الهندسة

المستوية

متوازي الأضلاع:

نشاط :

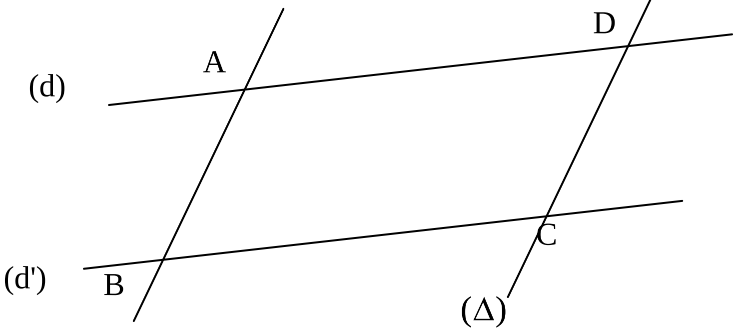
أرسم مستقيمين متوازيين تماما (d) و (d') ، علم النقطتين A و B على المستقيمين (d) و (d') على الترتيب.

أرسم مستقيم (Δ) يوازي تماما المستقيم (AB) .

المستقيم (Δ) يقطع (d) و (d') في النقطتين

D و C على الترتيب.

ما هي طبيعة الرباعي ABCD



حل النشاط:

لدينا : (AD) // (BC) و (AB) // (CD)

إذن : الرباعي ABCD هو متوازي الأضلاع.

التعريف:

متوازي الأضلاع هو رباعي حاملا كل ضلعين متقابلين فيه ، متوازيين .

ABCD متوازي الأضلاع معناه [(AB) // (CD) و (AD) // (BC)]

نشاط 2 :

أ) علم على ورقة غير مسطرة ثلاث نقط A ، B ، O ليست في استقامية.

ب) أنشئ النقطتين C و D نظيرتي A و B بالنسبة إلى النقطة O على الترتيب.

ج) ما هي طبيعة الرباعي ABCD ؟

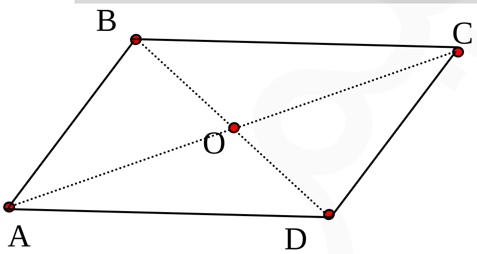
د) تحقق أن :

1. القطعتين [AC] و [BD] متناصفتين .
2. كل ضلعين متقابلين متقايسان .
3. كل زاويتين متقابلتين متقايستيان .

ه) علم النقط 'A' ، B' ، C' ، D من (AB] و [BC) و (CD] و [DA) على الترتيب حيث النقط 'A' ، B' ، C' ، D لا تنتمي إلى أضلاع الرباعي ABCD و BA' = CB' = DC' = AD'

و) ما نوع الرباعي 'A'B'C'D ؟ (إرشاد : يمكن البدء بنوع كل من الرباعيين A'CC'A و D'BB'D).

حل النشاط 2 :



أ. تعليم النقط : A ، B ، O ليست في استقامية.

ب. إنشاء النقطتين C و D نظيرتي A و B بالنسبة إلى النقطة O على الترتيب.

ج. طبيعة الرباعي ABCD

لدينا المستقيمان (AB) و (DC) متناظران بالنسبة إلى O إذن هما متوازيان

وكذلك المستقيمان (AD) و (BC) متناظران بالنسبة إلى O إذن هما متوازيان

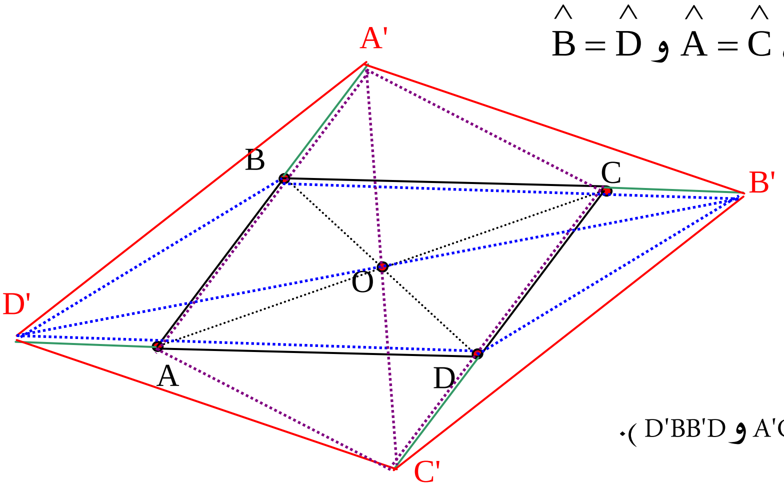
وبالتالي الرباعي ABCD متوازي أضلاع .

د. التحقيق

1) بما أن الرباعي ABCD متوازي أضلاع فإن قطراه [AC] و [BD] متناصفين

2) بما أن الرباعي ABCD متوازي أضلاع فإن AB = CD و BC = AD

3) بما أن الرباعي ABCD متوازي أضلاع فإن $\hat{A}=\hat{C}$ و $\hat{B}=\hat{D}$



ه. تعليم النقط A' ، B' ، C' ، D' من (AB] و (BC] و (CD] و(DA] على الترتيب حيث النقط A' ، B' ، C' ، D' لا تنتمي إلى أضلاع الرباعي ABCD و BA' = CB' = DC' = AD'

و) ما نوع الرباعي A'B'C'D' ؟

(إرشاد : يمكن البدء بنوع كل من الرباعيين A'CC'A و D'BB'D).

لدينا : (AB) // (CD) ومنه (AA') // (CC')

ولدينا : AB = CD و BA' = DC' إذن AA' = CC' وبالتالي الرباعي A'CC'A متوازي أضلاع

إذن قطراه [A'C] و [AC] لهما نفس المنتصف O .

لدينا : (AD) // (BC) ومنه (BB') // (D'D)

ولدينا : AD = BC و AD' = CB' إذن DD' = BB' وبالتالي الرباعي D'BB'D متوازي أضلاع

إذن قطراه [D'B] و [BD] لهما نفس المنتصف O .

ولدينا : القطران [AC] و [BD] للمتوازي الأضلاع ABCD لهما نفس المنتصف O

إذن : القطعتان [A'C'] و [D'B'] لهما نفس المنتصف O وبالتالي الرباعي A'B'C'D' هو متوازي أضلاع.

خواص :

من أجل كل رباعي ABCD :

1) [AC] و [BD] متناصفان معناه ABCD متوازي الأضلاع .

2) [AB = DC و AD = BC] معناه ABCD متوازي الأضلاع .

3) [AB = DC و (AB)//(DC)] معناه ABCD متوازي الأضلاع .

4) [$\widehat{ABC}=\widehat{ADC}$ و $\widehat{BAD}=\widehat{BCD}$] معناه ABCD متوازي الأضلاع .

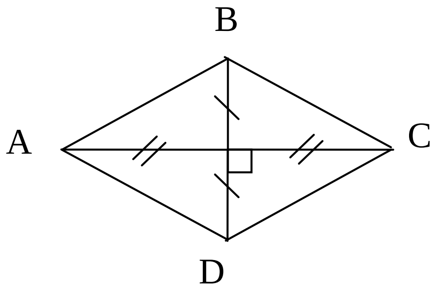
نشاط 3 :

1) أنشئ باستعمال المدور والمسطرة فقط متوازي أضلاع قطراه متعامدان، تحقق أن أضلاعه متقايسة، ماذا نسمي متوازي الأضلاع في هذه الحالة ؟

2) أنشئ متوازي أضلاع إحدى زواياه قائمة ، بين أن كل زواياه قائمة ، ماذا نسمي متوازي الأضلاع في هذه الحالة ؟ متى يكون مربعا ؟

حل النشاط :

1) إنشاء متوازي أضلاع قطراه متعامدان



ABCD متوازي أضلاع إذن [AC] و [BD] متناصفتان

ولدينا قطراه متعامدان إذن (BD) هو محور القطعة [AC]

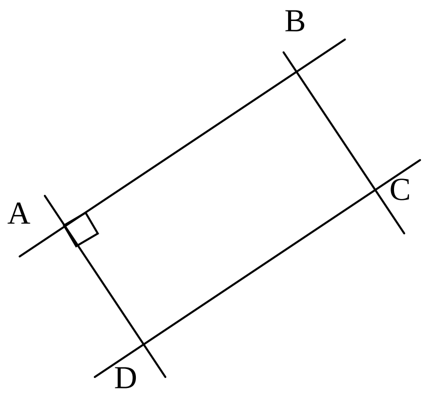
و(AC) هو محور القطعة [BD]

وبالتالي المثلث ABD متساوي الساقين AB = AD

بما أن ABCD متوازي أضلاع فإن : AB = BC = CD = DA

متوازي أضلاع ABCD يسمى معين .

2) إنشاء متوازي أضلاع إحدى زواياه قائمة



ABCD متوازي أضلاع إذن (DC) // (AB) و(AD) // (BC)

متوازي أضلاع ABCD إحدى زواياه قائمة إذن(AD) ⊥ (AB)

ومن التوازي نستنتج أن (BC) ⊥ (AB) و(CD) ⊥ (BC)

و(AD) ⊥ (CD)

في هذه الحالة متوازي أضلاع ABCD يسمى مستطيل.

وإذا كان ضلعان متتاليان منه متقايسان فإن ABCD يكون مربعا .

متوازيات الأضلاع الخاصة :

المعين :

هو متوازي أضلاع له ضلعان متتاليان متقايسان .

- ✓ ABCD معين معناه [(BD) ⊥ (AC) و [AC] ، [BD] متناصفان]
- ✓ ABCD معين معناه [AB = BC = CD = DA]
- ✓ إذا كان ABCD معينا فإن [(AC) ينصف كلا من الزاويتين $B\hat{A}D$ و $B\hat{C}D$ و (BD) ينصف كلا من الزاويتين $A\hat{B}C$ و $A\hat{D}C$]

المستطيل :

هو متوازي أضلاع له زاوية قائمة .

- ✓ ABCD مستطيل معناه [$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ$]
- ✓ ABCD مستطيل معناه [AC = BD و [AC] ، [BD] متناصفان]

المربع :

هو متوازي أضلاع له ضلعان متتاليان متقايسان وزاوية قائمة.

- ✓ ABCD مربع معناه [$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ$ و AB = BC = CD = DA]
- ✓ ABCD مربع معناه [AC = BD و(BD) ⊥ (AC) و [AC] ، [BD] متناصفان]

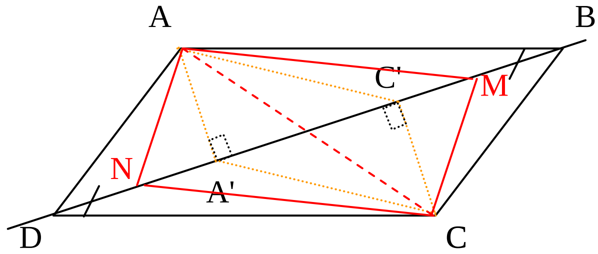
التمرين الاول :

ABCD متوازي أضلاع حيث AB ≠ AD .

أ) النقطتان A' و C' هما المسقطان العموديان للنقطتين A و C على (BD) على الترتيب.
بين أن $AA'CC'$ متوازي أضلاع.

ب) M نقطة من $[BC']$ و N نقطة من القطعة $[A'D]$ حيث: $BM = DN$
ما هي طبيعة الرباعي $AMCN$.

حل التمرين :



أ) نقارن بين المثلثين القائمين ADA' و BCC' نجد $AA' = CC'$
ولدينا $(CC') // (AA')$ لأنهما عموديين على نفس المستقيم (BD)
وبالتالي : $AA'CC'$ متوازي أضلاع.

ب) نسمي O منتصف كل من $[AC]$ و $[BD]$
ولدينا : $BM = DN$ إذن O منتصف كل من $[AC]$ و $[MN]$
إذن الرباعي $AMCN$ متوازي أضلاع .

المثلثات والمستقيمات الخاصة:

نشاط :

أرسم دائرة مركزها A ، علم على هذه الدائرة النقط B ، C ، D حيث

AB = BC و D نظيرة B بالنسبة إلى النقطة A .

ما هي طبيعة كل من المثلثات : ACD ، ABC ، BCD

عين القياسين التاليين : $\widehat{BAC}$ و $\widehat{BCD}$.

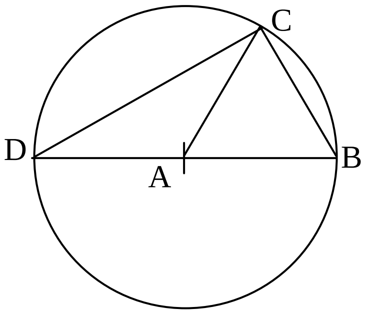
حل النشاط :

المثلث ACD متساوي الساقين ، AC = AD نصفي قطر الدائرة

المثلث ABC متقايس الأضلاع ، AC = AB = BC .

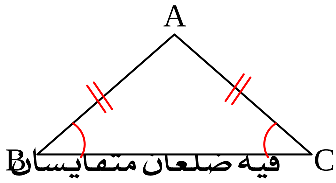
المثلث BCD قائم في C .

$\widehat{BAC} = 60^\circ$ و $\widehat{BCD} = 90^\circ$



المثلثات الخاصة :

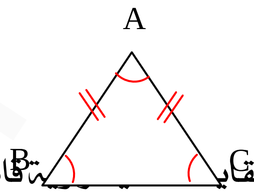
المثلث متساوي الساقين



فيه ضلعان متقايسان

$A\hat{B}C = A\hat{C}B$

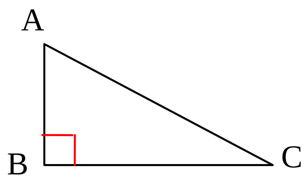
المثلث متقايس الأضلاع



أضلاعه متقايسة

$A\hat{B}C = A\hat{C}B = B\hat{A}C = 60^\circ$

المثلث القائم



زاوية قائمة

$A\hat{B}C = 90^\circ$

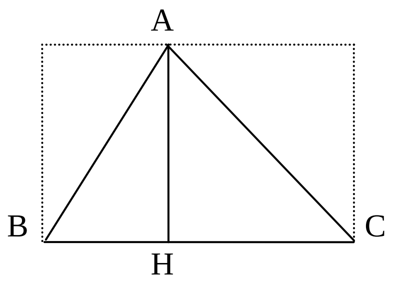
المستقيمات الخاصة في مثلث :

نشاط :

ABC مثلث كيفي وH المسقط العمودي للنقطة A على (BC) .

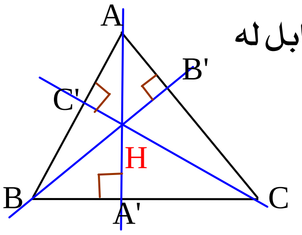
أحسب مساحة لكل من المثلثين ABH و ACH . ما هي مساحة المثلث ABC ؟

حل النشاط :



$s(ABH)=\frac{1}{2}AH.HB$ ، $s(ACH)=\frac{1}{2}AH.HC$

لدينا : BH + CH = BC ومنه : $s(ABC)=\frac{1}{2}AH.BC$



✓ الارتفاع في مثلث هو المستقيم الذي يشمل أحد رؤوس المثلث ويعامد حامل الضلع المقابل له
✓ ارتفاعات مثلث متقاطعة في نقطة واحدة

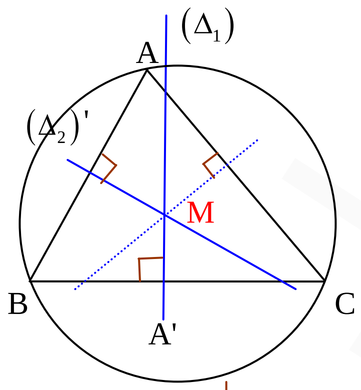
مساحة مثلث : $s(ABC)=\frac{1}{2}AA'.BC$ ، $s(ABC)=\frac{1}{2}BB'.AC$ ، $s(ABC)=\frac{1}{2}CC'.AB$

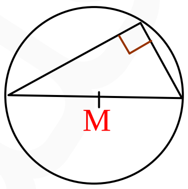
نشاط:

أرسم مثلثا كيفيا ABC ، و (Δ_1) ، (Δ_2) محورا الضلعين [BC] و [AB] على الترتيب يتقاطعان في النقطة M .

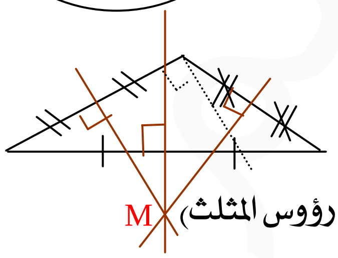
أ) بين أن محور الضلع [AC] يشمل النقطة M .
ب) عين مركز الدائرة التي تشمل النقط A ، B ، C ، وارسمها.
ج) عين موقع النقطة M في الحالة التي يكون فيها المثلث ABC قائما في A .
د) أين تقع النقطة M في الحالة التي يكون فيها المثلث ABC منفرج الزاوية .

حل النشاط :





لدينا (Δ_1) محور [BC] إذن : MB = MC
لدينا (Δ_2) محور [AB] إذن : MA = MB
ومنه : MA = MC معناه أن M هي نقطة من محور القطعة [AC] .
لدينا MA = MB = MC وبالتالي مركز الدائرة التي تشمل النقط A ، B ، C هو النقطة M .
موقع النقطة M في الحالة التي يكون فيها المثلث ABC **قائما** في A هو منتصف القطعة [BC]
تقع النقطة M في الحالة التي يكون فيها المثلث ABC منفرج الزاوية ، خارج المثلث .



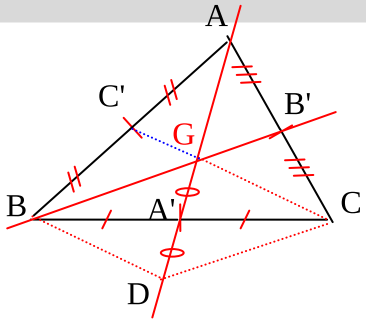
✓ المحور هو محور أحد أضلاعه.
✓ محاور مثلث متقاطعة في نقطة واحدة .
✓ نقطة تقاطع محاور مثلث هي مركز الدائرة المحيطة به (التي تشمل رؤوس المثلث)

نشاط :

ABC مثلث كيفي ، 'A ، 'B ، 'C منتصفات القطع [BC] ، [AC] ، [AB] على الترتيب.

1. ماذا نسمي المستقيمين ('AA) و ('BB) في المثلث ABC ؟
2. المستقيمان ('AA) و ('BB) يتقاطعان في النقطة G ، أرسم النقطة D نظيرة النقطة G بالنسبة إلى 'A .
3. ما هي طبيعة الرباعي BDCG ؟
4. استنتج $DC = 2\,GB'$ وأن النقطة G هي منتصف القطعة [AD] و $(BD) // (GC')$.
5. بين أن النقط C ، G ، 'C في استقامية .
6. بين أن $AG = 2\,GA'$ و $BG = 2\,GB'$ و $CG = 2\,GC'$.

حل النشاط:



نسمي المستقيمين ('AA) و ('BB) المتوسطان في المثلث ABC .

القطعتان [BC] و [GD] متناصفتان إذن الرباعي BDCG متوازي أضلاع .

لدينا في المثلث ACD ، $(DC) // (GB')$ ومنه حسب مبرهنة طاليس

$$\frac{AB'}{AC}=\frac{AG}{AD}=\frac{GB'}{DC}$$ ولدينا 'B منتصف القطعة [AC] إذن : $$\frac{AB'}{AC}=\frac{1}{2}$$

إذن $DC = 2\,GB'$ و $AD = 2\,AG$ ومنه النقطة G هي منتصف القطعة [AD].

في المثلث ABD ، النقطة G منتصف القطعة [AD] و 'C منتصف القطعة [AB] إذن : $(BD) // (GC')$.

الرباعي BDCG متوازي أضلاع إذن $(BD) // (GC)$ ولدينا $(BD) // (GC')$ إذن $(GC) // (GC')$

وهذان المستقيمان لهما نقطة مشتركة G إذن النقط C ، G ، 'C في استقامية .

لدينا : $AG = GD$ و $GD = 2\,GA'$ إذن $AG = 2\,GA'$

لدينا : $BG = DC$ و $DC = 2\,GB'$ إذن $BG = 2\,GB'$

في المثلث ABD ، $(BD) // (GC')$ ومنه $$\frac{AC'}{AB}=\frac{AG}{AD}=\frac{GC'}{BD}=\frac{1}{2}$$ ، ومنه : $BD = 2\,GC'$

بما أن $BD = GC$ فإن : $GC = 2\,GC'$

- ✓ المتوسط في مثلث هو المستقيم الذي يشمل أحد رؤوس المثلث ومنتصف الضلع المقابل له.
- ✓ متوسطات مثلث متقاطعة في نقطة واحدة هي مركز ثقله .
- ✓ ('AA) و ('BB) و ('CC) متوسطات المثلث ABC و G مركز ثقله لدينا :
- ✓ $AG = 2\,GA'$ و $BG = 2\,GB'$ و $CG = 2\,GC'$.

نشاط

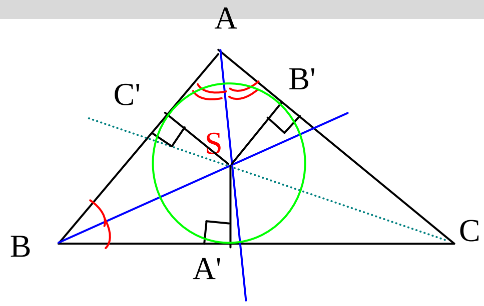
ABC مثلث كيفي ، المنصفان الداخليان لزاويتي الرأسين A و B يتقاطعان في النقطة S .

أ) النقط 'A ، 'B ، 'C المساقط العمودية للنقطة S على المستقيمات (BC) ، (AC) ، (AB) على الترتيب .
بين $SA' = SB' = SC'$

ب) بين أن المنصف الداخلي لزاوية الرأس C يشمل النقطة S .

ج) عين مركز الدائرة التي تمس أضلاع المثلث ABC من الداخل وارسمها .

حل النشاط :



أ) نقارن بين المثلثين القائمين ASB' و ASC' لدينا

SA وتر مشترك ، $\widehat{SAB'}=\widehat{SAC'}$ إذن : SB' = SC' .

نقارن بين المثلثين القائمين BSA' و BSC' لدينا

SB وتر مشترك ، $\widehat{SBA'}=\widehat{SBC'}$ إذن : SA' = SC' .

وبالتالي : SA' = SB' = SC'

ب) نقارن بين المثلثين القائمين CSB' و A'SC لدينا SC وتر مشترك ، SA' = SB' إذن $\widehat{SCB'}=\widehat{SCA'}$

وبالتالي (SC) هو المنصف الداخلي للزاوية ذات الرأس C .

ج) لدينا : SA' = SB' = SC' إذن S هي مركز الدائرة التي تشمل النقط A' ، B' ، C' .

بما أن $(SA')\perp(BC)$ و $(SB')\perp(AC)$ و $(SC')\perp(BA)$

إذن (BC) و(AC) و(BA) هي مماسات لهذه الدائرة .

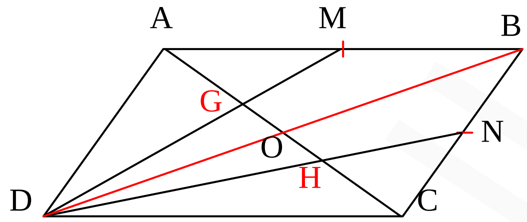
- ✓ المنصف في مثلث هو منصف إحدى زواياه .
- ✓ المنصفات الداخلية في مثلث متقاطعة في نقطة واحدة .
- ✓ نقطة تقاطع المنصفات هي مركز الدائرة المرسومة داخل هذا المثلث (أي التي تمس أضلاع المثلث من الداخل .

التمرين الثاني :

ABCD متوازي الأضلاع ، النقطتان M و N منتصفا القطعتين [AB] و [BC] على الترتيب.

[DM] و [DN] يقطعان [AC] في النقطتين G و H على الترتيب.

بين أن : AG = GH = HC .



حل التمرين :

القطران [AC] و [BD] متناصفان في النقطة O .

في المثلث ABD لدينا (AO) و (DM) متوسطان يتقاطعان في النقطة G ومنه AG = 2 GO .

في المثلث CBD لدينا (CO) و (DN) متوسطان يتقاطعان في النقطة H ومنه HC = 2HO .

ومنه : OA = 3 OG و OC = 3 HO إذن $OG=OH=\frac{1}{2}GH$ ومنه : AG =GH = HC

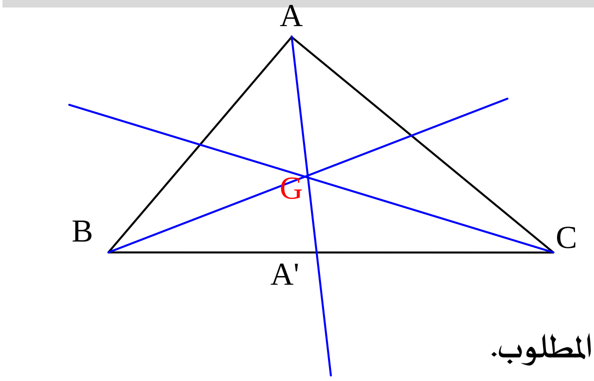
التمرين الثالث :

(Δ_1) ، (Δ_2) ، (Δ_3) ثلاث مستقيمات متقاطعة في نقطة G .

أ) أنشئ مثلثا ABC بحيث تكون النقطة G مركز ثقله .

ب) هل يوجد مثلثا واحدا يحقق المطلوب ؟

حل التمرين :



مرحلة التحليل :

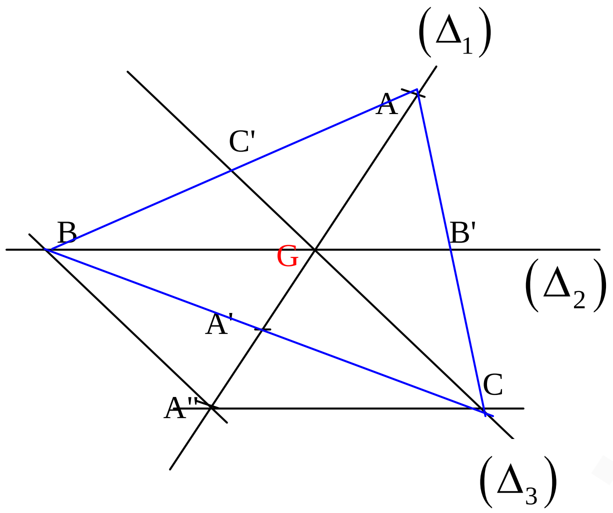
نفرض أن للمسألة حل أي يوجد على الأقل مثلثا ABC بحيث تكون النقطة G مركز ثقله . ونرسم شكلا مناسبا له.

لدينا القواعد التالية : A'C = A'B و AG = 2 A'G

مرحلة التركيب والإنشاء :

انطلاقا من القواعد السابقة ننشئ الشكل ونتأكد أنه يحقق المطلوب.

نرسم ثلاث مستقيمات (Δ_1) ، (Δ_2) ، (Δ_3) متقاطعة في نقطة G .



A نقطة من المستقيم (Δ_1) و A" نظيرتها بالنسبة للنقطة G

A' منتصف القطعة [A"G]

الموازي من A" للمستقيم (Δ_3) يقطع المستقيم (Δ_2) في B

والموازي من A" للمستقيم (Δ_2) يقطع المستقيم (Δ_3) في C

إذن الرابعي BGCA" متوازي أضلاع

ومنه A' هي منتصف [BC] إذن (AA') هو متوسط في المثلث ABC .

(AB) يقطع (Δ_3) في النقطة C' . في المثلث ABA"

لدينا (BA") // (GC") و G منتصف [AA"]

إذن C" منتصف [AB] وبالتالي (CC') هو متوسط في المثلث ABC .

بما أن المتوسطات تتلاقى في نقطة واحدة إذن كذلك (BB') هو متوسط في المثلث ABC .

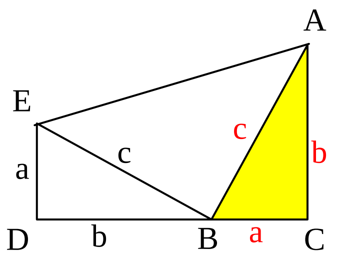
ومنه النقطة G مركز ثقل المثلث ABC .

توجد ما لا نهاية من الحلول للمسألة وهذا حسب اختيار النقطة A على المستقيم (Δ_1) .

مبرهنة فيثاغورس

نشاط

الشكل المقابل يمثل مثلثا ABC قائما في C أطوال أضلاعه a ، b ، c و BDE مثلث يقايس المثلث ABC حيث C ، B ، D في استقامية و BD = AC.



أ) بين أن الزاوية ABE قائمة.

ب) ما نوع الرابعي ACDE ؟

ج) أحسب مساحة الرابعي ACDE بطريقتين مختلفتين.

د) استنتج علاقة بين c^2 و a^2 ، b^2.

حل النشاط:

أ) لدينا في المثلث ABC ، $\widehat{ABD}=\widehat{BAC}+\widehat{ACB}$ (زاوية خارجية) ولدينا $\widehat{ABD}=\widehat{EBD}+\widehat{ABE}$

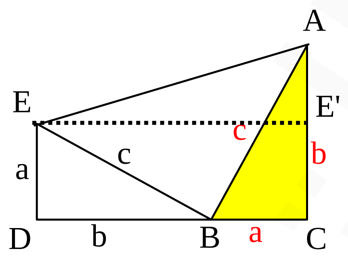
ومنه : $\widehat{BAC}+\widehat{ACB}=\widehat{EBD}+\widehat{ABE}$

بما أن المثلث BDE يقايس المثلث ABC إذن : $\widehat{EBD}=\widehat{BAC}$ وبالتالي : $\widehat{ACB}=\widehat{ABE}=90°$

ب) نوع الرابعي ACDE :

الربلعي ACDE شبه منحرف قائم.

ج) حساب مساحة الرابعي ACDE بطريقتين مختلفتين :



الطريقة الأولى : $s(ACDE) = 2\ s(ABC) + s(ABE)$

ومنه : $s(ACDE) = ab + (c^2 / 2)$

الطريقة الثانية : $s(ACDE) = s(CDEE') + s(AEE')$

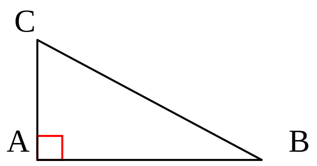
ومنه : $s(ACDE)=a(b+a)+\frac{1}{2}(b+a)(b-a)$

أي : $s(ACDE)=ab+a^2+\frac{1}{2}b^2-\frac{1}{2}a^2$ وبالتالي : $s(ACDE)=ab+\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2$

د) استنتج علاقة بين c^2 و a^2 ، b^2 :

من السؤال السابق نستنتج أن : $\frac{1}{2}c^2=\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2$ ومنه : $c^2 = a^2 + b^2$

مبرهنة فيثاغورس وعكسها :



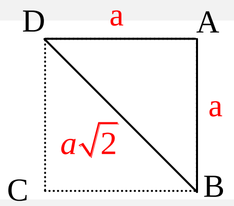
✓ **مبرهنة 1 : (مبرهنة فيثاغورس)**

إذا كان ABC مثلثا قائما في A فإن : $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

✓ **مبرهنة 2 : (عكس مبرهنة فيثاغورس)**

إذا كان في مثلث ABC ، $BC^2 = AB^2 + AC^2$ فإن : المثلث ABC قائم في A .

مثال 1:

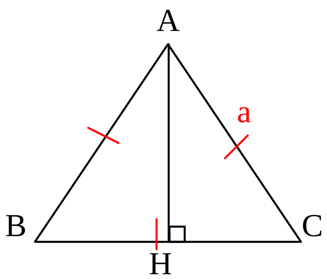


ABCD مربع طول ضلعه يساوي a أحسب طول قطره .

ومنه : $BD^2 = AB^2 + AD^2$ $\quad BD^2 = a^2 + a^2$

ومنه : $BD^2 = 2a^2$ إذن : $BD = a\sqrt{2}$

مثال 2:



ABC مثلث متقايس الأضلاع ، طول ضلعه يساوي a ،

(AH) الارتفاع المتعلق بالضلع [BC] .

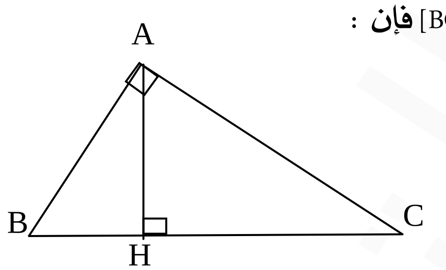
أحسب الطول AH .

حسب مبرهنة فيثاغورس لدينا : $AC^2 = AH^2 + HC^2$

ومنه : $AC^2 - HC^2 = AH^2$ إذن : $AH^2 = a^2 - \frac{1}{4}a^2$

أي : $AH^2 = \frac{3}{4}a^2$ وبالتالي : $AH = a\frac{\sqrt{3}}{2}$

نتائج :



إذا كان ABC مثلثا قائما في A و (AH) الارتفاع المتعلق بالضلع [BC] فإن :

أ) $AB \cdot AC = AH \cdot BC$ (من المساحة)

ب) $AH^2 = HC \cdot HB$ (استعمال مبرهنة فيثاغورس)

$AB^2 = AH^2 + BH^2$ و $AC^2 = AH^2 + HC^2$

ومنه : $AB^2 + AC^2 = 2\,AH^2 + BH^2 + CH^2$

إذن : $BC^2 = 2AH^2 + BH^2 + CH^2$. ومنه : $(BH + HC)^2 = 2AH^2 + BH^2 + CH^2$.

إذن : $BH^2 + HC^2 + 2\,BH \times HC = 2AH^2 + BH^2 + CH^2$. وبالتالي : $AH^2 = BH \times HC$

ج) $AB^2 = BH \cdot BC$ (مبرهنة فيثاغورس و النتيجة ب)

$AB^2 = AH^2 + BH^2$ ومنه $AB^2 = BH \times HC + BH^2$ إذن : $AB^2 = BH \times (HC + BH)$

وبالتالي : $AB^2 = BH \cdot BC$

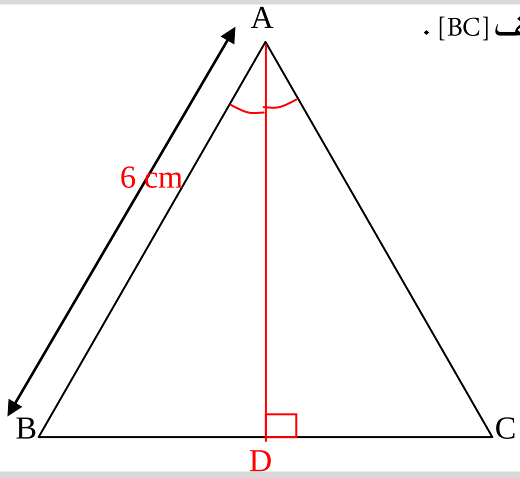
د) $AC^2 = CH \cdot CB$ (بنفس الطريقة للنتيجة السابقة)

نشاط

ABC مثلث متقايس الأضلاع طول ضلعه 6 cm ، النقطة D منتصف [BC] .

بين أن (AD) منصف زاوية الرأس A .

أحسب الطول AD ، واستنتج كلا من sin 30° ، cos 30° ، tan 30° .



حل النشاط :

المستقيم (AD) هو متوسط في المثلث المتقايس الأضلاع ABC

إذن هو محور وبالتالي منصف زاوية الرأس A .

من مبرهنة فيثاغورس لدينا : $AD^2 = 36 - 9 = 27$

ومنه : $AD = 3\sqrt{3}$

$\sin 30° = \frac{BD}{AB} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ ، $cos 30° = \frac{AD}{AB} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\tan 30° = \frac{BD}{AD} = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

النسب المثلثية في مثلث قائم :

تعريف :

ABC مثلث قائم في C حيث : $\widehat{BAC} = \alpha$

جيب الزاوية α : $\sin\alpha = \frac{BC}{AB}$

جيب تمام الزاوية α : $cos\alpha = \frac{AC}{AB}$

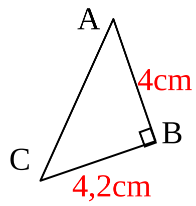
ظل الزاوية α : $\tan\alpha = \frac{BC}{AC}$

نتائج : $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{cos\alpha}$ $\qquad (\sin\alpha)^2 + (cos\alpha)^2 = 1$

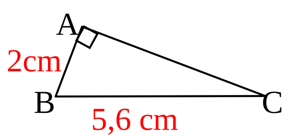
التمرين الرابع

أحسب كلا من AC و $\widehat{ABC}$ في كل من الحالتين الآتيتين : (تعطى النتائج مدورة إلى الوحدة)

الحالة 1



الحالة 2



حل التمرين :

الحالة 1 :

حسب مبرهنة فيثاغورس لدينا : $AC^2 = AB^2 + BC^2$ ومنه : $AC^2 =(4^2 + 4,2^2)\ cm^2$

أي : $AC^2 = 33,64\ cm^2$ ومنه : $AC = 5,8\ cm$. وبالتدوير إلى الوحدة نجد : $AC = 6\ cm$.

$$\widehat{ABC} = 90°$$

الحالة 2 :

حسب مبرهنة فيثاغورس لدينا : $BC^2 = AB^2 + AC^2$ ومنه : $AC^2 = BC^2 - AB^2$

ومنه : $AC^2 =(5,6^2 - 2^2)\ cm^2$ أي : $AC^2 = 35,36\ cm^2$ ومنه $AC = 5,946427499...$

وبالتدوير إلى الوحدة نجد : $AC = 6\ cm$.

$$\cos\widehat{ABC} = \frac{2}{5,6} = 0,347142857...$$ ومنه : $$\widehat{ABC} = 69,07516758...°$$

وبالتدوير إلى الوحدة نجد : $\widehat{ABC} = 69°$

التمرين الخامس

ABC مثلث قائم في A حيث $BC = 10\ cm$ و $\widehat{ABC} = 37°$

أحسب بالتدوير إلى الوحدة مساحة ومحيط هذا المثلث .

حل التمرين :

$AC = BC \sin 37°$ ومنه : $AC = 6,01815023...$.

$AB = BC \cos 37°$ ومنه : $AB = 7,9863551...$.

نضع p محيط المثلث ABC : $P = AB + AC + BC$ ومنه : $P = 24,00450533...cm$

وبالتدوير إلى الوحدة نجد : $p = 24\ cm$

نضع s مساحة المثلث ABC : $s = (AB\times AC)/2$ ومنه : $s = 24,0315424...cm^2$

وبالتدوير إلى الوحدة نجد: $s = 24\ cm^2$.

التمرين السادس

أنشئ مثلثا ABC أطوال أضلاعه $5\ cm$ ، $12\ cm$ ، $13\ cm$ ، وحدد طبيعته .

عين مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC ونصف قطرها .

حل التمرين :

نفترض $AB = 5cm$ و $AC = 12\ cm$ و $BC = 13\ cm$

لدينا : $AB^2 + AC^2 = 144 + 25 = 169 = 13^2$

ومنه : $AB^2 + AC^2 = BC^2$

وحسب عكس مبرهنة فيثاغورس أن المثلث ABC قائم في A

مركز الدائرة المحيطة به هو منتصف القطعة [BC] ونصف قطرها يساوي $6,5\ cm$.

مبرهنة طاليس

مبرهنة 1 : مبرهنة طاليس

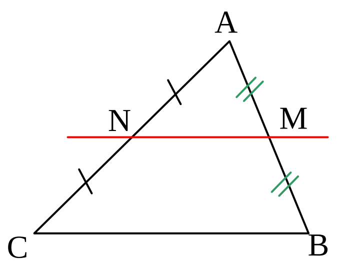
إذا كان لدينا مستقيمان متقاطعان في نقطة A
يقطعهما مستقيمان متوازيان (Δ) و (Δ')
في النقط B ، C ، D ، E حسب أحد الشكلين
فإن أطوال أضلاع المثلث ABC تكون متناسبة
مع أطوال أضلاع المثلث ADE .

أي : $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}=\frac{BC}{DE}$

مبرهنة 2 : عكس مبرهنة طاليس

إذا كانت كل من النقط A ، B ، D ، والنقط A ، C ، E
على استقامة واحدة وبنفس الترتيب حسب أحد الشكلين ،
وإذا كان $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$ فإن المستقيمين (BC) و (DE)
يكونا متوازيين

حالة خاصة : مستقيم المنتصفين في مثلث

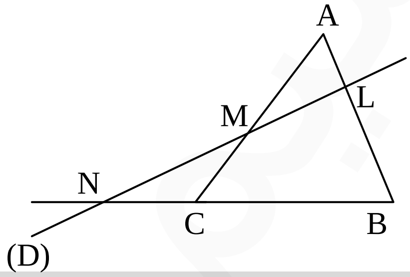


ABC مثلث كيفي.
إذا كانت النقطتان M و N منتصفا القطعتين [AB] و [AC]
على الترتيب فإن (BC) // (MN) و BC = 2 MN
إذا كانت النقطة M منتصف القطعة [AB] وكان (BC) // (MN)
حيث N نقطة من [AC] فإن N هي منتصف القطعة [AC]

التمرين السابع

ABC مثلث كيفي ، (D) مستقيم يقطع (AB) ، (AC) ، (BC) في النقط L ، M ، N على الترتيب.

نريد البرهان أن : $\frac{LA}{LB}\times\frac{NB}{NC}\times\frac{MC}{MA}=1$

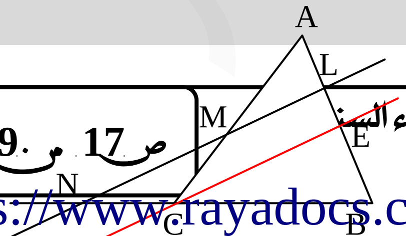


أ) أرسم الموازي للمستقيم (D) الذي يشمل النقطة C ، وسم E تقاطعه مع (AB).

ب) بين أن : $\frac{LB}{LE}=\frac{NB}{NC}$ و $\frac{LE}{LA}=\frac{MC}{MA}$

ج) استنتج العلاقة $\frac{LA}{LB}\times\frac{NB}{NC}\times\frac{MC}{MA}=1$

حل التمرين :



أ) رسم الموازي للمستقيم (D) الذي يشمل النقطة C ، يقطع (AB) في E.

ب) تبيان أن $\frac{NB}{NC}=\frac{LB}{LE}$

في المثلث BLN لدينا : (NL) // (CE) إذن حسب مبرهنة طاليس

لدينا : $\frac{BC}{BN}=\frac{BE}{BL}$ معناه $\frac{BC}{BE}=\frac{BN}{BL}$ ومنه : $\frac{NC}{LE}=\frac{NB-BC}{LB-BE}=\frac{BC}{BE}=\frac{NB}{LB}$

إذن : $\frac{NC}{LE}=\frac{NB}{LB}$ معناه $\frac{LB}{LE}=\frac{NB}{NC}$

تبيان أن $\frac{LE}{LA}=\frac{MC}{MA}$

في المثلث ACE لدينا : (ML) // (CE) إذن حسب مبرهنة طاليس

$\frac{AL}{AE}=\frac{AM}{AC}$ معناه $\frac{AC}{AE}=\frac{AM}{AL}$ ومنه : $\frac{MC}{LE}=\frac{AC-AM}{AE-AL}=\frac{AC}{AE}=\frac{AM}{AL}$

$\frac{MC}{LE}=\frac{MA}{LA}$ معناه $\frac{MC}{MA}=\frac{LE}{LA}$

ج) استنتاج العلاقة $\frac{MC}{MA}\times\frac{NB}{NC}\times\frac{LA}{LB}=1$

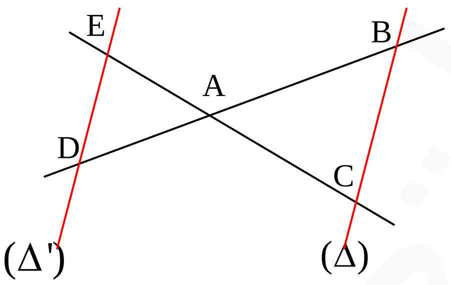
$\frac{LB}{LE}=\frac{NB}{NC}$ معناه $LE=\frac{LB\times NC}{NB}$ و $\frac{MC}{MA}=\frac{LE}{LA}$ معناه $LE=\frac{MC\times LA}{MA}$

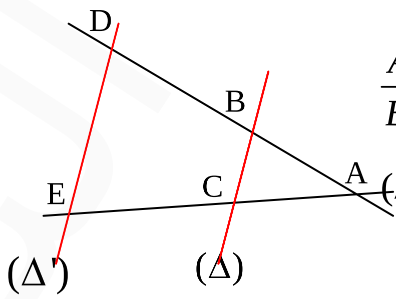
ومنه : $\frac{MC\times LA}{MA}=\frac{LB\times NC}{NB}$ معناه LB×NC×MA = MC×LA×NB معناه $\boxed{\frac{MC}{MA}\times\frac{NB}{NC}\times\frac{LA}{LB}=1}$

نتائج :

إذا كان $\frac{AC}{CE}=\frac{AB}{BD}$ فإن $(\Delta)//(\Delta')$

إذا كان $(\Delta)//(\Delta')$ فإن $\frac{AC}{CE}=\frac{AB}{BD}$

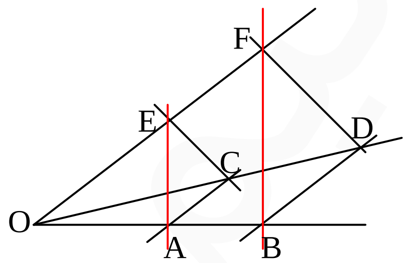




التمرين الثامن

إذا علمت أن في الشكل المرفق (BD) // (AC)

و(DF) // (CE) فبين أن (BF) // (AE) .



حل التمرين

في المثلث ODB لدينا : (BD) // (AC) ومنه حسب مبرهنة طاليس لدينا : $\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}$

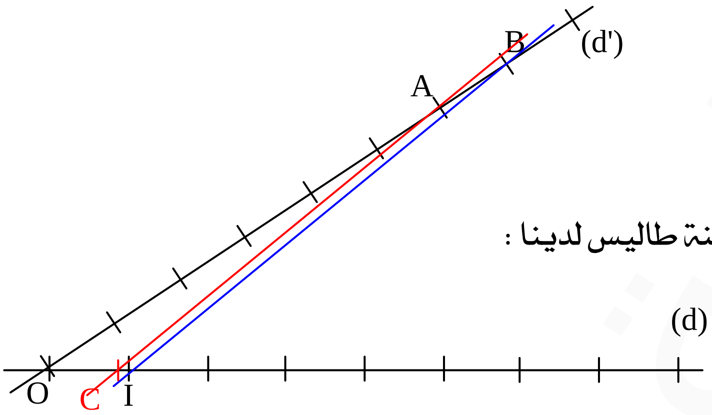
في المثلث ODF لدينا : (DF) // (CE) ومنه حسب مبرهنة طاليس لدينا : $\frac{OC}{OD}=\frac{OE}{OF}$

إذن : $\frac{OA}{OB}=\frac{OE}{OF}$ وحسب عكس مبرهنة طاليس المطبقة في المثلث OBF لدينا : (BF) // (AE) .

التمرين التاسع

أنشئ العدد $\frac{6}{7}$

حل التمرين



ليكن (O,I) معلما للمستقيم (d) ،

المستقيم (d') يقطع (d) في النقطة O .

نعين النقطتين A و B على المستقيم (d') حيث

OA = 6 و OB = 7 ،

نرسم من A المستقيم الموازي للمستقيم (BI) حسب مبرهنة طاليس لدينا :

$\frac{6}{7}=\frac{OC}{OI}=\frac{OA}{OB}$ إذن : $OC=\frac{6}{7}$

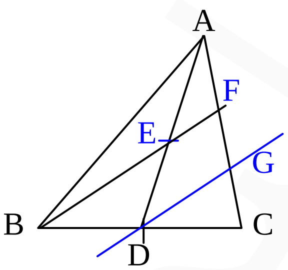
التمرين العاشر

ABC مثلث ، النقطة D منتصف [BC] والنقطة E منتصف [AD] و F نقطة من [AC] حيث $AF=\frac{1}{3}AC$

أ) بين أن النقط B ، E ، F في استقامية.

ب) بين أن BF = 4 EF .

حل التمرين



أ) تبيان أن النقط B ، E ، F في استقامية.

نرسم من D الموازي للمستقيم (EF) يقطع (AC) في G

في المثلث ADG لدينا (DG)// (EF) و E منتصف [AD]

إذن F هي منتصف [AG] و DG = 2EF ومنه : AF = FG = GC

وبالتالي G منتصف [FC] ، وفي المثلث BCF لدينا كذلك D منتصف [BC]

إذن : (BF) // (DG) و BF = 2DG

ومنه : (BF) // (EF) بما أن للمستقيمين نقطة مشتركة فإن النقط B ، E ، F في استقامية.

ب) تبيان أن BF = 4 EF .

لدينا : BF = 2DG و DG = 2EF إذن : BF = 4 EF .

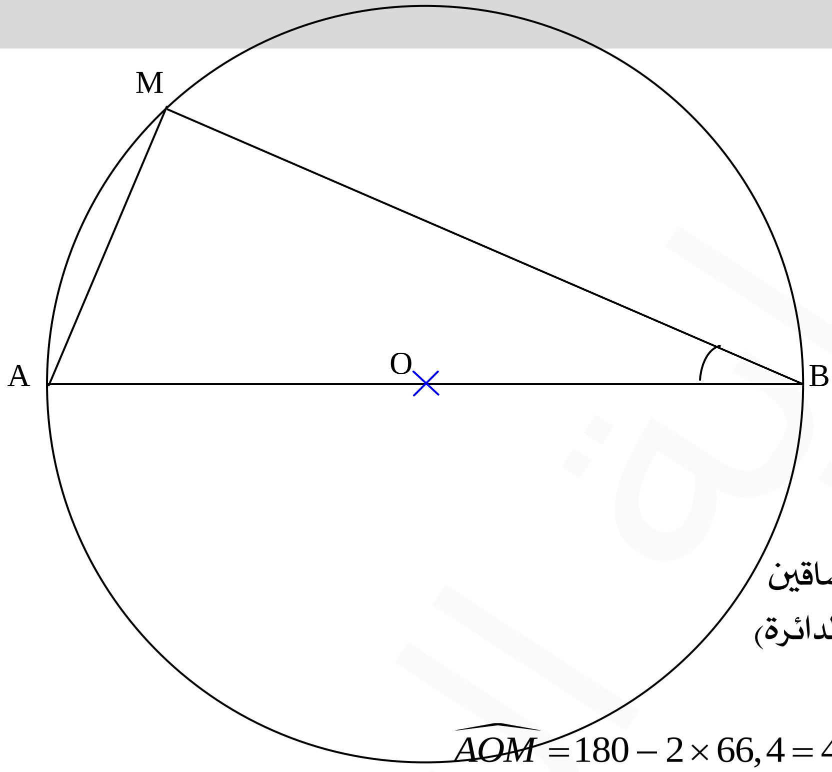
الزوايا والدائرة

نشاط :

أرسم دائرة (C) مركزها O ونصف قطرها 5 cm ، و [AB] قطر فيها ،
وM نقطة من الدائرة حيث AM = 4 cm .

أ) باستعمال ال
ب) آلة الحاسبة والتدوير إلى 0,1 أحسب قيس الزاوية ABM ، استنتج قيس الزاوية MAB .
ج) ما نوع المثلث AOM ؟ واحسب أقياس زواياه.
د) استنتج العلاقة بين الزاويتين ABM و AOM .

حل النشاط :



أ) حساب قيس الزاوية ABM :

المثلث ABM قائم في M

لأن ضلعه [AB] هو قطر للدائرة (C) .

ومنه : $\sin \widehat{ABM} = \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{4}{10} = 0,4$

إذن بالحاسبة وبالتدوير إلى 0,1 نجد :

$\widehat{ABM} = 23,6°$

استنتاج قيس الزاوية MAB

$\widehat{MAB} = 90 - 23,6 = 66,4°$

ب) نوع المثلث AOM : هو متساوي الساقين

رأسه O لأن : OA = OM (نصفي قطر الدائرة)

حساب أقياس زوايا المثلث AOM :

$\widehat{MAO} = \widehat{AMO} = 66,4°$ و $\widehat{AOM} = 180 - 2 \times 66,4 = 47,2°$

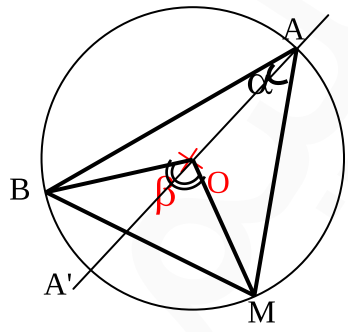
ج) استنتاج العلاقة بين الزاويتين ABM و AOM .

لدينا : 2×23,6 = 47,2 ومنه $\widehat{AOM} = 2\widehat{ABM}$

نشاط إضافي:

A ، B ، M ثلاث نقط متمايزة من دائرة (c) مركزها O ، المستقيم (AO) يقطع الدائرة (c) في النقطة 'A.

نضع $\widehat{MAB} = \alpha$ و $\widehat{MOB} = \beta$.



أ) بين أن كل من المثلثين AOM و BOM متساوي الساقين ،

ثم عبر عن قيس الزاوية $\widehat{MAA'}$ بدلالة قيس الزاوية $\widehat{MOA'}$ ،

وعن قيس الزاوية $\widehat{BAA'}$ بدلالة قيس الزاوية $\widehat{BOA'}$.

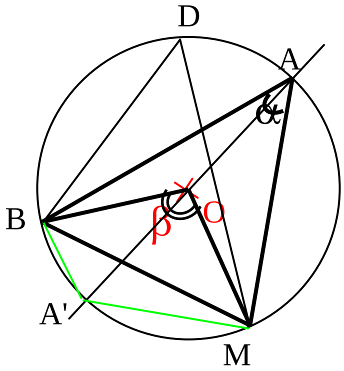
ب) استنتج العلاقة بين α و β.

ج) عبر عن الزاوية $\widehat{BA'M}$ بدلالة β ، ثم بدلالة α.

واستنتج العلاقة بين الزاويتين $\widehat{BA'M}$ و $\widehat{BAM}$.

د) D نقطة من القوس الكبرى $\widehat{BM}$ استنتج مما سبق العلاقة بين الزاويتين $\widehat{BAM}$ و $\widehat{BDM}$.

حل النشاط :



أ) تبيان أن كل من المثلثين AOM و BOM متساوي الساقين ،

لدينا OA = OM = OB (أنصاف أقطار الدائرة)

إذن المثلثان AOM و BOM كل منهما متساوي الساقين .

- قيس الزاوية $\widehat{MAA'}$ بدلالة قيس الزاوية $\widehat{MOA'}$:

لدينا $\widehat{MOA'}$ زاوية خارجية في المثلث AOM

ومنه: $\widehat{MOA'} = \widehat{MAO} + \widehat{OMA}$ وبما أن $\widehat{MAO} = \widehat{OMA} = \widehat{MAA'}$

فإن : $\widehat{MOA'} = 2\widehat{MAA'}$

- قيس الزاوية $\widehat{BAA'}$ بدلالة قيس الزاوية $\widehat{BOA'}$:

لدينا $\widehat{BOA'}$ زاوية خارجية في المثلث BOA ومنه

$\widehat{BOA'} = \widehat{BAO} + \widehat{OBA}$ وبما أن $\widehat{BAO} = \widehat{OBA} = \widehat{BAA'}$ فإن : $\widehat{BOA'} = 2\widehat{BAA'}$.

ب) استنتاج العلاقة بين α و β.

$\widehat{BOM} = \widehat{BOA'} + \widehat{A'OM}$ ومنه : $\widehat{BOM} = 2\widehat{BAA'} + 2\widehat{A'AM}$ إذن : $\widehat{BOM} = 2\widehat{BAM}$

وبالتالي : $\beta = 2\alpha$

ج) عبر عن الزاوية $\widehat{BA'M}$ بدلالة β ، ثم بدلالة α ،

باستعمال نفس الطريقة السابقة نجد : $\widehat{BA'M} = 180° - \frac{1}{2}\beta$ و $\widehat{BA'M} = 180° - \alpha$

واستنتج العلاقة بين الزاويتين $\widehat{BA'M}$ و $\widehat{BAM}$.

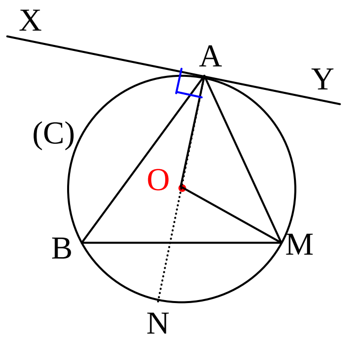
$\widehat{BA'M} + \alpha = 180°$ أي : $\widehat{BA'M} + \widehat{BAM} = 180°$ ومنه : $\widehat{BA'M}$ و $\widehat{BAM}$ زاويتان متكاملتان .

د) D نقطة من القوس الكبرى $\widehat{BM}$ استنتج مما سبق العلاقة بين الزاويتين $\widehat{BAM}$ و $\widehat{BDM}$.

مما سبق نستنتج أن : $\alpha = \frac{\beta}{2} = \widehat{BDM}$ ومنه : $\widehat{BAM} = \widehat{BDM}$

مفردات ومصطلحات :

(C) دائرة مركزها O ، A ، B ، M و N نقط من الدائرة (C) حيث O تنتمي إلى [AN].

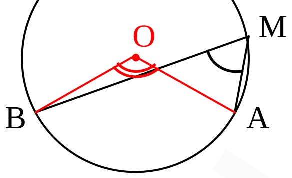


- القطعة [AN] تسمى قطرا ، وكل من القطع [AB]، [AM]، [BM] تسمى وترا في الدائرة (C).
- النقطتان المتمايزتان A و B تعينان على الدائرة (C) قوسين كل منها نرمز لها بالرمز $\overset{\frown}{AB}$.
- (XY) مستقيم يشترك مع الدائرة (C) في نقطة وحيدة A ، يسمى مماسا للدائرة (C) عند النقطة A ويكون عموديا على (AO).
- الزاوية $\widehat{AOM}$ رأسها مركز الدائرة تسمى زاوية مركزية ، نقول إنها تحصر القوس $\overset{\frown}{AM}$.
- الزاوية $\widehat{ABM}$ رأسها نقطة من الدائرة تسمى زاوية محيطية ، نقول إنها تحصر القوس $\overset{\frown}{AM}$.
- الزاوية $\widehat{XAB}$ تسمى زاوية محيطية ، نقول إنها تحصر القوس $\overset{\frown}{AB}$.

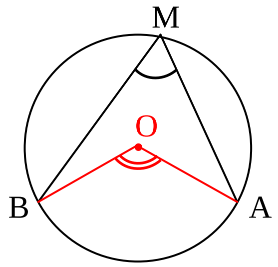
مبرهنة : في كل دائرة ، الزاوية المركزية تساوي ضعف الزاوية المحيطية التي تحصر معها نفس القوس.

مثال :

A ، B ، M ثلاث نقط متمايزة من دائرة مركزها O.



$\widehat{AOB} = 2\widehat{AMB}$



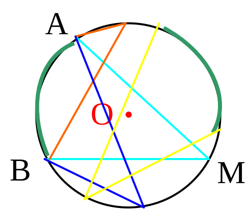
نتائج :

1) الزوايا المحيطية التي تحصر نفس القوس أو أقواسا متقايسة تكون متقايسة. (شكل1)

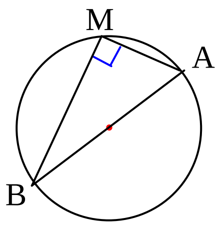
2) إذا كانت القطعة [AB] قطرا لدائرة فإنه من أجل كل نقطة M من هذه الدائرة وتختلف عن A وB ، يكون المثلث ABM قائما في M. (شكل2)

3) تكون رؤوس الرباعي المحدب ABCD من نفس الدائرة إذا كانت : $\widehat{DAC} = \widehat{DBC}$. (شكل3)

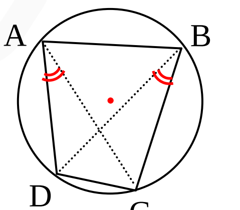
4) يكون الرباعي المحدب ABCD دائريا إذا كانت زاويتان متقابلتان متكاملتين. (شكل4)



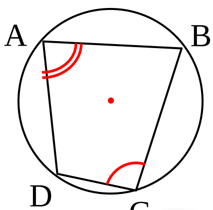
الشكل (1)



الشكل (2)



الشكل (3)



الشكل (4)

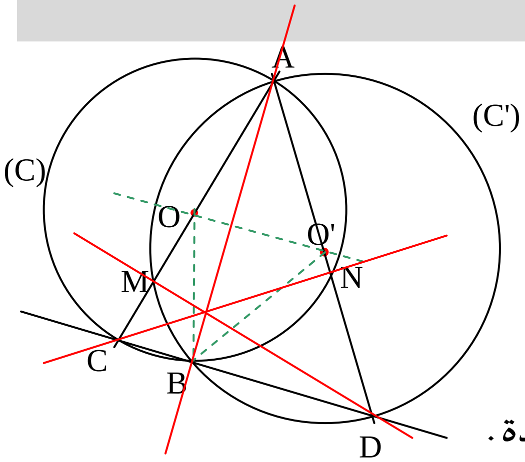
التمرين الحادي عشر :

(C) و (C') دائرتان مركزهما O و O' متقاطعتان في نقطتين A وB ،

[AC] قطر في (C) و يقطع (C') في النقطة M ، و [AD] قطر في (C') و يقطع (C) في النقطة N .

1. أرسم شكلا مناسبا .
2. بين أن النقط C ، B ، D في استقامية .
3. بين أن المستقيمات (AB) ، (CN) ، (MD) متقاطعة في نقطة واحدة .

حل التمرين :



2) تبيان أن النقط C ، B ، D في استقامية .

$\widehat{ABC} = 90°$ تحصر نصف الدائرة (C)

$\widehat{ABD} = 90°$ تحصر نصف الدائرة (C')

ومنه : $\widehat{CBD} = 180°$

وبالتالي : (CB) // (CD) ومنه : النقط C ، B ، D في استقامية.

3) تبيان أن المستقيمات (AB) ، (CN) ، (MD) متقاطعة في نقطة واحدة .

لدينا المثلث ANC قائم في N لأن الزاوية $\widehat{ANC}$ تحصر نصف الدائرة (C) ومنه : $(CN) \perp (AD)$

ولدينا المثلث ABD قائم في B لأن الزاوية $\widehat{ABD}$ تحصر نصف الدائرة (C') ومنه : $(AB) \perp (CD)$

ولدينا المثلث AMD قائم في M لأن الزاوية $\widehat{AMD}$ تحصر نصف الدائرة (C') ومنه : $(DM) \perp (AC)$

إذن المستقيمات (AB) ، (CN) ، (MD) هي ارتفاعات في المثلث ACD وبالتالي تتقاطع في نقطة واحدة .

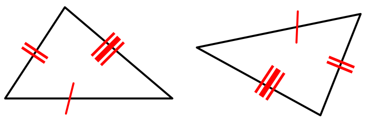
المثلثات المتقايسة والمثلثات المتشابهة :

تعريف :
نقول عن مثلثين أنهما متقايسان إذا كانا قابلين للتطابق.

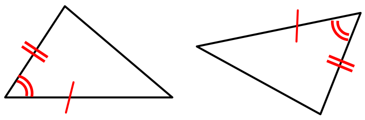
ملاحظة :
إذا كان تطابق مثلثين بالسحب أو التدوير فإن تقايسهما مباشر وإذا كان بقلب أحدها فإنه غير مباشر.

نتيجة :
المثلثان المتقايسان أطوال أضلاعهما متساوية مثنى ، مثنى و زواياهما متساوية مثنى ، مثنى.

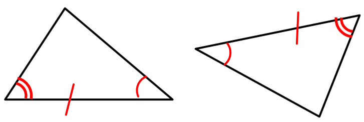
خواص : (حالات تقايس مثلثين)



خاصية 1 :
يتقايس مثلثان إذا كانت أطوال أضلاعهما متساوية مثنى ، مثنى.

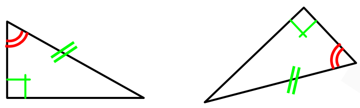


خاصية 2 :
يتقايس مثلثان إذا تقايست زاوية والضلعان اللذان يحصرانها من أحد المثلثين مع زاوية الضلعين اللذين يحصرانها من المثلث الآخر.

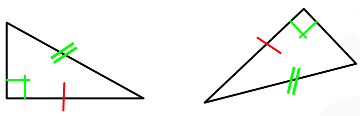


خاصية 3 :
يتقايس مثلثان إذا تقايس ضلع والزاويتان المجاورتان له من أحد المثلثين مع ضلع والزاويتين المجاورتين له من المثلث الآخر.

حالات خاصة : (تقايس مثلثين قائمين)
مثلثان قائمان وتراهما BC و B'C' متقايسان



خاصية 1 :
يتقايس المثلثان ABC وA'B'C' إذا تقايست زاوية غير القائمة من الأول مع زاوية غير القائمة من الثاني.



خاصية 2 :
يتقايس المثلثان ABC وA'B'C' إذا تقايس ضلع للزاوية القائمة من الأول مع ضلع للزاوية القائمة من الثاني.

التمرين الثاني عشر

ABC مثلث ، أنشئ على ضلعيه [AB] و [AC] مثلثين ABD و ACE على الترتيب ، حيث كل منهما متقايس الأضلاع.
بين أن المثلثين ACD و ABE متقايسان واستنتج أن : BE = CD .

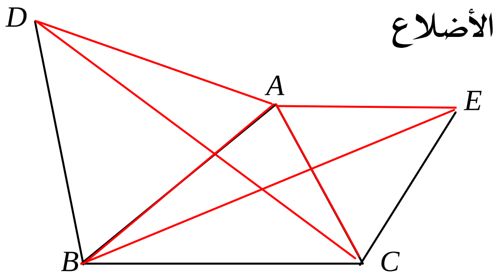
حل :

لدينا : $\widehat{CAE}=\widehat{BAD}=60°$ لأن كل من المثلثين ABD و ACE متقايس الأضلاع

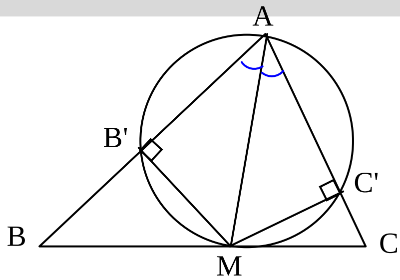
ومنه : $\widehat{CAE}+\widehat{CAB}=\widehat{BAD}+\widehat{CAB}$ إذن: $\widehat{BAE}=\widehat{CAD}$

ولدينا كذلك : AB = AD و AE = AC

إذن المثلثان ACD و ABE متقايسان . ومنه نستنتج : BE = CD .



التمرين الثالث عشر



ABC مثلث ، M نقطة تقاطع منصف زاوية الرأس A و [BC] ، 'C ، 'B المسقطان العموديان للنقطة M على [AB] و [AC] على الترتيب.

أ) بين أن المثلثين AB'M ، AC'M متقايسان.

ب) بين أن النقط A ، 'B ، M ، 'C تنتمي إلى دائرة واحدة يطلب تعيين عناصرها.

ج) ما نوع الرباعي AB'MC' عندما يكون المثلث ABC قائما في A .

حل :

أ) بين أن المثلثين AB'M ، AC'M متقايسان.

لدينا : المثلثان AB'M ، AC'M قائمان ولهما وتر مشترك [AM] و $\widehat{B'AM}=\widehat{C'AM}$ إذن هما متقايسان.

ب) بين أن النقط A ، 'B ، M ، 'C تنتمي إلى دائرة واحدة يطلب تعيين عناصرها.

لدينا $\widehat{AB'M}$ و $\widehat{AC'M}$ متقابلتان ومتكاملتان في الرباعي AB'MC' إذن هو دائري في الدائرة ذات القطر [AM] ومركزها منتصف [AM].

ج) ما نوع الرباعي AB'MC' عندما يكون المثلث ABC قائما في A .

إذا كان المثلث ABC قائما في A فإن للرباعي AB'MC' ثلاث زوايا قائمة وبالتالي هو مستطيل

وبما أن القطر [AM] هو منصف الزاوية ذات الرأس A فإن الرباعي AB'MC' هو مربع.

نشاط :

ADE و'A'B'C مثلثان حيث : AD = A'B' و AE = A'C' و $\widehat{A}=\widehat{A'}$

نعين نقطة B من (AD) و نقطة C من (AE) حيث (DE) // (BC) .

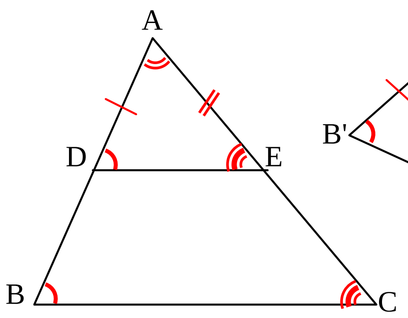
1) تحقق من تقايس المثلثين ADE و'A'B'C .واستنتج الزوايا المتقايسة والضلعين المتقايسين.

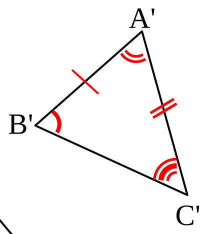
2) بين أن زوايا المثلثين 'A'B'C وABC متقايسة مثنى ، مثنى.

3) هل المثلثين ADE وABC متقايسان ؟ ماذا تلاحظ عنهما ؟

4) برهن أن : $\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}$.

حل النشاط :





1) لدينا : AD = A'B' و AE = A'C' و $\widehat{A}=\widehat{A'}$

إذن المثلثان ADE وA'B'C' هما متقايسان

وبالتالي : $\widehat{D}=\widehat{B'}$ ، $\widehat{E}=\widehat{C'}$ و DE = B'C'

2) لدينا : (DE) // (BC) إذن : $\widehat{D}=\widehat{B}$ ، $\widehat{E}=\widehat{C}$ بالتماثل.

ومنه : $\widehat{B}=\widehat{B'}$ ، $\widehat{C}=\widehat{C'}$ ولدينا $\widehat{A}=\widehat{A'}$ من المعطيات

3) إذا كانت النقطتين B و D مختلفتين فإن المثلثين ADE وABC غير متقايسين.

نلاحظ أن المثلث A'B'C' هو تصغير (أو تكبير) للمثلث ABC . نقول عنهما أنهما متشابهان.

4) تبيان أن $\dfrac{A'B'}{AB}=\dfrac{A'C'}{AC}=\dfrac{B'C'}{BC}$

لدينا :(BC) // (ED) وبتطبيق مبرهنة طاليس نجد $\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{DE}{BC}$

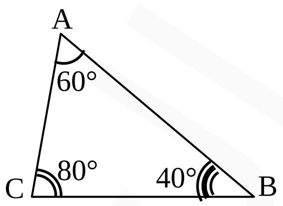
وبما أن : AD = A'B' و AE = A'C' و DE = B'C' فإن $\dfrac{A'B'}{AB}=\dfrac{A'C'}{AC}=\dfrac{B'C'}{BC}$.

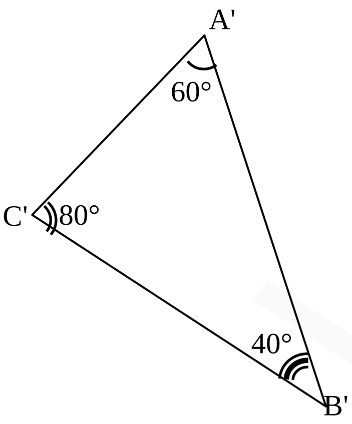
تشابه مثلثين :

تعريف :

نقول عن مثلثين أنهما متشابهان إذا كانت زوايا أحدهما تساوي زوايا الآخر.

مثال :





المثلثان ABC و A'B'C' متشابهان.

الرؤوس المتماثلة : A B C

A' B' C' الأضلاع المتماثلة :

[AB] و [A'B'] ؛ [AC] و [A'C'] ؛ [BC] و [B'C'].

ملاحظات :

1 - يكفي تساوي زاويتين من أحد المثلثين مع زاويتين من المثلث الآخر للقول إن المثلثين متشابهان ، ذلك لأن مجموع زوايا المثلث يساوي 180° .

2 - إذا كان أحد مثلثين تصغير (أو تكبير) للآخر فإن هذين المثلثين متشابهين.

3 - المثلثان المتقايسان هما مثلثان متشابهان والعكس ليس صحيحا.

مبرهنة :

المثلثان المتشابهان أضلاعهما المتماثلة متناسبة.

نسبة تشابه مثلثين :

تعريف :

ليكن ABC و A'B'C' مثلثين متشابهين ، نسمي نسبة التشابه هذين المثلثين العدد الحقيقي الموجب غير المعدوم k حيث : $\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}=k$

ملاحظات :

لتكن k نسبة تشابه المثلثين ABC و A'B'C' حيث $\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}=k$

1 ـ $\frac{1}{k}$ هي أيضا نسبة تشابه المثلثين ABC و A'B'C' .

2 ـ إذا كان 1 > k > 0 فإن المثلث A'B'C' هو تصغير للمثلث ABC ونسمي k نسبة (أو معامل) التصغير .

3 ـ إذا كان k > 1 فإن المثلث A'B'C' هو تكبير للمثلث ABC ونسمي k نسبة (أو معامل) التكبير .

4 ـ إذا كان k = 1 فإن المثلث A'B'C' يقايس المثلث ABC .

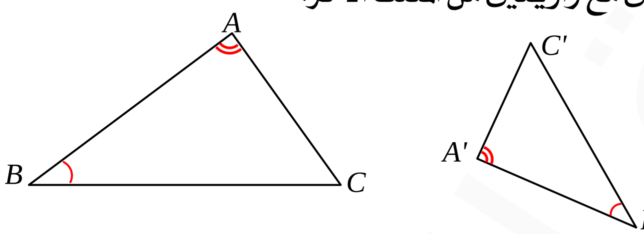
خواص : (حالات تشابه مثلثين)

خاصية1:

يتشابه مثلثان إذا تقايست زاويتان من أحد المثلثين مع زاويتين من المثلث الآخر.

مثال : بما أن : $\widehat{A}=\widehat{A'}$ و $\widehat{B}=\widehat{B'}$

فإن المثلثان ABC و A'B'C' متشابهين .



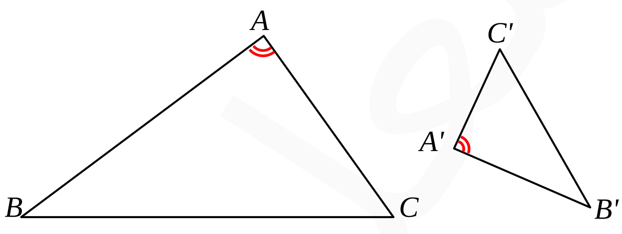
ملاحظة :

المثلث A'B'C' هو تصغير للمثلث ABC

خاصية2 :

يتشابه مثلثان إذا تقايست زاوية من أحد المثلثين مع زاوية من المثلث الآخر وكان طولا الضلعين الذين يحصران إحدى الزاويتين متناسبين مع طولي الضلعين الذين يحصران الزاوية الأخرى.

مثال :



$\widehat{A}=\widehat{A'}$ و A'C' = 1,5 cm و A'B' = 2 cm

و AB = 4 cm و AC = 3 cm

لدينا : $\frac{AB}{A'B'}=\frac{4}{2}=2$ و $\frac{AC}{A'C'}=\frac{3}{1,5}=2$

إذن : $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=2$ ومنه المثلثان ABC و A'B'C' متشابهان .

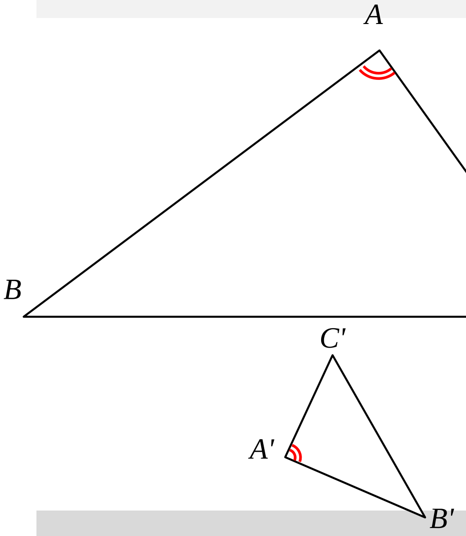
ملاحظة :

المثلث ABC هو تكبير للمثلث A'B'C' ونسبة التكبير هي 2 .

خاصية3:

يتشابه مثلثان إذا كان أطوال الأضلاع المتماثلة فيهما متناسبة.

مثال :



A'C' = 1,5 cm و A'B' = 2 cm و B'C' = 2,4 cm

و AC = 4,5 cm و AB = 6 cm و BC = 7,2 cm

لدينا : $\frac{AB}{A'B'}=\frac{6}{2}=3$ و $\frac{AC}{A'C'}=\frac{4,5}{1,5}=3$

و$\frac{BC}{B'C'}=\frac{7,2}{2,4}=3$ ومنه : $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}=3$

إذن : المثلثان ABC و A'B'C' متشابهان .

ملاحظة :

المثلث ABC هو تكبير للمثلث A'B'C' ونسبة التكبير هي 3 .

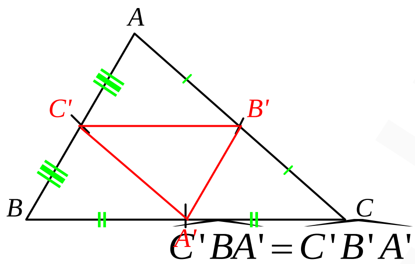
التمرين الرابع عشر:

ABC مثلث ، A' ، B' ، C' منتصفات أضلاعه [BC] ، [AC] ، [AB] على الترتيب.

أ) بين أن المثلثين ABC و A'B'C' متشابهان ، وعين نسبة التشابه.

ب) أحسب النسبة $\frac{S(ABC)}{S(A'B'C')}$.

حل :



أ) تبيان أن المثلثين ABC و A'B'C' متشابهان ، وتعيين نسبة التشابه.

لدينا : A' ، B' ، C' منتصفات أضلاعه [BC] ، [AC] ، [AB] على الترتيب.

إذن حسب نتيجة مبرهنة طاليس فإن : (A'B') // (AB) و A'B' = AC' = BC'

ومنه : الرباعيان AB'A'C' و BA'B'C' متوازيا أضلاع

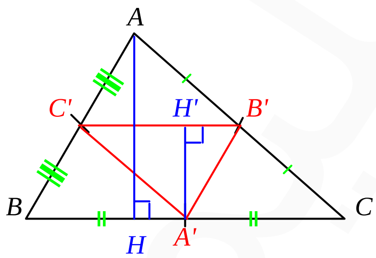
إذن كل زاويتان متقابلتان هما متقايستان أي : $\widehat{C'AB'}=\widehat{C'A'B'}$ و $\widehat{C'BA'}=\widehat{C'B'A'}$

ومنه : $\widehat{CAB}=\widehat{C'A'B'}$ و $\widehat{CBA}=\widehat{C'B'A'}$ إذن المثلثان ABC و A'B'C' متشابهان.

النقط المتماثلة : A ، B ، C

A' ، B' ، C' $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}=2$ ومنه نسبة التشابه (التكبير) هي 2 .

ب) حساب النسبة $\frac{S(ABC)}{S(A'B'C')}$.



H و H' هما المسقطان العموديان لـ A و A' على (BC) و(B'C') على الترتيب

المثلثان القائمان AHB و A'H'B' متشابهان لأن لهما زاويتان قائمتان

و $\widehat{CBA}=\widehat{C'B'A'}$ أي : $\widehat{HBA}=\widehat{H'B'A'}$ ومنه $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AH}{A'H'}=\frac{BH}{B'H'}=2$ ومنه: AH = 2 A'H'

مساحة(ABC) = 2 AH × BC = 2 (2A'H')(2B'C') = 4(2A'H'×B'C') = 4×مساحة(A'B'C').

إذن : $\frac{S(ABC)}{S(A'B'C')} = 4$.

التحويلات النقطية:

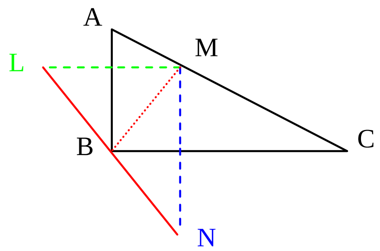
نشاط

ABC مثلث قائم في B ، M نقطة من وتره [AC] . النقطتان L و N نظيرتا النقطة M بالنسبة إلى (AB) و (BC) على الترتيب.

ماذا تمثل النقطة B بالنسبة إلى [LN]. ما القول عن النقطتين L و N بالنسبة إلى B.

نرسم النقطة D بحيث يكون الرباعي ABDC متوازي الأضلاع. قارن بين الشعاعين $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BD}$ ، ماذا تمثل النقطة D بالنسبة إلى النقطة B.

حل النشاط :



L نظيرة M بالنسبة إلى (AB) إذن المستقيم (AB) هو محور القطعة [LM]

ومنه : المثلث BLM متساوي الساقين رأسه B إذن BL = BM

و (AB) يكون منصف الزاوية $\widehat{LBM}$ أي : $\widehat{LBM} = 2\times\widehat{ABM}$

N نظيرة M بالنسبة إلى (BC) إذن المستقيم (BC) هو محور القطعة [MN]

ومنه : المثلث BNM متساوي الساقين رأسه B إذن BN = BM

و (BC) يكون منصف الزاوية $\widehat{MBN}$ أي : $\widehat{MBN} = 2\times\widehat{MBC}$

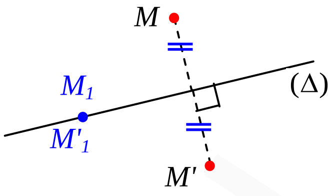
وبالتالي : BN = BL

ولدينا : $\widehat{LBN} = \widehat{LBM}+\widehat{MBN} = 2\times\widehat{ABM}+2\times\widehat{MBC} = 2(\widehat{ABM}+\widehat{MBC}) = 2\widehat{ABC} = 180°$

ومنه L ، B ، N على استقامة واحدة. وبالتالي : النقطة B هي منتصف القطعة [LN].

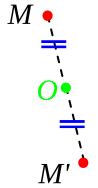
تعاريف :

تعريف التناظر المحوري:



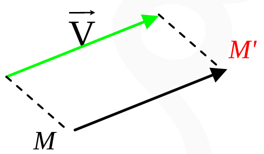
(Δ) مستقيم ثابت ، التناظر المحوري بالنسبة إلى المستقيم (Δ) هو التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي ، النقطة M' من المستوي حيث :
إذا كان M تنتمي إلى (Δ) فإن M' تكون منطبقة على M ،
وإذا كانت M لا تنتمي إلى (Δ) فإن : (Δ) يكون محور القطعة [MM'].

تعريف التناظر المركزي :



O نقطة ثابتة من المستوي ، التناظر المركزي بالنسبة إلى النقطة O هو التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي ، النقطة M' من المستوي حيث :
تكون النقطة O منتصف القطعة [MM'].

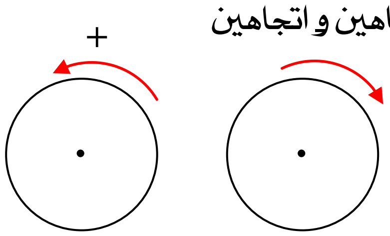
تعريف الانسحاب :



$\vec{V}$ شعاع ثابت من المستوي ، الانسحاب الذي شعاعه $\vec{V}$ هو التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي ، النقطة M' من المستوي حيث : $\overrightarrow{MM'} = \vec{V}$

ملاحظة : إذا كان $\vec{V}=\vec{AB}$ فإن الرباعي ABMM' هو متوازي أضلاع.

توجيه المستوي :



لتكن (C) دائرة من المستوي ، يمكن أن نحدد على هذه الدائرة اتجاهين و اتجاهين فقط ، أحدهما عكس اتجاه حركة عقارب الساعة ويسمى الاتجاه المباشر (أو الاتجاه الموجب) ، والآخر مثل اتجاه حركة عقارب الساعة ويسمى الاتجاه غير المباشر (أو الاتجاه السالب).

تعريف :

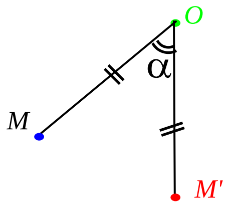
توجيه المستوي هو اختيار اتجاه واحد على كل دوائر هذا المستوي.

ملاحظة :

لتوجيه مستو عادة ما نختار الاتجاه المباشر (عكس اتجاه حركة عقارب الساعة).

تعريف الدوران :

O نقطة ثابتة من مستو موجه ، و α زاوية معلومة ، الدوران الذي مركزه النقطة O وزاويته α في الاتجاه المباشر هو التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي ، النقطة M' من المستوي حيث :



إذا كانت M منطبقة على O فإن النقطة M' تكون منطبقة على O.

وإذا كانت M تختلف عن النقطة O فإن : OM' = OM و $\widehat{MOM'}=\alpha$

والثلاثية (O , M , M') مباشرة.

ملاحظة :

في كل حالة النقطة M' تسمى صورة النقطة M بالتحويل النقطي .

خواص :

النقط الصامدة :

تعريف :

نقول عن نقطة أنها صامدة بتحويل نقطي إذا كانت منطبقة على صورتها بواسطة هذا التحويل.

أمثلة :

- ✓ التناظر المحوري الذي محوره المستقيم (Δ) : كل نقط المستقيم (Δ) هي نقط صامدة بهذا التحويل.
- ✓ التناظر المركزي الذي مركزه النقطة A : يقبل نقطة صامدة وحيدة وهي المركز A.
- ✓ الانسحاب الذي شعاعه غير معدوم لا يقبل نقط صامدة.
- ✓ الدوران الذي مركزه O وزاويته α حيث : $\alpha \neq k\times180°$ و k عدد طبيعي ، يقبل نقطة صامدة وحيدة وهي المركز O.

ملاحظة :

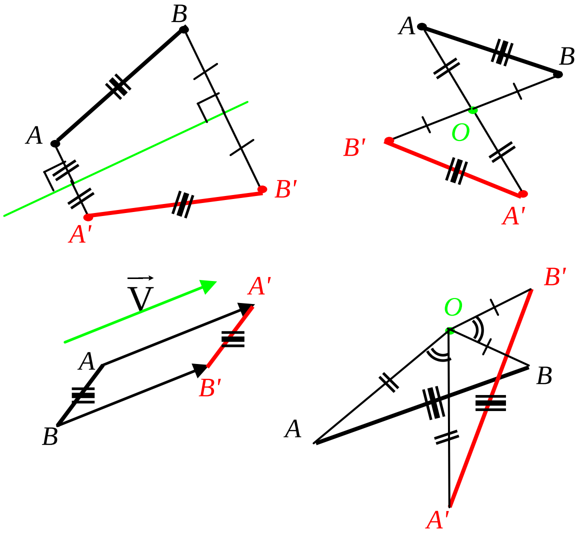
إذا كانت $\alpha = 2k\times180°$ و k عدد طبيعي ، في هذه الحالة التحويل النقطي يسمى التحويل المطابق في المستوي وكل نقط المستوي هي صامدة بهذا التحويل.

حفظ المسافات (التقايس)

تعريف :

التقايس هو كل تحويل نقطي الذي يرفق بكل ثنائية نقطية (A , B) الثنائية النقطية (A' , B') حيث :

$A'B' = AB$. نقول عنه أنه يحافظ على المسافات.



أمثلة :

✓ A' و B' صورتا A و B على الترتيب بالتناظر المحوري الذي محوره المستقيم (Δ) : لدينا : $A'B' = AB$

✓ A' و B' صورتا A و B على الترتيب بالتناظر المركزي الذي مركزه النقطة O : لدينا $A'B' = AB$

✓ A' و B' صورتا A و B على الترتيب بالانسحاب الذي شعاعه غير معدوم $\vec{V}$: لدينا $A'B' = AB$

✓ A' و B' صورتا A و B على الترتيب الدوران الذي مركزه O وزاويته α : لدينا $A'B' = AB$

مبرهنة :

كل من التناظر المحوري، التناظر المركزي، الانسحاب، الدوران، هو تقايس (يحافظ على المسافات).

نتيجة :

يتقايس مثلثان إذا كان أحدهما صورة للمثلث الآخر بانسحاب ، أو تناظر محوري ، أو تناظر مركزي ، أو دوران.

ملاحظة :

إذا كان مثلثان يتطابق بالسحب أو التدوير فنقول عن تقايسهما أنه مباشر ، وإن كان لا يتطابق إلا بعد قلب أحدهما فنقول عن تقايسهما أنه غير مباشر.

- حفظ أقياس الزوايا :

مبرهنة :

صورة زاوية بتقايس هي زاوية تقايسها.

- حفظ الاستقامية :

مبرهنة :

إذا كانت A ، B ، C في استقامية فإن صورها A' ، B' ، C' ، بتقايس ، تكون في استقامية.

نتائج :

- صورة مستقيم بتقايس (تناظر محوري ، تناظر مركزي ، انسحاب ، دوران) هو مستقيم.
- صورة مستقيم بتناظر مركزي أو انسحاب هي مستقيم موازيا له
- صورة مستقيم (D) بتناظر محوري بالنسبة إلى (Δ) هي المستقيم (D') حيث :
إذا كان (D) و (Δ) متوازيين فإن (D) يوازي (D') وإذا كان (D) و (Δ) متقاطعان فإن (D) يقطع (D') في نفس النقطة.
- صورة مستقيم (D) بدوران هي مستقيم (D') حيث إحدى الزوايا المحصورة بين (D) و (D') تقايس زاوية الدوران.

التمرين الخامس عشر:

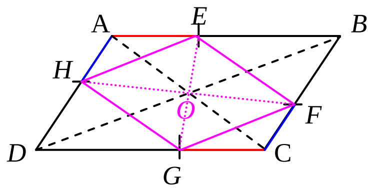
ABCD متوازي أضلاع. E ، F ، G ، H نقط من [AB] ، [BC] ، [CD] ، [AD] على الترتيب حيث :

AE = CG و AH = CF.

أ) ما هو التحويل النقطي الذي يحول A إلى C و يحول B إلى D ؟

ب) ما هي طبيعة الرباعي EFGH ؟

حل :



أ) تعيين التحويل النقطي الذي يحول A إلى C و يحول B إلى D :

ABCD متوازي أضلاع إذن قطراه [AC] ، [BD] متناصفان في النقطة O.

إذن C هي صورة A و D هي صورة B بالتناظر المركزي الذي مركزه O.

ب) طبيعة الرباعي EFGH :

الطريقة 1 :

(AE) // (GC) و AE = GC إذن الرباعي AECG متوازي أضلاع ومنه قطراه [AC] ، [EG] متناصفان في النقطة O.

وبالتالي : G هي صورة E بالتناظر المركزي الذي مركزه O.

(AH) // (FC) و AH = FC إذن الرباعي AFCH متوازي أضلاع ومنه قطراه [AC] ، [HF] متناصفان في النقطة O.

وبالتالي : H هي صورة F بالتناظر المركزي الذي مركزه O.

لدينا G هي صورة E بالتناظر المركزي الذي مركزه O وH هي صورة F بالتناظر المركزي الذي مركزه O

إذن [HG] هي صورة [EF] بالتناظر المركزي الذي مركزه O ومنه : (HG) // (EF)

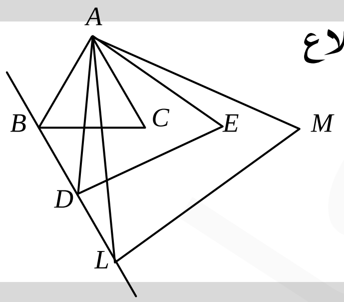
والتناظر المركزي يحافظ على المسافات أي : EF = HG وبالتالي الرباعي EFGH هو متوازي أضلاع.

الطريقة 2 :

نقارن بين المثلثين AEH و CFG ثم بين BEF و DGH.

و نحصل على النتيجتين : FG = EH و EF = HG.

التمرين السادس عشر



يمثل الشكل المقابل ثلاثة مثلثات ABC ، ADE ، ALM كل منها متقايسة الأضلاع

حيث النقط B ، D ، L في استقامية. بين أن النقط C ، E ، M في استقامية.

حل :

بما أن المثلثات متقايسة الأضلاع فإن : AB = AC ، AD = AE ، AL = AM

و $\widehat{BAC} = \widehat{DAE} = \widehat{LAM} = 60°$

ومنه : C ، E ، M هي صور B ، D ، L بالدوران الذي مركزه A وزاويته 60°.

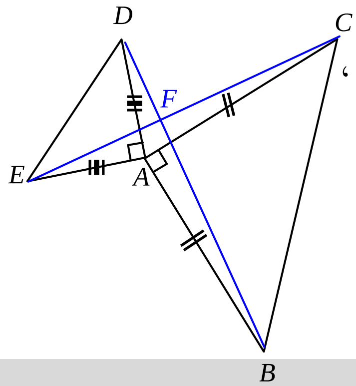
وبما أن الدوران يحافظ على الاستقامية و النقط B ، D ، L في استقامية فإن النقط C ، E ، M في استقامية كذلك.

التمرين السابع عشر :

ABC و ADE مثلثان كل منهما قائم ومتساوي الساقين كما هو مبين في الشكل ،

[CE] و [BD] متقاطعان في النقطة F.

بين باستعمال الدوران أن المستقيمين (BD) و (CE) متعامدان.



حل :

نوجه المستوي في الاتجاه المباشر، ونعتبر الدوران الذي مركزه A وزاويته $90°$.

إذن صورة B هي C و صورة D هي E بهذا الدوران

ومنه صورة المستقيم (BD) هي المستقيم (CE) بنفس الدوران إذن إحدى زوايا المحصورة بين المستقيمين (BD) و(CE) تقايس زاوية الدوران التي هي $90°$ ومنه : المستقيمان (BD) و (CE) متعامدان.

التمرين الثامن عشر (تركيب تناظرين بالنسبة إلى نقطتين متمايزتين)

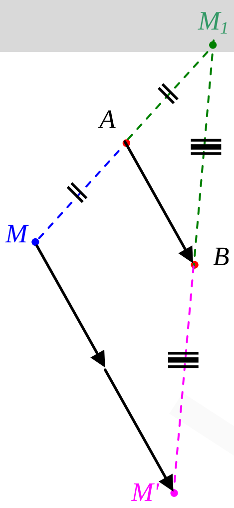
A ، B نقطتان ثابتتان ومتمايزتين ، علم نقطة M ، ثم أنشئ M_1 نظيرتها بالنسبة إلى A ، و M' نظيرة M_1 بالنسبة إلى B.

نقول أن النقطة M' هي صورة M بمركب التناظر بالنسبة إلى A و التناظر بالنسبة إلى B.

أ) عبر عن $\overrightarrow{MM'}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$.

ب) استنتج نوع التحويل الناتج عن مركب تناظرين مركزيين.

حل :



أ) عبر عن $\overrightarrow{MM'}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$.

لدينا A منتصف $[MM_1]$ و B منتصف $[M_1M']$ إذن حسب نتائج مبرهنة طاليس

نجد : $(MM') // (AB)$ و $MM' = 2AB$

بما أن $\overrightarrow{MM'}$ و $\overrightarrow{AB}$ لهما نفس الاتجاه فإن : $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{AB}$

ب) استنتج نوع التحويل الناتج عن مركب تناظرين مركزيين.

لدينا : $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{AB}$ ومنه M' هي صورة M بالانسحاب الذي شعاعه $2\overrightarrow{AB}$

وبالتالي : مركب التناظر المركزي بالنسبة إلى A و التناظر المركزي بالنسبة إلى B بهذا الترتيب هو انسحاب شعاعه $2\overrightarrow{AB}$.

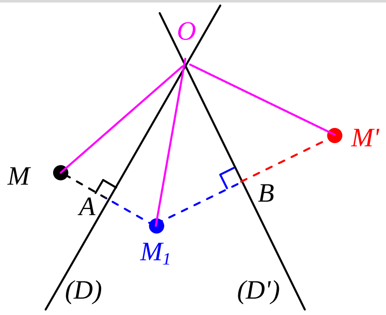
التمرين التاسع عشر (تركيب تناظرين بالنسبة إلى مستقيمين متقاطعين)

(D) و (D') مستقيمان متقاطعان في نقطة O ، علم النقطة M ، ثم أنشئ M_1 نظيرتها بالنسبة إلى (D) ، و M' نظيرة M_1 بالنسبة إلى (D').

أ) بين أن : $OM = OM'$ ، و أن الزاوية $\widehat{MOM'}$ ثابتة.

ب) استنتج نوع التحويل الناتج عن مركب تناظرين بالنسبة إلى مستقيمين متقاطعين.

حل :



أ) بين أن : OM = OM' و ، أن الزاوية $\widehat{MOM'}$ ثابتة.

لدينا : (D) محور القطعة $[MM_1]$ ويتقاطعان في A .

إذن : $OM = OM_1$ و $\widehat{MOA} = \widehat{AOM_1}$

ولدينا : (D') محور القطعة $[M_1M']$ ويتقاطعان في B .

إذن : $OM_1 = OM'$ و $\widehat{M_1OB} = \widehat{BOM'}$ ومنه : OM = OM'

نوجه المستوي في الاتجاه المباشر ونضع α قياس الزاوية المحصورة بين المستقيمين (D) و (D')

أي $\widehat{AOB} = \alpha$. $\widehat{MOM'} = \widehat{MOM_1} + \widehat{M_1OM'} = 2\widehat{AOM_1} + 2\widehat{M_1OB} = 2\widehat{AOB} = 2\alpha$

ب) استنتج نوع التحويل الناتج عن مركب تناظرين بالنسبة إلى مستقيمين متقاطعين.

لدينا : OM = OM' و $\widehat{MOM'} = 2\alpha$ إذن M' هي صورة M بالدوران الذي مركزه O وزاويته 2α

وبالتالي مركب تناظرين بالنسبة إلى مستقيمين متقاطعين هو الدوران الذي مركزه نقطة تقاطع هذين المستقيمين وزاويته ضعف الزاوية المحصورة بينهما.