

# Отчет о выполнении лабораторной работы 3.7.3

Длинная линия

Студент: Копытова Виктория  
Сергеевна  
Группа: Б03-304

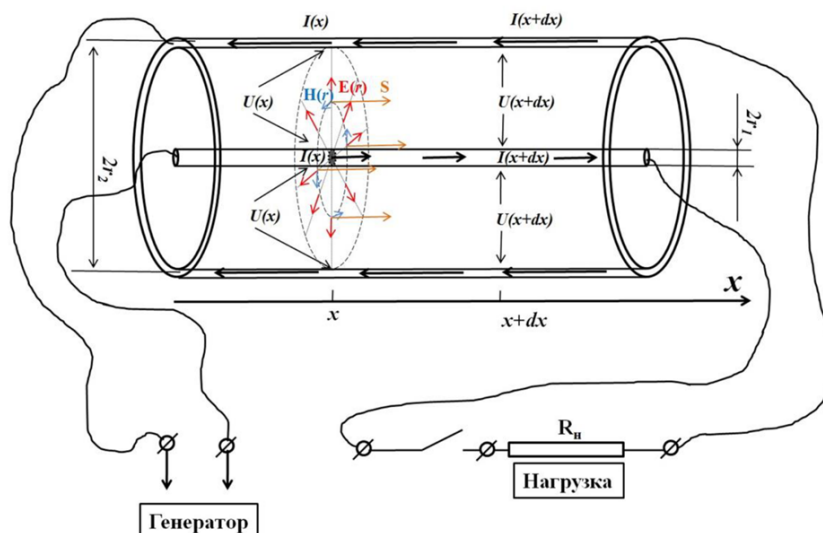


Рис. 1: Схематическое изображение элемента  $dx$  длинного коаксиального кабеля

## 1 Аннотация

**Цель работы:** ознакомиться и проверить на практике теорию распространения электрических сигналов вдоль длинной линии; измерить амплитудно- и фазово-частотные характеристики коаксиальной линии; определить погонные характеристики такой линии; на примере модели длинной линии изучить вопрос распределения амплитуды колебаний сигнала по длине линии.

**В работе используются:** осциллограф АКТАКОМ ADS-6142Н; генератора АКИП 3420/1; бухта с коаксиальным кабелем рк 50-4-11; схематический блок "модель длинной линии"; магазин сопротивления РЗЗ, соединительные провода.

## 2 Теоретические сведения

Рассмотрим элемент  $dx$  длинного коаксиального кабеля. Этот элемент представляет собой изолированный коаксиальный проводящий (медный) цилиндр некоторого радиуса  $r_2$ , на оси которого расположен сплошной тонкий проводник (медный) круглого сечения с

радиусом  $r_1$ . Пространство между этими проводниками заполнена средой, обладающей диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  и магнитной восприимчивостью  $\mu$ . Как известно, такой элемент обладает индуктивностью

$$dL = 2\mu \ln(r_2/r_1) dx \quad (1)$$

Удельная (погонная) индуктивность единицы длины такого кабеля:

$$L_x = \frac{dL}{dx} = 2\mu \ln(r_2/r_1) \quad (2)$$

Два проводника, образующих этот элемент  $dx$  коаксиального кабеля, должны обладать взаимной ёмкостью. Можно показать, что ёмкость элемента  $dx$  коаксиального кабеля определяется выражением:

$$dC = \frac{\varepsilon}{2 \ln(r_2/r_1)} dx \quad (3)$$

а его удельная (погонная) ёмкость единицы длины равна:

$$C_x = \frac{dC}{dx} = \frac{\varepsilon}{2 \ln(r_2/r_1)}. \quad (4)$$

Когда по такому кабелю передаётся сигнал, в его центральной жиле и внешней оболочке возникают взаимно противоположные токи  $I(x)$ , а также электрическое напряжение  $U(x)$  между внешним и внутренним проводниками. При высоких частотах  $\nu$  сигналов, распространяющихся в кабеле (когда длина кабеля  $l > V/\nu$ , где  $V$  - характерная скорость распространения сигнала в кабеле, эта скорость, как правило, порядка скорости света)  $I(x)$  и  $U(x)$  вообще говоря зависят от координаты  $x$ .

Изменение напряжения на концах элемента  $dx$  вызваны возникновением ЭДС индукции и падением напряжения в результате омического сопротивления проводников:

$$U(x + dx) - U(x) = -\frac{L_x dx}{c^2} \frac{\partial I}{\partial t} - R_x dx I, \quad (5)$$

где погонное сопротивление

$$R_x = \frac{dR}{dx} = \frac{1}{\sigma \cdot S} \quad (6)$$

здесь  $\sigma$  - удельная проводимость материала проводников,  $S$  - площадь их поперечного сечения.

Изменение силы тока вызвано тем, что некоторая часть электрического заряда  $q$  как бы "перетекает на "обкладки" конденсатора, роль которых играют проводники коаксиального кабеля:

$$I(x + dx) - I(x) = -\frac{\partial q}{\partial t} \quad (7)$$

где  $q = C_x dx U$ .

Представим уравнения (5) и (7) в виде системы, описывающей распространение сигнала вдоль длинной линии:

$$\begin{cases} U(x) = U(x + dx) + \frac{L_x dx}{c^2} \frac{\partial I}{\partial t} + R_x dx I, \\ I(x) = I(x + dx) + \frac{\partial q}{\partial t}. \end{cases} \quad (8)$$

Эту систему уравнений называют телеграфными уравнениями. Разделим оба уравнения на длину элемента  $dx$  и, воспользовавшись определением дифференциалов, перепишем (8) следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial I}{\partial x} = -C_x \frac{\partial U}{\partial t} \\ \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{L_x}{c^2} \frac{\partial I}{\partial t} - R_x I \end{cases} \quad (9)$$

Из (9) выразим перекрёстные производные:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 I}{\partial x \partial t} = -C_x \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -\frac{L_x}{c^2} \frac{\partial^2 I}{\partial x \partial t} - R_x \frac{\partial I}{\partial x} \end{cases} \quad (10)$$

Из (9) и (10) получаем волновое уравнение для напряжения  $U(x)$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{L_x C_x}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + R_x C_x \frac{\partial U}{\partial t}. \quad (11)$$

Или в каноническом виде:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - V_\phi^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \gamma \frac{\partial U}{\partial t} = 0 \quad (12)$$

где введены следующие обозначения для фазовой скорости:

$$V_\phi = \frac{c}{\sqrt{L_x C_x}} \quad (13)$$

и декремента затухания:

$$\gamma = R_x C_x V_\phi^2. \quad (14)$$

Подставляя (2) и (4) в выражение для фазовой скорости (13), легко видеть, что, эта скорость имеет тот же вид, как и скорость распространения обычных электромагнитных волн в некоторой среде с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$  и магнитной восприимчивостью  $\mu$  :

$$V_\phi = \frac{C}{\sqrt{\varepsilon \mu}}. \quad (15)$$

Решение (12) удобно искать в виде:

$$U(x, t) = U_0 e^{-i\omega t} e^{(-\alpha + ik)x} \quad (16)$$

Из первого уравнения системы (9) легко установить характер изменения силы тока в длинной линии:

$$I(x, t) = U_0 \frac{C_x \omega}{k + i\alpha} e^{-i\omega t} e^{(-\alpha + ik)x} \quad (17)$$

Из (16) и (17) видно, что отношение силы тока и напряжения в длинной линии не зависят от времени и координаты. Это отношение называют волновым сопротивлением (импедансом):

$$Z(\omega, k) = \frac{U(x, t)}{I(x, t)} = \frac{k + i\alpha}{C_x \omega}. \quad (18)$$

В пределе малых затуханий  $\alpha \ll \omega$

$$Z(\omega, k) \approx \frac{k}{C_x \omega} = \frac{1}{C_x V_\phi} = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{L_x}{C_x}} \quad (19)$$

Если в конце такую длинную линию замкнуть на сопротивление

$$R_0 = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{L_x}{C_x}} \quad (20)$$

то бегущая вдоль длинной линии волна "будет воспринимать" нагрузку как бесконечное продолжение этой длинной линии. Другими словами, когда длинная линия подключена к нагрузке с сопротивлением  $R_0$ , отражённой волны не возникает. Во всех остальных случаях, когда  $R \neq R_0$  (в том числе и в частных случаях незамкнутого конца, когда  $R \rightarrow \infty$  и короткозамкнутой линии, когда  $R = 0$ ) возникает отражённая волна, описываемая выражением (сравни с (13)):

$U(x, t) = U_0 e^{-i\omega t} e^{-(\alpha + ik)x}$ , которое также удовлетворяет решению системы (9).

Подставляя (16) в (12) получаем характеристическое уравнение:

$$-\omega^2 - V_\phi^2(-\alpha + ik)^2 - i\omega\gamma = 0 \quad (21)$$

Или, разделяя действительную и мнимую части, приходим к системе:

$$\begin{cases} \omega^2 = V_\phi^2(k^2 - \alpha^2) \\ 2\alpha k V_\phi^2 = \omega\gamma \end{cases} \quad (22)$$

Из (22) следует (в пределе малых затуханий  $\alpha \ll \omega$ ):

$$\alpha = \frac{\omega}{V_\phi} \sqrt{\frac{\sqrt{1 + (\gamma/\omega)^2} - 1}{2}} \approx \frac{\omega}{V_\phi} \sqrt{\frac{\gamma^2}{4\omega^2}} = \frac{\gamma}{2V_\phi} = R_x C_x \frac{V_\phi}{2}, \quad (23)$$

$$k = \frac{\omega}{V_\phi}. \quad (24)$$

Таким образом, амплитуда напряжения на нагрузке (в конце длинной линии) будет иметь вид:

$$U_n(t) = U_0 e^{-\alpha l} e^{ikl} e^{-i\omega t}. \quad (25)$$

При этом амплитуда колебаний на согласованной нагрузке (в конце длинной линии) имеет вид:

$$U_n = U_0 e^{-\alpha l}, \quad (26)$$

и набег фазы сигнала на выходе (в конце длинной линии) относительно входного сигнала (в начале длинной линии) будет иметь вид:

$$\Delta\varphi = kl. \quad (27)$$

Так как модуль волнового вектора  $k$  прямо пропорционален частоте сигнала  $\omega$  (см. выражение (24)) следует понимать, что разность фазы  $\Delta\varphi$  монотонно увеличивается с увеличением  $\omega$ .

Из (26) и (27) легко экспериментально определить декремент затухания  $\alpha$  и волновое число  $k$  для различных  $\omega$ :

$$\alpha(\omega) = \frac{1}{l} \ln \left( \frac{U_0}{U_H} \right), \quad (28)$$

$$k(\omega) = \frac{\Delta\varphi}{l} \quad (29)$$

### 3 Ход работы

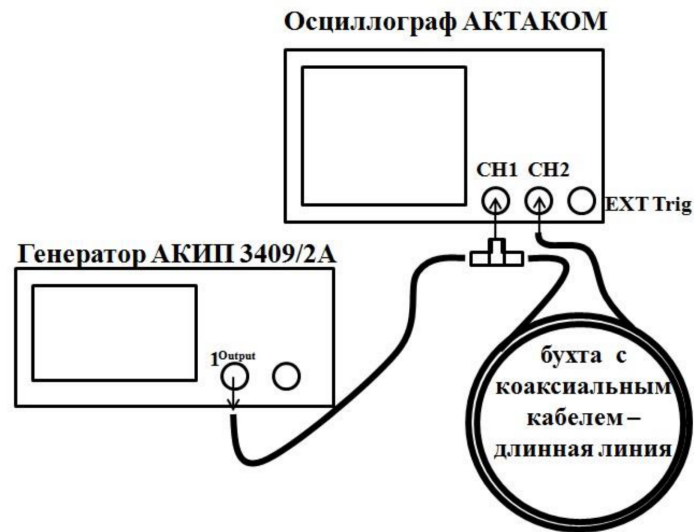


Рис. 2: Схема установки для наблюдения распространения сигналов вдоль длинной линии.

Нагрузка 50 Ом (согласованная нагрузка)		Нагрузка 1 МОм (линия без нагрузки)	
Частота	Сдвиг фаз	Частота	Сдвиг фаз
3.88	$2\pi$	3.76	$2\pi$
7.84	$4\pi$	7.93	$4\pi$
11.79	$8\pi$	11.89	$8\pi$
15.73	$16\pi$	15.86	$16\pi$
19.69	$32\pi$	19.81	$32\pi$
23.66	$64\pi$	23.77	$64\pi$
27.64	$128\pi$	31.64	$128\pi$

Таблица 1: Резонансные частоты для синусоидального сигнала

Нагрузка 50 Ом (согласованная нагрузка)		Нагрузка 1 МОм (линия без нагрузки)	
Частота	Сдвиг фаз	Частота	Сдвиг фаз
3.96	$2\pi$	3.90	$2\pi$
7.92	$4\pi$	7.81	$4\pi$
11.89	$8\pi$	11.71	$8\pi$
15.81	$16\pi$	15.62	$16\pi$
19.75	$32\pi$	19.52	$32\pi$

Таблица 2: Резонансные частоты для прямоугольного сигнала

Для синусоидального сигнала и нагрузки 50 Ом построим график зависимости  $\nu(n)$

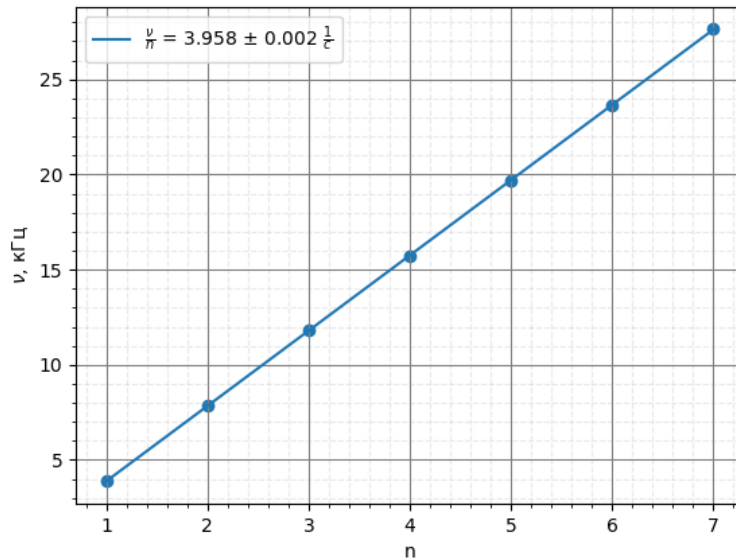


Рис. 3: График зависимости  $\nu(n)$

Фазовая скорость

$$V_{\Phi} = \frac{\nu}{n} \cdot l = 198 \frac{\text{см}}{c}$$

### 3.1 АЧХ и ФЧХ

Частота, МГц	Амплитуда входного сигнала, В	Амплитуда выходного сигнала, В	Фаза
3.88	5.4	4.84	$2\pi$
7.84	5.44	4.6	$4\pi$
11.79	5.48	4.44	$8\pi$
15.73	5.48	4.32	$16\pi$
19.69	5.48	4.0	$32\pi$
23.66	5.4	4.08	$64\pi$
27.64	5.4	3.76	$128\pi$
31.59	5.34	3.7	$256\pi$
35.55	5.33	3.63	$512\pi$
39.5	5.25	3.29	$1024\pi$

Таблица 3: АЧХ и ФЧХ

### 3.2 Определение параметров коаксиального кабеля.

$$y_1 = \frac{L_x C_x}{c^2} x_1 \quad (30)$$

где

$$x_1 = \omega^2, \quad (31)$$

$$y_1 = k(\omega)^2 - \alpha(\omega)^2. \quad (32)$$



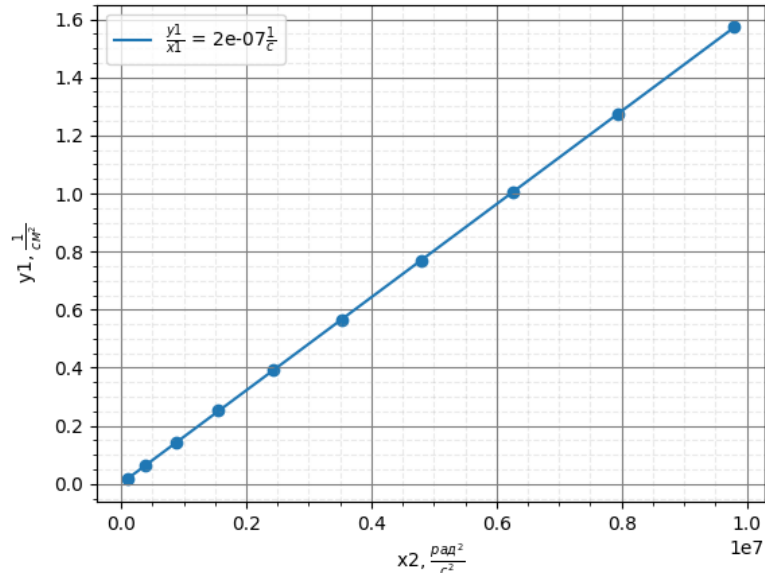


Рис. 4:  $y_1(x_1)$

Из графика

$$L_x C_x = 1.44$$

Тогда

$$L_x = 200.2$$

$$C_x = 0.0072$$

$$V_\Phi = \frac{c}{\sqrt{L_x C_x}} \cdot l = 250 \frac{\text{см}}{c}$$

Магнитная восприимчивость

$$\mu = \frac{L_x}{2 \log \frac{r_2}{r_1}} = 0.93$$

$$\varepsilon = 2C_x \log \frac{r_2}{r_1} = 1.54$$

### 3.3 Определение удельной проводимости проводников.

#### 3.3.1 Метод А

Из (23) и (28) следует:

$$\alpha(\omega) = \frac{1}{l} \ln \left( \frac{U_0}{U_n} \right) = R_x C_x \frac{V_\phi}{2}. \quad (33)$$

Если взять удельную проводимость для меди и подставить в известное выражение для характерной толщины скин-слоя:

$$\delta = \frac{c}{2\pi\sqrt{v\sigma}}, \quad (34)$$

то окажется, что даже при минимальной частоте  $v = 1$  МГц эта толщина будет равна около 65 мкм, что примерно в десять раз меньше радиуса центрального проводника (диаметр центральной жилы равен  $d = 1,37$  мм). При больших частотах характерная толщина скин-слоя ещё меньше. Поэтому для упрощения будем предполагать, что весь ток сосредоточен в приповерхностном слое и потери, связанные с джоулевым нагревом описываются следующим выражением:

$$dN = \sigma E_0^2 \int_0^\infty e^{-2\frac{z}{\delta}} dz dx L \Big|_{L=\pi d} = \sigma E_0^2 \cdot dx \cdot \pi d \cdot \frac{\delta}{2} \left( -e^{-2\frac{z}{\delta}} \right) \Big|_0^\infty \frac{\sigma \cdot \pi d}{dx} \cdot \frac{\delta}{2} (dU)^2 = \frac{(dU)^2}{dR} \quad (35)$$

где

$$dR = \frac{dx}{\sigma \cdot \pi d} \cdot \frac{2}{\delta} \quad (36)$$

Погонное сопротивление с учётом скин-эффекта можно определить следующим образом:

$$R_x = \frac{dR}{dx} = \frac{2}{\sigma \cdot \pi d \cdot \delta}. \quad (37)$$

Или, с учётом выражения для характерной толщины скин-слоя (34), имеем:

$$R_x = \frac{4\sqrt{v}}{\sqrt{\sigma} \cdot c \cdot d} \quad (38)$$

Таким образом, подставляя (38) в (33) приходим к зависимости:

$$\alpha(\omega) = \frac{1}{l} \ln \left( \frac{U_0}{U_u} \right) = \frac{4}{\sqrt{\sigma} \cdot d} C_x \frac{V_\phi}{c} \sqrt{v}. \quad (39)$$

Это выражение можно переписать в следующем виде:

$$y_2 = \frac{4}{\sqrt{\sigma} \cdot d} C_x \frac{V_\phi}{c} x_2 \quad (40)$$

где

$$x_2 = \sqrt{v} \quad (41)$$

$$y_2 = \alpha(\omega) \quad (42)$$

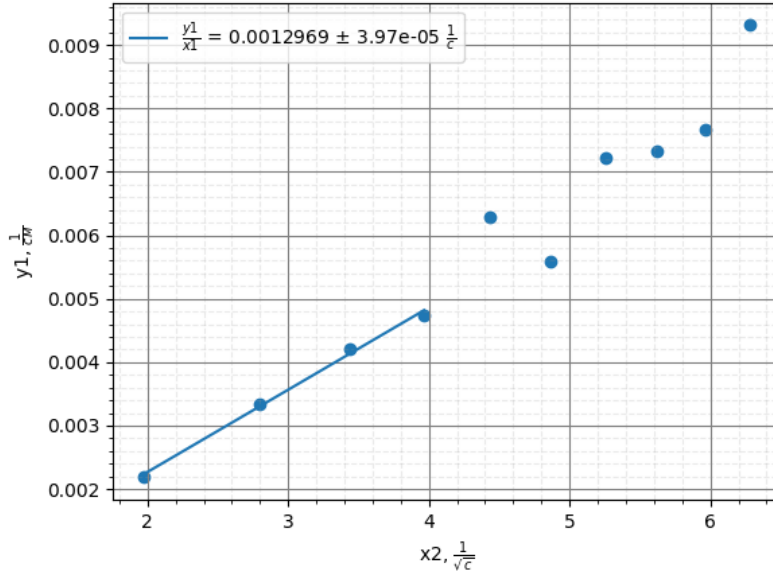


Рис. 5:  $y_2(x_2)$

Отсюда

$$\sigma = \left( \frac{2C_x V_\phi}{c \cdot d \cdot (\Delta y_2 / \Delta x_2)} \right)^2 \quad (43)$$

$$\sigma = 4.6 \cdot 10^{-18}$$

### 3.3.2 Метод Б.

Подставив выражение для  $\gamma$  из (14) во второе уравнение системы (22) и сокращая на квадрат скорости  $V_\phi^2$  легко прийти к выражению:

$$2\alpha k = \omega R_x C_x. \quad (44)$$

Зная амплитуду колебаний и сдвиг фазы в конце длинной линии относительно входного сигнала экспериментально можно определить как  $\alpha(\omega)$ , так и  $k(\omega)$  (см., например, выражения (28) и (29)). Таким образом, выражение (44) можно представить в следующем виде:

$$y_3 = \frac{4\pi \cdot C_x}{\sqrt{\sigma} \cdot d \cdot c} x_3 \quad (45)$$

где

$$x_3 = v^{3/2}, \quad (46)$$

$$y_3 = \alpha(\omega) \cdot k(\omega) = \frac{1}{l} \ln \left( \frac{U_0}{U_H} \right) \cdot \frac{\Delta \varphi}{l}. \quad (47)$$

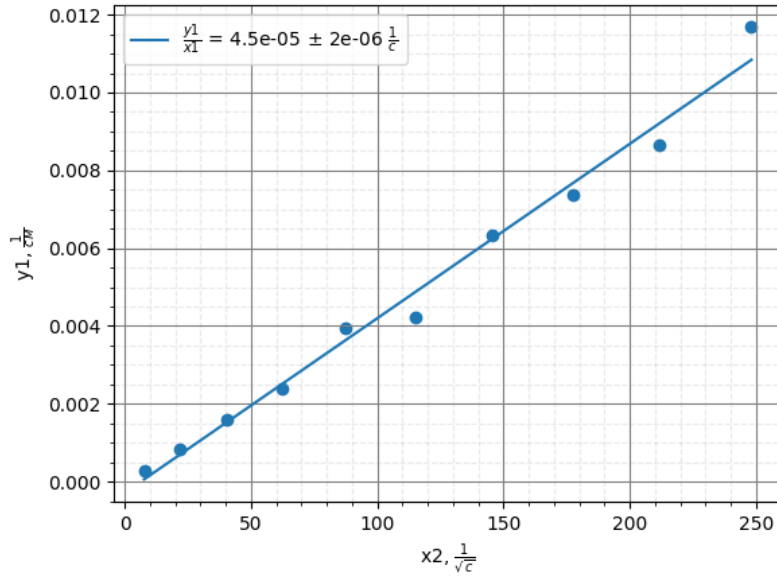


Рис. 6: Caption

$$\sigma = \left( \frac{4\pi \cdot C_x}{d \cdot c (\Delta y_3 / \Delta x_3)} \right)^2 \quad (48)$$

$$\sigma = 2.4 \cdot 10^{-18}$$

### 3.4 Длинная линия. Модель.

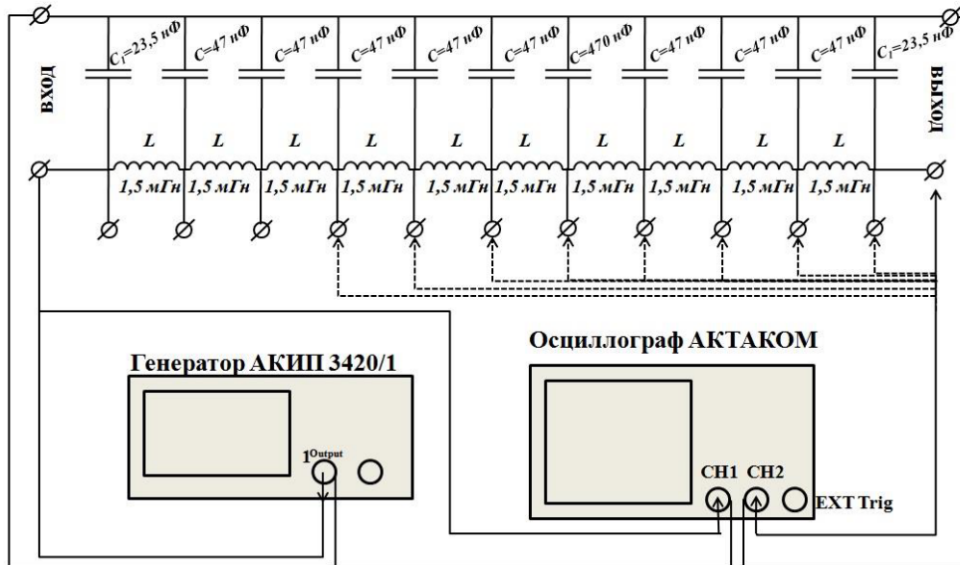


Рис. 7: Модель длинной линии

$$v_0 = \frac{1}{\pi\sqrt{LC}} = 38 \text{ кГц} \quad (*)$$

$$R_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = 178 \text{ Ом} \quad (**)$$

Частота, кГц	Сдвиг фа- зы, рад
1.0	0.13
5.75	0.35
10.5	0.66
15.25	0.69
20.0	1.51
29.5	2.3
34.25	2.45

Таблица 4: Сдвиг фазы между двумя соседними ячейками при разных частотах

### Наблюдение резонансов

$R = 0$					
$\nu_{\text{рез}} = 3.25 \text{ кГц}$		$\nu_{\text{рез}} = 13.68 \text{ кГц}$		$\nu_{\text{рез}} = 23.28 \text{ кГц}$	
Номер	Амплитуда	Номер	Амплитуда	Номер	Амплитуда
1	0.24	1	0.88	1	1.46
2	0.74	2	2.2	2	1.94
3	1.16	3	2.24	3	0.82
4	1.6	4	0.88	4	2.22
5	1.92	5	0.88	5	0.72
6	2.2	6	0.88	6	2.28
7	2.4	7	0.88	7	1.2
8	2.5	8	0.88	8	2.44
9	2.56	9	0.88	9	1.78
10	2.58	10	0.88	10	2.8

$R = \infty$					
$\nu_{\text{рез}} = 10.5 \text{ кГц}$		$\nu_{\text{рез}} = 20.2 \text{ кГц}$		$\nu_{\text{рез}} = 28.3 \text{ кГц}$	
Номер	Амплитуда	Номер	Амплитуда	Номер	Амплитуда
1	2.08	1	2.52	1	0.96
2	0.92	2	3.44	2	3.88
3	0.5	3	4.28	3	1.12
4	1.82	4	1.28	4	3.84
5	2.5	5	4.6	5	3.2
6	2.22	6	3.28	6	2.96
7	1.34	7	3.8	7	5.08
8	0.62	8	4.88	8	3.76
9	1.76	9	3.04	9	5.6
10	2.46	10	5.52	10	7.2

Таблица 5: Резонансные частоты и амплитуды на разных клеммах

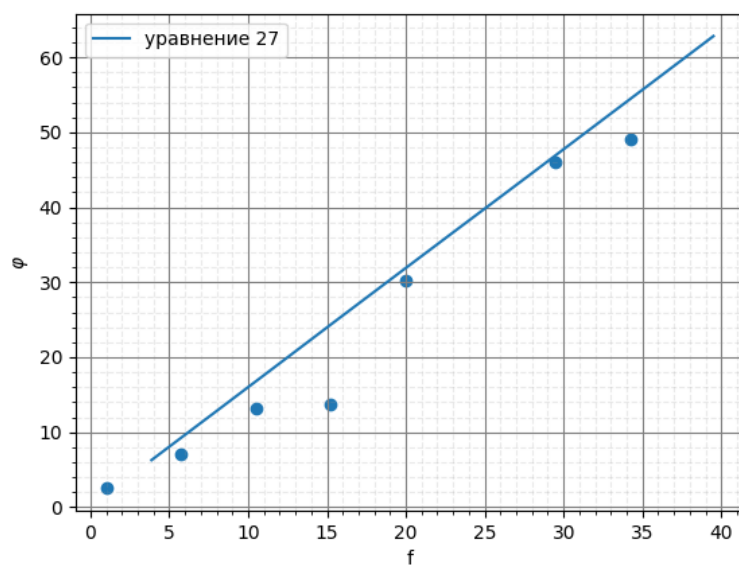


Рис. 8:  $\varphi(\nu)$

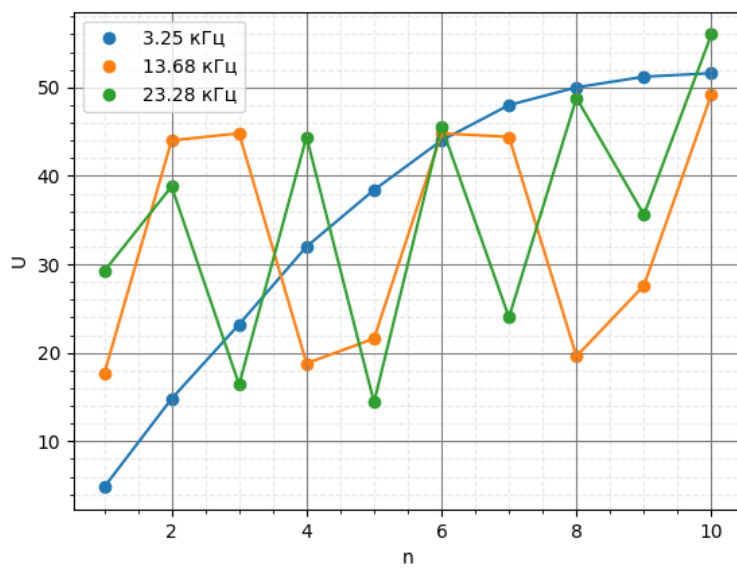


Рис. 9:  $U(n)$