

Lista de exercícios 01 - FMC

Andriel Vinicius de M. Fernandes

24 de março de 2024

1 Indução e Somatório

1. Calcule a soma dos n primeiros pares, em seguida, demonstre por indução.

Resolução. Note que:

$$0 = 0$$

$$0 + 2 = 2$$

$$0 + 2 + 4 = 6$$

$$0 + 2 + 4 + 6 = 12$$

Ou seja, a soma dos n primeiros pares é dada por $n^2 + n$. Provemos essa proposição por indução.

(a) Seja $P(n) := \sum_{i=0}^n i = 0 + 2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n^2 + n$

(b) Aplicaremos indução sobre $n \in \mathbb{N}$

(c) Vejamos o passo-base $P(0)$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^0 &= 0 \\ &= 0 + 0 && \text{(Por aritmética)} \\ &= 0^2 + 0 && \text{(Por aritmética)} \\ &= n^2 + n && \text{(Para } n = 0\text{)}\end{aligned}$$

Logo, $P(0)$ é verdadeiro.

(d) Para um certo $k \in \mathbb{N}$, $P(k) := \sum_{i=0}^k i = k^2 + k$ (Hipótese Indutiva).
(Provemos que $P(k+1) = (k+1)^2 + (k+1)$).

(e) Então, temos:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k+1} i &= \left(\sum_{i=0}^k i\right) + (k+1) && \text{(Por def. rec. de Somatório)} \\ &= (k^2 + k) + (k+1) && \text{(Por H.I)} \\ &= k^2 + 2k + 1 \\ &= (k+1)^2\end{aligned}$$