Lista de exercícios 02 - FMC

Andriel Vinicius de M. Fernandes

July 11, 2024

1 Congruência Modular

1. Demonstre:
   Sejam $a, b, c, d, n \in \mathbb{Z}$, com $n > 1$.
   Se $a \equiv c \pmod{n}$ e $b \equiv d \pmod{n}$, então:

   (a) $(a \cdot b) \equiv (c \cdot d) \pmod{n}$;
   Resolução.
   (1) Sejam $a, b, c, d, n \in \mathbb{Z}$, com $n > 1$, onde $a \equiv c \pmod{n}$ e $b \equiv d \pmod{n}$.
   (2) Por def., temos que $\exists k_1 \in \mathbb{Z}, k_1 \cdot n = a - c \implies a = k_1 n + c$.
   (3) Por def., temos que $\exists k_2 \in \mathbb{Z}, k_2 \cdot n = b - d \implies b = k_2 n + d$.
   Assim, temos:

(4)	$a = k_1 n + c$	(Por aritmética)
(5)	$ab = (k_1 n + c) \cdot b$	(Por multiplicação por b)
(6)	$ab = bk_1 n + bc$	(Por distributividade em 5)
(7)	$ab = (k_2 n + d)k_1 n + (k_2 n + d)c$	(Por substituição em b por 3)
(8)	$ab = k_1 n k_2 n + k_1 n d + k_2 n c + cd$	(Por distributividade)
(9)	$ab = n(k_1 n k_2 + k_1 d + k_2 c) + cd$	(Por evidência em n)
(10)	$ab = nk_3 + cd$	(Para $k_3 = (k_1 n k_2 + k_1 d + k_2 c)$)
(11)	$ab - cd = nk_3$	(Por aritmética)
(11)	$n \mid ab - cd$	(Por def. de divisibilidade)

   Portanto, $ab \equiv cd \pmod{n}$ pela def. de congruência.

(b) $a^m \equiv c^m \pmod{n}$, para qualquer $m \in \mathbb{Z}$.

2. Quantas soluções inteiras existem para x, com $0 \leq x < 150$ para a congruência linear $63x \equiv 30 \pmod{150}$? Quais são elas?
Resolução.
Verifiquemos o $mdc(150, 63)$:

$$\begin{aligned} mdc(150,63): 150 &= 2 \cdot 63 + 24 & (24 = 63 \cdot 2 - 150) \\ 63 &= 2 \cdot 24 + 15 & (15 = 24 \cdot 2 - 63) \\ 24 &= 1 \cdot 15 + 9 & (9 = 24 - 1 \cdot 15) \\ 15 &= 1 \cdot 9 + 6 & (6 = 15 - 9) \\ 9 &= 3 \cdot 3 + 0 & \end{aligned}$$

Portanto, $mdc(150, 63) = 3$.
Note que, pela regra do cancelamento geral, temos:

$$63x \equiv 30 \pmod{150} \implies 21x * 3 \equiv 10 * 3 \pmod{150} \iff 21x \equiv 10 \pmod{\frac{150}{3}}$$

Logo, temos que resolver $21x \equiv 10 \pmod{\frac{150}{3}}$.
Verifiquemos:

$$\begin{aligned} mdc(50,21): 50 &= 2 \cdot 21 + 8 & (8 = 50 - 2 \cdot 21) \\ 21 &= 2 \cdot 8 + 5 & (5 = 21 - 2 \cdot 8) \\ 8 &= 1 \cdot 5 + 3 & (3 = 8 - 1 \cdot 5) \\ 5 &= 1 \cdot 3 + 2 & (2 = 5 - 1 \cdot 3) \\ 3 &= 1 \cdot 2 + 1 & (1 = 3 - 1 \cdot 2) \\ 2 &= 1 \cdot 2 + 0 & \end{aligned}$$

Portanto, $mdc(50, 21) = 1$.

Assim, vamos encontrar o inverso de 21 módulo 50:

$$\begin{aligned}
1 &= 3 - 2 \\
&= 3 - (5 - 3) \\
&= 2 \cdot 3 - 5 \\
&= 2 \cdot (8 - 5) - 5 \\
&= 2 \cdot 8 - 3 \cdot 5 \\
&= 2 \cdot 8 - 3 \cdot (21 - 2 \cdot 8) \\
&= 2 \cdot 8 - 3 \cdot 21 + 6 \cdot 8 \\
&= 8 \cdot 8 - 3 \cdot 21 \\
&= 8 \cdot (50 - 2 \cdot 21) - 3 \cdot 21 \\
&= 8 \cdot 50 - 16 \cdot 21 - 3 \cdot 21 \\
&= 8 \cdot 50 - 19 \cdot 21
\end{aligned}$$

Como $-19 \equiv 31 \pmod{50}$, temos que o inverso modular de 21 é 31.
Agora, note que:

$$\begin{aligned}
& 31 \cdot 21x \equiv 10 \cdot 31 \pmod{50} \\
\Longrightarrow\ & 651x \equiv 310 \pmod{50} \\
\Longrightarrow\ & x \equiv 10 \pmod{50} \quad [\text{pois } 651 \equiv 1 \pmod{50}] \\
\Longrightarrow\ & x = 50 \cdot t + 10 \quad (\text{Por def.})
\end{aligned}$$

para $0 \leq t \leq 2$.
Portanto, as 3 possíveis soluções para a congruência linear são $x = 10, x = 60, x = 110$.

3. Qual o menor valor positivo que satisfaz esta congruência linear?

$$81x \equiv 12 \pmod{264}$$

Resolução.
Verifiquemos:

$$\begin{aligned}
mdc(264, 81) : 264 &= 3 \cdot 81 + 21 & (21 = 264 - 3 \cdot 81) \\
81 &= 3 \cdot 21 + 18 & (18 = 81 - 3 \cdot 21) \\
21 &= 1 \cdot 18 + 3 & (3 = 21 - 18) \\
18 &= 6 \cdot 3 + 0 &
\end{aligned}$$

Logo, $mdc(264, 81) = 3$.
Pela regra do cancelamento geral, temos que:

$$81x \equiv 12 \pmod{264} \implies 27x \cdot 3 \equiv 4 \cdot 3 \pmod{264} \iff 27x \equiv 4 \pmod{\frac{264}{3}}$$

Verifiquemos novamente o mdc entre 27 e 88:

$$\begin{aligned} mdc(88, 27) : 88 &= 3 \cdot 27 + 7 & (7 = 88 - 3 \cdot 27) \\ 27 &= 3 \cdot 7 + 6 & (6 = 27 - 3 \cdot 7) \\ 7 &= 1 \cdot 6 + 1 & (1 = 7 - 6) \\ 6 &= 6 \cdot 1 + 0 & \end{aligned}$$

Logo, $mdc(88, 27) = 1$.
Assim, podemos calcular o inverso de 27 módulo 88 pelo algoritmo extendido de Euclides:

$$\begin{aligned} 1 &= 7 - 6 \\ &= 7 - (27 - 3 \cdot 7) \\ &= 7 - (27 - 3 \cdot (88 - 3 \cdot 27)) \\ &= 7 - (27 - 3 \cdot 88 + 9 \cdot 27) \\ &= 88 - 3 \cdot 27 - (27 - 3 \cdot 88 + 9 \cdot 27) \\ &= 4 \cdot 88 - 13 \cdot 27 \end{aligned}$$

Como $-13 \equiv 75 \pmod{88}$, temos que o inverso modular de 27 módulo 88 é 75.
Agora, note que:

$$\begin{aligned} & 75 \cdot 27x \equiv 4 \cdot 75 \pmod{88} \\ & \implies x \equiv 300 \pmod{88} \quad [\text{pois } 27 \cdot 75 \equiv 1 \pmod{88}] \\ & \implies x \equiv 300 \pmod{88} \\ & \implies x \equiv 36 \pmod{88} \quad [\text{pois } 300 \equiv 36 \pmod{88}] \end{aligned}$$

Logo, o menor inteiro que satisfaz a congruência é 36.

4. Calcule $(8^{10} - 128^{1796}) \pmod{13}$. Mostre todos os resultados intermediários. Durante o processo nenhum número com mais de 3 dígitos

deve ser gerado.
Resolução.
Note que:

$$(8^{10}-128^{1796}) \pmod{13} \implies (8^{10} \bmod 13)-(128^{1796} \bmod 13) \pmod{13}$$

A princípio calculemos ($8^{10} \bmod 13$).
Note que $8^10 = 8^2 \cdot 8^4 \cdot 8^4$. Vamos calcular cada:

- $8^2 \bmod 13 = 64 \bmod 13 = 12$
- $8^4 \bmod 13 = (8^2 \bmod 13)^2 \bmod 13 = 12^2 \bmod 13 = 1$

Portanto:

$$\begin{aligned} 8^{10} \bmod 13 &= (8^2 \bmod 13 \cdot 8^4 \bmod 13 \cdot 8^4 \bmod 13) \bmod 13 \\ &= (12 \cdot 1 \cdot 1) \bmod 13 \\ &= 12 \end{aligned}$$

Agora calculemos $(128^{1796}) \bmod 13$.
Note que $(128 \bmod 13)^{1796} \bmod 13 = 11^{1796} \bmod 13$.
Veja que $11^{1796} = 11^{1024} \cdot 11^{256} \cdot 11^{256} \cdot 11^{256} \cdot 11^4$. Vamos calcular cada:

- $11^4 \bmod 13 = (11^2 \bmod 13)^2 \bmod 13 = 4^2 \bmod 13 = 3$
- $11^{256} \bmod 13$:
  - Note que $256 = 21 \cdot 12 + 4$;
  - Pelo Pequeno Teorema de Fermat, tomando o primo 13 e o inteiro 11, sabemos que $11^{12} \equiv 1 \pmod{13}$;
  - Logo:

    $$11^{256} \equiv (11^{12})^{21} \cdot 11^4 \pmod{13} \equiv 1^{21} \cdot 11^4 \pmod{13} \quad [\text{pois } 11^{12} \equiv 1 \pmod{13}$$
- $11^{1024} \bmod 13 = (11^{256} \bmod 13)^4 \bmod 13 = 3^4 \bmod 13 = 3$

Desse modo, temos:

$$11^{1796} \bmod 13 = (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) \bmod 13 = 243 \bmod 13 = 9$$

Portanto, temos a operação final:

$$\begin{aligned} (8^{10} - 128^{1796}) \bmod 13 &= (8^{10} \bmod 13) - (128^{1796} \bmod 13) \bmod 13 \\ &= (12 - 9) \bmod 13 \\ &= 3 \end{aligned}$$