Отчет о выполнении лабораторной работы 1.4.2

Определение ускорения свободного падения при помощи оборотного маятника

Студент: Копытова Виктория Сергеевна
Группа: Б03-304

1 Аннотация

Цель работы: с помощью оборотного маятника измерить величину ускорения сво- бодного падения.

В работе используются: оборотный маятник с двумя подвесными призмами и двумя грузами (чечевицами); электронный счётчик времени и числа колебаний; подставка с острием для определения положения центра масс маятника; закреплённая на стене консоль для подвешивания маятника; металлические линейки, штангенциркуль длиной 1 м.

2 Теоретические сведения

Физическим маятником называют твёрдое тело, способное совершать колебания в вертикальной плоскости, будучи подвешено за одну из своих точек в поле тяжести. Ось, проходящая через точку подвес перпендикулярно плоскости качания, называется осью качания маятника. При малых колебаниях период колебаний физического маятника определяется формулой

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{gml}}, \tag{1}$$

где I – момент инерции маятника относительно оси качания, m – масса маятника, l – расстояние от оси качания до центра масс маятника. Если сравнить (1) с известной формулой колебаний математического маятника длиной l ($T = 2\pi\sqrt{l/g}$), можно определить приведённую длину физического маятника как

$$l_{\text{пр}} = \frac{I}{ml}. \tag{2}$$

Смысл приведённой длины в том, что при длине математического маятника, равной $l_{\text{пр}}$, его период колебаний совпадает с периодом колебаний физического маятника.

Теорема Гюйгенса об оборотном маятнике

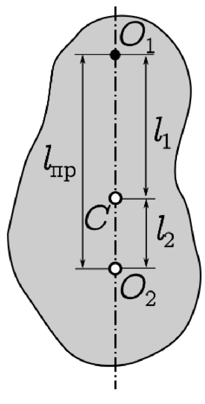

Рис. 1: К теореме Гюйгенса

Пусть O_1 — точка подвеса физического маятника, а C — его центр масс. Отложим отрезок длиной $l_{\text{пр}}$ вдоль линии O_1C, и обозначим соответствующую точку как O_2. Тогда

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I_1}{mgl_1}}, \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{I_2}{mgl_2}}. \tag{3}$$

По теореме Гюйгенса—Штейнера имеем

$$I_1 = I_C + ml_1^2, \quad I_2 = I_C + ml_2^2, \tag{4}$$

где I_C — момент инерции маятника относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости качания. Пусть периоды колебаний одинаковы: $T_1 = T_2$. Тогда одинаковы должны быть и приведённые длины. С учётом (4) имеем

$$l_{\text{пр}} = \frac{I_C}{ml_1} + l_1 = \frac{I_C}{ml_2} + l_2 \tag{5}$$

откуда следует, что при $l_1 \neq l_2$ справедливо равенство

$$I_C = ml_1l_2. \tag{6}$$

Из (6) и (5) получим

$$l_{\text{пр}} = l_1 + l_2. \tag{7}$$

Расчёт ускорения свободного падения

Пусть $L = O_1O_2 = l_1 + l_2$ – расстояние между двумя «сопряжёнными» точками подвеса физического маятника. Если соответствующие периоды малых колебаний равны, $T_1 = T_2 = T$, то по теореме Гюйгенса $L = l_{\text{пр}}$. Тогда из (1) и (2) находим ускорение свободного падения:

$$g = (2\pi)^2\frac{L}{T^2} \tag{8}$$

Так как периоды не совпадают в точности, из (3) и (4) получаем

$$g = (2\pi)^2\frac{l_1^2 - l_2^2}{T_1^2l_1 - T_2^2l_2}, \tag{9}$$

что можно записать как

$$g = g_0\frac{\lambda - 1}{\lambda - \frac{T_2^2}{T_1^2}}, \tag{10}$$

где $g_0 = (2\pi)^2L/T^2$, $\lambda = l_1/l_2$

Оценим добавку

$$g = g_0\frac{\lambda - 1}{\lambda - (1+\varepsilon)^2} \approx g_0\frac{\lambda}{\lambda - \frac{2\varepsilon}{\lambda - 1}} \approx g_0(1 + 2\beta\varepsilon),$$

где $\varepsilon = \frac{\delta T}{T}$, $\beta = \frac{1}{\lambda - 1} = \frac{l_2}{l_1 - l_2}$.

Поэтому для большей точности опыта необходимо, чтобы выполнялось соотношение

$$l_1 > 2,5 l_2.$$

Оценка поггрешностей

$$\frac{\sigma_{g_0}}{g_0} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2 + 4\left(\frac{\sigma_T}{T}\right)^2}$$

$$g = g_0 + \Delta g, \quad \Delta g \approx \frac{2l_2}{l_1 - l_2}\frac{\Delta T}{T} g_0$$

Тогда

$$\frac{\sigma_g}{g} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2 + 4\left(\frac{\sigma_T}{T}\right)^2 + 8\left(\beta\frac{\sigma_T}{T}\right)^2 + 8\left(\beta\frac{\Delta T}{T}\frac{\sigma_l}{\Delta l}\right)^2}$$

Экспериментальная установка

Применяемый в работе маятник представляет собой стержени цилиндрического сечения. Маятник подвешивается с помощью небольших треугольных призм ($П_1, П_2$), острым основанием опирающихся на закреплённую на стене консоль. Ребро призмы задаёт ось качания маятника. На стержне закрепляются два дополнительных груза в форме «чечевицы» ($Г_1, Г_2$). Регистрация времени колебаний проводится с помощью электронных счётчиков. Расстояния между точками установки маятников на консоли до электронных счётчиков фиксировано.

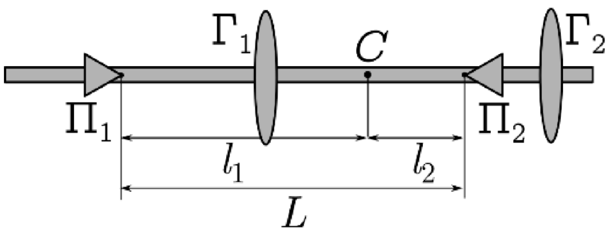

Рис. 2: Обороотный маятник

3 Ход работы

1. Проведём измерение массы маятника целиком и всех его элементов по отдельности с помощью электронных весов.

Тело	Масса, г
Маятник	4017,8
Стержень	868,3
Призма $П_1$	78,3
Призма $П_2$	79,6
Груз $Г_1$	1471,5
Груз $Г_2$	1495,7

Таблица 1: Массы маятника и его составляющих

2. Закрепим призмы 1 и 2 на стержне симмтерично дург относительно друга и измерим расстояние L между призмами с помощью штангенциркуля.

$$L = (49,00 \pm 0,01)\text{см}.$$

   В дальнейшем призмы остаются закреплёнными на своих местах.

3. Зададим соотношение $l_1/l_2 = 2,6$. Расчитаем положение грузов при котором периоды колебаний маятника при подвесе на призмы 1 и 2 будут одинаковыми.

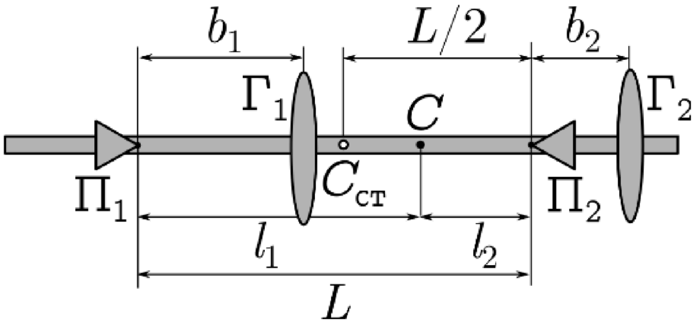

Рис. 3: Оборотный маятник

   Получаем

$$b_1 = 20,9 \quad \text{см}$$

$$b_2 = 8,7 \quad \text{см}$$

4. Определим положение центра масс маятника с грузами и с помощью этого значения определим l_1 и l_2.

$$l_1 = 34,8 \quad \text{см}$$

$$l_2 = 14,2 \quad \text{см}$$

5. Проверим, что периоды колебаний маятника на призмах 1 и 2 достаточно точно совпадают.

   Среднее значение периода для призмы 1

$$T_1 = 1,449 \quad \text{с}$$

   Среднее значение периода для призмы 2

$$T_1 = 1,447 \quad \text{с}$$

$$\frac{\Delta T}{T} \approx 0,1\%$$

   Периоды совпадают с достаточной для проведения эксперимента точностью.

6. Проведём окончатеельное измерение периодов с максимальной точностью. Количество колебаний – 150. Значения периодов

$$T_1 = 1,402 \quad \text{с}, \quad T_2 = 1,389 \quad \text{с}.$$

7. Расчитаем ускорение свободного падения по формуле (9)

$$g = (2\pi)^2 \frac{l_1^2 - l_2^2}{T_1^2 l_1 - T_2^2 l_2} \approx 9.72 \quad \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

   Погрешность $\sigma_g = 0,2 \quad \text{м/с}^2$

   Окончательный результат

$$g = (9,72 \pm 0,2) \quad \text{м/с}^2$$

   Табличное значение ускорения свободного падения для Москвы $g_\text{м} = 9,815 \quad \text{м/с}^2$.

   Полученное значение совпадает с теоретическим в пределах погрешности.

4 Вывод

В ходе работы было измерено ускорение свободного падения. Результат измерения совпадает с табличным в пределах погрешности. Эта погрешность возникает из-за того, что не достигается точного совпадения периодов колебаний маятника для призм 1 и 2.