שמי: דניאל קייבנר
ת.ז: 208271773

שאלה 1:

סידור הפולינום:

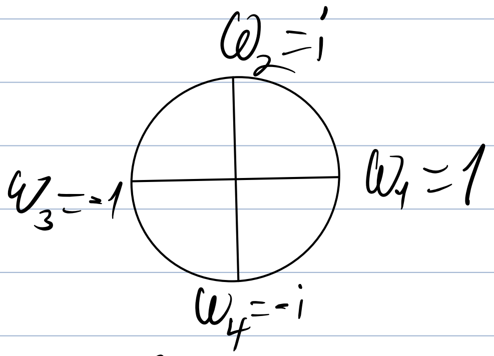
$$p(x)=x^3+2x^2-3x-1=-1-3x+2x^2+x^3$$

וקטור המקדמים:

$$(-1,-3,2,1)$$

שורשי היחידה סדר 4:

$$w_4^0=1,\quad w_4^1=i\quad w_4^2=-1\quad w_4^3=-i$$



1	i	-1	-i
-1	-3	2	1

השלב לבדוק את התשובה בפועל:

$$p(w_4^0)=1^3+2(1)^2-3\cdot1-1=-1$$

$$p(w_4^1)=i^3+2\cdot(i)^2-3\cdot i-1=-3-4i$$

$$p(w_4^2)=(-1)^3+2\cdot(-1)^2-3\cdot(-1)-1=3$$

$$p(w_4^3)=(-i)^3+2(-i)^2-3\cdot(-i)-1=-3+4i$$

$$(-1,\ -3-4i,\ 3,\ -3+4i)$$

שם: דניאל לייבנר
ת.ז: 208271775

החישובים של fft:

$$\boxed{fft((-1,-3,2,1))}$$

$n \leftarrow 4$

$\omega_4 \leftarrow e^{\frac{2\pi i}{4}}$

$\omega \leftarrow 1$

$a^{[0]} \leftarrow (-1,2)$

$a^{[1]} \leftarrow (-3,1)$

חישוב בדפים מחברת.

$y^{[0]} \leftarrow fft(a^{[0]}) \leftarrow \boxed{fft(-1,2) \leftarrow ((1,-3))}$

$y^{[1]} \leftarrow fft(a^{[1]}) \leftarrow \boxed{fft(-3,1) \leftarrow ((-2,-4))}$

$k \leftarrow 0:$

$y_0 \leftarrow (y_0^{[0]} + \omega y_0^{[1]}) \leftarrow (1+1\cdot(-2)) \leftarrow (-1)$

$y_2 \leftarrow (y_0^{[0]} - \omega y_0^{[1]}) \leftarrow (1-1\cdot(-2)) \leftarrow (3)$

$\omega \leftarrow 1\cdot e^{\frac{2\pi i}{4}} \leftarrow e^{\frac{\pi i}{2}} \leftarrow i$

$k \leftarrow 1:$

$y_1 \leftarrow (y_1^{[0]} + \omega y_1^{[1]}) \leftarrow (3+i\cdot(-4)) \leftarrow (-3-4i)$

$y_3 \leftarrow (y_1^{[0]} - \omega y_1^{[1]}) \leftarrow (3-i\cdot(-4)) \leftarrow (-3+4i)$

$\omega \leftarrow i\cdot e^{\frac{2\pi i}{4}} \leftarrow -1$

return $(y_0,y_1,y_2,y_3) \leftarrow \boxed{(-1,-3-4i,3,-3+4i)}$

לכן התוצאה הסופית היא: $\boxed{(-1,-3-4i,3,-3+4i)}$

שם: דנשה קייבנר
ת.ז.: 208271775

$$\boxed{fft((-1,2))}$$

$n \leftarrow 2$

$\omega_2 \leftarrow e^{\frac{2\pi i}{2}} \leftarrow e^{\pi i} \leftarrow -1$

$\omega \leftarrow 1$

$a^{[0]} \leftarrow (-1)$

$a^{[1]} \leftarrow (2)$

$y^{[0]} \leftarrow fft((-1)) \leftarrow (-1)$

$y^{[1]} \leftarrow fft((2)) \leftarrow (2)$

$y_0 \leftarrow (y_0^{[0]} + \omega y_0^{[1]}) \leftarrow (-1+1(2)) \leftarrow 1$

$y_1 \leftarrow (y_0^{[0]} - \omega y_0^{[1]}) \leftarrow (-1-1(2)) \leftarrow -3$

$\omega \leftarrow \omega \cdot \omega_2 \leftarrow 1$

return $\boxed{(1,-3)}$

שמי: נעם לייבנר
ת.ז.: 208271775

$$\boxed{fft((-3,1))}$$

$n \leftarrow 2$

$\omega_2 \leftarrow e^{\frac{2\pi i}{2}} \leftarrow e^{\pi i} \leftarrow -1$

$\omega \leftarrow 1$

$a^{[0]} \leftarrow (-3)$

$a^{[1]} \leftarrow (1)$

מיידי בגלל ש: $n=1$

$y^{[0]} \leftarrow fft((-3)) \leftarrow (-3)$

$y^{[1]} \leftarrow fft((1)) \leftarrow (1)$

$y_0 \leftarrow (y_0^{[0]} + \omega y_0^{[1]}) \leftarrow (-3 + 1(1)) \leftarrow -2$

$y_1 \leftarrow (y_0^{[0]} - \omega y_0^{[1]}) \leftarrow (-3 - 1(1)) \leftarrow -4$

שמי: נעם לייבנר
ת.ז.: 208271775

$\omega \leftarrow \omega \cdot \omega_2 \leftarrow -1$

$$\boxed{\text{return } (-2 \;\; -4)}$$

שם: דניאל ליבנר
ת.ז: 208271775

שאלה ב

1. נייצג את 2 המספרים (X,Y) כפולינום מסדר $\frac{n}{k}$ בבסיס בינארי ($\frac{n}{k}$ רצפי ביטים באורך k אחד, סה"כ n ביטים למספר):

$$\boxed{P(X)=\sum_{i=0}^{\frac{n}{k}-1} x_i \cdot 2^{ik}} \quad \boxed{P(Y)=\sum_{i=0}^{\frac{n}{k}-1} y_i \cdot 2^{ik}}$$

2. נייצג כל אחד מהמספרים כווקטור מקדמי הפולינום:

$$V(P(X))=(x_0,x_1,\dots,x_{\frac{n}{k}-1}) \qquad V(P(Y))=(y_0,y_1,\dots,y_{\frac{n}{k}-1})$$

3. נבצע fft על $V(P(X))$ ו- $V(P(Y))$ מסדר $\frac{2n}{k}$ כאשר שורש היחידה $\omega_{\frac{2n}{k}}=e^{\left(\frac{2\pi i}{\frac{2n}{k}}\right)}=e^{\frac{k\pi i}{n}}$

4. נכפיל בעזרת מכפלה סקלרית את $fft(V(P(x)))$ ב- $fft(V(P(y)))$

$$fft(V(P(x)))\cdot fft(V(P(y)))=fft((x_0,x_1,\dots,x_{\frac{n}{k}-1}))\cdot fft((y_0,y_1,\dots,y_{\frac{n}{k}-1}))=t$$

5. נבצע inversefft על t כדי לקבל את וקטור המקדמים $V(Z)=(z_0,z_1,\dots,z_{\frac{2n}{k}-1})$

6. נחשב את הפולינום $P(Z)=\sum_{i=0}^{\frac{2n}{k}-1} z_i \cdot 2^{ik}$.

שם: דניאל קייבר
ת.ז: 208271773

נכונות:

* נכון שהכפלה לא מגדילה את גודל המספר.

* לפי נכונות האלגוריתם

* נכון שהמספרים מיוצגים בבסיס בינארי ולכן אפשר לייצג את המספר בבסיס בינארי עם מספר ביטים שהוא כפולה של k כך שאם הוא לא כפולה של k נוסיף אפסים עד שנגיע למספר שהוא כפולה של k

שם: דניאל ליבנר
ת.ז: 208271773

סיבוכיות:

א. המרה של מספר לבסיס בינארי לוקח $\Theta(n)$ כמספר הביטים.

ב. חיבור של המספר הפולינום לוקח $\Theta(n)$ (הפרדה לk כדי ביטים ותשובה מסודרת לפי כמות הביטים)

ג. ביצוע ה fft וגם inversefft לוקח:

נכון: $\Theta(k^2)$* עלות ההכפלות הרקורסיביות

fft - $\Theta(N\lg N)$* כאשר N מספר הביטים.

לכן: $\Theta\left(k^2\cdot\frac{n}{k}\lg\frac{n}{k}\right)=\boxed{\Theta\left(kn\cdot\lg\frac{n}{k}\right)}$

לכן סה"כ נקבל:

$$\boxed{T(n)=\Theta\left(kn\cdot\lg\frac{n}{k}\right)}$$

3. נציב $k=\lg n$ לכן:

$$T(n)=\Theta\left(kn\cdot\lg\frac{n}{k}\right)=\Theta\left(n\lg n\cdot\lg\left(\frac{n}{\lg n}\right)\right)=$$

$$=\Theta\left(n\lg n(\lg n-\lg\lg n)\right)=\boxed{\Theta\left(n\lg^2 n\right)}$$

שם: דניאל לייבנר
ת.ז: 208271775

שאלה 3.

סעיף ג. כאשר $n>1$ מתקיים:

לפי סעיף ב:

$$C_{n\times n}=\begin{pmatrix} r_{\frac{n}{2}\times\frac{n}{2}} & s_{\frac{n}{2}\times\frac{n}{2}} \\ t_{\frac{n}{2}\times\frac{n}{2}} & u_{\frac{n}{2}\times\frac{n}{2}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} P_4+P_5+P_6-P_2 & P_1+P_2 \\ P_3+P_4 & P_1+P_5-P_3-P_7 \end{pmatrix}$$

כאשר כל P_1 עד P_7 הם מסדר $\frac{n}{2}\times\frac{n}{2}$

לפי סעיף ה' חישוב P_1 עד P_7 לוקח
זמן Θ $T(n)=7\left(\left(\frac{n}{2}\right)^2\right)$

שם: דנשם קייבנר
ת.ז: 208271775

שאלה 3.

אלגוריתם ההכפלה (x,y):

אם $n=1$:

אז תישוב כפל מטריצות יהיה פשוט $x \cdot y$

אם $n \neq 1$:

לפי סעיף ב:

$P_1 = a \times (g - h) =$ אלגוריתם הכפלה $(a, g-h)$

$P_2 = (a + b) \times h =$ אלגוריתם הכפלה $(a+b, h)$

$P_3 = (c + d) \times e =$ אלגוריתם הכפלה $(c+d, e)$

$P_4 = d \times (f - e) =$ אלגוריתם הכפלה $(d, f-e)$

$P_5 = (a + d) \times (e + h) =$ אלגוריתם הכפלה $(a+d, e+h)$

$P_6 = (b - d) \times (f + h) =$ אלגוריתם הכפלה $(b-d, f+h)$

$P_7 = (a - c) \times (e + g) =$ אלגוריתם הכפלה $(a-c, e+g)$

לפי סעיף ג:

$$C_{n \times n} = \begin{pmatrix} r_{\frac{n}{2}\times\frac{n}{2}} & s_{\frac{n}{2}\times\frac{n}{2}} \\ t_{\frac{n}{2}\times\frac{n}{2}} & u_{\frac{n}{2}\times\frac{n}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_4+P_5+P_6-P_2 & P_1+P_2 \\ P_3+P_4 & P_1+P_5-P_3-P_7 \end{pmatrix}$$

כאשר כל P_1 עד P_7 הם מסדר $\frac{n}{2}\times\frac{n}{2}$

שם: דניאל לייבנר
ת.ז: 208271775

ולכן סה"כ ללא הקריאות הרקורסיביות

באלגוריתם ההרצאה יש 18 פעולות

״חיבור חיסור״ בין מטריצות בגודל $\frac{n}{2}\times\frac{n}{2}$.

בדומה לאלגוריתם הטריוויאלי של כפל מטריצות ״חיבור וחיסור״

מטריצות ($n\times n$) לוקח $\Theta(n^2)$ ולכן גם פה יקח לכל

פעולה כזו זמן של: $\Theta((\frac{n}{2})^2)=\Theta(n^2)$

ולכן סה"כ לכל ה-18 יקח זמן של:

$\Theta(18(n^2))=\Theta(n^2)$

ולכן סה"כ קיבלנו את נוסחת הנסיגה:

$$T(n)=\boxed{7T\left(\frac{n}{2}\right)}+\Theta(n^2)=aT\left(\frac{n}{b}\right)+f(n) \quad \Big| \quad a=7,\ b=2,\ f(n)=\Theta(n^2)$$

עבור $0<\varepsilon=\log_2(\frac{7}{5})$ מתקיים:

$$O(n^{\log_b(a)-\varepsilon})=O(n^{\log_2(7)-\log_2(\frac{7}{5})})=O(n^{\log_2(5)})\doteq O(n^{2.322})=f(n)$$

$\log_b(a)-\varepsilon=\log_2(7)-\log_2(\frac{7}{5})=\log_2(\frac{7}{\frac{7}{5}})=\log_2(5)>\log_2(4)=2$

ולפי שיטת האב מקרה 1 מתקיים:

$$T(n)=7T\left(\frac{n}{2}\right)+\Theta(n^2)=\Theta(n^{\log_b a})=\boxed{\Theta(n^{\log_2 7})}$$

כלומר מתקיימות $\Theta(n^{\log_2 7})$ פעולות אלמנטריות באלגוריתם.