Exercícios selecionados da lista 6 da Cartilha da Lógica:

3) Dada a substituição:

$$\theta = \{f(a,Y)/X,\ f(b,Z)/Y, c/Z\}$$

determine o menor valor de n> 0 para o qual θ^n seja idempotente.

$$\theta = \{f(a,y)/x, f(b,z)/y, c/z\}$$

$$\theta^n : \begin{cases} \theta^1 = \theta & : E\theta = (E\theta)\theta\,? \\ \theta^2 = (\theta\theta) & : E\theta\theta = (E\theta\theta)\theta\theta\,? \\ \theta^3 = (\theta\theta\theta) & : E\theta\theta\theta = (E\theta\theta\theta)\theta\theta\theta\,? \end{cases}$$

para θ^1, temos

$E = p(x,y,z)$

$E\theta = p(f(a,y)), f(b,z), c)$

$(E\theta)\theta = p(f(a,f(b,z)), f(b,c), c)$

portanto θ^1 não é idempotente, pois $E\theta \neq (E\theta)\theta$

para θ^2, temos:

como $\theta\theta$ é a composição da função θ com ela mesma, então:

$\theta\theta : \{f(a,y)\theta/X, f(b,z)\theta/y, c\theta/z\}$

$= \{f(a,f(b,z))/X, f(b,c)/y, c/z\}$

$E\theta\theta = p(f(a,f(b,z)), f(b,c), c))$

$(E\theta\theta)\theta\theta = p(f(a,f(b,c)), f(b,c,c))$

$\neq$ $\therefore\ \theta^2$ não é idempotente.

para θ^3, temos: $\theta = \{t_1/V_1, t_2/V_2, \ldots, t_n/V$

como $\theta\theta$ é a composição da função $\theta\theta$ com θ, então:

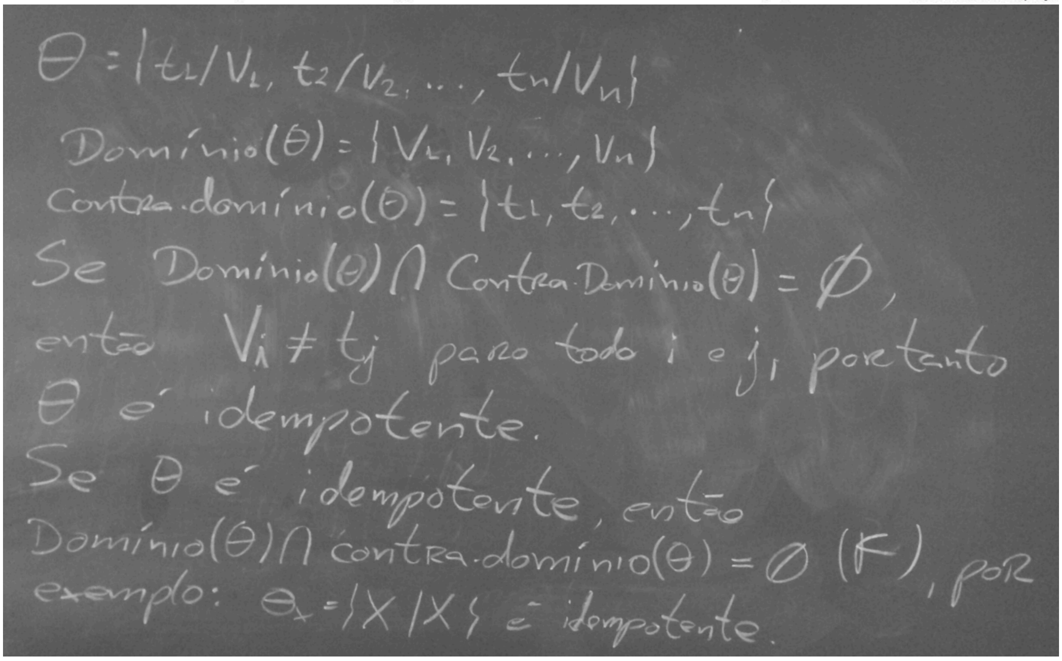
$\theta\theta\theta : \{f(a,f(b,z))\theta/X, f(b,c)\theta/y, c\theta/z\}$

$\{f(a,f(b,c))/X, f(b,c)/y, c/z\}$

$\therefore\ \theta^3$ é idempotente, pois todas as variáveis são sempre substituídas por constantes e funções, e nunca há a presença de variáveis nos termos de θ^3.

Assim o menor n (n>0) que torna θ^n idempotente é n=3.

6) Uma substituição é idempotente se e somente se $\theta\theta = \theta$. Verifique se a seguinte definição é também válida: uma substituição θ é idempotente se e somente se dom(θ) $\cap$ contradomínio(θ) = $\varnothing$.



Portanto, não é verdade que uma substituição é idempotente se e somente se $\theta\theta = \theta$.

7) Considerando que δ, σ e θ são substituições, quais das seguintes implicações são verdadeiras?

a) Se $\sigma\theta = \delta\theta$, então $\sigma = \delta$.