

Отчет о выполнении лабораторной работы 1.2.2

Экспериментальная проверка закона
вращательного движения
на крестообразном маятнике

Студент: Копытова Виктория
Сергеевна
Группа: Б03-304

1 Аннотация

Цель работы: Экспериментально получить зависимость углового ускорения от момента прикладываемых к маятнику сил, убедиться, что угловое ускорение зависит линейно от момента сил, определить момент инерции маятника; проанализировать влияние сил трения, действующих на ось вращения

В работе используются: крестообразный маятник, набор перегрузков, секундомер, линейка, штангенциркуль.

2 Теоретические сведения

Основное уравнение вращательного движения тела вокруг закреплённой оси:

$$I\ddot{\varphi} = M, \quad (1)$$

где $\ddot{\varphi} \equiv \dot{\omega} \equiv \beta$ – угловое ускорение (ω – угловая скорость), I – полный момент инерции тела относительно оси вращения, M – суммарный момент внешних сил относительно этой оси.

Цель работы: экспериментально проверить уравнение (1), получив зависимость углового ускорения от момента инерции и момента прикладываемых к системе сил, а также проанализировать влияние сил трения, действующих в оси вращения.

Экспериментальная установка: для экспериментального исследования закона вращательного движения (1) в работе используется крестообразный «маятник», устройство которого изображено на рис. 1. Маятник состоит из четырёх тонких стержней радиуса a , укреплённых на втулке под прямым углом друг к другу. Втулка и два шкива различных радиусов (r_1 и r_2) насажены на общую ось. Ось закреплена в подшипниках, так что вся система может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси. Момент инерции I маятника можно изменять, передвигая грузы m_i ($i = 1, \dots, 4$) вдоль стержней и меняя R_i . На один из шкивов маятника навита тонкая нить. Привязанная к ней лёгкая платформа известной массы $m_{\text{п}}$ служит для размещения перегрузков $m_{\text{г}}$.

Установка оснащена датчиком, позволяющим фиксировать моменты времени прохождения концов стержней через него. Данные с датчика передаются на компьютер для последующей обработки и получения зависимостей угла поворота $\varphi(t)$, угловой скорости $\omega \equiv \dot{\varphi}$ и углового ускорения маятника $\beta \equiv \ddot{\varphi}$ от времени, а также углового ускорения от угловой скорости $\beta(\omega)$.

Вывод уравнения движения маятника: рассмотрим силы, действующие на маятник. Основной вращающий момент создаётся подвешенным на нити перегрузком. Непосредственно на маятник действует момент силы натяжения нити: $M_{\text{н}} = rT$, где r – радиус шкива (r_1 или r_2). Силу T выразим из

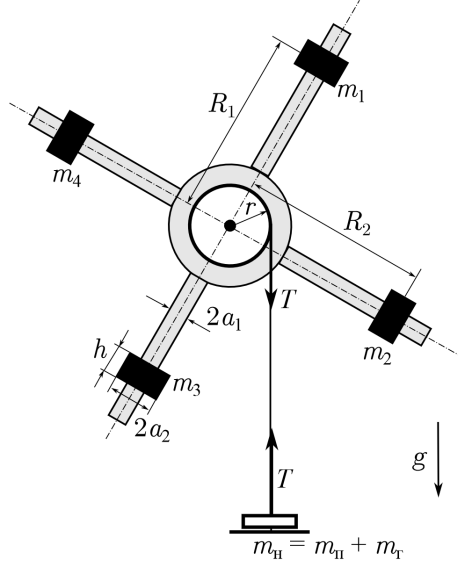


Рис. 1: Схема установки

уравнения движения платформы $m_n \ddot{y} = m_n g - T$, где $m_n = m_п + m_т$ – масса платформы с перегрузком. Ускорение платформы связано с угловым ускорением маятника условием нерастяжимости нити $\ddot{y} = \beta r$. Отсюда момент силы натяжения нити

$$M_n = m_n r (g - \beta r). \quad (2)$$

Вращению маятника препятствует момент силы трения в оси $M_{тр}$. Таким образом, с учётом (2) уравнение (1) может быть записано как

$$(I + m_n r^2) \beta = m_n g r - M_{тр}. \quad (3)$$

Заметим, что в наших опытах, как правило, $m_n r^2 \ll I$, и соответственно $M_n \approx m_n g r$, то маятник будет раскручиваться с постоянным угловым ускорением $\beta_0 \approx m_n g r / I$.

Поскольку зависимость момента силы трения от нагрузки на маятник и скорости его вращения не известна (её исследование – отдельная экспериментальная задача), методика измерения должна быть построена так, чтобы минимизировать или вовсе исключить влияние $M_{тр}$. Можно высказать следующие качественные соображения о природе и величине $M_{тр}$. Она может иметь как составляющую, пропорциональную силе реакции в оси N (сухое трение в подшипниках), так и составляющую, пропорциональную угловой скорости ω вращения маятника (вязкое трение в подшипниках и сопротивление воздуха). Учитывая, что сила реакции уравновешенного маятника равна $N = m_m g + T \approx (m_m + m_n) g \approx m_m g$, где m_m – масса маятника (как правило, $m_m \gg m_n$), можно записать

$$M_{тр} \simeq \left(1 + \frac{m_n}{m_m}\right) M_0 + \eta \omega \approx M_0 + \eta \omega, \quad (4)$$

где M_0 – момент сил трения для покоящегося маятника при нулевой массе

подвеса (минимальное значение силы трения), η – некоторый коэффициент, отвечающий за вязкое трение.

Методика эксперимента: малость величины трения $M_{тр}$ в работе обеспечивается за счёт использования в креплении подшипников качения. Однако учёт трения всё же оказывается необходим, поскольку оно существенно влияет на результаты опыта как при малых массах перегрузков (когда $m_{г} \sim M_0/gr$), так и при больших, поскольку при увеличении $m_{н}$ возрастает сила реакции в оси и угловая скорость вращения маятника, а с ней и вязкое трение.

Влияние вязкой составляющей трения можно исключить следующим образом. Экспериментальная установка позволяет измерять зависимость углового ускорения от угловой скорости $\beta(\omega)$. Если верны предположения о малости величины силы трения, то угловое ускорение должно быть линейной функцией угловой скорости:

$$\beta(\omega) = \beta_0 + k\omega \quad (5)$$

3 Ход работы

Величины, характерные для используемого маятника:

Радиус малого шкива $r_{м}$, см	0.9
Радиус большого шкива $r_{б}$, см	1.5
Масса платформы $m_{п}$, г	6.17

Таблица 1: Характеристики маятника

1. Расположим грузы на расстоянии $R = 3.1$ см и проведём балансировку маятника.
2. Оценим момент силы трения в подшипниках. Маятник начинает двигаться, когда на платформе находится груз массой $m_{гп} = 6.45$ граммов. Измерение проводится на малом шкиве. Тогда момент силы трения:

$$M_{тр} = (m_{гп} + m_{п})g \cdot r_{м} \approx 1.11 \cdot 10^{-3}(\text{Н} \cdot \text{м})$$

3. При фиксированной массе перегрузка и моменте инерции маятника проведём измерения для вычисления случайной погрешности измерения β_0 . Данные представлены в таблице 2.

$$\beta_{0\text{сред}} \approx 0.4800(\text{рад/с}^2)$$

$$\sigma_{\text{случ}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\beta_{0\text{сред}} - \beta_{0i})^2}{n(n-1)}} \approx 0.01 \quad \text{рад/с}^2$$

$k, 1/c$	$\beta_0, \text{рад}/c^2$	$(\beta_{0\text{сред}} - \beta_{0i})^2, \text{рад}^2/c^4$
-0.0078 ± 0.0058	0.5126 ± 0.0012	0.0015
-0.0079 ± 0.0045	0.4388 ± 0.0018	0.0012
-0.0085 ± 0.0070	0.4737 ± 0.0016	0.0001
-0.0084 ± 0.0015	0.4999 ± 0.0014	0.0007
-0.0088 ± 0.0049	0.4749 ± 0.0039	0.0001

Таблица 2: Оценка случайной погрешности β_0

m_{Γ}, Γ	$k, 1/c$	$\beta_0, \text{рад}/c^2$	Радиус шкива $r_{\zeta, \text{м}}, \text{см}$	$M_T, \text{мН} \cdot \text{м}$
62.9	-0.0113 ± 0.0021	0.669 ± 0.002	1.78	12.0
100	-0.0123 ± 0.0022	1.067 ± 0.007	1.78	18.5
200	-0.0253 ± 0.0041	2.300 ± 0.008	1.78	36.0
100	-0.0200 ± 0.0076	0.6034 ± 0.0048	0.90	9.4
62.9	-0.0161 ± 0.0053	0.3482 ± 0.0019	0.90	6.1

Таблица 3: Измерения k и β_0 для разных масс грузов

4. Проведём опыт для разных масс грузов. Вычислим моменты силы натяжения нити $M_T = (m_{\Gamma} + m_{\Pi})gr_{\zeta, \text{м}}$. Полученные данные занесём в таблицу 3. Построим график зависимости $\beta_0(M_T)$:

Мы видим, что зависимость линейная, значит:

$$\beta_0 = a + b \cdot M_T$$

Вычислим коэффициенты a и b по методу наименьших квадратов:

$$a = -0.068 \quad \text{рад}/c^2$$

$$b = 64.95 \quad 1/\text{кг} \cdot \text{м}^2$$

При пересечении с осью абсцисс:

$$M_T = -\frac{a}{b} \approx 1.05 \cdot 10^{-3} \quad \text{Н} \cdot \text{м}$$

Момент инерции:

$$I = \frac{1}{b} \approx 15.0 \cdot 10^{-3} \quad \text{кг} \cdot \text{м}^2$$

Погрешность вычисления момента инерции:

$$\varepsilon_b = \varepsilon_I$$

$$\sigma_b = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\langle \beta_0^2 \rangle - \langle \beta_0 \rangle^2}{\langle M_T^2 \rangle - \langle M_T \rangle^2} - b^2} \approx 1.98 \quad (1/\text{кг} \cdot \text{м}^2)$$

$$\varepsilon_b = \frac{\sigma_b}{b} \approx 0.03$$

$$\sigma_I = \varepsilon_I I = \varepsilon_b I \approx 0.46 \cdot 10^{-3}$$

Окончательно:

$$I = (15.0 \pm 0.46) \cdot 10^{-3} \quad \text{кг} \cdot \text{м}^2$$

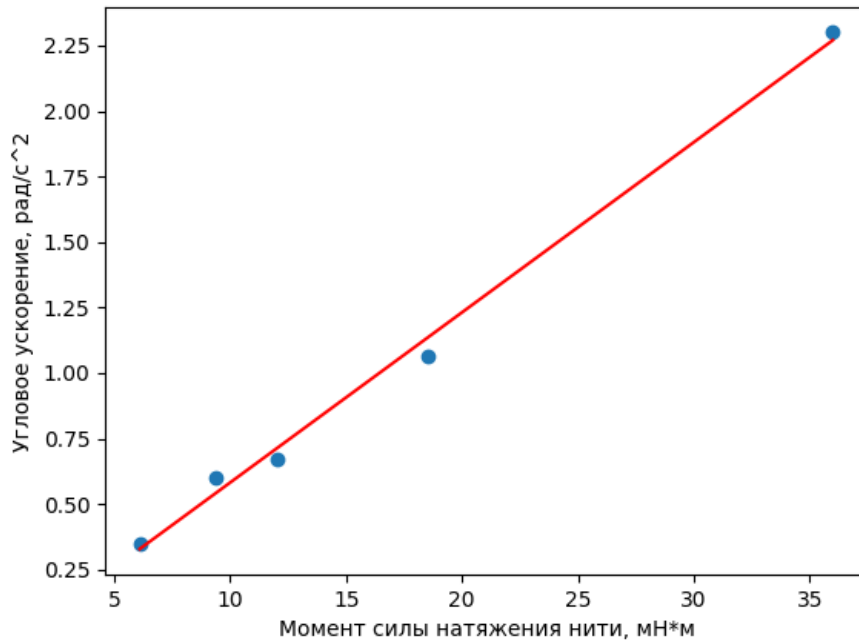


Рис. 2: Линейная зависимость $\beta_0(M_T)$

5. Определим зависимость углового ускорения от момента инерции системы, данные занесём в таблицу. Из формулы (5) вычислим

$$I = \frac{m_{\text{н}}gr - M_{\text{тр}}}{\beta} - m_{\text{н}}r^2 \approx \frac{m_{\text{н}}gr - M_{\text{тр}}}{\beta}, \quad I \gg m_{\text{н}}r^2$$

$R, \text{см}$	$k, 1/\text{с}$	$\beta, \text{рад/с}^2$	$I, \text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot 10^{-3}$
3	-0.379	1.192	7.00
5	-0.307	0.987	8.51
8	-0.319	0.715	11.64

Таблица 4: Зависимость углового ускорения от момента инерции системы

Построим график зависимости $I(R^2)$:

Зависимость линейная, значит

$$I = a + bR^2$$

Методом наименьших квадратов вычислим коэффициенты а и b:

$$a = 0.0063 \quad \text{кг} \cdot \text{м}^2$$

$$b = 0.8360 \quad \text{кг}$$

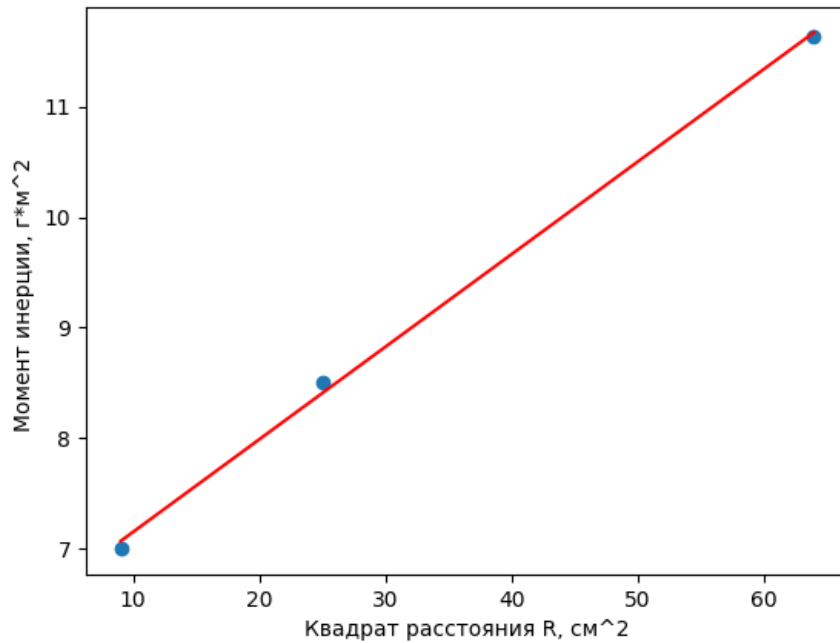


Рис. 3: Линейная зависимость $I(R^2)$

$$\sigma_b = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\langle I^2 \rangle - \langle I \rangle^2}{\langle R^4 \rangle - \langle R^2 \rangle^2} - b^2} \approx 0.018 \quad \text{кг}$$

$$\sigma_a = \sigma_b \sqrt{\langle R^4 \rangle - \langle R^2 \rangle^2} \approx 3.2 \cdot 10^{-5} \quad \text{кг} \cdot \text{м}^2$$

Момент инерции можно вычислить по формуле

$$I = I_0 + \sum_{i=1}^4 (I_i + m_i R_i^2),$$

где I_0 – момент инерции маятника без дополнительных грузов, m_i – масса этого дополнительного груза, I_i – его момент инерции относительно центра масс системы.

Тогда

$$I_0 = a = (6.3 \pm 0.03) \cdot 10^{-3} \quad \text{кг} \cdot \text{м}^2$$

6. Найдём I_0 , измеряя коэффициент β_0 для маятника без дополнительных грузов на маленьком шкиве. Занесём данные в таблицу.

$$I_0 = \frac{(m_{\text{п}} + m_{\text{г}})gr_{\text{м}} - M_0}{\beta_0}$$

$$\langle I_0 \rangle = 6.17 \cdot 10^{-3} \quad \text{кг} \cdot \text{м}^2$$

$m_{\Gamma}, \text{ г}$	$k, 1/c$	$\beta_0, \text{ рад}/c^2$	$I_{0\text{кг}} \cdot \text{м}^2 \cdot 10^{-3}$
100	-0.0452 ± 0.0031	1.328 ± 0.006	6.27
100	-0.0407 ± 0.0056	1.389 ± 0.009	5.99
100	-0.0839 ± 0.001	1.331 ± 0.008	6.25

Таблица 5: Измерение I_0

4 Вывод

В ходе работы была получена зависимость углового ускорения маятника от его момента инерции и момента прикладываемых сил. Угловое ускорение прямо пропорционально моменту сил и обратно пропорционально моменту инерции. Был оценён вклад силы трения в оси вращения в общий момент прикладываемых сил, а также погрешности вычислений. Двумя разными способами был вычислен момент инерции маятника без грузов и оба метода дали приблизительно одинаковый результат, что доказывает справедливость использованных в работе теоретически полученных зависимостей.