

Lista de exercícios 01 - FMC

Andriel Vinicius de M. Fernandes

31 de março de 2024

1 Indução e Somatório

1. Calcule a soma dos n primeiros pares, em seguida, demonstre por indução.

Resolução. Note que:

$$0 = 0$$

$$0 + 2 = 2$$

$$0 + 2 + 4 = 6$$

$$0 + 2 + 4 + 6 = 12$$

Ou seja, a soma dos n primeiros pares é dada por $n^2 + n$. Provemos essa proposição por indução.

(a) Seja $P(n) := \sum_{i=0}^n 2i = 0 + 2 + 4 + 6 + \cdots + n = n^2 + n$

(b) Aplicaremos indução sobre $n \in \mathbb{N}$

(c) Vejamos o passo-base $P(0)$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^0 &= 0 \\ &= 0 + 0 && \text{(Por aritmética)} \\ &= 0^2 + 0 && \text{(Por aritmética)} \\ &= n^2 + n && \text{(Para } n = 0\text{)}\end{aligned}$$

Logo, $P(0)$ é verdadeiro.

(d) Para um certo $k \in \mathbb{N}$, $P(k) := \sum_{i=0}^k 2i = k^2 + k$ (Hipótese Indutiva).
(Provemos que $P(k+1) = (k+1)^2 + (k+1)$).

(e) Então, temos:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k+1} 2i &= \left(\sum_{i=0}^k 2i\right) + 2(k+1) && \text{(Por def. rec. de Somatório)} \\ &= (k^2 + k) + 2(k+1) && \text{(Por H.I)} \\ &= k^2 + k + 2k + 2 && \text{(Por arit.)} \\ &= k^2 + 3k + 2 && \text{(Por arit.)} \\ &= (k+1)^2 + (k+1) && \text{(Por arit.)}\end{aligned}$$

Logo, $P(k+1)$ é verdadeiro e a proposição inicial é verdadeira.

2. Demonstre que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$$

Resolução.

(a) Indução sobre n .

(b) Seja $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n) := \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$.

(c) Passo-base: $n = 0$

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^0 i^2 &= 0^2 && \text{(Por def. rec. de } \sum) \\
 &= 0 && \text{(Por arit.)} \\
 &= \frac{0}{6} && \text{(Por arit.)} \\
 &= \frac{0 \cdot (2 \cdot 0 + 1) \cdot (0 + 1)}{6} && \text{(Por reescrita de 0)} \\
 &= \frac{n \cdot (2n + 1) \cdot (n + 1)}{6} && \text{(Para } n = 0)
 \end{aligned}$$

Logo, $P(0)$ é verdadeiro.

(d) Para um certo $k \in \mathbb{N}$, $P(k) := \sum_{i=1}^k i^2 = \frac{k(2k+1)(k+1)}{6}$ (Hipótese Indutiva).
 (Provemos que $P(k+1) = \frac{(k+1)(2 \cdot (k+1)+1)(k+2)}{6}$).

(e) Então, temos:

$$\begin{aligned}
P(k+1) &= \sum_{i=1}^{k+1} i^2 \\
&= \left(\sum_{i=1}^k i^2 \right) + (k+1)^2 && \text{(Por def. rec. de } \sum) \\
&= \frac{k(2k+1)(k+1)}{6} + (k+1)^2 && \text{(Por HI)} \\
&= \frac{k(2k+1)(k+1) + 6(k+1)^2}{6} && \text{(Por arit.)} \\
&= \frac{(2k^2+k)(k+1) + 6k^2 + 12k + 6}{6} && \text{(Por arit.)} \\
&= \frac{2k^3 + 3k^2 + k + 6k^2 + 12k + 6}{6} && \text{(Por arit.)} \\
&= \frac{2k^3 + 9k^2 + 13k + 6}{6} && \text{(Por arit.)} \\
&= \frac{(k+1)(2 \cdot (k+1) + 1)(k+2)}{6} && \text{(Por arit.)}
\end{aligned}$$

Logo, $P(k+1)$ é verdadeiro e a proposição inicial é verdadeira.

3. Demonstre que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i=1}^n i \left(\frac{1}{2} \right)^{i-1} = 4 - \frac{n+2}{2^n - 1}$$

Resolução.

(a) Indução sobre n .

(b) Seja $n \in \mathbb{N}$, $P(n) := \sum_{i=0}^n i \left(\frac{1}{2} \right)^{i-1} = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}$.

(c) Passo-base: $n = 0$:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^0 i \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} &= 0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{0-1} && \text{(Por def. base de } \sum) \\
 &= 0 && \text{(Por } x \cdot 0 = 0) \\
 &= 4 - 4 && \text{(Por reescrita de 0)} \\
 &= 4 - \frac{2}{\frac{1}{2}} && \text{(Por reescrita de 4)} \\
 &= 4 - \frac{0+2}{2^{-1}} && \text{(Por reescrita de } \frac{1}{2}) \\
 &= 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}} && \text{(Para } n = 0)
 \end{aligned}$$

Logo, $P(0)$ é verdadeiro.

(d) Para um certo $k \in \mathbb{N}$, $P(k) := \sum_{i=0}^k i \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} = 4 - \frac{k+2}{2^{k-1}}$ (Hipótese Indutiva).
 (Provemos que $P(k+1) = 4 - \frac{k+3}{2^{(k+1)-1}}$).

(e) Então, temos:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k+1} i\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} &= \sum_{i=0}^k i\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} + (k+1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k && \text{(Por def. rec. de } \sum) \\
&= 4 - \frac{k+2}{2^{k-1}} + (k+1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k && \text{(Por H.I)} \\
&= 4 - \frac{k+2}{2^{k-1}} + \frac{k+1}{2^k} && \text{(Por arit.)} \\
&= 4 + \left(\frac{-k-2}{2^{k-1}}\right) + \frac{k+1}{2^k} && \text{(Por arit.)} \\
&= 4 + \left(\frac{-k-2}{2^{k-1}}\right) + \frac{\frac{k+1}{2}}{\frac{2^k}{2}} && \text{(Por divisão de 2 em } \frac{k+1}{2^k}) \\
&= 4 + \left(\frac{-k-2}{2^{k-1}}\right) + \frac{\frac{k+1}{2}}{2^{k-1}} && \text{(Por arit.)} \\
&= 4 + \left(\frac{-k-2 + \frac{k+1}{2}}{2^{k-1}}\right) && \text{(Por arit.)} \\
&= 4 + \left(\frac{\frac{-2k-4+k+1}{2}}{2^{k-1}}\right) && \text{(Por arit.)} \\
&= 4 + \left(\frac{\frac{-2k-4+k+1}{2}}{\frac{2^k}{2}}\right) && \text{(Para } 2^{k-1} = \frac{2^k}{2}) \\
&= 4 + \left(\frac{-2k-4+k+1}{2^k}\right) && \text{(Por arit.)} \\
&= 4 + \left(\frac{-k-3}{2^k}\right) && \text{(Por arit.)} \\
&= 4 - \frac{k+3}{2^k} && \text{(Por arit.)} \\
&= 4 - \frac{k+3}{2^{k+1-1}} && \text{(Para } 2^k = 2^{k+1-1})
\end{aligned}$$

Logo, $P(k+1)$ é verdadeiro.

4. Demonstre que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

Resolução.

- (a) Aplicaremos indução sobre n .
- (b) Seja $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) := \sum_{i=1}^n \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1}$.
- (c) Passo-base: $n = 1$

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^1 \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} &= \frac{1}{(2 \cdot 1 - 1)(2 \cdot 1 + 1)} && \text{(Por def. base de } \sum) \\
 &= \frac{1}{1 \cdot 3} && \text{(Por arit.)} \\
 &= \frac{1}{2+1} && \text{(Por reescrita de 3)} \\
 &= \frac{1}{2 \cdot 1 + 1} && \text{(Por reescrita de 2)} \\
 &= \frac{n}{2 \cdot n + 1} && \text{(Para } n = 1)
 \end{aligned}$$

Logo, $P(1)$ é verdadeiro.

2 Teoria dos Números

1. Demonstre usando Indução sobre x : $\forall x, y \in \mathbb{N}, ((\text{Suc}(x) \cdot y) = ((x \cdot y) + y))$.

Resolução.

- (a) Aplicando indução em x , seja $P(n) := \forall y \in \mathbb{N}, ((\text{Suc}(n) \cdot y) = ((n \cdot y) + y))$.

- (b) Vejamos o passo-base $P(0)$:

$$\begin{aligned}
 \text{suc}(0) \cdot y &= \text{suc}(0 + 0) \cdot y \\
 &= \text{suc}(0) + 0 \cdot y
 \end{aligned}$$

2. Demonstre que $\forall x, y, z \in \mathbb{N}, x \cdot (y + z) = (x \cdot y + x \cdot z)$. *Resolução.*

- (a) Aplicaremos indução sobre z .
- (b) Seja $n \in \mathbb{N}, \forall x, y \in \mathbb{N}, x \cdot (y + n) = (x \cdot y + x \cdot n)$

(c) Passo-base: $n = 0$

$$\begin{aligned} P(0) &= x \cdot (y + 0) \\ &= x \cdot y && \text{(Por A1)} \\ &= (x \cdot y) + 0 && \text{(Por A1)} \\ &= (x \cdot y) + (x \cdot 0) && \text{(Por M1)} \end{aligned}$$

Logo, $P(0)$ é verdadeiro.

(d) Seja um certo $k \in \mathbb{N}, \forall x, y \in \mathbb{N}, x \cdot (y + k) = (x \cdot y) + (x \cdot k)$ (HI).
(Provemos que $P(\text{Suc}(k)) = (x \cdot y) + (x \cdot \text{Suc}(k))$.)

(e) Temos:

$$\begin{aligned} P(\text{Suc}(k)) &= x \cdot (y + \text{Suc}(k)) \\ &= x \cdot \text{Suc}(y + k) && \text{(Por A2)} \\ &= x \cdot (y + k) + x && \text{(Por M2)} \\ &= (x \cdot y) + (x \cdot k) + x && \text{(Por HI)} \\ &= (x \cdot y) + (x \cdot \text{Suc}(k)) && \text{(Por M2)} \end{aligned}$$

Logo, $P(\text{Suc}(k))$ é verdadeiro e o teorema está demonstrado.