Отчет о выполнении лабораторной работы 3.6.1

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

Студент: Копытова Виктория Сергеевна
Группа: Б03-304

В работе используются: генератор сигналов произвольной формы, цифровой осциллограф с функцией быстрого преобразования Фурье или цифровой USB-осциллограф, подключённый к персональному компьютеру.

Цель работы: изучить спектры сигналов различной формы и влияние параметров сигнала на вид соответствующих спектров; проверить справедливость соотношений неопределённостей; познакомиться с работой спектральных фильтров на примере RC-цепочки.

Ряд Фурье и спектральный анализ. Согласно теореме Фурье, любая периодическая функция может быть представлена в виде ряда (конечного или бесконечного) гармонических функций с кратными частотами - ряда Фурье (см. п. 2.1. Введения к разделу). Одно из представлений ряда Фурье для функции с периодом T имеет вид

$$f(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \left(2 \pi v_n t\right)+B_n \sin \left(2 \pi v_n t\right) \tag{1}$$

где $v_n=n v_0, v_0=\frac{1}{T}, n=1,2, \ldots$ частоты фурье-гармоник, A_n и B_n – циенты разложения в ряд Фурье. Коэффициенты находятся как

$$A_n=\frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \cos \left(2 \pi v_n t\right) d t, \quad B_n=\frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \sin \left(2 \pi v_n t\right) d t \tag{2}$$

На практике зачастую удобнее использовать эквивалентную форму записи ряда Фурье в «представлении амплитуд и фаз»:

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \left(2 \pi v_n t+\varphi_n\right) \tag{3}$$

где по известной тригонометрической формуле амплитуда гармоники равна $a_n=\sqrt{A_n^2+B_n^2}$, а фаза определяется соотношением $\operatorname{tg} \varphi_n=B_n / A_n$.

Отметим, что если функция f чётная, то $B_n \equiv 0$ ($\varphi_n \equiv 0$, разложение по косинусам), а если нечётная, то $A_n \equiv 0$ ($\varphi_n \equiv \pi / 2$, разложение по синусам).

Совокупность всех частот v_n и соответствующих им амплитуд a_n (а также φ_n) часто называют спектром функции $f(t)$. Если речь идёт об изменяющемся во времени напряжении, то говорят о спектре электрического сигнала.

Спектральный анализ электрических сигналов играет важную роль в технике. Особенно важен он для линейных систем, подчиняющихся принципу суперпозиции. Если известно, как некоторая система реагирует на гармонический сигнал, с помощью разложения Фурье можно определить, как система будет реагировать на произвольную функцию $f(t)$.

Заметим, что спектр периодической функции дискретен (число гармоник счётно). Если функция не периодическая (но ограниченная во времени, например, отдельный «импульс»), её можно представить как предел

периодической функции с очень большим периодом $T \rightarrow \infty$. Тогда частотное расстояние между соседними гармониками $\delta v=1 / T$ стремится к нулю. Говорят, что спектр становится непрерывным. Разложение в ряд Фурье при этом переходит в интеграл Фурье (см. п. 2.2 Введения).

Операцию, при которой функции $f(t)$ ставится в соответствие её ряд (или интеграл) Фурье называют преобразованием Фурье. Это преобразование является взаимно-однозначным, а восстановление исходной функции по её спектру называется обратным преобразованием Фурье. Однако при спектральном анализе электрических сигналов, как правило, измеряются именно амплитуды $|a_n|$ (или интенсивности $|a_n|^2$) спектральных компонент, а информация об их фазах φ_n теряется. Это приводит к тому, что пропадает взаимно-однозначное соответствие между сигналом и спектром, и весьма разные сигналы могут иметь один и тот же амплитудный спектр (пример: амплитудная и фазовая модуляции).

Соотношения неопределённостей. Между сигналом как функцией времени $f(t)$ и его спектром как функции частоты $a(v)$ имеется простая и универсальная взаимосвязь. А именно, если у сигнала $f(t)$ есть какое характерное время Δt (например, период повторения, длительность импульса, время нарастания и т.п.), то в спектре $a(v)$ в том или ином виде будет наблюдаться характерный масштаб $\Delta v \sim 1/\Delta t$ (расстояния между пиками, ширина спектра, ширина пиков и т.п.).

Соотношения вида

$$\Delta v \cdot \Delta t \sim 1 \tag{4}$$

принято называть соотношениями неопределённостей. Конкретный вид соотношения неопределённостей зависит от обстоятельств, в которых оно применяется.

Например, если $\Delta t = \tau$ - характерная длительность импульса, то характерная ширина спектра по порядку величины будет равна $\Delta v \sim 1/\tau$. Здесь единица в правой части (4) - это единица именно по порядку величины. Конкретное числовое значение зависит, во-первых, от детальной формы сигнала, и, во-вторых, от того, что именно мы называем «характерным» временем и что - «шириной» спектра.

Другой пример, для любого сигнала с периодом T в спектре обязательно будут наблюдаться гармоники на расстоянии $\delta v = 1/T$ друг от друга. В данном случае соотношение является точным и от формы сигнала не зависит.

Методы спектрального анализа. Современные методы спектрального анализа электрических сигналов можно разделить на два типа: цифровые (математические) и аналоговые (физические).

Простейшим физическим анализатором частот является высокодобротный колебательный контур (RLC-цепочка). Такой контур, как известно, хорошо откликается на частоты, близкие к его резонансной, и почти не реагирует на частоты, находящиеся за пределами его узкой (т.к. контур высокодобротный) амплитудно-частотной характеристики. Подстраивая параметры контура и изменяя его резонансную частоту, можно «просканировать» весь частотный спектр поступающего на него сигнала. В современной лаборатории спектральные приборы, основанные на физических методах (как

правило, довольно дорогостоящие), применяются для анализа высоких частот (сотни мегагерц и более).

Если же частота исследуемого сигнала не слишком велика (заведомо меньше тактовой частоты процессоров), современная цифровая техника позволяет проводить частотный анализ сигналов в реальном времени непосредственно по математическим формулам (2). Входящий сигнал при этом оцифровывается (дискретизуется) и, с помощью так называемого алгоритма «быстрого преобразования Фурье», осуществляется вычисление частот и амплитуд его гармоник.

Цифровой спектральный анализ имеет две отличительные особенности, о которых стоит упомянуть.

Во-первых, при цифровом анализе возникает частота дискретизации $v_{\text{дискр}}$, то есть частота, с которой считываются значения напряжения, подаваемого на входной канал анализатора. Ясно, что дискретизация не позволит исследовать спектр частот, превышающих частоту $v_{\text{дискр}}$, и исказит спектр вблизи неё. Поэтому надёжно получать спектр можно лишь на достаточно низких частотах $v \ll v_{\text{дискр}}$, когда влияние дискретности минимально (точнее, как следует из теоремы Котельникова, необходимо выполнение условия $v < v_{\text{дискр}}/2$). Внутренняя частота дискретизации осциллографов обычно велика (типичное значение - 1 ГГц), однако для преобразования Фурье в целях оптимизации скорости работы она может существенно урезаться. В настройках цифровых осциллографов часто используется параметр «количество точек» на интервал времени. Например, если сигнал записывался в течение 1 с, то при стандартных для многих осциллографов 4096 точках дискретизации, спектр будет заведомо ограничен лишь частотой 2 кГц!

Во-вторых, интервал времени Δt, в течение которого регистрируется сигнал, всегда ограничен. Для анализа сигнала вырезается его участок - «окно» $t \in [t_0; t_0 + \Delta t]$. Такое преобразование Фурье часто называют «оконным». Из-за ограниченности размеров «окна» неизбежно возникают дополнительные искажения спектра (их можно назвать «краевыми эффектами»). Чтобы компенсировать эти искажения, значениям регистрируемой функции в пределах «окна» придают разный вес. В таком случае говорят об «оконной» (или «весовой») функции преобразования Фурье. На практике применяются различные оконные функции, каждая из которых обладает своими достоинствами и недостатками (одни уменьшают шумы, другие уменьшают ширину пиков и погрешность частоты, третьи погрешность измерения амплитуд и т.д.). В нашей работе важно аккуратное измерения амплитуд, для чего лучше всего подходят окна «с плоской вершиной» (flat top) и, в меньше степени, Блэкмана (Blackman). Для более точного измерения частот предпочтительнее окна Ханна (Hann) и Хэмминга (Hamming).

1 Ход работы

1.1 А. Исследование спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов и проверка соотношений неопределённостей

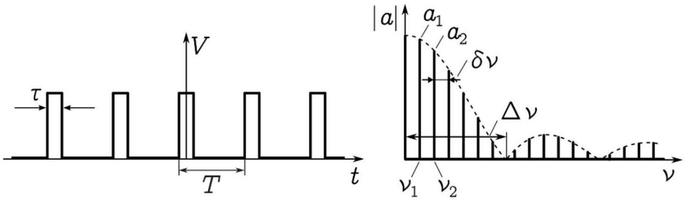


Рис. 1. Периодическая последовательность импульсов и её спектр

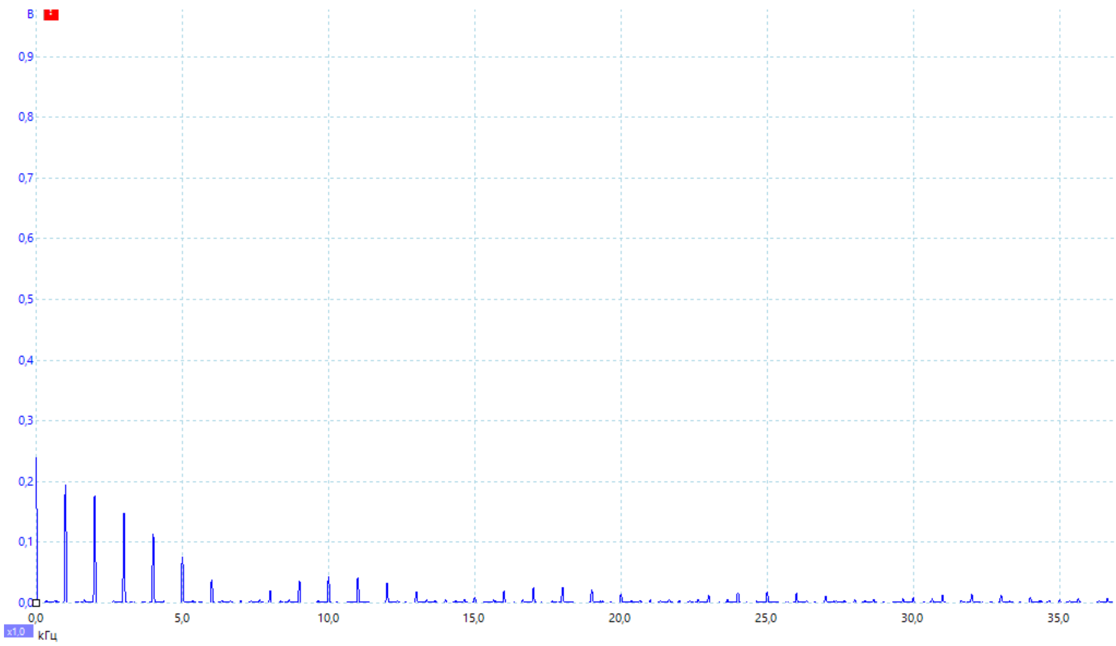


Рис. 1: $\nu_{\text{повт}} = 1$ кГц

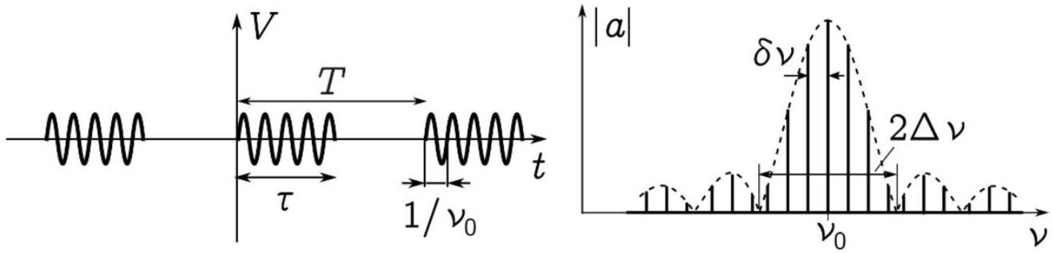
Рис. 2: $\nu_{\text{повт}} = 2$ кГц

При изменении $\nu_{\text{повт}}$ частота и количество гармоник меняется, амплитуда изменяется пропорционально изменению $\nu_{\text{повт}}$

n	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0
$\nu_n^{\text{теор}}$, кГц	1.976	4.029	5.97	7.986	10.04	12.02	16.07	17.99
$\nu_n^{\text{теор}}$, кГц	2	4	6	8	1	12	14	16
$\|a_n\|^{\text{эксп}}$, усл. ед.	0.351	0.227	0.72	0.4	0.86	0.65	0.36	0.49
$\|a_n/a_1\|^{\text{эксп}}$	1.0	0.65	2.05	1.14	2.45	1.85	1.03	1.4

Таблица 1: Прямоугольный импульс

Б. Наблюдение спектра периодической последовательности цугов



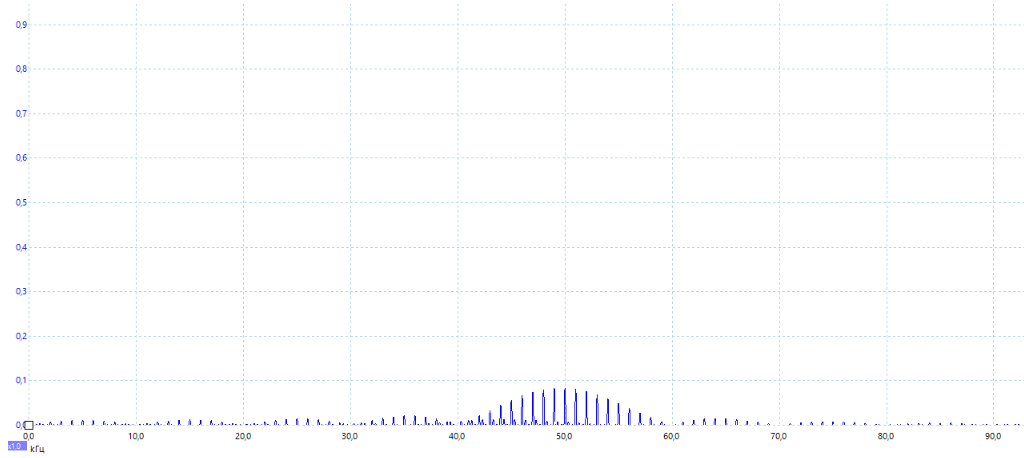


Рис. 3: $\nu_0 = 50$ кГц, $T = 1$ мс, $N = 5$, $\Delta\nu = 10$ кГц, $\delta\nu = 1$ кГц

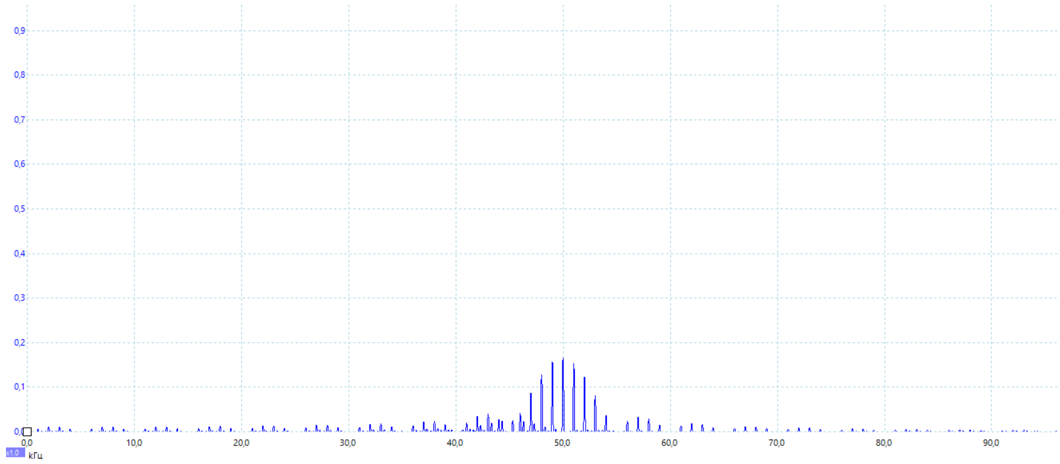


Рис. 4: $\nu_0 = 50$ кГц, $T = 1$ мс, $N = 10$, $\Delta\nu = 5$ кГц, $\delta\nu = 1$ кГц

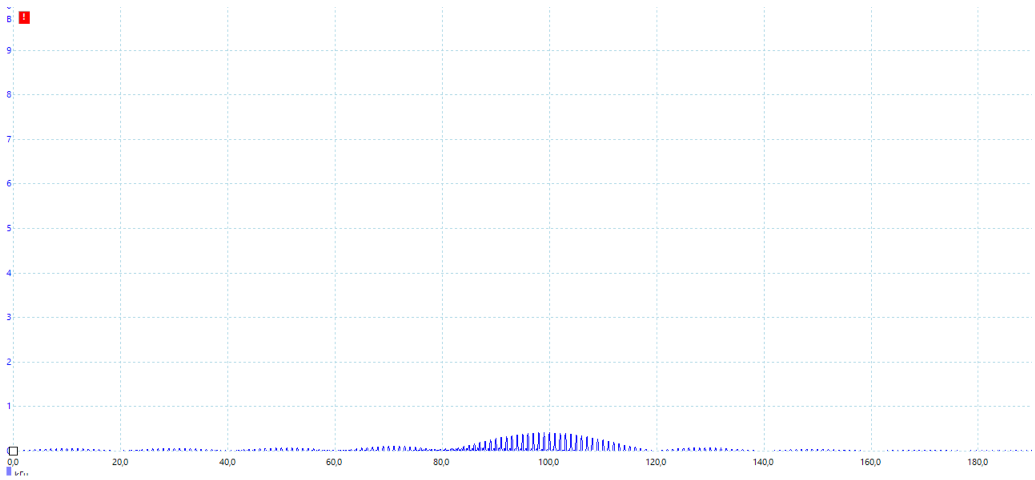


Рис. 5: $\nu_0 = 100$ кГц, $T = 1$ мс, $N = 5$, $\Delta\nu = 20$ кГц, $\delta\nu = 1$ кГц

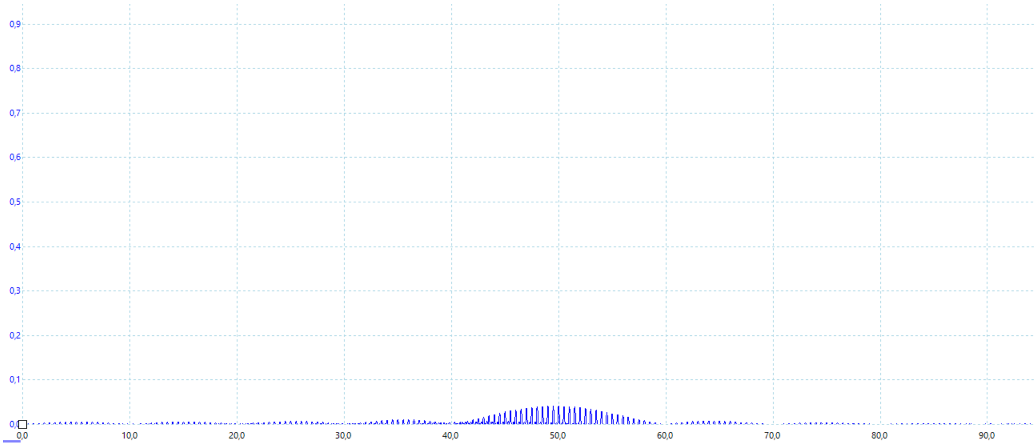


Рис. 6: $\nu_0 = 50$ кГц, $T = 2$ мс, $N = 5$, $\Delta\nu = 20$ кГц, $\delta\nu = 0.5$ кГц

Г. Исследование спектра амплитудно-модулированного сигнала

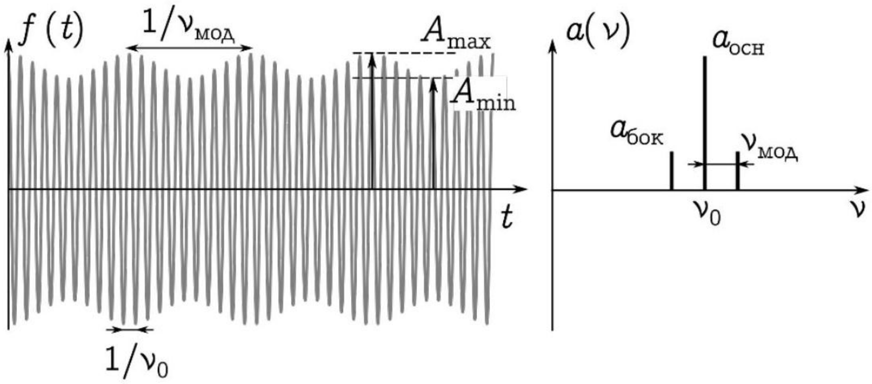


Рис. 4. Гармонический амплитудно-модулированный сигнал и его спектр

При m = 0.5

$$\frac{A_{\max} - A_{\min}}{A_{\max} + A_{\min}} \approx 0.62$$

m	$a_{бок}$	$a_{осн}$
0.1	25.15	536.0
0.3	79.14	536.0
0.5	127.7	527.0
0.6	147.5	521.6
0.7	165.5	514.4
0.8	183.5	503.6
0.9	201.4	491.0
1.0	217.6	476.6

Таблица 2: Боковая и основная гармоники амплитдуно-модулированного сигнала

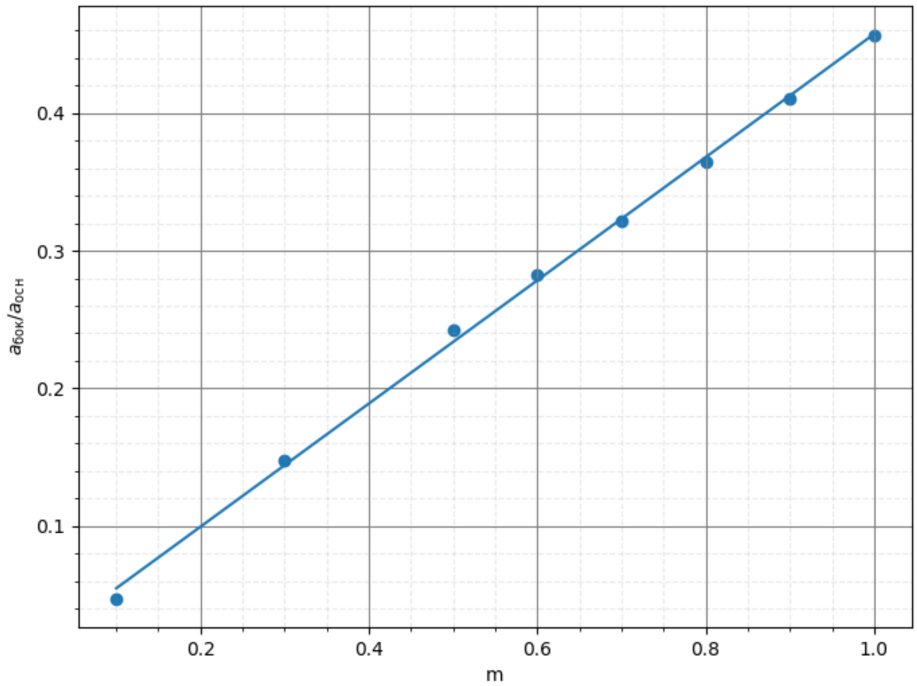
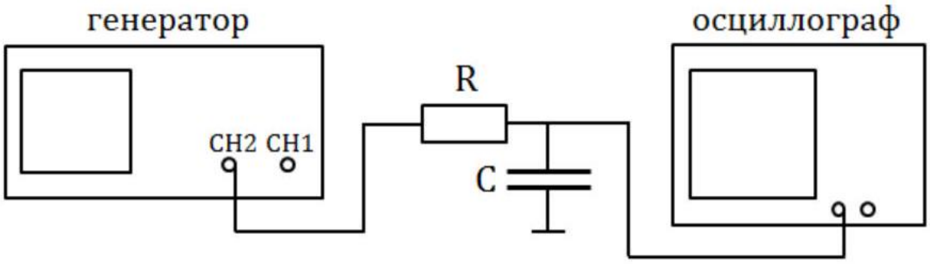


Рис. 7: график зависимости $a_{бок}/a_{осн}$ от m

E. Фильтрация сигналов



$$\tau_{RC} = RC = 3 \text{ мкс}$$

$$\nu_{RC} = 1/\tau_{RC} = 333 \text{ кГц}$$

$$\nu_0 = 300 \text{ кГц}$$

$$\nu = n\nu_0$$

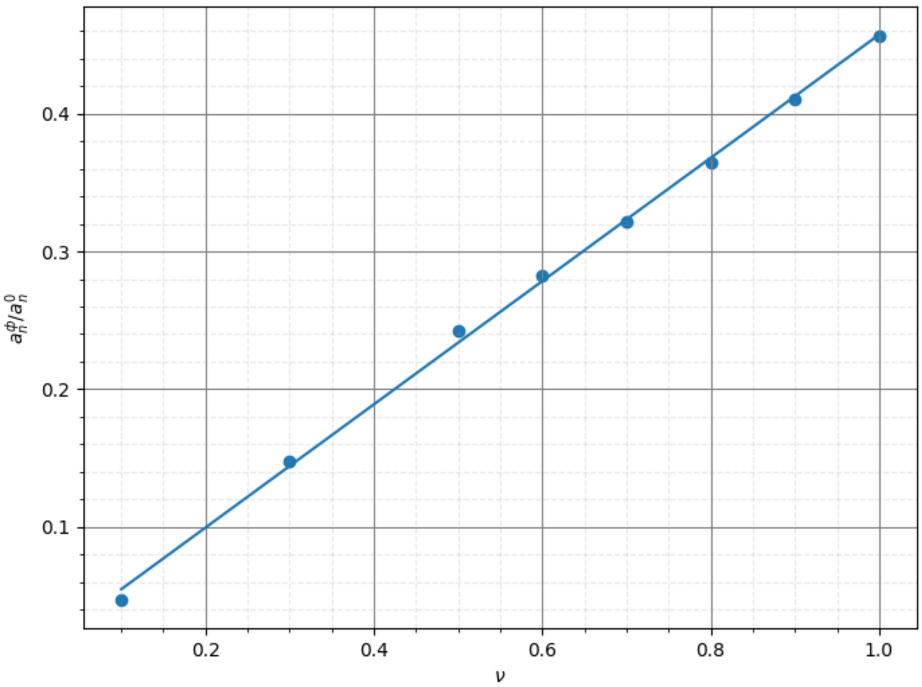


Рис. 8: Зависимость $k(\nu)$