1 分位数Granger因果检验实现原理

1.1 各变量含义

待估计方程：

$$Q_{Y_t}\left[\tau \mid Z_{t-1}\right]=a(\tau)+Y_{t-1, p}^{\prime} \alpha(\tau)+X_{t-1, q}^{\prime} \beta(\tau)=Z_{t-1}^{\prime} \theta(\tau)$$

其中，$a(\tau)$为截距项，$\alpha(\tau)$和$\beta(\tau)$为回归系数列向量；$\theta(\tau)$为回归系数向量，

$$a(\tau)=\left[alpha(\tau), \alpha(\tau)^{\prime}, \beta(\tau)^{\prime}\right]^{\prime}$$

$$Y_{t-1, p}^{\prime}=\left(Y_{t-1}, \cdots, Y_{t-p}\right)$$

$$X_{t-1, q}^{\prime}=\left(X_{t-1}, \cdots, X_{t-q}\right)$$

$$Z_{t-1}^{\prime}=\left(Y_{t-1, p}^{\prime}, X_{t-1, q}^{\prime}\right)$$

Wald检验量为：$\mathrm{W}_T(\tau)=T \frac{\hat{\beta}(\tau)^{\prime} \hat{\Sigma}(\tau)^{-1} \hat{\beta}(\tau)}{\tau(1-\tau)}$

Sup-Wald检验量为：$\sup W_T=\sup _{i=1, \cdots, n} W_{T\left(\tau_i\right)}$

> Python在进行分位数回归时，方差默认为核估计

1.2 分位数方差核密度估计原理（基于Eviews帮助文件）

独立但不同分布假设下的参数渐近分布：

当分位数密度函数独立但不同分布即与解释变量X相关时，$\sqrt{T}(\hat{\beta}(\tau)-\beta(\tau))$的渐近分布服从Huber sandwich形式：

$$\sqrt{T}\left(\hat{\beta}_{(\tau)}-\beta_{(\tau)}\right) \sim N\left(0, \tau(1-\tau) H(\tau)^{-1} J H(\tau)^{-1}\right)$$

其中T为样本容量，τ为分位点，$\hat{\beta}_{(\tau)}$为τ分位点下回归系数估计量，N为正态分布，X_i为解释变量矩阵；

$$J=\lim _{n \rightarrow \infty}\left(\sum_i \frac{X_i X_i^{\prime}}{T}\right)=\lim _{n \rightarrow \infty}\left(\frac{X X}{T}\right)$$

$$H(\tau)=\lim _{T \rightarrow \infty}\left(\sum_i X_i X_i^{\prime} f_i\left(q_i(\tau)\right) / T\right)$$

$f_i\left(q_i(\tau)\right)$是个体$i$在$\tau$分位点上的条件密度函数。使用核密度进行估计：

$$\hat{H}(\tau)=(1 / T) \sum_{i=1}^T c_T^{-1} K\left(\hat{u}_{(\tau) t} / c_T\right) X_i X_i^{\prime}$$

其中$\hat{\mathcal{U}}_{(\tau) i}$表示分位数回归的残差；$c_T$为带宽，估计原理见下文；表示$\kappa$核密度函数。EViews中可以选择的核密度函数有Epanechnikov核函数（默认）、均匀 (Uniform) 核函数、三角(Triangular)核函数、二权(Biweight)核函数、三权(Triweight)核函数、正态(Normal)核函数、余弦(Cosinus)核函数，具体函数形式见图。

表 27.1　常用的核函数

核函数名称	核函数的数学形式	δ
均匀核(uniform or rectangular)	$\frac{1}{2}\cdot\mathbf{1}(\|z\|<1)$	1.351 0
三角核(triangular or Bartlett)	$(1-\|z\|)\cdot\mathbf{1}(\|z\|<1)$	—
伊番科尼可夫核(Epanechnikov)① 或二次核(quadratic)	$\frac{3}{4}(1-z^2)\cdot\mathbf{1}(\|z\|<1)$	1.718 8
四次核(quartic) 或双权核(biweight)	$\frac{15}{16}(1-z^2)^2\cdot\mathbf{1}(\|z\|<1)$	2.036 2
三权核(Triweight)	$\frac{35}{32}(1-z^2)^3\cdot\mathbf{1}(\|z\|<1)$	2.312 2
三三核(Tricubic)	$\frac{70}{81}(1-\|z\|^3)^3\cdot\mathbf{1}(\|z\|<1)$	—
高斯核(Gaussian or Normal)	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\{-z^2/2\}$	0.776 4

注：其中 δ 为用来计算“Silverman 嵌入估计”的常数，参见下文。

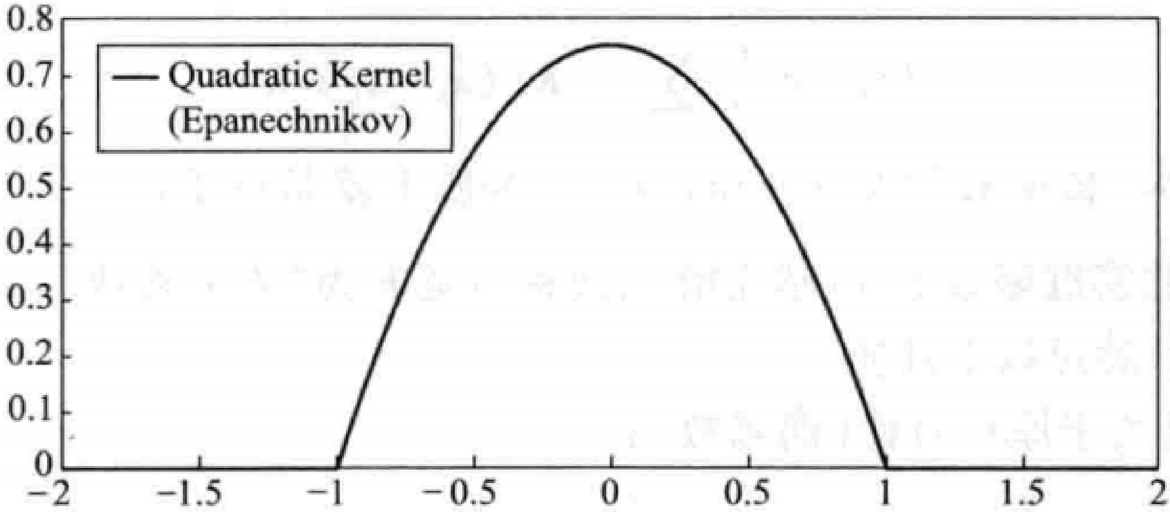

图 27.1　二次核(Epanechnikov 核)

c_T的估计原理：$c_T=\kappa\left(\Phi^{-1}\left(\tau+h_n\right)-\Phi^{-1}\left(\tau-h_n\right)\right)$

其中$\kappa=\min(s, IQR/1.34)$,IQR为四分位距，$\mathrm{IQR}=Q_3-Q_1$;s为残差的标准差；h_n是Siddiqui带宽，

$$h_n=T^{-1/3}Z_\alpha^{2/3}\left(\frac{1.5\left(\varphi\left(\Phi^{-1}(\tau)\right)\right)^2}{2\left(\Phi^{-1}(\tau)\right)^2+1}\right)^{1/3}$$

Φ表示正态分布的积累分布函数，Φ^{-1}表示正态分布的逆函数，φ表示正态分布的密度函数，$Z_\alpha=\Phi^{-1}(1-\alpha/2)$为选择的显著性水平$\alpha$对应的$Z$值。

> 文中只列出一种方差的估计原理，更多内容详见Eviews 8帮助文件