Forma Clausal na Lógica de Predicados

Como já vimos na lógica proposicional, as formas normais são muito úteis e importantes em vários domínios de aplicação. Na lógica de predicados também ocorre o mesmo, ou seja, as formas normais possuem um papel importante em diversas aplicações e técnicas específicas. A Forma Normal Conjuntiva FNC é o foco da nossa aula de hoje.

Considerando que na demonstração da validade de argumentos da Lógica de Predicados o princípio da Resolução é uma das técnicas mais utilizadas. E considerando ainda, que o princípio da resolução está fortemente relacionado com a FNC, torna-se importante o estudo da forma normal conjuntiva em nossa disciplina.

Na lógica de predicados a FNC está muito ligada ao conceito de Forma Normal Prenex (FNP). Uma fórmula bem formada α da lógica de predicados é dita na Forma Normal Prenex se segue o formato:

$$(Q_1X_1)\,(Q_2X_2)\ldots(Q_nX_n)\ M$$

Além disso, diz-se que uma fórmula bem formada α está na FNC sse α está na FNP e M for uma conjunção de disjunções de literais.

Para se obter a FNC de uma fórmula bem formada pode-se utilizar os seguintes passos de transformação, a partir de uma fórmula bem formada α qualquer:

1º passo) Eliminar Variáveis Livres

2º passo) Eliminar Quantificadores Redundantes

3º passo) Renomear Variáveis Quantificadas Mais de uma Vez

4º passo) Remover Equivalências (bicondicionais) e Implicações (condicionais)

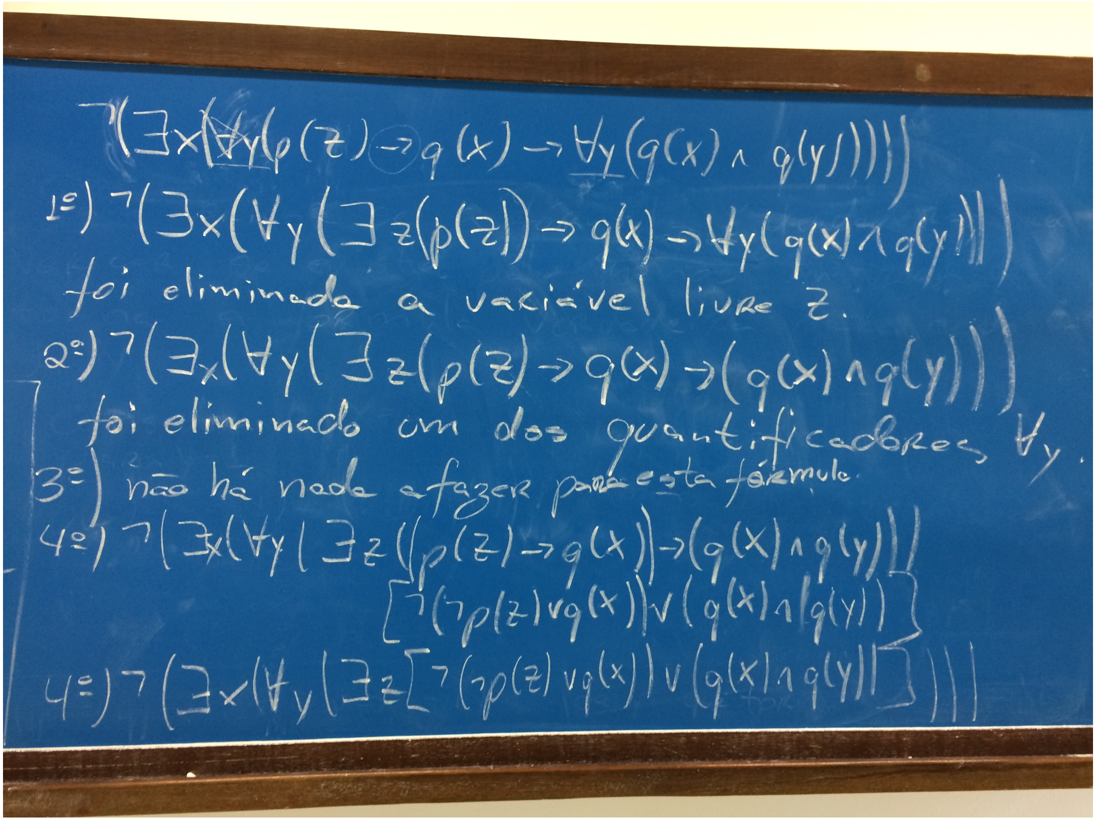
5º passo) Eliminar Negações com alcance sobre operadores

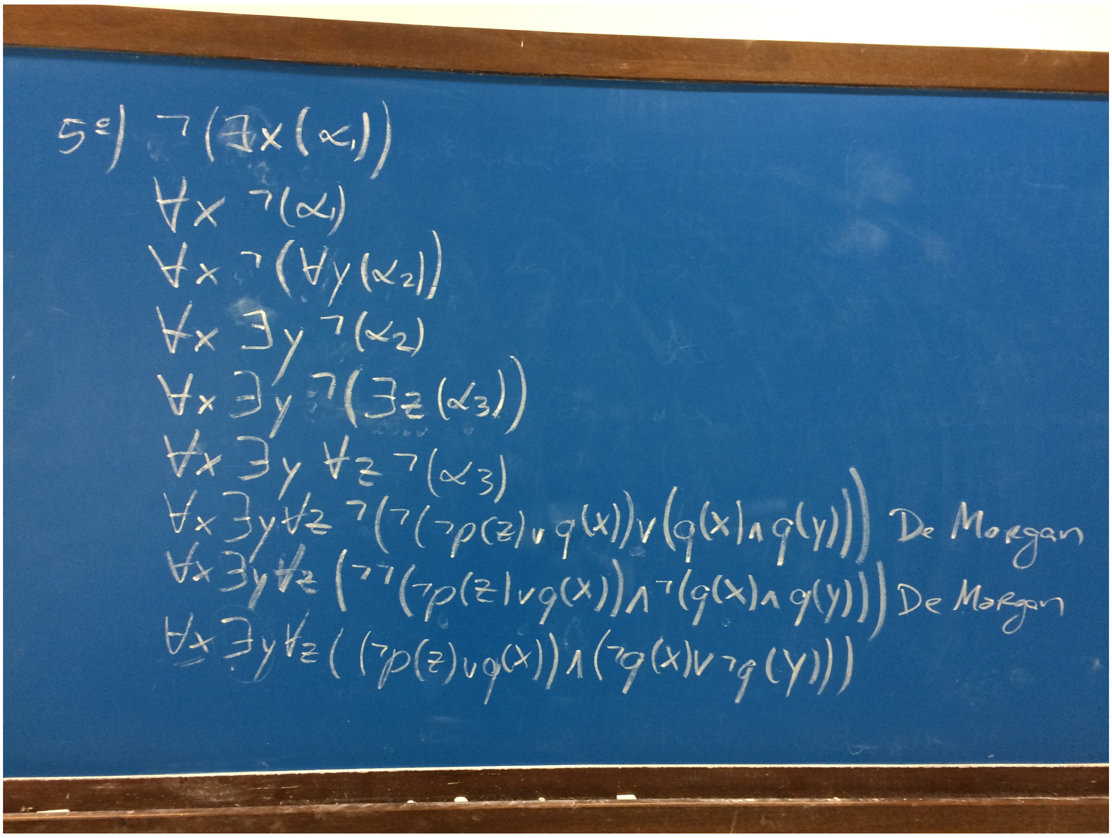
6º passo) Eliminar Quantificadores Existenciais (processo de Skolemização)

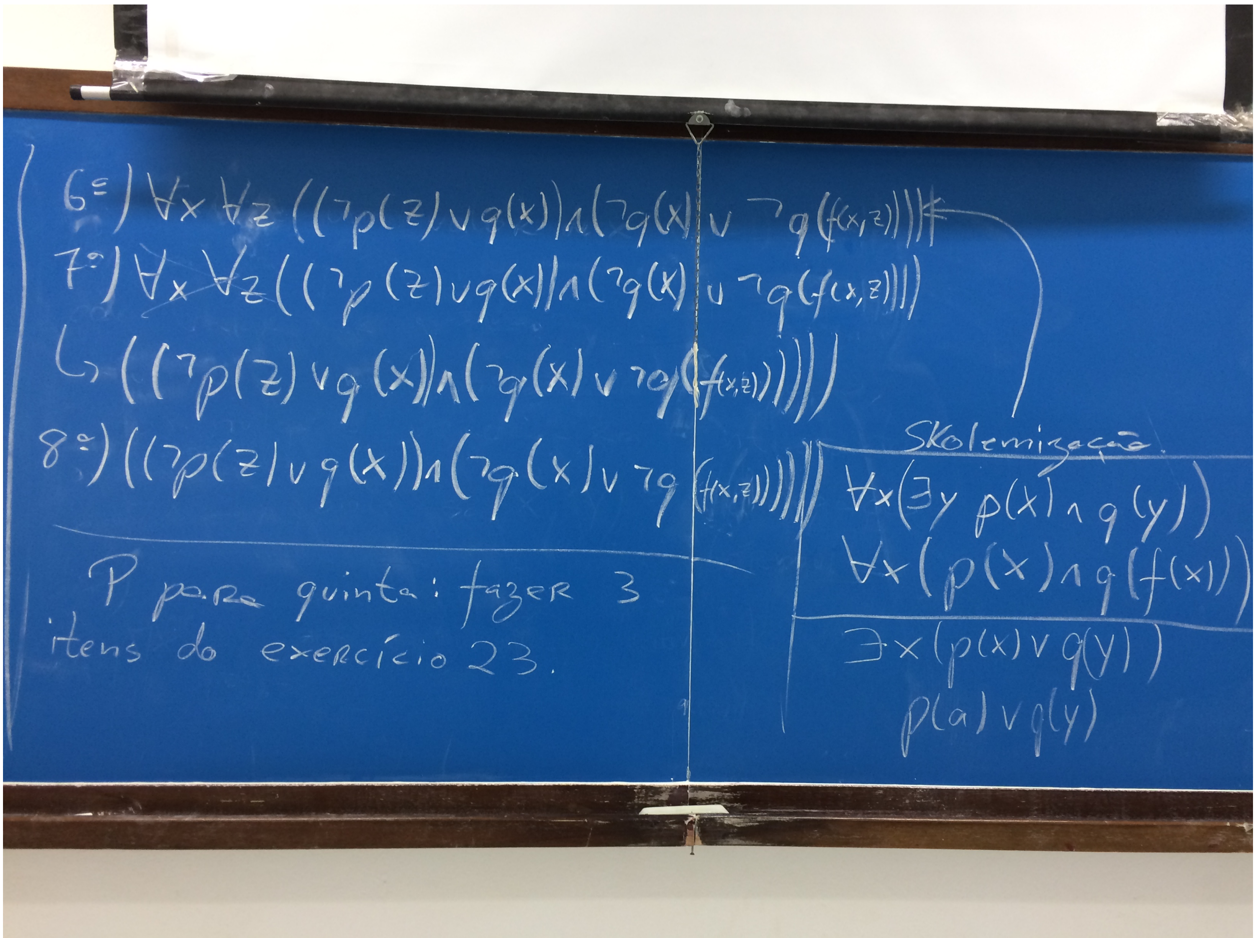
7º passo) Obter a Forma Normal Prenex e Eliminar os Quantificadores Universais

8º passo) Colocar a Matriz da FNP na Forma Normal Conjuntiva

Exemplo:


¬(∃x(∀y(p(z) → q(x) → ∀y(q(x) ∧ q(y)))))
1º) ¬(∃x(∀y(∃z(p(z)) → q(x) → ∀y(q(x) ∧ q(y)))))
foi eliminada a variável livre z.
2º) ¬(∃x(∀y(∃z(p(z) → q(x) → (q(x) ∧ q(y)))))
foi eliminado um dos quantificadores ∀y.
3º) não há nada a fazer para esta fórmula
4º) ¬(∃x(∀y(∃z((p(z) → q(x)) → (q(x) ∧ q(y)))))
[¬(¬p(z) ∨ q(x)) ∨ (q(x) ∧ q(y))]
4º) ¬(∃x(∀y(∃z[¬(¬p(z) ∨ q(x)) ∨ (q(x) ∧ q(y))])))


5º) ¬(∃x(α1))
∀x ¬(α1)
∀x ¬(∀y(α2))
∀x ∃y ¬(α2)
∀x ∃y ¬(∃z(α3))
∀x ∃y ∀z ¬(α3)
∀x ∃y ∀z ¬(¬(¬p(z) ∨ q(x)) ∨ (q(x) ∧ q(y))) De Morgan
∀x ∃y ∀z (¬¬(¬p(z) ∨ q(x)) ∧ ¬(q(x) ∧ q(y))) De Morgan
∀x ∃y ∀z ((¬p(z) ∨ q(x)) ∧ (¬q(x) ∨ ¬q(y)))


6º) ∀x ∀z ((¬p(z) ∨ q(x)) ∧ (¬q(x) ∨ ¬q(f(x,z))))
7º) ∀x ∀z ((¬p(z) ∨ q(x)) ∧ (¬q(x) ∨ ¬q(f(x,z))))
↳ ((¬p(z) ∨ q(x)) ∧ (¬q(x) ∨ ¬q(f(x,z))))
8º) ((¬p(z) ∨ q(x)) ∧ (¬q(x) ∨ ¬q(f(x,z))))
P para quinta: fazer 3 itens do exercício 23.
Skolemização
∀x(∃y p(x) ∧ q(y))
∀x(p(x) ∧ q(f(x)))
∃x(p(x) ∨ q(y))
p(a) ∨ q(y)

Exercício 23. Com base nos 8 passos descritos acima, encontre a Forma Normal Conjuntiva de todas as fórmulas bem formadas dadas abaixo.

i) $\exists X\ (p(Z) \vee q(X)) \leftrightarrow \forall Y(q(X) \wedge q(Y))$

$\exists X\ (\exists Z\ p(Z) \vee q(X)) \leftrightarrow \forall Y(\exists X\ q(X) \wedge q(Y))$

$\exists X\ (\exists Z\ p(Z) \vee q(X)) \leftrightarrow \forall Y(\exists W\ q(W) \wedge q(Y))$

$\exists X\ [[(\exists Z\ p(Z) \vee q(X)) \rightarrow \forall Y(\exists W\ q(W) \wedge q(Y))] \wedge [\forall Y(\exists W\ q(W) \wedge q(Y)) \rightarrow (\exists Z\ p(Z) \vee q(X))]]$

$\exists X\ [[\neg(\exists Z\ p(Z) \vee q(X)) \vee \forall Y(\exists W\ q(W) \wedge q(Y))] \wedge [\neg\forall Y(\exists W\ q(W) \wedge q(Y)) \vee (\exists Z\ p(Z) \vee q(X))]]$

$\exists X\ [[\ (\neg\exists Z\ p(Z) \wedge \neg q(X)) \vee \forall Y(\exists W\ q(W) \wedge q(Y))] \wedge [\exists Y \neg(\exists W\ q(W) \wedge q(Y)) \vee (\exists Z\ p(Z) \vee q(X))]]$

$[[(\forall Z\ \neg p(Z) \wedge \neg q(a)) \vee \forall Y(q(f(Y)) \wedge q(Y))] \wedge [(\neg q(b) \vee \neg q(c)) \vee (p(d) \vee q(a))]]$

$\forall Z\ \forall Y\ [[(\neg p(Z) \wedge \neg q(a)) \vee (q(f(Y)) \wedge q(Y))] \wedge [(\neg q(b) \vee \neg q(c)) \vee (p(d) \vee q(a))]]$

$[[(\neg p(Z) \wedge \neg q(a)) \vee (q(f(Y)) \wedge q(Y))] \wedge [(\neg q(b) \vee \neg q(c)) \vee (p(d) \vee q(a))]]$

ii) $\exists X\ ((p(Z) \vee q(X)) \leftrightarrow \exists Y(q(X) \wedge q(Y)))$

iii) $\exists X\ ((p(Z) \vee q(X)) \leftrightarrow \forall Y(q(X)) \wedge q(Y))$

iv) $\forall X\ (\exists Z\ (p(Z) \vee q(X)) \vee \forall Y(q(X) \wedge q(Y)))$

v) $\exists X\ (p(Z) \vee q(X)) \leftrightarrow \forall Y(q(X) \wedge q(Y))$

vi) $\neg(\exists X\ (\forall Y\ (p(Z) \rightarrow\ q(X) \rightarrow \forall Y(q(X) \wedge q(Y)))))$

vii) $\forall X, \forall Y\ (p(Z) \rightarrow\ q(X) \rightarrow (\forall Y(q(X) \wedge q(Y))))$

viii) $\forall X, \forall Y, \forall Z\ (p(Z) \rightarrow\ q(X) \rightarrow \exists Y(q(X) \wedge q(Y))))$

ix) $\forall X, \forall Y, \forall Z\ (p(Z) \rightarrow\ q(X) \rightarrow \exists Y(q(X) \wedge q(Y))))$

x) $\forall X, \forall Y, \exists Z\ (p(Z) \rightarrow\ q(X) \rightarrow \exists Y(q(X) \wedge q(Y))))$

xi) $\forall X, \exists Y, \exists Z\ (p(Z) \rightarrow\ q(X) \rightarrow \forall Y(q(X) \wedge q(Y))))$

xii) $\forall X, \forall Y, \forall Z\ (p(Z) \rightarrow\ q(X) \rightarrow \exists Y(q(X) \wedge q(Y))))$

xiii) $\forall X, \exists Y\ (p(Z) \rightarrow\ q(X) \rightarrow (\forall Y(q(X) \wedge q(Y))))$

xiv) $(\exists X\ (\exists Y\ (p(Z) \rightarrow\ q(X) \rightarrow (\forall Y(q(X) \wedge q(Y))))$

xv) $(\exists X\ (\forall Y\ (p(Z) \leftrightarrow\ q(X) \vee (\forall Y(q(X) \wedge q(Y))))$

xvi) $\neg(\exists X\ (\forall Y\ (p(Z) \vee\ q(X) \leftrightarrow (\forall Y(q(X) \wedge q(Y)))))$

xvii) $(\exists X\ (\exists Y\ (p(Z) \leftrightarrow\ q(X) \vee (\forall Y(q(X) \wedge q(Y))))$

xviii) $\neg(\exists X\ (\exists Y\ (p(Z) \vee\ q(X) \leftrightarrow (\forall Y(q(X) \wedge q(Y))))$

xix) $(\forall X\ (\forall Y\ (p(Z) \leftrightarrow\ q(X) \vee (\forall Y(q(X) \wedge q(Y))))$

xx) $\neg(\exists X\ (\forall Y\ (p(Z) \vee\ q(X) \leftrightarrow (\forall X\ \forall Y(q(X) \wedge q(Y))))$

xxi) $(\exists X\ (p(Z)\ v\ q(X)) \leftrightarrow (\forall Y(q(X) \wedge q(Y)))) \leftrightarrow q(X) \vee (\forall Y(q(X) \wedge q(Y)))$

xxii) $(\exists X\ (\forall Y\ \neg(p(Z) \rightarrow q(X) \vee (\forall Y(q(W) \wedge q(Z))) \rightarrow (\forall Y(q(X) \wedge q(Y))))))$

xxiii) $(\forall X\ (\forall Y\ (p(Z) \rightarrow q(Z) \rightarrow (\forall Y(q(Z) \wedge q(Z))))))$

xxiv) $\neg\ (\exists X\ (p(Z)\ v\ q(X)) \leftrightarrow (\forall Y(q(X) \wedge q(Y)))) \leftrightarrow q(X) \vee (\forall Y(q(X) \wedge q(Y)))$

xxv) $\neg\ (\exists X\ (\forall Y\ \neg(p(Z) \rightarrow q(X) \vee (\forall Y(q(W) \wedge q(Z))) \rightarrow (\forall Y(q(X) \wedge q(Y))))))$

xxvi) $\neg\ (\forall X\ (\forall Y\ (p(Z) \rightarrow q(Z) \rightarrow (\forall Y(q(Z) \wedge q(Z))))))$

xxvii) $\neg(\exists X\ (\exists Y\ (p(Z) \rightarrow q(X) \rightarrow (\forall Y(q(X) \wedge q(Y))))))$