Lista de exercícios 01 - FMC

Andriel Vinicius de M. Fernandes

1 de abril de 2024

1 Indução e Somatório

1. Calcule a soma dos n primeiros pares, em seguida, demonstre por indução.
Resolução. Note que:

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \\ 0+2 &= 2 \\ 0+2+4 &= 6 \\ 0+2+4+6 &= 12 \end{aligned}$$

Ou seja, a soma dos n primeiros pares é dada por n^2+n. Provemos essa proposição por indução sobre n.
Seja $P(n) := \sum_{i=0}^{n} 2i = 0+2+4+6+\cdots+n = n^2+n$
Passo base: $n=0$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{0} &= 0 \\ &= 0+0 && \text{(Por aritmética)} \\ &= 0^2+0 && \text{(Por aritmética)} \\ &= n^2+n && \text{(Para } n=0\text{)} \end{aligned}$$

Logo, $P(0)$ é verdadeiro.
Passo indutivo: para um certo $k \in \mathbb{N}, P(k) := \sum_{i=0}^{k} 2i = k^2+k$ (Hipótese

Indutiva).
(Provemos que $P(k+1) = (k+1)^2 + (k+1)$).
Então, temos:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k+1} 2i &= (\sum_{i=0}^{k} 2i) + 2(k+1) && \text{(Por def. rec. de Somatório)} \\
&= (k^2 + k) + 2(k+1) && \text{(Por H.I)} \\
&= k^2 + k + 2k + 2 && \text{(Por arit.)} \\
&= k^2 + 3k + 2 && \text{(Por arit.)} \\
&= (k+1)^2 + (k+1) && \text{(Por arit.)}
\end{aligned}$$

Logo, $P(k+1)$ é verdadeiro e a proposição inicial é verdadeira.

2. Demonstre que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$$

Resolução.
Aplicaremos indução sobre n.
Seja $P(n) := \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$.
Passo base: $n = 0$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{0} i^2 &= 0^2 && \text{(Por def. rec. de } \textstyle\sum\text{)} \\
&= 0 && \text{(Por arit.)} \\
&= \frac{0}{6} && \text{(Por arit.)} \\
&= \frac{0 \cdot (2 \cdot 0 + 1) \cdot (0+1)}{6} && \text{(Por reescrita de 0)} \\
&= \frac{n \cdot (2n+1) \cdot (n+1)}{6} && \text{(Para } n = 0\text{)}
\end{aligned}$$

Logo, $P(0)$ é verdadeiro.
Passo indutivo: para um certo $k \in \mathbb{N}, P(k) := \sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(2k+1)(k+1)}{6}$ (Hipótese Indutiva).

(Provemos que $P(k+1) = \frac{(k+1)(2\cdot(k+1)+1)(k+2)}{6}$).
Então, temos:

$$\begin{aligned}
P(k+1) &= \sum_{i=1}^{k+1} i^2 \\
&= (\sum_{i=1}^{k} i^2) + (k+1)^2 && \text{(Por def. rec. de } \textstyle\sum\text{)} \\
&= \frac{k(2k+1)(k+1)}{6} + (k+1)^2 && \text{(Por HI)} \\
&= \frac{k(2k+1)(k+1) + 6(k+1)^2}{6} && \text{(Por arit.)} \\
&= \frac{(2k^2+k)(k+1) + 6k^2 + 12k + 6}{6} && \text{(Por arit.)} \\
&= \frac{2k^3 + 3k^2 + k + 6k^2 + 12k + 6}{6} && \text{(Por arit.)} \\
&= \frac{2k^3 + 9k^2 + 13k + 6}{6} && \text{(Por arit.)} \\
&= \frac{(k+1)(2\cdot(k+1)+1)(k+2)}{6} && \text{(Por arit.)}
\end{aligned}$$

Logo, $P(k+1)$ é verdadeiro e a proposição inicial é verdadeira.

3. Demonstre que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i=1}^{n} i(\frac{1}{2})^{i-1} = 4 - \frac{n+2}{2^n - 1}$$

Resolução.
Aplicaremos Indução sobre n.
Seja $P(n) := \sum_{i=0}^{n} i(\frac{1}{2})^{i-1} = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}$.

Passo-base: $n = 0$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{0} i(\frac{1}{2})^{i-1} &= 0 \cdot (\frac{1}{2})^{0-1} && \text{(Por def. base de } \textstyle\sum\text{)} \\
&= 0 && \text{(Por } x \cdot 0 = 0\text{)} \\
&= 4 - 4 && \text{(Por reescrita de 0)} \\
&= 4 - \frac{2}{\frac{1}{2}} && \text{(Por reescrita de 4)} \\
&= 4 - \frac{0+2}{2^{-1}} && \text{(Por reescrita de } \frac{1}{2}\text{)} \\
&= 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}} && \text{(Para } n = 0\text{)}
\end{aligned}$$

Logo, $P(0)$ é verdadeiro.

Para um certo $k \in \mathbb{N}, P(k) := \sum\limits_{i=0}^{k} i(\frac{1}{2})^{i-1} = 4 - \frac{k+2}{2^{k-1}}$ (Hipótese Indutiva).

(Provemos que $P(k+1) = 4 - \frac{k+3}{2^{(k+1)-1}}$).

Então, temos:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k+1} i(\frac{1}{2})^{i-1} &= \sum_{i=0}^{k} i(\frac{1}{2})^{i-1} + (k+1)\cdot(\frac{1}{2})^{k} && \text{(Por def. rec. de } \textstyle\sum\text{)}\\
&= 4 - \frac{k+2}{2^{k-1}} + (k+1)\cdot(\frac{1}{2})^{k} && \text{(Por H.I)}\\
&= 4 - \frac{k+2}{2^{k-1}} + \frac{k+1}{2^{k}} && \text{(Por arit.)}\\
&= 4 + (\frac{-k-2}{2^{k-1}}) + \frac{k+1}{2^{k}} && \text{(Por arit.)}\\
&= 4 + (\frac{-k-2}{2^{k-1}}) + \frac{\frac{k+1}{2}}{\frac{2^{k}}{2}} && \text{(Por divisão de 2 em } \frac{k+1}{2^k}\text{)}\\
&= 4 + (\frac{-k-2}{2^{k-1}}) + \frac{\frac{k+1}{2}}{2^{k-1}} && \text{(Por arit.)}\\
&= 4 + (\frac{-k-2+\frac{k+1}{2}}{2^{k-1}}) && \text{(Por arit.)}\\
&= 4 + (\frac{\frac{-2k-4+k+1}{2}}{2^{k-1}}) && \text{(Por arit.)}\\
&= 4 + (\frac{\frac{-2k-4+k+1}{2}}{\frac{2^{k}}{2}}) && \text{(Para } 2^{k-1} = \frac{2^k}{2}\text{)}\\
&= 4 + (\frac{-2k-4+k+1}{2^{k}}) && \text{(Por arit.)}\\
&= 4 + (\frac{-k-3}{2^{k}}) && \text{(Por arit.)}\\
&= 4 - \frac{k+3}{2^{k}} && \text{(Por arit.)}\\
&= 4 - \frac{k+3}{2^{k+1-1}} && \text{(Para } 2^k = 2^{k+1-1}\text{)}
\end{aligned}
$$

Logo, $P(k+1)$ é verdadeiro e a proposição inicial é verdadeira.

4. Demonstre que $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

Resolução.
Aplicaremos indução sobre n.
Seja $P(n) := \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1}$.
Passo base: $n = 1$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} &= \frac{1}{(2\cdot 1-1)(2\cdot 1+1)} && \text{(Por def. base de } \textstyle\sum\text{)}\\
&= \frac{1}{1\cdot 3} && \text{(Por arit.)}\\
&= \frac{1}{2+1} && \text{(Por reescrita de 3)}\\
&= \frac{1}{2\cdot 1+1} && \text{(Por reescrita de 2)}\\
&= \frac{n}{2\cdot n+1} && \text{(Para } n = 1\text{)}
\end{aligned}$$

Logo, $P(1)$ é verdadeiro.

Passo indutivo: Para um certo $k \in \mathbb{N}^*, P(k) := \sum\limits_{i=1}^{k} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{k}{2k+1}$
(Hipótese Indutiva).
(Provemos que $P(k+1) = \frac{k+1}{2k+3}$.)
Então, temos:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} &= (\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)}) + (\frac{1}{(2\cdot(k+1)-1)(2\cdot(k+1)+1)})\\
&= \frac{k}{2k+1} + (\frac{1}{(2k+1)(2k+3)})\\
&= \frac{(2k+3)\cdot k}{(2k+3)\cdot(2k+1)} + (\frac{1}{(2k+1)(2k+3)})\\
&= \frac{2k^2+3k+1}{(2k+3)\cdot(2k+1)} + (\frac{1}{(2k+1)(2k+3)})\\
&= \frac{(2k+1)\cdot(k+1)}{(2k+1)(2k+3)}\\
&= \frac{k+1}{2k+3}
\end{aligned}$$

Logo, $P(k+1)$ é verdadeiro e a proposição inicial é verdadeira.

2 Teoria dos Números

1. Demonstre usando Indução sobre x: $\forall x, y \in \mathbb{N}, ((Suc(x) \cdot y) = ((x \cdot y) + y))$.
   Resolução.

   (a) Aplicando indução em x, seja $P(n) := \forall y \in \mathbb{N}, ((Suc(n) \cdot y) = ((n \cdot y) + y))$.

   (b) Vejamos o passo-base $P(0)$:

   $$\begin{aligned} suc(0) \cdot y &= suc(0+0) \cdot y \\ &= suc(0) + 0 \cdot y \end{aligned}$$

2. Demonstre que $\forall x, y, z \in \mathbb{N}, x \cdot (y + z) = (x \cdot y + x \cdot z)$.
   Resolução.
   Aplicaremos indução sobre z.
   Seja $P(n) := \forall x, y \in \mathbb{N}, x \cdot (y + n) = (x \cdot y + x \cdot n)$.
   Passo base: $n = 0$

   $$\begin{aligned} P(0) &= x \cdot (y + 0) \\ &= x \cdot y && \text{(Por A1)} \\ &= (x \cdot y) + 0 && \text{(Por A1)} \\ &= (x \cdot y) + (x \cdot 0) && \text{(Por M1)} \end{aligned}$$

   Logo, $P(0)$ é verdadeiro.
   Passo indutivo: Seja um certo $k \in \mathbb{N}, \forall x, y \in \mathbb{N}, x \cdot (y+k) = (x \cdot y) + (x \cdot k)$ (Hipótese Indutiva).
   (Provemos que $P(Suc(k)) = (x \cdot y) + (x \cdot Suc(k))$.)
   Então, temos:

   $$\begin{aligned} P(Suc(k)) &= x \cdot (y + Suc(k)) \\ &= x \cdot Suc(y + k) && \text{(Por A2)} \\ &= x \cdot (y + k) + x && \text{(Por M2)} \\ &= (x \cdot y) + (x \cdot k) + x && \text{(Por HI)} \\ &= (x \cdot y) + (x \cdot Suc(k)) && \text{(Por M2)} \end{aligned}$$

   Logo, $P(Suc(k))$ é verdadeiro e o teorema é válido.

3 Divisibilidade

1. $\forall a, b, c \in \mathbb{N}$ Se $a|b$ e $b|c$, então $a|(b \cdot x + c \cdot y)$ para $\forall x, y \in \mathbb{N}$.
   Resolução.
   Seja $a, b, c, x, y \in \mathbb{N}$, com $a > 0, b > 0$.
   Temos que $a|b$, ou seja, $\exists w_1 \in \mathbb{N}, a \cdot w_1 = b$.
   Temos que $b|c$, ou seja, $\exists w_2 \in \mathbb{N}, b \cdot w_2 = c$.
   Note que, por aritmética:
   $$a \cdot w_1 = b \iff a \cdot w_1 \cdot x = b \cdot x$$
   Analogamente, temos:
   $$b \cdot w_2 = c \iff b \cdot w_2 \cdot y = c \cdot y$$
   Somando as duas equações, teremos:
   $$\begin{aligned}
   &(a \cdot w_1 \cdot x) + (b \cdot w_2 \cdot y) = (b \cdot x) + (c \cdot y) \\
   &\qquad \implies (a \cdot w_1 \cdot x) + (a \cdot w_1 \cdot w_2 \cdot y) = (b \cdot x) + (c \cdot y) \\
   &\qquad \text{(Por reescrita de } b\text{)} \\
   &\qquad \implies a \cdot (\cdot w_1 \cdot x + w_1 \cdot w_2 \cdot y) = (b \cdot x) + (c \cdot y) \\
   &\qquad \text{(Por aritmética)} \\
   &\qquad \implies a \cdot w_3 = (b \cdot x) + (c \cdot y) \\
   &\qquad \text{(Para } w_3 = \cdot w_1 \cdot x + w_1 \cdot w_2 \cdot y\text{)}
   \end{aligned}$$
   Logo, $\exists w_3 \cdot a = (b \cdot x) + (c \cdot y)$. Portanto, a proposição é verdadeira.

2. $\forall a, b, c \in \mathbb{N}, a|b \wedge a|c \iff a|(b + c)$.
   Resolução.
   Note que, tomando $a = 2, b = 7, c = 9$, temos que $2|16$ (onde $16 = b + c$). Contudo, temos que $2|7 \wedge 2|9$ é falso, pois $\neg\exists w_1 \in \mathbb{N}, 2 \cdot w_1 = 7$ (analogamente para 9).
   Portanto, a proposição é falsa.

3. Demonstre que $\forall n \in \mathbb{N}, 2|(n^2 + n)$.
   Resolução.
   Aplicaremos indução sobre n.
   Seja $P(n) := \exists k \in \mathbb{N}, k \cdot 2 = n^2 + n$.
   Passo Base: $n = 0$
   $$2|(0^2 + 0)$$

Note que $2|0$ pois, $\forall n \in \mathbb{N}, n|0$. Logo, $P(0)$ é verdadeiro.
Passo Indutivo: Seja um certo $k \in \mathbb{N}.\exists w_1 \in \mathbb{N}, w_1 \cdot 2 = (k^2 + k)$.
(Provemos que $P(k+1) = \exists w_2 \in \mathbb{N}, w_2 \cdot 2 = (k+1)^2 + (k+1))$. Então, temos:

$$\begin{aligned}
P(k+1) &= (k+1)^2 + (k+1) \\
&= k^2 + 2k + 1 + k + 1 && \text{(Por arit.)} \\
&= k^2 + k + 2 + 2k && \text{(Por arit.)} \\
&= (w_1 \cdot 2) + 2 + 2k && \text{(Por HI)} \\
&= 2 \cdot (w_1 + 1 + k) && \text{(Por arit.)} \\
&= 2 \cdot w_2 && \text{(Para } w_2 = (w_1 + 1 + k))
\end{aligned}$$

Logo, $\exists w_2 \in \mathbb{N}, w_2 \cdot 2 = (k+1)^2 + (k+1)$. Portanto, o teorema é verdadeiro.