S}(t, 0, \gamma) \qquad \forall\, t \in [0,1].$$

Доказательство: Напомним, что

$$Z(t) = \int_{\mathcal{R}} \frac{r\ell_{at}(s,u)}{B(a\lambda)^{1/\gamma}}\, d\tilde{N},$$

где $\ell_{at}(s,u)$ – ядро из (27).

Будем использовать следствие 1.5 предложения 1.4. Нужно проверить предельные соотношения (16) и (17), а также равномерную оценку (20). Ввиду положительности интегрируемых функций соотношение (17) тривиально. Поэтому мы сосредоточимся на проверке (16). Равномерная оценка (20) устанавливается теми же выкладками.

Нам нужно проверить, что

$$\mu \left\{ \frac{r\ell_{at}(s,u)}{B(\lambda a)^{1/\gamma}} \geq x \right\} \to t\, x^{-\gamma}, \qquad a \to \infty.$$

По аналогии с (41) мы на этот раз имеем

$$\mathbb{P}(RU \geq x) = \mathbb{E}_R \mathbb{P}(U \geq \frac{x}{R}) \sim \mathbb{E} \frac{c_U R^\gamma}{\gamma x^\gamma} = \frac{c_U \mathbb{E}(R^\gamma)}{\gamma x^\gamma}\ . \tag{44}$$

rugamma

Мы снова покажем, что можно отбросить зону $(u > ha)$ для сколь угодно малого, но фиксированного $h > 0$. Как и прежде, будем пользоваться оценкой длины носителя функции $\ell_{at}(\cdot,u)$ величиной

$$u + at = u + ah\,\frac{t}{h} \leq (1 + \frac{t}{h})u := const \cdot u.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
\mu\left\{\ell_{at}(\cdot,u) > 0, u > ha\right\} &\leq \lambda \cdot const \cdot \mathbb{E}\left(U \mathbf{1}_{U > ha}\right) \\
&= const\ \cdot \lambda \cdot (ha)^{1-\gamma} \\
&= const\ \cdot z,
\end{aligned}$$

где $z = \frac{\lambda}{a^{\gamma-1}}$ – соотношение из (43), стремящееся к нулю. Мы видим, что полученная оценка стремится к нулю, следовательно мера изучаемого множества пренебрежима.

Теперь перейдем к основной зоне $(u \leq ha)$ с малым h. Начнем с верхней оценки интересующей нас меры. Поскольку $\ell_{at}(s,u) \leq u$, то из неравенства $\frac{r\ell_{at}(s,u)}{B(\lambda a)^{1/\gamma}} \geq x$ следует $ru \geq xB(\lambda a)^{1/\gamma}$. С другой стороны, при фиксированных

r, u, t длина носителя функции $\ell_{at}(\cdot, u)$ по переменной s не превосходит $at + u \le (t+h)a$. Значит,

$$\mu\left\{\frac{r\ell_{at}(s,u)}{B(\lambda a)^{1/\gamma}} \ge x, u \le ha\right\} \le \mathbb{P}\left(RU \ge xB(\lambda a)^{1/\gamma}\right) \cdot \lambda \cdot (t+h)a.$$

Воспользуемся оценкой (44) и определением константы B. В результате приходим к нужной оценке

$$\mu\left\{\frac{r\ell_{at}(s,u)}{B(\lambda a)^{1/\delta}} \ge x, u \le ha\right\} \preceq \frac{c_U \mathbb{E}(R^\gamma)}{\gamma x^\gamma B^\gamma(\lambda a)} \cdot \lambda \cdot (t+h)a = \frac{c_U \mathbb{E}(R^\gamma)}{\gamma x^\gamma B^\gamma}(t+h) = \frac{t+h}{\gamma x^\gamma}.$$

Наконец, дадим нижнюю оценку интересующей нас меры. Воспользуемся тем, что на достаточно большом множестве $\ell_{at}(s,u) = u$. Имеем с учетом (44)

$$\begin{aligned} &\mu\left\{\frac{r\ell_{at}(s,u)}{B(\lambda a)^{1/\gamma}} \ge x, u \le ha\right\} \ge \mu\left\{\frac{ru}{B(\lambda a)^{1/\gamma}} \ge x, s \in [0, at-u], u \le ha\right\} \\ \ge \ &\mathbb{P}\left\{\frac{RU}{B(\lambda a)^{1/\gamma}} \ge x, U \le ha\right\} \cdot \lambda \cdot (t-h)a. \end{aligned}$$

Выберем две константы: малую r_0 и большую M и заметим, что в силу (43)

$$\frac{(\lambda a)^{1/\gamma}}{r} \ll ha$$

равномерно по $r \ge r_0$. Поэтому

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left\{\frac{RU}{B(\lambda a)^{1/\gamma}} \ge x, U \le ha\right\} \\ = \ & \mathbb{E}_R \mathbb{P}_U \left\{\frac{xB(\lambda a)^{1/\gamma}}{R} \le U \le ha\right\} \\ \ge \ & \mathbb{E}_R \mathbf{1}_{R \ge r_0} \mathbb{P}_U \left\{\frac{xB(\lambda a)^{1/\gamma}}{R} \le U \le \frac{MxB(\lambda a)^{1/\gamma}}{R}\right\} \\ \sim \ & \mathbb{E}_R \mathbf{1}_{R \ge r_0} (1 - M^{-\gamma}) \frac{c_U}{\gamma} \left(\frac{xB(\lambda a)^{1/\gamma}}{R}\right)^{-\gamma} \\ = \ & \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{R \ge r_0} R^\gamma\right)(1 - M^{-\gamma}) \frac{c_U}{\gamma\ B^\gamma} x^{-\gamma} (\lambda a)^{-1}. \end{aligned}$$

Соединяя с результатом предыдущей оценки и переходя к пределам по r_0, M, h, получим оценку вида $\mathbb{E}\left(R^\gamma\right) \frac{c_U}{\gamma\ B^\gamma}\ t\, x^{-\gamma}$. Остается лишь воспользоваться определением константы B. $\square$

7 Предельные теоремы о сходимости к телеком-процессам

В этом разделе рассматриваются оригинальные предельные теоремы из [1], в которых предельные процессы не относятся к какому-то широко известному в теории предельных теорем классу, а всего лишь записываются как интегралы по устойчивой или пуассоновской случайной мере. В [1] такие процессы названы телеком-процессами – по области моделируемых явлений.

7.1 Сходимость к устойчивому телеком-процессу

Будем доказывать предельную теорему для нагрузки Z в случае $\gamma < \delta < 2$, а нормировку выберем по формуле

$$b = B\lambda^{1/\delta} a^{(\delta+1-\gamma)/\delta}, \tag{45}$$

bweak_tel

где постоянная B определяется соотношением $B^\delta = \frac{c_R c_U}{\delta}$.

Мы не будем доказывать сходимость всех конечномерных распределений к распределениям устойчивого процесса, а ограничимся только сходимостью одномерных.

prop:weak_tel

Предложение 7.1 *Если $1 < \gamma < \delta < 2$, $a \to \infty, a\lambda \to \infty$, и выполнено условие высокой интенсивности обслуживания:*

$$\frac{\lambda}{a^{\gamma-1}} \to \infty, \tag{46}$$

fast_rate

то при нормировке (45) в непрерывной модели

$$Z(t) \Rightarrow \mathcal{Z}_{\gamma,\delta}(t) \qquad \forall t \in [0,1],$$

где процесс $\mathcal{Z}_{\gamma,\delta}(t)$ записывается в виде интеграла

$$\mathcal{Z}_{\gamma,\delta}(t) = \int\int \ell_t(s,u) M(ds,du).$$

Здесь $\ell_t(s,u)$ – ядро из (27), а M – δ-устойчивая случайная мера с интенсивностью $u^{-\gamma-1} ds du$, отвечающая центрированному одностороннему устойчивому распределению $\mathcal{S}(1,0,\delta)$.

Доказательство: Напомним, что

$$Z(t)=\int_{\mathcal{R}}\frac{r\ell_{at}(s,u)}{B\lambda^{1/\delta}a^{(\delta+1-\gamma)/\delta}}\ d\tilde{N}.$$

С другой стороны, в силу (21) величина $\mathcal{Z}_{\gamma,\delta}(t)$ имеет устойчивое распределение $\mathcal{S}(\sigma_t,0,\delta)$, где параметр σ_t находится по формуле

$$\sigma_t=\sigma_t(\gamma,\delta)=\|\ell_t\|_\delta^\delta\ =\int\int\ell_t(s,u)^\delta\ \frac{dsdu}{u^{\gamma+1}}\,.$$

Поэтому при проверке сходимости $Z(t)\Rightarrow\mathcal{Z}_{\gamma,\delta}(t)$ мы можем пользоваться критериями сходимости распределений пуассоновских интегралов к устойчивому закону.

Будем использовать следствие 1.5 предложения 1.4. Нужно проверить предельные соотношения (16) и (17), а также равномерную оценку (20). Ввиду положительности интегрируемых функций соотношение (17) тривиально. Поэтому мы сосредоточимся на проверке (16). Равномерная оценка (20) устанавливается теми же выкладками.

Нам нужно проверить, что при каждом $x>0$ верно

$$\mu\left\{\frac{r\ell_{at}(s,u)}{B\lambda^{1/\delta}a^{(\delta+1-\gamma)/\delta}}\geq x\right\}\to\sigma_t\,x^{-\delta},\qquad a\to\infty. \tag{47}$$ limmu_tel

Не слишком строгие рассуждения таковы. Применяя асимптотику больших уклонений R, найдем

$$\begin{aligned}\mu\left\{\frac{r\ell_{at}(s,u)}{B\lambda^{1/\delta}a^{(\delta+1-\gamma)/\delta}}\geq x\right\} &= \lambda\int ds\ \mathbb{E}_U\mathbb{P}\left\{R\geq\frac{B\lambda^{1/\delta}a^{(\delta+1-\gamma)/\delta}x}{\ell_{at}(s,U)}\right\}\\ &\sim \lambda\int ds\ \mathbb{E}_U\frac{c_R}{\delta}\cdot\left(\frac{B\lambda^{1/\delta}a^{(\delta+1-\gamma)/\delta}x}{\ell_{at}(s,U)}\right)^{-\delta}\\ &= \frac{c_R}{B^\delta\delta}\ \int ds\ \mathbb{E}_U\left(\frac{\ell_{at}(s,U)^\delta}{a^{\delta+1-\gamma}}\right)\ \cdot x^{-\delta}.\end{aligned}$$

Далее сделаем замены переменной $s=a\tilde{s}$, $u=a\tilde{u}$ и воспользуемся формулой самоподобия

$$\ell_{at}(s,u)=a\,\ell_t(\tilde{s},U/a). \tag{48}$$ ell_ssim

Получим

$$\begin{aligned}
\int ds\ \mathbb{E}_U \left(\frac{\ell_{at}(s,U)^\delta}{a^{\delta+1-\gamma}}\right) &= \int d\tilde{s}\ \mathbb{E}_U \left(\frac{\ell_t(\tilde{s},U/a)^\delta}{a^{-\gamma}}\right) \\
&= \int d\tilde{s} \int F_U(du) \left(\frac{\ell_t(\tilde{s},u/a)^\delta}{a^{-\gamma}}\right) \\
&\sim \int d\tilde{s} \int \frac{c_U du}{u^{1+\gamma}} \left(\frac{\ell_t(\tilde{s},u/a)^\delta}{a^{-\gamma}}\right) \\
&= c_U \int d\tilde{s} \int \frac{d\tilde{u}}{\tilde{u}^{1+\gamma}} \left(\ell_t(\tilde{s},\tilde{u})^\delta\right).
\end{aligned}$$

Определение постоянной B позволяет избавиться от лишних констант и прийти к (47). $\square$

Замечание 1. Нуждается в пояснении роль условия (46). Зафиксируем "приведенные" параметры $\tilde{s}, \tilde{u}$. Им соответствует исходное выражение $\ell_{at}(a\tilde{s}, a\tilde{u})$, имеющее порядок роста a. Таким образом барьер, с которым сравнивается величина R, имеет порядок $\frac{\lambda^{1/\delta} a^{(\delta+1-\gamma)/\delta}}{a} = \left(\lambda a^{-(\gamma-1)}\right)^{1/\delta}$. Последнее выражение стремится к бесконечности как раз, если выполнено (46).

Замечание 2. Параметр σ_t зависит от t нелинейно. Это показывает, что телеком-процесс $\mathcal{Z}_{\gamma,\delta}(t)$ не является устойчивым процессом с однородными независимыми приращениями.

Замечание 3. Поясним, почему интеграл в определении σ_t конечен. Разбивая интеграл, как обычно, на две области, получим (при $\delta > \gamma$)

$$\int \int_{\{u \le t\}} \ell_t(s,u)^\delta \ \frac{dsdu}{u^{\gamma+1}} \le 2t \int_{\{u \le t\}} \ \frac{u^\delta du}{u^{1+\gamma}} < \infty,$$

$$\int \int_{\{u \ge t\}} \ell_t(s,u)^\delta \ \frac{dsdu}{u^{\gamma+1}} \le 2t^\delta \int_{\{u \ge t\}} \ \frac{du}{u^{\gamma}} < \infty.$$

7.2 Сходимость к пуассоновскому телеком-процессу

В этом разделе рассматривается предельная теорема для процесса нагрузки Z в случае критической интенсивности обслуживания

$$\frac{\lambda}{a^{\gamma-1}} \to L, \qquad 0 < L < \infty. \tag{49}$$ crit_rate

Мы не будем доказывать сходимость всех конечномерных распределений к распределениям предельного процесса, а ограничимся только сходимостью одномерных.

prop:weak_telc **Предложение 7.2** *Если $1 < \gamma < \delta \le 2$, $a \to \infty$, и выполнено условие критической интенсивности (49), то в непрерывной модели при нормировке $b = a$ верно*

$$Z(t) \Rightarrow Y_{\gamma,R}(t) \qquad \forall t \in [0,1],$$

где процесс $Y_{\gamma,R}(t)$ записывается в виде интеграла

$$Y_{\gamma,R}(t) = \int_{\mathcal{R}} r\, \ell_t(s,u) \tilde{N}'(ds,du,dr).$$

Здесь $\ell_t(s,u)$ – ядро из (27), а $\tilde{N}'$ – центрированная пуассоновская случайная мера с интенсивностью

$$\nu(ds,du,dr) = \frac{c_U\ L\ dsdu}{u^{1+\gamma}}\ F_R(dr).$$

Доказательство: Напомним, что

$$Z(t) = \int_{\mathcal{R}} \frac{r\ell_{at}(s,u)}{a}\ d\tilde{N}.$$

Нам нужно всего лишь проверить, что при каждом $x > 0$ верно

$$\mu\left\{\frac{r\ell_{at}(s,u)}{a} \ge x\right\} \to \nu\left\{r\ell_t(s,u) \ge x\right\}, \qquad a \to \infty. \tag{50}$$ limmu_telc

Действительно, применяя, как и в предыдущем пункте, замены переменной $s = a\tilde{s}$, $u = a\tilde{u}$ и формулу самоподобия (48), найдем

$$\begin{aligned}
\mu\left\{\frac{r\ell_{at}(s,u)}{a} \ge x\right\} &= \lambda\, \mathbb{E}_R \int ds\, \mathbb{P}\left\{r\, \ell_{at}(s,U) \ge ax\right\} \\
&= \lambda a\, \mathbb{E}_R \int d\tilde{s}\, \mathbb{P}\left\{r\, \ell_t(\tilde{s},U/a) \ge x\right\}. \\
&= \lambda a\, \mathbb{E}_R \int d\tilde{s} \int \mathbf{1}_{\{r\, \ell_t(\tilde{s},u/a) \ge x\}} f_U(u) du \\
&= \lambda a^2\, \mathbb{E}_R \int d\tilde{s} \int \mathbf{1}_{\{r\, \ell_t(\tilde{s},\tilde{u}) \ge x\}} f_U(a\tilde{u}) d\tilde{u}.
\end{aligned}$$

Далее используем асимптотику больших уклонений U,

$$\begin{aligned} & \int \mathbf{1}_{\{r\,\ell_t(\tilde{s},\tilde{u})\geq x\}} f_U(a\tilde{u})d\tilde{u} \sim \int \mathbf{1}_{\{r\,\ell_t(\tilde{s},\tilde{u})\geq x\}} c_U(a\tilde{u})^{-1-\gamma}d\tilde{u} \\ = \quad & c_U a^{-1-\gamma} \int \mathbf{1}_{\{r\,\ell_t(\tilde{s},\tilde{u})\geq x\}} \frac{d\tilde{u}}{\tilde{u}^{1+\gamma}}. \end{aligned}$$

Получим

$$\begin{aligned} & \mu\left\{\frac{r\ell_{at}(s,u)}{a} \geq x\right\} \sim c_U\lambda a^{1-\gamma}\,\mathbb{E}_R \int \mathbf{1}_{\{r\,\ell_t(\tilde{s},\tilde{u})\geq x\}} \frac{d\tilde{u}}{\tilde{u}^{1+\gamma}} \\ \sim \quad & c_U\,L\,\mathbb{E}_R \int \mathbf{1}_{\{r\,\ell_t(\tilde{s},\tilde{u})\geq x\}} \frac{d\tilde{u}}{\tilde{u}^{1+\gamma}} \\ = \quad & \nu\left\{r\ell_t(s,u) \geq x\right\}. \end{aligned}$$

Соотношение (50) доказано. □

Замечание. Если $1 < \delta < \gamma \leq 2$, то и в случае критической интенсивности будет применимо предложение 6.1 о сходимости к δ-устойчивому процессу.

8 Многомерное обобщение

8.1 Определение многомерной модели

В этом разделе мы вкратце рассмотрим многомерное обобщение предыдущих результатов, следуя работе Кая, Лескелы, Норроса и Шмидта [2]. Речь идет о процессах с *многомерным временем*, т.е. о случайных полях.

Формальная многомерная модель обслуживания на основе случайных мер Пуассона выглядит следующим образом. Положим $\mathcal{R} = \{(s,v)\} = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$. Каждая точка (s,v) имеет смысл элементарного процесса, который протекает в окрестности точки s, а v определяет масштаб территории, охваченной процессом. Подчеркнем, что $\mathbb{R}^d$ играет ту же роль, которую в исходной модели играло время, а v соответственно обобщает понятие длительности обслуживания. В новой модели не будет аналога случайной интенсивности обслуживания R.

Исходными параметрами для описания работы узла являются

- $\lambda > 0$ – интенсивность потока процессов обслуживания;

- $F_V(dv)$ – распределение масштаба охвата;
- множество $C \subset \mathbb{R}^d$, определяющее *форму* части пространства, охваченной элементарным процессом.

Определим на $\mathcal{R}$ меру интенсивности

$$\mu(ds, dv) = \lambda ds\, F_V(dv)\ .$$

Пусть N – соответствующая ей случайная мера Пуассона. Реализации (множества пар) можно рассматривать как возможные траектории работы узла, а все характеристики этой работы выражаются в виде соответствующих интегралов.

В модели будет присутствовать скалярный масштабный параметр $\rho > 0$, имеющий примерно тот же смысл, что параметр a из исходной модели.

Нам важны: мгновенная нагрузка в точке пространства $t \in \mathbb{R}^d$ – это количество элементарных процессов, захватывающих точку:

$$J(t) = \int_{\mathcal{R}} \mathbf{1}_{\{t\in\left(s+(\rho v)^{1/d}C\right)\}} dN$$

и интегральная (накопленная) нагрузка на множестве $A \subset \mathbb{R}^d$

$$J^*(A) \;\;=\;\; \int_A J(\tau)d\tau = \int_{\mathcal{R}} \left|A \cap \{s + (\rho v)^{1/d}C\}\right| dN.$$

Соответственно, центрированная и нормированная интегральная нагрузка будет иметь вид

$$Z^{(d)}(A) := \frac{1}{b}\left(J^*(A) - \mathbb{E}J^*(A)\right) = \frac{1}{b}\int_{\mathcal{R}} \left|A \cap \{s + (\rho v)^{1/d}C\}\right| d\tilde{N}.$$

Функции $J(t)$, $J^*(A)$ и $Z^{(d)}(A)$ являются стационарными, т.е. их распределение не меняется при сдвиге на любой фиксированный вектор благодаря инвариантности меры μ по переменной s.

Заменяя индикаторы множеств функциями ϕ достаточно общего вида, можно определить

$$J^*(\phi) \;\;=\;\; \int_{\mathbb{R}^d} \phi(\tau)J(\tau)d\tau = \int_{\mathcal{R}}\int_{\{s+(\rho v)^{1/d}C\}} d\tau dN.$$

Это выражение, как и его последующие аналоги, *линейно* по аргументу ϕ. Именно этот, несколько более общий объект и исследуется в работе [2].

8.2 Связь с одномерной моделью

Покажем, почему при $R = 1$ одномерная модель получается как частный случай многомерной. Поскольку некоторые обозначения параметров дублируются, то мы пишем $b^{(d)}, \lambda^{(d)}$ для соответствующих параметров многомерной модели, взятой при $d = 1$. прежде всего, положим $C = [0, 1]$ и $V = U$. С обычной заменой переменной $\tilde{s} = s/a$ получим

$$\begin{aligned} W^*(at) &= \int_{\mathcal{R}} \big|[0, at] \cap [s, s+u]\big| \, d\tilde{N}(s, u) = a \int_{\mathcal{R}} \big|[0, t] \cap [\tilde{s}, \tilde{s} + u/a]\big| \, d\tilde{N}(s, u) \\ &= a \int_{\mathcal{R}} \big|[0, t] \cap (\tilde{s} + a^{-1}C)\big| \, d\tilde{N}(\tilde{s}, u) = aJ^*([0, t]), \end{aligned}$$

при условии, что $\rho = a^{-1}$ и мера интенсивности $\tilde{N}$ в последней формуле равна $\lambda a d\tilde{s} F_U(du)$. Таким образом,

$$Z(t) = \frac{1}{b} \, W^*(at) = Z^{(d)}([0, t])$$

если

$$\rho = a^{-1}, \;\; \lambda^{(d)} = \lambda a, \;\; \text{и } b^{(d)} = ba^{-1}. \tag{51}$$

d_equal_one

8.3 Связь многомерных результатов с результатами одномерной модели

Из приведенного выше соответствия становится ясно, что при $d = 1$ результаты [2] должны давать то же самое, что [1] дает при $\delta = 2$ (так как R – константа).

И действительно, теорема 1, теорема 2(i), теорема 2(ii), теорема 2(iii) из [2] родственны соответственно предложению 5.1 [20] (сходимость к винеровскому процессу), предложению 5.3 [21] (сходимость к дробному броуновскому движению), предложению 7.2 [22] (сходимость к пуассоновскому телеком-процессу), и предложению 6.2 [23] (сходимость к устойчивому процессу).

Рассмотрим выражения, определяющие режим высокой, низкой, или критической интенсивности. В [2] режим определяется выражением $\lambda^{(d)} \bar{F}_\rho(1) =$

---

[20] См. [1], теорема 4i.
[21] См. [1], теорема 2i.
[22] См. [1], теорема 1i.
[23] См. [1], теорема 3i.

$\lambda^{(d)}(1 - F_V(1/\rho)$. При сравнении с одномерным случаем $F_V = F_U$ и $1 - F_V(1/\rho) \approx \rho^\gamma$. Получаем что режим определяется выражением

$$\lambda^{(d)}\rho^\gamma = \lambda a \cdot a^{-\gamma} = \frac{\lambda}{a^{\gamma-1}} \ ,$$

как это и должно быть.

Для полноты картины убедимся в идентичности порядка нормировок в теоремах.

В первом случае

$$ab^{(d)} \approx a\rho {\lambda^{(d)}}^{1/2} = a\ a^{-1}(\lambda a)^{1/2} = (\lambda a)^{1/2} \approx b.$$

Во втором случае

$$ab^{(d)} \approx a\left(\lambda^{(d)}\bar{F}_\rho(1)\right)^{1/2} \approx a\left(\lambda a\ a^{-\gamma}\right)^{1/2} = \left(\lambda a^{3-\gamma}\right)^{1/2} \approx b.$$

В третьем случае

$$ab^{(d)} = a \cdot 1 = b.$$

В четвертом случае в определении нормировки фигурирует более сложная величина $(1/\bar{F}_\rho)^{-1}(\gamma\lambda^{(d)})$, причем -1 в показателе степени означает обратную функцию. Решая относительно x уравнение

$$\gamma\lambda^{(d)} = \frac{1}{\bar{F}_\rho(x)} = \frac{1}{\bar{F}(x/\rho)} \approx \frac{1}{(x/\rho)^{-\gamma}} = \frac{x^\gamma}{\rho^\gamma},$$

найдем $(1/\bar{F}_\rho)^{-1}(\gamma\lambda^{(d)}) = x \approx \rho[\lambda^{(d)}]^{1/\gamma}$. Отсюда

$$ab^{(d)} \approx a(1/\bar{F}_\rho)^{-1}(\gamma\lambda^{(d)}) \approx a\ \rho\ [\lambda^{(d)}]^{1/\gamma} = [\lambda^{(d)}]^{1/\gamma} = (\lambda a)^{1/\gamma} \approx b.$$

8.4 Многомерные обобщения понятий винеровского процесса и дробного броуновского движения

8.4.1 Многомерный аналог винеровского процесса

В теореме 1 из [2] в пределе появляется обобщенный случайный процесс $W(\phi), \phi \in L_1(\mathbb{R}^d) \cap L_2(\mathbb{R}^d)$ с нулевым средним и корреляцией

$$\mathbb{E}W(\phi)W(\psi) = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(t)\psi(t)dt. \qquad (52)$$

d_cov_nor

Подчеркнем, что в соответствии с (23) он может быть получен просто как интеграл по белому шуму на $\mathbb{R}^d$ с интенсивностью, равной мере Лебега.

$$W(\phi = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(t) dM.$$

Связь с винеровским процессом состоит в том, что при $d = 1$ процесс $\tilde{W}(t) := W(\mathbf{1}_{[0,t]})$ будет винеровским.

8.4.2 Многомерный аналог дробного броуновского движения

В теореме 2(i) из [2] в пределе появляется обобщенный случайный процесс $W(\phi), \phi \in L_1(\mathbb{R}^d) \cap L_2(\mathbb{R}^d)$ с нулевым средним и корреляцией

$$\mathbb{E}W(\phi)W(\psi) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \phi(t_1)\psi(t_2) K_{\gamma,C}(t_1 - t_2) dt_1 dt_2,$$

Причем в наиболее интересном сферически симметричном случае согласно формуле (17) из [2] ядро K имеет простой вид и получается

$$\begin{aligned} \mathbb{E}W_H(\phi)W_H(\psi) &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \phi(t_1)\psi(t_2) |t_1 - t_2|^{-(\gamma-1)d} dt_1 dt_2, \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \phi(t_1)\psi(t_2) |t_1 - t_2|^{-(2-2H)d} dt_1 dt_2, \end{aligned}$$

где, как и в одномерном случае, $H = (3-\gamma)/2 \in (1/2, 1)$. Обобщенный процесс W_H может рассматриваться как аналог дробного броуновского движения.

Прежде всего установим связь с формулой (52). Переходя к преобразованиям Фурье[24], найдем

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \phi(t_1)\psi(t_2) |t_1 - t_2|^{-(2-2H)d} dt_1 dt_2 = const \ \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\phi}(u) \overline{\hat{\psi}(u)} \ |u|^{-(2H-1)d} du.$$

При $H = 1/2$ получим с точностью до константы как раз

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{\phi}(u) \overline{\hat{\psi}(u)} du = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(t)\psi(t) dt.$$

Таким образом, дело сводится к (52).

[24] Здесь можно использовать тот факт, что преобразованием Фурье функции $|t|^{-\beta}$ является функция $|u|^{-(d-\beta)}$.

С другой стороны, в одномерном случае при $\tilde{W}(t) := W_H(\mathbf{1}_{[0,t]})$ получаем

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|\tilde{W}(t)|^2 &= \int_0^t \int_0^t |t_1 - t_2|^{-(2-2H)} dt_1 dt_2, \\
&= 2 \int_0^t \int_0^{t_1} (t_1 - t_2)^{-(2-2H)} dt_2 dt_1 \\
&= 2 \int_0^t \int_0^{t_1} v^{-(2-2H)} dv dt_1 \\
&= 2 \int_0^t \frac{t_1^{-(1-2H)}}{2H-1}\, dt_1 = \frac{t^{2H}}{H(2H-1)}\ .
\end{aligned}$$

При $s \le t$ найдем

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|\tilde{W}(t) - \tilde{W}(s)|^2 &= \mathbb{E}(W_H(\mathbf{1}_{[0,t]}) - W_H(\mathbf{1}_{[0,s]}))^2 \\
&= \mathbb{E}W_H(\mathbf{1}_{(s,t]})^2 = \mathbb{E}W_H(\mathbf{1}_{(0,t-s]})^2 = \frac{(t-s)^{2H}}{H(2H-1)}\ ,
\end{aligned}$$

и это приводит нас к корреляционной функции дробного броуновского движения (7) с точностью до константы.

Список литературы

KT [1] Kaj I., Taqqu M. (2008) Convergence to fractional Brownian Motion and to the Telecom process: the integral representation approach. In: *In and out of Equilibrium. II.*, ser.: Progress in Probability, vol.60, 383–427.

KLNS [2] Kaj I., Leskelä L., Norros I., Schmidt V. (2007) Scaling limits for random fields with long-range dependence, *Annals of Probability*, vol.35, 528–550.

Bil [3] Биллингсли П. *Сходимость вероятностных мер*, изд-во Мир, 1977.

Zol [4] Золотарев В.М. *Одномерные устойчивые распределения*, изд-во Наука, 1983.

IL [5] Ибрагимов И.А., Линник Ю.В. *Независимые и стационарно связанные величины*, изд-во Наука, 1965.

Lif95 [6] Лифшиц М.А. *Гауссовские случайные функции*, изд-во ТВиМС, Киев, 1995.

Lif07st [7] Лифшиц М.А. *Устойчивые распределения, случайные величины и процессы*, СПбГУ, 2007.