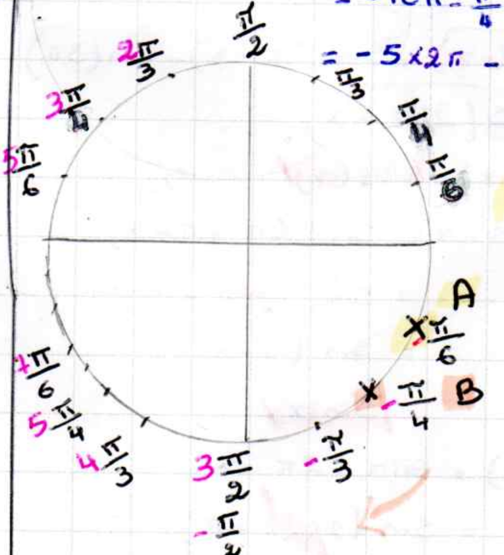
تصحيح الواجب منزلي رقم 04

التمرين الأول

① ضع على الدائرة المثلثية النقطتين A و B حيث

$$A = \frac{47\pi}{6} = \frac{48\pi - \pi}{6} = \frac{48\pi}{6} - \frac{\pi}{6}$$
$$= 8\pi - \frac{\pi}{6}$$
$$= 4\times 2\pi - \frac{\pi}{6}$$

$$B = \frac{-39\pi}{4} = \frac{-40\pi - \pi}{4} = \frac{-40\pi}{4} - \frac{\pi}{4}$$
$$= -10\pi - \frac{\pi}{4}$$
$$= -5\times 2\pi - \frac{\pi}{4}$$



- حساب جيب وجيب تمام A و B.

$$\begin{cases} \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} & \text{دالة زوجية} \\ \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} & \text{دالة فردية} \end{cases}$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

② لدينا $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

* برهان أن $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$

من المبرهنة لدينا $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1$

ومنه $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) + \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)^2 = 1$

$$\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) + \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}^2}{2^2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4} + \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1$$

منه $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 - \frac{2+\sqrt{2}}{4}$

توحيد المقامات:

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{4-(2+\sqrt{2})}{4}$$
$$= \frac{4-2-\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \begin{cases} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} & \text{منه مقبول} \\ \text{أو} \\ = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} & \text{مرفوض} \end{cases}$$

لأن $\frac{\pi}{8} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ و الدالة sin موجبة على هذا المجال

منه $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

③ $\cos\left(\frac{23\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{24\pi - \pi}{8}\right)$

$$= \cos\left(\underbrace{3}_{\text{عدد فردي}}\pi - \frac{\pi}{8}\right)$$
$$= \cos\left(2\pi + \pi - \frac{\pi}{8}\right)$$
$$= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right)$$

حسب خاصية $\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$

منه $= -\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$

$$= -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

نعلم أن $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

ومنه $\cos x = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$

نعلم أن
$$\begin{cases} \cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \cos(\pi+\alpha) = -\cos(\alpha) \\ \cos(\pi-\alpha) = -\cos(\alpha) \\ \cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

حسب خاصية

$$x = \begin{cases} \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} & \text{مقبول} \\ \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} & \text{مقبول.} \end{cases}$$

ومنه

$\frac{5\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4}$ ينتميان الى $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

• A عبارة معرفة بـ :

$$A(x) = \underbrace{\cos(-x)}_{1} + \underbrace{\sin(7\pi - x)}_{2} - \underbrace{\sin(3\pi)}_{3} + \underbrace{\cos(21\pi - x)}_{4}$$

1 $\cos(-x) = \cos(x)$ لأن دالة زوجية

2 $\sin(7\pi - x) = \sin(6\pi + \pi - x)$
$= \sin(3\times\cancel{2\pi} + \pi - x)$
$= \sin(\pi - x)$
$= \sin(x).$

3 $\sin(3\pi) = \sin(2\pi + \pi)$
$= \sin(1\times\cancel{2\pi} + \pi)$
$= \sin(\pi) = 0$

4 $\cos(21\pi - x) = \cos(20\pi + \pi - x)$
$= \cos(10\times\cancel{2\pi} + \pi - x)$
$= \cos(\pi - x)$
$= -\cos(x)$

ومنه $A(x) = \cancel{\cos(x)} + \sin(x) - 0 - \cancel{\cos(x)}$

$A(x) = \sin(x)$

حسبناها من قبل.

$$\sin\left(\frac{23\pi}{8}\right) = \sin\left(\cancel{2\pi} + \pi - \frac{\pi}{8}\right)$$
$$= \sin\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right)$$

حسب خاصية $\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$

ومنه $= \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$

4 حساب قيم x بحيث α عدد حقيقي ومنه

$$\begin{cases} \cos\alpha = \frac{4}{5} \\ \sin\alpha = \frac{x}{5} \end{cases}$$

حسب مبرهنة $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$

ومنه $\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{x}{5}\right)^2 = 1$

$\frac{16}{25} + \frac{x^2}{25} = 1$

$\frac{x^2}{25} = 1 - \frac{16}{25}$
$= \frac{25-16}{25}$

$\frac{x^2}{\cancel{25}} = \frac{9}{\cancel{25}}$
$$\begin{cases} x = 3 \\ \text{أو} \\ x = -3. \end{cases}$$

5 تحقق أن $\frac{1-\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{1+\cos(x)} = 0$

$$\frac{(1-\cos(x))(1+\cos(x))}{\sin(x)(1+\cos(x))} - \frac{\sin(x)\cdot\sin(x)}{(1+\cos(x))\cdot\sin(x)}$$
$$= \frac{1-\cos^2(x)-\sin^2(x)}{\sin(x)(1+\cos(x))}$$
$$= \frac{1-(\cos^2(x)+\sin^2(x))}{\sin(x)(1+\cos(x))} = \frac{1-1}{\sin(x)(1+\cos(x))}$$
$$= 0$$

حل في المجال $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

يعني (في ربع 2 و 3).

تذكير

الربع 2 : $\pi - \alpha$

الربع 3 : $\pi + \alpha$

التمـــرين الثانـــي :

لدينا $A(x)=\alpha x^2 - 8x+4$

ايجاد قيمة α بحيث A تقبل حلين مختلفين .

تعني $\Delta > 0$

لدينا $\Delta = b^2-4ac$

$= (-8)^2 - 4\times\alpha\times 4$

$= 64-16\alpha$

منه $64-16\alpha > 0$

$-16\alpha > -64$

$\alpha > \frac{-64}{-16}$

$\alpha < 4$

منه $\alpha \in]-\infty, 4[$.

حتى تقبل $A(x)$ حلين متمايزين

II نضع $\alpha=3$ أي $A(x)=3x^2-8x+4$

① حل $A(x)=0$

$3x^2-8x+4=0$

حساب مميز Δ

$\Delta = b^2-4ac$

$= (-8)^2 - 4\times3\times4$

$= 64-48$

$= 16 > 0$

منه A تقبل حلين متمايزين

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-8)+\sqrt{16}}{2\times3} = \frac{8+4}{6} = \boxed{2}$

$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-8)-\sqrt{16}}{2\times3} = \frac{8-4}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

② استنتاج تحليل للعبارة $A(x)$

$A(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$

$= 3(x-2)(x-\frac{2}{3})$

$= (x-2)(3x-2)$

$E(x) = \frac{-2x+6}{x-2}$

حل في $\mathbb{R}-\{2\}$ $E(x)=0$

$\begin{cases} -2x+6=0 \Rightarrow 1 \\ x-2\neq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} -2x=-6 \\ x=\frac{-6}{-2} \\ =3 \\ x\neq 2 \end{cases}$

منه

دراسة اشارة $E(x)$

	$-\infty$	2		3	$+\infty$
$-2x+6$	+	|	+	0	−
$x-2$	−	0	+	|	+
$A(x)$	−	||	+	0	−

$E(x) \leq 0$

أي $S =]-\infty, 2[\cup [3, +\infty[$