Como já vimos, as **fórmulas bem-formadas** da **Lógica de Predicados** podem conter **variáveis** e **quantificadores**. Por isso, torna-se importante identificar qual é o **escopo** de cada **quantificador** declarado em uma **fórmula bem-formada**. O **escopo** dos **quantificadores** em uma **fórmula bem-formada** define se a fórmula é **livre** ou **ligada**.

Variáveis que ocorrem em uma **fórmula bem-formada** e não estão no **escopo** de **quantificador** algum são chamadas **variáveis livres**. **Variáveis** que ocorrem em uma **fórmula bem-formada** e estão no **escopo** de algum **quantificador** são chamadas **variáveis ligadas**.

Exercício 21. Para cada uma das fórmulas abaixo, diga quais variáveis são livres e quais são ligadas.

i) $\exists X\ (p(Z) \vee q(X)) \leftrightarrow \forall Y(q(X) \wedge q(Y))$
ii) $\exists X\ ((p(Z) \vee q(X)) \leftrightarrow \exists Y(q(X) \wedge q(Y)))$
iii) $\exists X\ ((p(Z) \vee q(X)) \leftrightarrow \forall Y(q(X)) \wedge q(Y))$
iv) $\forall X\ (\exists Z\ (p(Z) \vee q(X)) \vee \forall Y(q(X) \wedge q(Y)))$
v) $\exists X\ (p(Z) \vee q(X)) \leftrightarrow \forall Y(q(X) \wedge q(Y))$
vi) $\neg(\exists X\ (\forall Y\ (p(Z) \rightarrow q(X) \rightarrow \forall Y(q(X) \wedge q(Y)))))$
vii) $\forall X, \forall Y\ (p(Z) \rightarrow q(X) \rightarrow (\forall Y(q(X) \wedge q(Y))))$
viii) $\forall X, \forall Y, \forall Z\ (p(Z) \rightarrow q(X) \rightarrow \exists Y(q(X) \wedge q(Y))))$
ix) $\forall X, \forall Y, \forall Z\ (p(Z) \rightarrow q(X) \rightarrow \exists Y(q(X) \wedge q(Y))))$
x) $\forall X, \forall Y, \exists Z\ (p(Z) \rightarrow q(X) \rightarrow \exists Y(q(X) \wedge q(Y))))$
xi) $\forall X, \exists Y, \exists Z\ (p(Z) \rightarrow q(X) \rightarrow \forall Y(q(X) \wedge q(Y))))$
xii) $\forall X, \forall Y, \forall Z\ (p(Z) \rightarrow q(X) \rightarrow \exists Y(q(X) \wedge q(Y))))$
xiii) $\forall X, \exists Y\ (p(Z) \rightarrow q(X) \rightarrow (\forall Y(q(X) \wedge q(Y))))$
xiv) $(\exists X\ (\exists Y\ (p(Z) \rightarrow q(X) \rightarrow (\forall Y(q(X) \wedge q(Y))))$
xv) $(\exists X\ (\forall Y\ (p(Z) \leftrightarrow q(X) \vee (\forall Y(q(X) \wedge q(Y))))$
xvi) $\neg(\exists X\ (\forall Y\ (p(Z) \vee q(X) \leftrightarrow (\forall Y(q(X) \wedge q(Y))))$
xvii) $(\exists X\ (\exists Y\ (p(Z) \leftrightarrow q(X) \vee (\forall Y(q(X) \wedge q(Y))))$
xviii) $\neg(\exists X\ (\exists Y\ (p(Z) \vee q(X) \leftrightarrow (\forall Y(q(X) \wedge q(Y))))$

xix) $(\forall X\ (\forall Y\ (p(Z) \leftrightarrow\ q(X) \vee (\forall Y(q(X) \wedge q(Y))))$

xx) $\neg(\exists X\ (\forall Y\ (p(Z) \vee\ q(X) \leftrightarrow (\forall X\ \forall Y(q(X) \wedge q(Y))))$

A **interpretação** de uma **fórmula bem-formada** na **Lógica de Predicados** exige alguns elementos a mais do que exigia a **interpretação** na **Lógica Proposicional**. Na **Lógica Proposicional**, conhecendo-se o valor verdade (**interpretação**) das fórmulas (**proposições**) atômicas, e conhecendo-se também a **tabela verdade** dos **conectivos** é possível se determinar o valor verdade (**interpretação**) de qualquer **proposição composta**.

Já na **Lógica de Predicados**, além de se conhecer a **interpretação** das **fórmulas atômicas** (**predicados atômicos**) e as **tabelas verdade** dos conectivos, é também necessário conhecer o domínio, as constantes (e suas atribuições), as variáveis (e suas atribuições), as funções (e suas atribuições), além dos predicados (e suas atribuições). Dependendo da fórmula e dos quantificadores associados a ela pode ser necessário verificar várias combinações possíveis para se poder definir a interpretação (valor verdade) de um único predicado.

Exercício 22. Considere uma linguagem λ cujo alfabeto tem os seguintes símbolos:

Constantes: {a,b,c}
Variáveis: (X,Y,Z,W}
Símbolos Funcionais: {f/1,g/1}
Símbolos Predicados: {p/1, q/1}
Quantificadores: ∀ e ∃
Conectivos: ¬, ∧, ∨, → e ↔
Símbolos de pontuação: ( ) ,
Seja I a seguinte Interpretação:
Domínio: {1,2,3}

Atribuição a Constantes:

a	b	c
1	2	3

Atribuição a variáveis:

X	Y	Z	W
1	2	3	2

Atribuição a símbolos Funcionais:

f(1)	f(2)	f(3)	g(1)	g(2)	g(3)
1	2	3	1	2	1

Atribuição a símbolos predicados:

p(1)	p(2)	p(3)	q(1)	q(2)	q(3)
V	V	F	F	V	F

Avalie cada uma das fórmulas a seguir na interpretação I:

i) $\exists X\,(p(X))$

ii) $\exists X\,(p(Z) \lor q(X)) \leftrightarrow \forall Y(q(X) \land q(Y))$

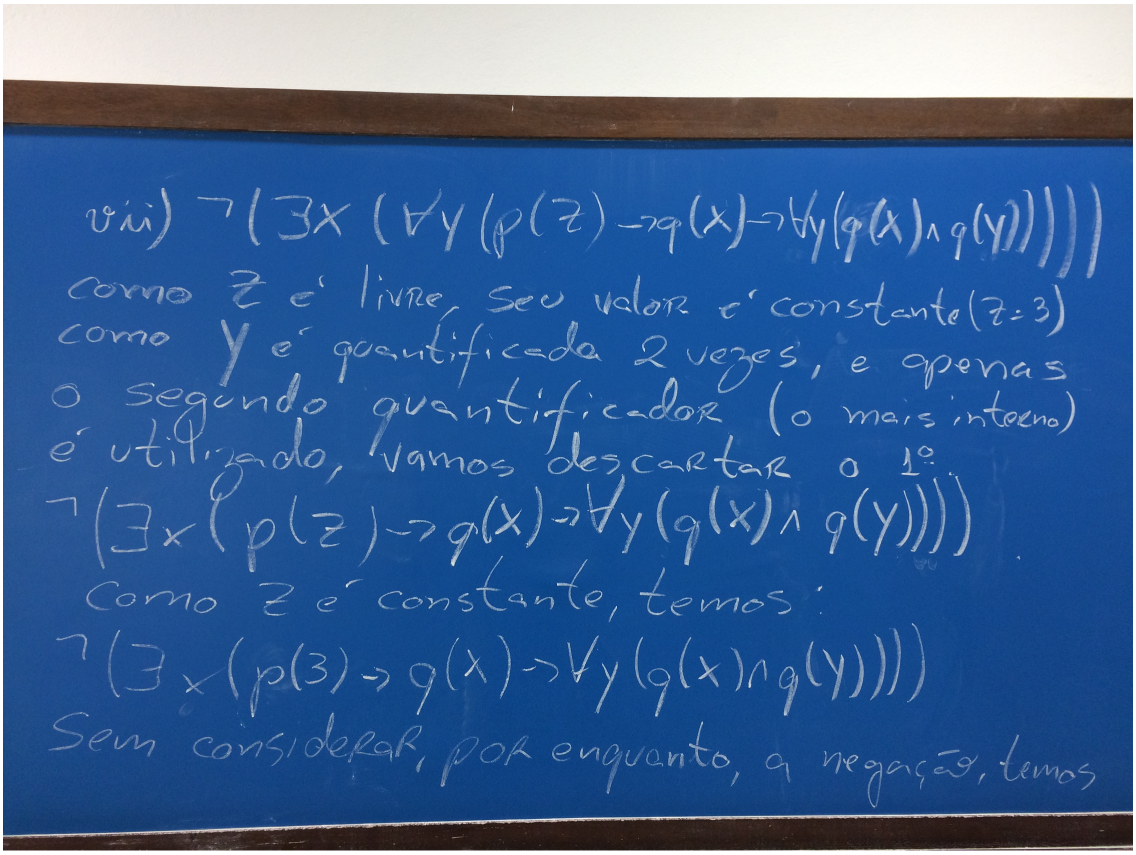
iii) $\exists X\,((p(Z) \lor q(X)) \leftrightarrow \exists Y(q(X) \land q(Y)))$

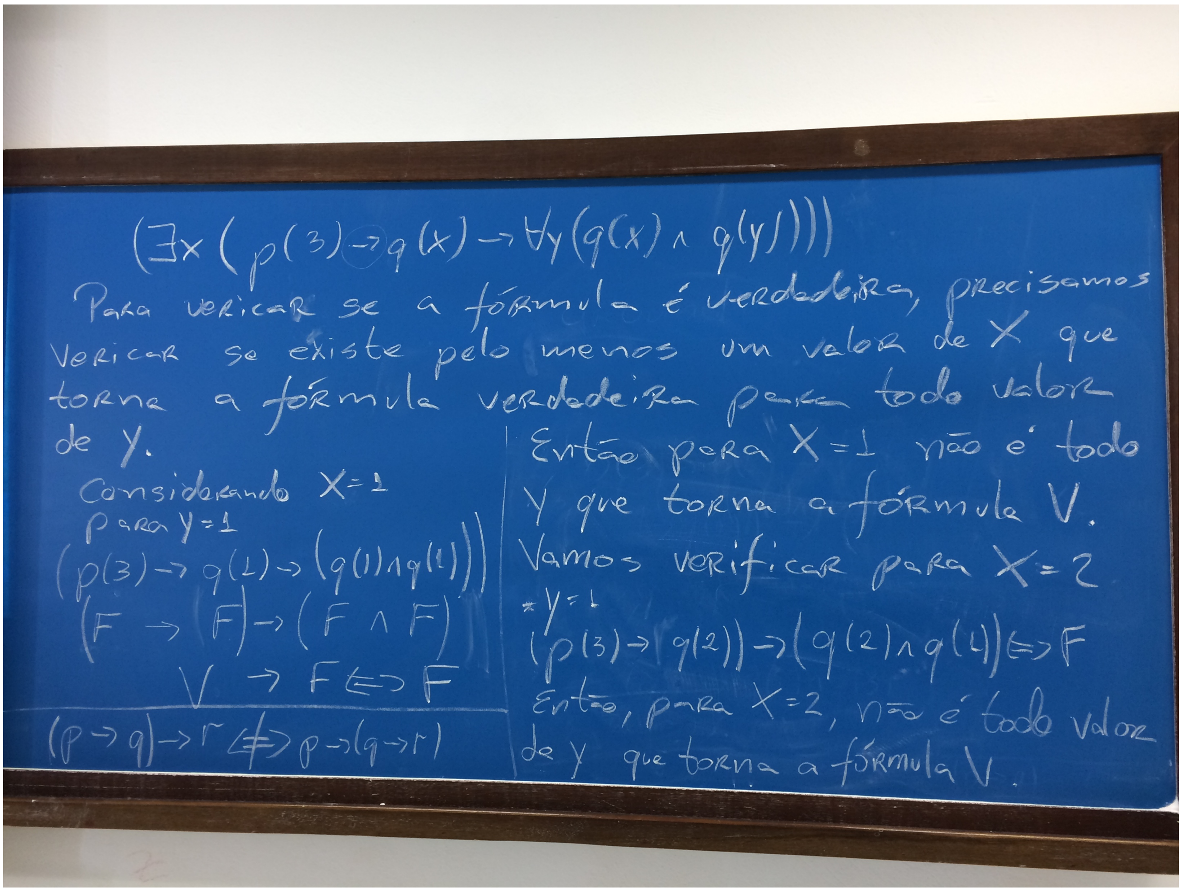
iv) $\exists X\,((p(Z) \lor q(X)) \leftrightarrow \forall Y(q(X)) \land q(Y))$

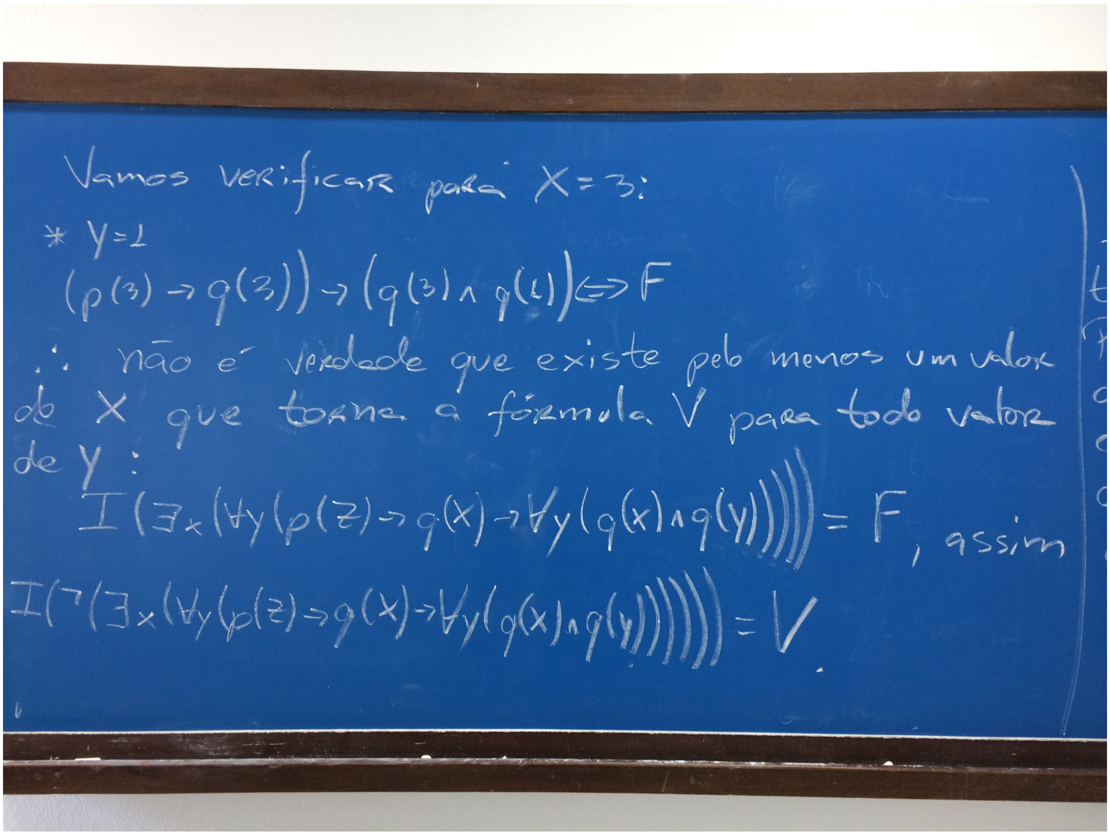
v) $\forall X\,(\exists Z\,(p(Z) \lor q(X)) \lor \forall Y(q(X) \land q(Y)))$

vi) $\exists X\,(p(Z) \lor q(X)) \leftrightarrow \forall Y(q(X) \land q(Y))$

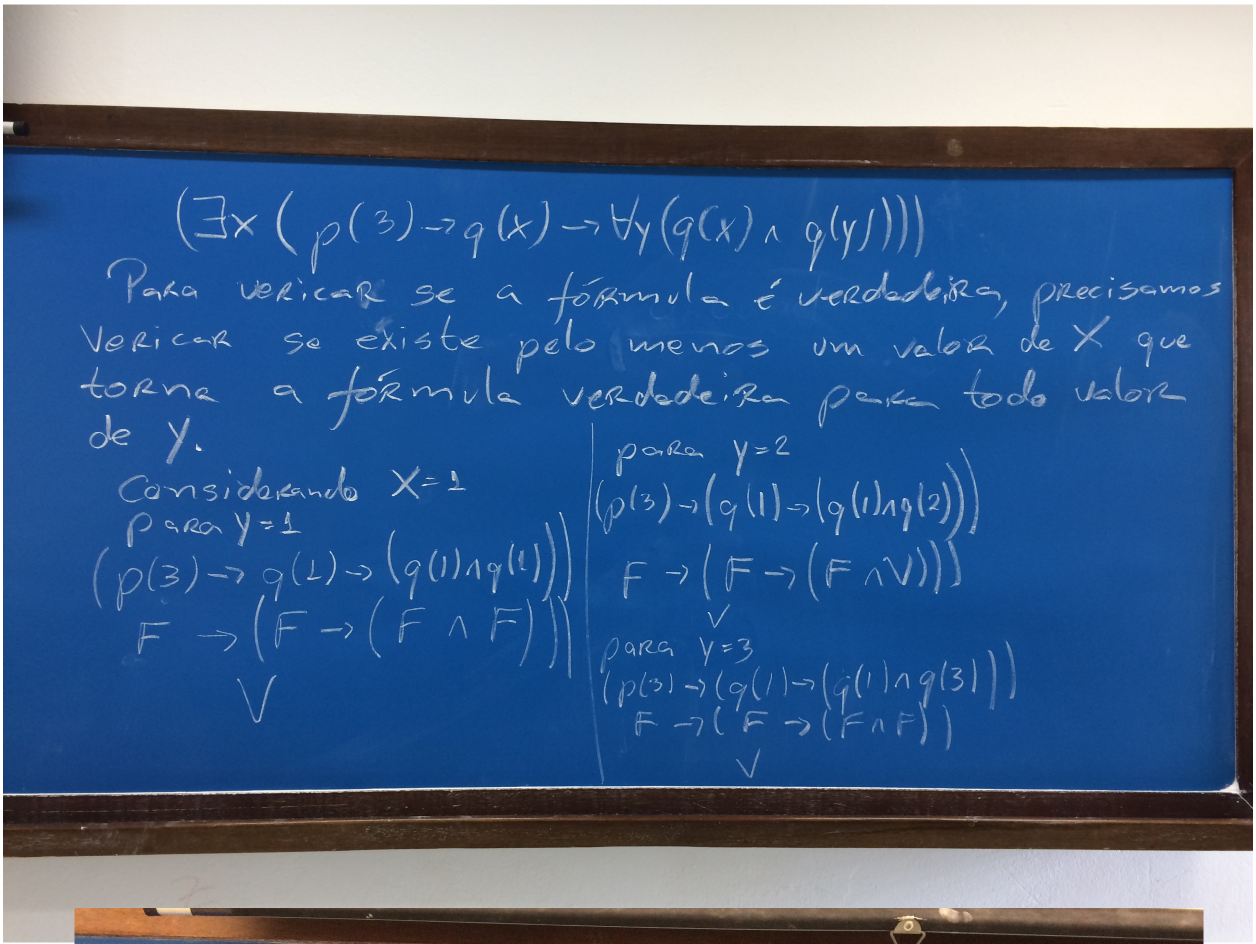
vii) $\neg(\exists X\,(\forall Y\,(p(Z) \rightarrow q(X) \rightarrow \forall Y(q(X) \land q(Y)))))$

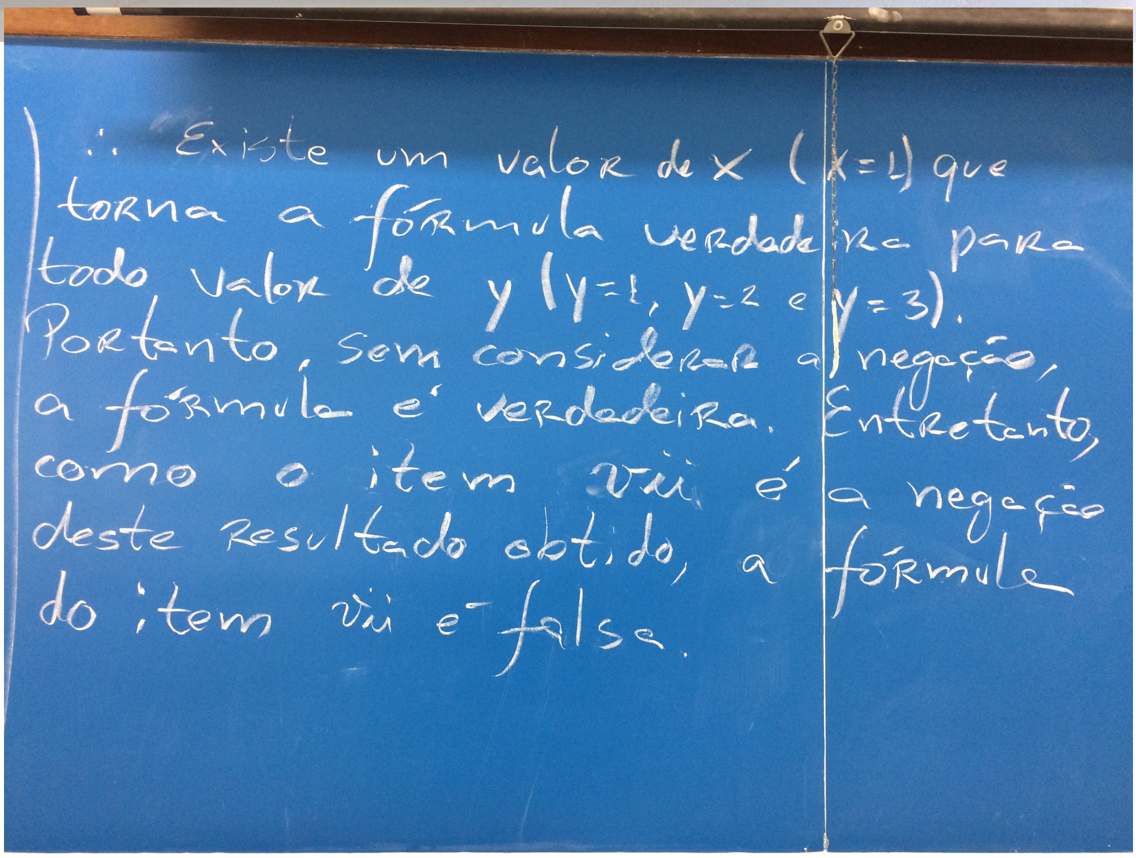



$(\exists x\,(p(3) \to q(x) \to \forall y(q(x) \land q(y))))$
Para vericar se a fórmula é verdadeira, precisamos
verificar se existe pelo menos um valor de X que
torna a fórmula verdadeira para todo valor
de y.
Considerando X=1
para y=1
$(p(3) \to q(1) \to (q(1) \land q(1)))$
$(F \to F) \to (F \land F)$
$V \to F \Leftrightarrow F$
$(p \to q) \to r \not\Leftrightarrow p \to (q \to r)$
Então para X=1 não é todo
y que torna a fórmula V.
Vamos verificar para X=2
* y=1
$(p(3) \to q(2)) \to (q(2) \land q(1)) \Leftrightarrow F$
Então, para X=2, não é todo valor
de y que torna a fórmula V.


Vamos verificar para X=3:
* y=1
$(p(3) \to q(3)) \to (q(3) \land q(1)) \Leftrightarrow F$
∴ não é verdade que existe pelo menos um valor
de X que torna a fórmula V para todo valor
de y:
$I(\exists x(\forall y(p(z) \to q(x) \to \forall y(q(x) \land q(y)))))) = F$, assim
$I(\neg(\exists x(\forall y(p(z) \to q(x) \to \forall y(q(x) \land q(y))))))) = V$.

viib) ¬(∃X (∀Y (p(Z) → (q (X) → ∀Y(q(X) ^ q(Y))))))





viii) $\forall X, \forall Y\ (p(Z) \rightarrow\ q(X) \rightarrow (\forall Y(q(X) \wedge q(Y))))$
ix) $\forall X, \forall Y, \forall Z\ (p(Z) \rightarrow\ q(X) \rightarrow \exists Y(q(X) \wedge q(Y))))$
x) $\forall X, \forall Y, \forall Z\ (p(Z) \rightarrow\ q(X) \rightarrow \exists Y(q(X) \wedge q(Y))))$
xi) $\forall X, \forall Y, \exists Z\ (p(Z) \rightarrow\ q(X) \rightarrow \exists Y(q(X) \wedge q(Y))))$
xii) $\forall X, \exists Y, \exists Z\ (p(Z) \rightarrow\ q(X) \rightarrow \forall Y(q(X) \wedge q(Y))))$
xiii) $\forall X, \forall Y, \forall Z\ (p(Z) \rightarrow\ q(X) \rightarrow \exists Y(q(X) \wedge q(Y))))$
xiv) $\forall X, \exists Y\ (p(Z) \rightarrow\ q(X) \rightarrow (\forall Y(q(X) \wedge q(Y))))$
xv) $(\exists X\ (\exists Y\ (p(Z) \rightarrow\ q(X) \rightarrow (\forall Y(q(X) \wedge q(Y))))$
xvi) $(\exists X\ (\forall Y\ (p(Z) \leftrightarrow\ q(X) \vee (\forall Y(q(X) \wedge q(Y))))$
xvii) $\neg(\exists X\ (\forall Y\ (p(Z) \vee\ q(X) \leftrightarrow (\forall Y(q(X) \wedge q(Y))))$
xviii) $(\exists X\ (\exists Y\ (p(Z) \leftrightarrow\ q(X) \vee (\forall Y(q(X) \wedge q(Y))))$
xix) $\neg(\exists X\ (\exists Y\ (p(Z) \vee\ q(X) \leftrightarrow (\forall Y(q(X) \wedge q(Y))))$
xx) $(\forall X\ (\forall Y\ (p(Z) \leftrightarrow\ q(X) \vee (\forall Y(q(X) \wedge q(Y))))$
xxi) $\neg(\exists X\ (\forall Y\ (p(Z) \vee\ q(X) \leftrightarrow (\forall X\ \forall Y(q(X) \wedge q(Y))))$