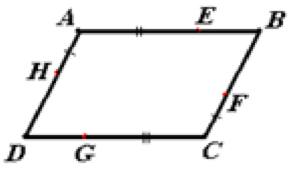
تمارين محلولة

الهندسة المستوية

1as

أولى جدع مشترك علوم

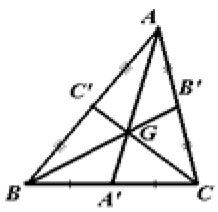
تمرين1:



ABCD متوازي أضلاع، E ،F ،G ،H نقط من [AB]، [BC]، [CD]، [DA] على التّرتيب، حيث AE = CG و AH = FC .

1. بيّن أنّ للقطعتين [EG] و [FH] نفس المنتصف، وعيّنه.
2. استنتج طبيعة الرّباعي EFGH.

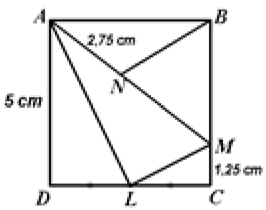
تمرين2



ABC مثلّث كيفي.

1. بيّن أنّ متوسّطاته (AA')، (BB')، (CC') متقاطعة في نقطة واحدة G (تسمّى النّقطة G مركز ثقل المثلّث ABC).
2. بيّن أنّ AG = 2 GA' ، واستنتج أنّ BG = 2 GB' و CG = 2 GC'.

تمرين 3:

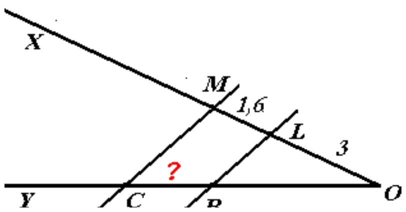


مربّع ABCD طول ضلعه 5 cm ، L منتصف [DC] و M نقطة من [BC] و N نقطة من [AM] حيث CM=1,25 cm ،AN = 2,75 cm ،BN=3,25 cm.

أي المثلّثين ALM ، ANB هو مثلّث قائم ؟

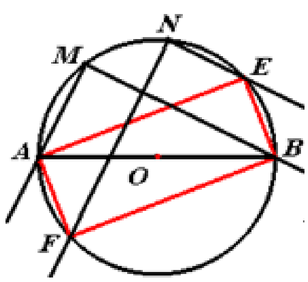
تمرين 4:

[OX) و [OY) نصفا مستقيمين متقاطعين في النّقطة O، النّقطتان L ، M من [OX) والنّقطتان B ، C من [OY) حيث OL=3 cm ، LM=1,6 cm ، OC=6,5cm و (LB)//(MC).



1. احسب الطّول BC (تعطى القيمة مدوّرة إلى 0,01)
2. A نقطة من [OB] و N نقطة من [MX) حيث: (MA)//(NB).
   هل المستقيمان (LA) و (NC) متوازيان ؟ برّر جوابك.

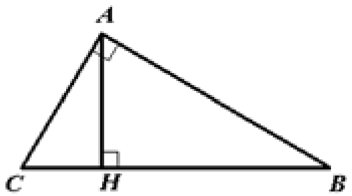
تمرين 5:



في الشّكل المقابل (C) دائرة مركزها O منتصف [AB]، M و N نقطتان متمايزتان من (C)، المستقيم الذّي يشمل النّقطة N ويوازي (MA) يقطع (C) في النّقطة F، والمستقيم الذّي يشمل النّقطة N ويوازي (MB) يقطع (C) في النّقطة E.

1. ما نوع الرّباعي AEBF ؟
2. بيّن أنّ MN = AF.

تمرين6 :



ABC مثلّثا قائما في A، و(AH) الارتفاع المتعلّق بالضّلع [BC]. بيّن أنّ:

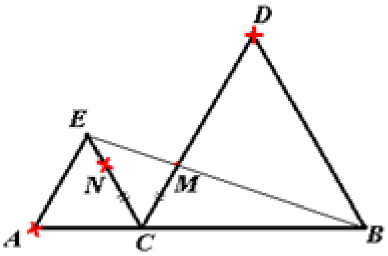
أ) $AB \times AC = AH \times BC$

ب) $AB^2 = BH \times BC$ ، $AC^2 = CH \times CB$

جـ) $AH^2 = HC \times HB$

د) استنتج برهانا لمبرهنة فيثاغورس $AB^2 + AC^2 = BC^2$

تمرين7:



[AB] قطعة مستقيم، C نقطة منها، كلّ من المثلّثين ACE و BDC متقايس الأضلاع قطعة المستقيم [EB] تقطع [CD] في النّقطة M ، N نقطة من [CE] حيث CN = CM.

بيّن أنّ النّقط A ، N ، D في استقامية.

تمرين 8 :

ليكن ABC مثلث متساوي الساقين، N نقطة من $[AC]$ تحقق $NB = BC$ كما هو مبين في الشكل التالي:

لتكن M نقطة من $[A]$ حيث (BC) || (MN) و F نقطة تقاطع المستقيم (BC) مع منصف الزاوية $\widehat{BNM}$.

1. انشئ النقطتين M و F .
2. بين ان المثلث FBN متساوي الساقين.
3. استنتج طبيعة المثلث NFC .
4. انشئ النقطة B' من المستوي حتى يكون الرباعي $B'MCB$ معين .
   - بين ان المثلثين $B'MB$ و AMN متشابهين.

تمرين 9:

في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ نعتبر النقط: $A(2;-2)$ ، $B(-2;-2)$ و C منتصف $[OA]$.

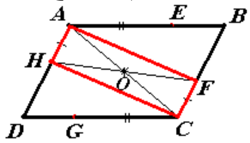
B' نظيرة C بالنسبة لحامل محور الفواصل ، A' نظيرة A بالنسبة للنقطة B' و C' هي صورة C بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}\binom{1}{3}$.

1. انشئ كل من النقط A ،B ،C ،A' ،B' و C' .
2. بين ان المثلث ABC' قائم في A ومتساوي الساقين.
3. استنتج ان النقط A ،B وC' تنتمي الى نفس الدائرة (C) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها .
4. بملاحظة ان C' نظيرة A بالنسبة لحامل محور الفواصل ،استنتج ان B' منتصف القطعة $[OC']$.
5. ما طبيعة الرباعي $OAC'A'$.
6. استنتج ان $(A'C')$ مماس للدائرة (C).

حلول التمارين

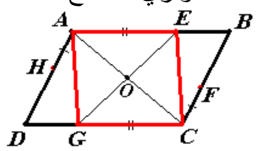
حل التمرين 1:

- 1. بما أنّ (FC) // (AH) و AH = FC فإنّ الرّباعي AFCH متوازي أضلاع.



ومنه للقطعتين [AC] و [HF] نفس المنتصف . . . (1)

- 2. بما أنّ (GC) // (AE) و AE = GC فإنّ الرّباعي AEGC متوازي أضلاع.



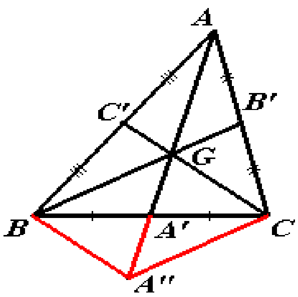
ومنه للقطعتين [AC] و [EG] نفس المنتصف . . . (2)

من (1) و (2) نجد أنّ للقطعتين [HF] و [EG] نفس المنتصف.

منتصف القطعتين [HF] و [EG] هو منتصف [AC]، وبالتالي هو مركز متوازي الأضلاع ABCD.

بما أنّ للقطعتين [HF] و [EG] نفس المنتصف، فإنّ الرّباعي EFGH متوازي أضلاع.

حل التمرين 2:



1. نرسم المتوسطين (BB')، (CC') فيتقاطعان في نقطة نسمّيها G، ولنبيّن أنّ المتوسط (AA') يشمل G (أو (AG) يشمل A' منتصف [BC])
لتكن A'' نظيرة النّقطة A بالنّسبة إلى النّقطة G.

- بتطبيق مبرهنة مستقيم المنتصفين في المثلّث ACA'' نجد (B'G)//(CA'') ... (1)
- بتطبيق مبرهنة مستقيم المنتصفين في المثلّث ABA'' نجد (C'G)//(BA'') ... (2)

من (1) و (2) نجد أنّ (CG)//(BA'') و (BG)//(CA'').

ومنه الرّباعي BGCA'' متوازي أضلاع، وقطراه [GA''] و [BC] متناصفان.

ومنه المستقيم (AG) يشمل A' منتصف [BC] .

وبالتّالي المتوسّطات (AA')، (BB')،(CC') متقاطعة في نقطة واحدة G

2. لدينا AG = GA'' لأنّ A'' نظيرة النّقطة A بالنّسبة إلى النّقطة G.
و GA'' = 2 GA' لأنّ الرّباعي BGCA'' متوازي أضلاع.

ومنه AG = 2 GA'.

لدينا A''C = 2 GB' و A''C = BG ، ومنه BG = 2 GB'.

ونفس الطريقة نجد CG = 2 GC'

حل التمرين 3:

أولا: حساب مرّبع طول كلّ ضلع من أضلاع المثلّث ALM بتطبيق مبرهنة فيثاغورس

- في المثلّث ABM :
$AM^2 = AB^2 + BM^2 = 5^2 + (3,75)^2 = 39,0625$
- في المثلّث ADL : $AL^2 = AD^2 + DL^2 = 5^2 + (2,5)^2 = 31,25$
- في المثلّث LCM :

$LM^2 = LC^2 + CM^2 = (2,5)^2 + (1,25)^2 = 7,8125$

نلاحظ أنّ : $AM^2 = AL^2 + LM^2$

وحسب المبرهنة العكسية لمبرهنة فيثاغورس فإنّ المثلّث ALM قائم في L

<u>ثانيا:</u> نحسب مربّع طول كلّ ضلع من أضلاع المثلّث ANB فنجد:

$AB^2 = 25$ و $AN^2 = 7,5625$ و $NB^2 = 10,5625$

لو كان المثلّث ANB قائما، لكان قائما في N، لأنّ [AB] هو أطول ضلع فيه، ولكان $AB^2 = AN^2 + NB^2$ حسب مبرهنة فيثاغورس.

لكن $AN^2 + NB^2 = 18,125$ ومنه $AB^2 \neq AN^2 + NB^2$.

ومنه المثلّث ANB ليس قائما.

حل التمرين 4:

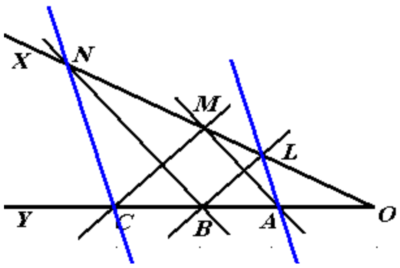
1. بما أنّ L من (OM) و B من (OC) و (LB)//(MC)

فإنّ $\dfrac{LB}{MC} = \dfrac{OB}{OC} = \dfrac{OL}{OM}$ (حسب مبرهنة طالس)

<u>نحسب OB</u>

لدينا: $4,6 \times OB = 3 \times 6,5 \Leftrightarrow \dfrac{OB}{6,5} = \dfrac{3}{4,6}$ ومنه $OB \approx 4,24$

ومنه BC = OC – OB = 6,5 – 4,24 = 2,26 cm



2.

بما أنّ L من (OM) و B من (OC) و (LB)//(MC)

فإنّ $\dfrac{LB}{MC} = \dfrac{OB}{OC} = \dfrac{OL}{OM}$ ... (1)

بما أنّ N من (OM) و B من (OA)

و (NB)//(MA)

فإنّ $\dfrac{MA}{NB} = \dfrac{OA}{OB} = \dfrac{OM}{ON}$ ... (2)

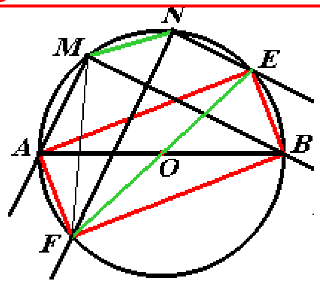
من (1) و (2) نجد OM × OB = OL × OC = ON × OA

ومنه $\dfrac{OA}{OC} = \dfrac{OL}{ON}$

وبما أنّ كلاّ من النّقط O، L، N والنّقط O، A، C في استقامية وبنفس الترتيب.

فإنّ (NC) // (LA) (حسب المبرهنة العكسية لمبرهنة طالس)

حل التمرين 5:



1. الزّاوية $\widehat{AMB}$ قائمة (لأنّ [AB] قطر في الدّائرة (C))

و (MA)//(NF) و (MB)//(NE)

فإنّ الزّاوية $\widehat{ENF}$ قائمة.

ومنه [EF] قطر في الدّائرة (C)

نستنتج أنّ [AB] و [EF] متناصفان ومتقايسان ومنه الرّباعي AEBF مستطيل.

2. لدينا (NF)//(MA) و(MF) قاطع لهما ومنه فإنّ $\widehat{AMF}=\widehat{MFN}$ بالتّبادل الداخلي، وبما أنّ كلاّ منهما زاوية محيطية فإنّ القوسين اللتين تحصرانهما متقايستان. أي $\overset{\frown}{MN} = \overset{\frown}{AF}$ ومنه MN = AF

حل التمرين 6:

- لدينا في المثلّثين القائمين ACH و ABC الزّاوية ACH مشتركة، ومنه المثلثان ACH وABC مشتابهان.

الرؤوس المتماثلة

A	B	C
H	A	C

ومنه $\frac{AB}{HA} = \frac{AC}{HC} = \frac{BC}{AC}$

أ) من النّسبة الأولى والثالثة نجد $AB\times AC = HA\times BC$

وتكتب $AB\times AC = AH\times BC$

ب) من النّسبة الثانية والثالثة نجد $AC\times AC = HC\times BC$ وتكتب

$AC^2 = CH \times CB$

بنفس الطّريقة السّابقة نجد من تشابه المثلّثين ABH و ABC أنّ

$AB^2 = BH \times BC$

جـ) لدينا $\widehat{CAH}=\widehat{ABH}$ (لأنّ $\widehat{CAH}+\widehat{HAB}=\widehat{ABH}+\widehat{HAB}=90°$)

وبالتّالي فالمثلّثان AHB و CHA متشابهان

الرؤوس المتماثلة

A	H	B
C	H	A

ومنه $\frac{AH}{CH} = \frac{AB}{CA} = \frac{HB}{HA}$

من النّسبة الأولى والثالثة نجد $AH\times HA = CH\times HB$

وتكتب $AH^2 = HC \times HB$

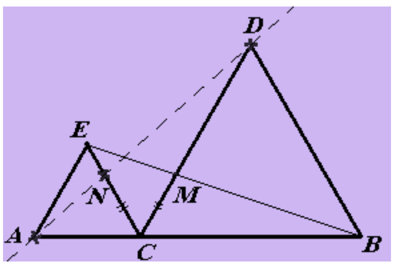
د) من الجزء (ب) نجد $AB^2 + AC^2 = (BH \times BC) + (CH \times CB)$

$= BC \times (BH + HC) = BC^2$

حل التمرين 7:

- لدينا $\widehat{ACE} = \widehat{DCB} = 60°$ ومنه $\widehat{ECD} = 60°$
- نعتبر الدّوران الذّي مركزه النّقطة C وزاويته 60° في الاتجاه المباشر، إنّه يحوّل: النّقطة B إلى النّقطة D والنّقطة M إلى النّقطة N والنّقطة E إلى النّقطة A

وبما أنّ النّقط B ، M ، E في استقامية فإنّ النّقط D ، N ، A في استقامية أيضا.



حل التمرين :8

2. تبيان ان المثلث FBN متساوي الساقين:

لدينا: $\widehat{MNF} = \widehat{NFB}$ (بالتبدل الداخلي للزوايا) .

و : $\widehat{MNF} = \widehat{FNB}$ (منصف زاوية) .

ومنه : $\widehat{NFB} = \widehat{FNB}$.

وبالتالي المثلث FBN متساوي الساقين .

3. استنتاج طبيعة المثلث NFC :

بما ان $BN = BC$ و $BN = BF$ فان $BN = BF = BC$ أي النقط N ، F و C تنمي الى نفس الدائرة التي مركزها B .

ومنه :المثلث NFC مرسوم داخل هذه الدائرة .وبالتالي NFC مثلث قائم في N .

4. تبيان ان المثلثين $B'MB$ و AMN متشابهين:

لدينا : في المثلثين $B'MB$ و MBC :

$BC = B'M$ ، $B'B = MC$ و $[MB]$ ضلع مشترك.

اذن : المثلثان $B'MB$ و MBC متقايسان.

في المثلث AMN لدينا : $AN = AM$ (باستعمال نظرية طاليس).

أي : المثلث AMN مثلث متساوي الساقين .

اي: $\widehat{AMN} = \widehat{ANM}$.

و: $\widehat{AMN} = \widehat{ABC}$ (لان المثلثان AMN و ABC متشابهان).

و $\widehat{BMC} = \widehat{MBC}$

ومنه : في المثلثان MBC زاويتان متقايستان مع زاويتان من المثلث AMN .

اذن : المثلثان AMN و MBC متشابهان .

وبما ان MBC و $B'MB$ متقايسان فان $B'MB$ و AMN متشابهان .

حل التمرين :9

2. تبيان ان ABC' مثلث قائم في A ومتساوي الساقين:

لدينا: $BC' = \sqrt{32}$ ، $AB = 4$ و $AC' = 4$.

اي: $AC'^2 + AB^2 = BC'^2$

ومنه : حسب عكس نظرية فيثاغورس فان ABC' مثلث قائم في A ومتساوي الساقين .

3. استنتاج ان النقط A ، B و C' تنتمي الى نفس الدائرة (C) :

بما ان ABC' مثلث قائم فهو مرسوم داخل دائرة مركزها O منتصف وتر المثلث ABC' و نصف قطرها $2\sqrt{2}$.

4. استنتاج ان B' منتصف القطعة $[OC']$:

بما ان C' نظيرة A بالنسبة لحامل محور الفواصل و O نظيرة نفسها بالنسبة لحامل محور الفواصل فان $[OC']$ نظيرة $[OA]$بالنسبة لحامل محور الفواصل .

لدينا C منتصف $[OA]$ و B' نظيرة C بالنسبة لحامل محور الفواصل .بما ان التناظر المحوري يحافظ على منتصف قطعة مستقيم فان B' منتصف $[OC']$.

5. طبيعة الرباعي $OAC'A'$:

بما ان B' منتصف $[OC']$

و A' نظيرة A بالنسبة ل B' . اي: B' منتصف $[AA']$

أي : قطرا الرباعي $OAC'A'$ متناصفان .

وبالتالي : $OAC'A'$ متوازي اضلاع.

6. استنتاج ان $(A'C')$ مماس للدائرة (C) :

$(A'C')$ مماس للدائرة (C) معناه: $(A'C') \perp (OC')$.

لدينا: $(A'C') \parallel (OA)$.

برهان ان $(OC') \perp (OA)$:

في المثلث OAC' لدينا: $OC' = 2\sqrt{2}$ ، $OA = 2\sqrt{2}$ و $AC' = 4$.

اي: $OA^2 + OC'^2 = AC'^2$

ومنه حسب عكس نظرية فيثاغورس فان OAC' مثلث قائم في O .

اي: $(OC') \perp (OA)$.

وبما ان $(OA) \parallel (OC')$ فإنهما عموديان على نفس المستقيم .

ومنه: $(A'C') \perp (OC')$.

وبالتالي: $(A'C')$ مماس للدائرة (C) .