

# Отчет о выполнении лабораторной работы 1.4.2

## Исследование вынужденной регулярной прецессии гироскопа

**Студент:** Копытова Виктория  
Сергеевна  
**Группа:** Б03-304

# 1 Аннотация

**Цель работы:** исследовать вынужденную прецессию гироскопа; установить зависимость скорости вынужденной прецессии от величины момента сил, действующих на ось гироскопа; определить скорость вращения ротора гироскопа и сравнить ее со скоростью, рассчитанной по скорости прецессии.

**В работе используются:** гироскоп в кардановом подвесе, секундомер, набор грузов, отдельный ротор гироскопа, цилиндр известной массы, крутильный маятник, штангенциркуль, линейка.

# 2 Теоретические сведения

Уравнения движения твердого тела можно записать в виде

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \quad (1)$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \quad (2)$$

Момент импульса твёрдого тела в его главных осях  $x, y, z$  равен

$$\vec{L} = \vec{i}I_x\omega_x + \vec{j}I_y\omega_y + \vec{k}I_z\omega_z. \quad (3)$$

Быстро вращающееся тело для которого, например

$$I_z\omega_z \gg I_x\omega_x, \quad I_y\omega_y.$$

Приращение момента импульса из (2) определяется интегралом

$$\Delta\vec{L} = \int \vec{M}dt \quad (4)$$

Если момент внешних сил действует на протяжении короткого промежутка времени, из интеграла (4) следует, что приращение момента импульса значительно меньше самого момента импульса

$$|\Delta\vec{L}| \ll |\vec{L}|$$

С этим связана устойчивость быстро вращающегося гироскопа. Выясним какие силы нужно приложить к гироскопу, чтобы изменить направление его оси. Рассмотрим для примера маховик, вращающийся вокруг оси  $z$ , перпендикулярной к плоскости маховика (рис. 1). Будем считать, что  $\omega_z = \omega_0, \omega_x = 0, \omega_y = 0$ .

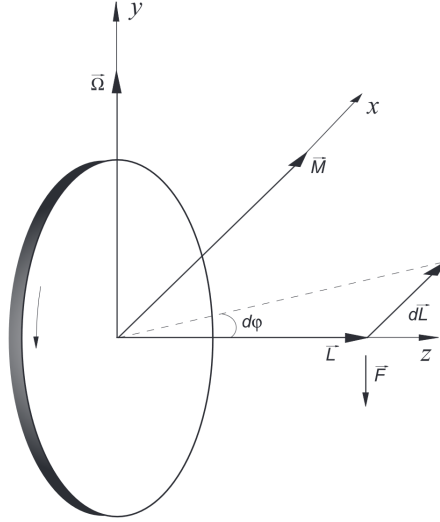


Рис. 1: Маховик

Пусть ось вращения повернулась в плоскости  $zx$  по направлению к оси  $x$  на бесконечно малый угол  $d\varphi$ . Такой поворот означает добавочное вращение маховика вокруг оси  $y$ , так что

$$d\varphi = \Omega dt$$

где  $\Omega$  - угловая скорость такого вращения. Будем предполагать, что

$$L_{\Omega} \ll L_{\omega_0} \quad (5)$$

Это означает, что момент импульса маховика, равный  $I_z \omega_0$  до приложения внешних сил, только повернется в плоскости  $zx$  по направлению к оси  $x$  не изменяя своей величины. Таким образом,

$$|d\vec{L}| = L d\varphi = L \Omega dt$$

Но это изменение направлено вдоль оси  $x$ , поэтому вектор  $d\vec{L}$  можно представить в виде

$$d\vec{L} = [\vec{\Omega} \vec{L} dt]$$

то есть

$$\vec{M} = [\vec{\Omega} \vec{L}] \quad (6)$$

$\Omega$  называется угловой скоростью прецессии. Она может быть вычислена по формуле

$$\Omega = \frac{mgl}{I_z \omega_0}, \quad (7)$$

где  $m$  – масса груза,  $l$  – расстояние от центра карданова подвеса до точки крепления груза на оси гироскопа (рис. 2).

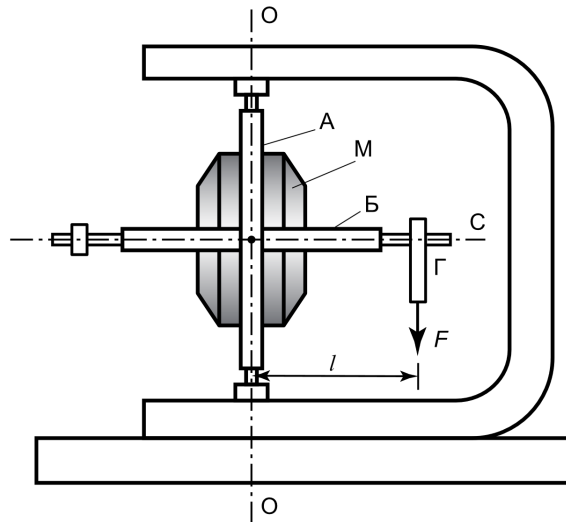


Рис. 2: Схема экспериментальной установки

### 3 Ход работы

1. Установим лсь гироскопа в горизонатльное положение, включим питание и подождём 4-5 минут, чтобы вращение ротора успело стабилизироваться. Для того чтобы, убедиться в том, что ротор достаточно раскручен будем легко постукивать по рычагу  $C$ . При этом гироскоп не должны изменять своего положения в пространстве.
2. Подвесим к рычагу  $C$  груз. При этом начинается прецессия гироскопа. Трение в оси приводит к тому, что рычаг  $C$  начинает медленно опускаться.
3. Чтобы оценить момент сил трения, поднимем рычаг  $C$  на 5-6 градусов и будем измерять время регулярной прецессии за которое, ось опускается примерно на те же 5-6 градусов.

Проведём опыт несколько раз с различными массами грузов. Усреднённые результаты измерений приведены в таблице 1.

Масса груза, г	Период прецессии $T$ , с	$\sigma_{\text{сист}}$ , с	$\sigma_{\text{случ}}$ , с	$\sigma_T$ , с	$\varepsilon_T$
93	98.2	0.01	0.06	0.06	0.0006
116	79.5	0.01	0.05	0.05	0.0006
138	66.1	0.01	0.04	0.04	0.0006
174	53.2	0.01	0.04	0.04	0.0008
214	42.7	0.01	0.03	0.03	0.0007

Таблица 1: Периоды прецессии для разных масс грузов

Рассчитаем угловую частоту прецессии.

Масса груза, г	$\Omega, \frac{\text{рад}}{\text{с}}$	$\varepsilon_\Omega$	$\sigma_\Omega \cdot 10^{-5}, \text{рад/с}$
93	0.064	0.0006	3.8
116	0.079	0.0006	4.7
138	0.095	0.0006	5.7
174	0.118	0.0008	7.1
214	0.147	0.0007	8.8

Таблица 2: Периоды прецессии для разных масс грузов

Зависимость угловой частоты прецессии от момента приложенной силы представлена на рисунке (3).

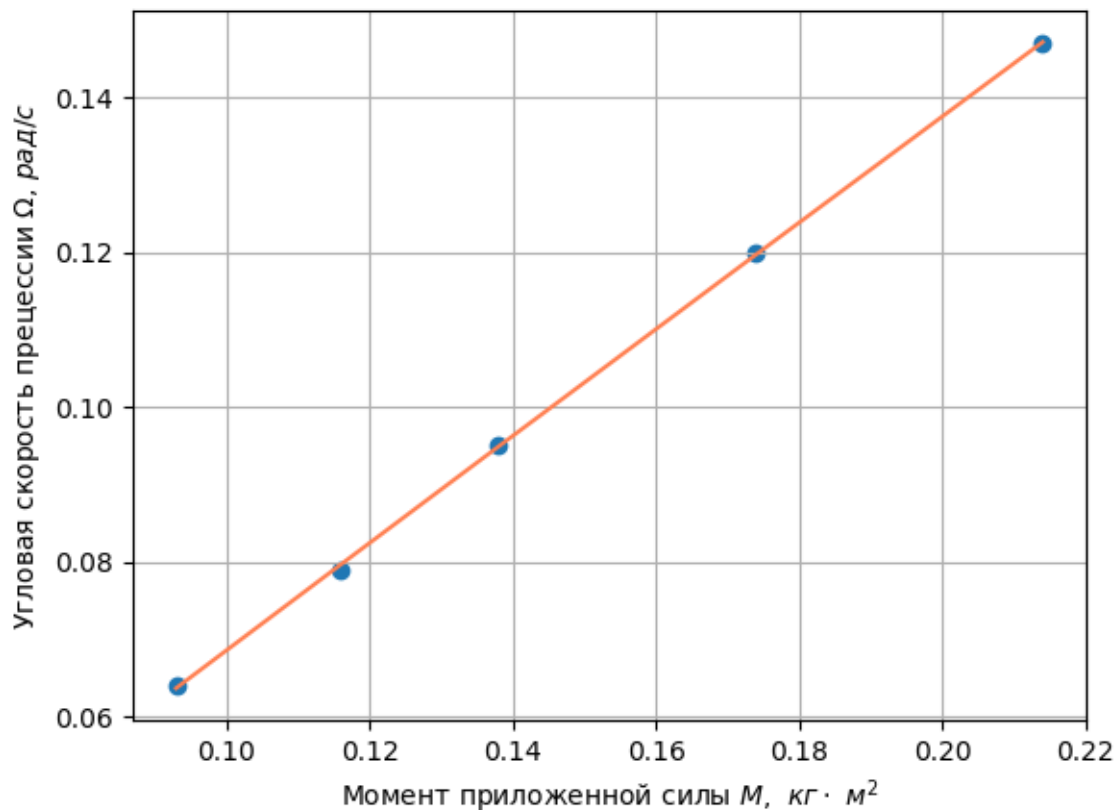


Рис. 3: Зависимость угловой частоты прецессии от момента приложенной силы

- Определим момент инерции ротора с помощью крутильных весов и цилиндра с известными массой и радиусом.

Период крутильных колебаний  $T_0$  зависит от момента инерции  $I_0$  и модуля кручения проволоки  $f$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{f}} \quad (8)$$

Зная момент инерции цилиндра  $T_{\text{ц}}$  и период его крутильных колебаний  $T_{\text{ц}}$ , можно исключить из формулы (8) модуль кручения. Для  $I_0$  получим

$$I_0 = I_{\text{ц}} \frac{T_0^2}{T_{\text{ц}}^2}.$$

Результаты измерений

Масса цилиндра	Радиус цилиндра	Период крутильных колебаний цилиндра	Момент инерции цилиндра	Период крутильных колебаний ротора	Момент инерции ротора
1616.6 г	3.75 см	20.48 с	$1.14 \cdot 10^{-3}$ кг · м <sup>2</sup>	16.01 с	$0.70 \cdot 10^{-3}$ кг · м <sup>2</sup>

$$\sigma_{I_0} = 0.01 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

Таблица 3: Вычисление момента инерции ротора

5. С помощью формулы (7) рассчитаем частоту вращения гироскопа ( $l = 122$  мм – заданный параметр установки).

Масса груза, г	$\Omega$ , рад/с	$\omega_0 \cdot 1/2\pi$ 1/с
93	0.064	395
116	0.079	399
138	0.095	395
174	0.120	394
214	0.147	396

Таблица 4: Частота вращения ротора гироскопа

Среднее значение: 396 Гц.

6. Определим частоту вращения ротора гироскопа по фигурам Лиссажу. Для этого подадим на входы осциллографа сигнал с обмотки статора гироскопа и сигнал звукового генератора. Меняя частоту сигнала звукового генератора подберём значение, при котором на экране осциллографа получается статичная картинка.

Полученное значение: 388 Гц. Различие с полученным в ходе эксперимента значением – 2%.

7. Оценка момента силы трения. Момент силы трения можно рассчитать по формуле

$$M_{\text{тр}} = \Omega_{\text{тр}} I_0 \omega_0,$$

где  $\Omega_{\text{тр}}$  – угловая скорость опускания оси гироскопа. За время измерения из предыдущего опыта ось опускается примерно на 12 градусов. Значит

$$M_{\text{тр}} \sim 10^{-3} \text{Н} \cdot \text{кг}.$$

## 4 Вывод

В ходе работы был определён момент инерции статора гироскопа с помощью крутильных колебаний и цеоиндра. Основной вклад в погрешность вносит измерение радиуса цилиндра.

Был оценён момент сил трения в оси гироскопа и подтверждены теоретические зависимости, используемые в данной работе.

Разными способами была измерена частота вращения ротора гироскопа. Полученные значения совпадают с точность 2%.