Lista de exercícios 01 - FMC

Andriel Vinicius de M. Fernandes

30 de março de 2024

1 Indução e Somatório

1. Calcule a soma dos n primeiros pares, em seguida, demonstre por indução.
   Resolução. Note que:

$$
\begin{aligned}
0 &= 0 \\
0+2 &= 2 \\
0+2+4 &= 6 \\
0+2+4+6 &= 12
\end{aligned}
$$

   Ou seja, a soma dos n primeiros pares é dada por $n^2 + n$. Provemos essa proposição por indução.

   (a) Seja $P(n) := \sum_{i=0}^{n} 2i = 0 + 2 + 4 + 6 + \cdots + n = n^2 + n$

   (b) Aplicaremos indução sobre $n \in \mathbb{N}$

(c) Vejamos o passo-base $P(0)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{0} &= 0 \\
&= 0 + 0 && \text{(Por aritmética)} \\
&= 0^2 + 0 && \text{(Por aritmética)} \\
&= n^2 + n && \text{(Para } n = 0\text{)}
\end{aligned}$$

Logo, $P(0)$ é verdadeiro.

(d) Para um certo $k \in \mathbb{N}, P(k) := \sum_{i=0}^{k} 2i = k^2 + k$ (Hipótese Indutiva).
(Provemos que $P(k+1) = (k+1)^2 + (k+1)$).

(e) Então, temos:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k+1} 2i &= (\sum_{i=0}^{k} 2i) + 2(k+1) && \text{(Por def. rec. de Somatório)} \\
&= (k^2 + k) + 2(k+1) && \text{(Por H.I)} \\
&= k^2 + k + 2k + 2 && \text{(Por arit.)} \\
&= k^2 + 3k + 2 && \text{(Por arit.)} \\
&= (k+1)^2 + (k+1) && \text{(Por arit.)}
\end{aligned}$$

Logo, $P(k+1)$ é verdadeiro e a proposição inicial é verdadeira.

2. Demonstre que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$$

Resolução.

(a) Indução sobre n.

(b) Seja $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) := \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$.

(c) Passo-base: $n = 0$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{0} i^2 &= 0^2 && \text{(Por def. rec. de } \textstyle\sum\text{)}\\
&= 0 && \text{(Por arit.)}\\
&= \frac{0}{6} && \text{(Por arit.)}\\
&= \frac{0 \cdot (2 \cdot 0 + 1) \cdot (0 + 1)}{6} && \text{(Por reescrita de 0)}\\
&= \frac{n \cdot (2n + 1) \cdot (n + 1)}{6} && \text{(Para } n = 0\text{)}
\end{aligned}$$

Logo, $P(0)$ é verdadeiro.

(d) Para um certo $k \in \mathbb{N}, P(k) := \sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(2k+1)(k+1)}{6}$ (Hipótese Indutiva).
(Provemos que $P(k+1) = \frac{(k+1)(2 \cdot (k+1)+1)(k+2)}{6}$).

(e) Então, temos:

$$
\begin{aligned}
P(k+1) &= \sum_{i=1}^{k+1} i^2 \\
&= (\sum_{i=1}^{k} i^2) + (k+1)^2 && \text{(Por def. rec. de } \textstyle\sum\text{)} \\
&= \frac{k(2k+1)(k+1)}{6} + (k+1)^2 && \text{(Por HI)} \\
&= \frac{k(2k+1)(k+1) + 6(k+1)^2}{6} && \text{(Por arit.)} \\
&= \frac{(2k^2+k)(k+1) + 6k^2 + 12k + 6}{6} && \text{(Por arit.)} \\
&= \frac{2k^3 + 3k^2 + k + 6k^2 + 12k + 6}{6} && \text{(Por arit.)} \\
&= \frac{2k^3 + 9k^2 + 13k + 6}{6} && \text{(Por arit.)} \\
&= \frac{(k+1)(2\cdot(k+1)+1)(k+2)}{6} && \text{(Por arit.)}
\end{aligned}
$$

Logo, $P(k+1)$ é verdadeiro e a proposição inicial é verdadeira.

3. Demonstre que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i=1}^{n} i(\frac{1}{2})^{i-1} = 4 - \frac{n+2}{2^n - 1}$$

Resolução.

(a) Indução sobre n.

(b) Seja $n \in \mathbb{N}, P(n) := \sum\limits_{i=0}^{n} i(\frac{1}{2})^{i-1} = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}$.

(c) Passo-base: $n = 0$:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{0} i(\frac{1}{2})^{i-1} &= 0 \cdot (\frac{1}{2})^{0-1} && \text{(Por def. base de } \textstyle\sum\text{)} \\
&= 0 && \text{(Por } x \cdot 0 = 0\text{)} \\
&= 4 - 4 && \text{(Por reescrita de 0)} \\
&= 4 - \frac{2}{\frac{1}{2}} && \text{(Por reescrita de 4)} \\
&= 4 - \frac{0+2}{2^{-1}} && \text{(Por reescrita de } \frac{1}{2}\text{)} \\
&= 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}} && \text{(Para } n = 0\text{)}
\end{aligned}$$

Logo, $P(0)$ é verdadeiro.

(d) Para um certo $k \in \mathbb{N}, P(k) := \sum_{i=0}^{k} i(\frac{1}{2})^{i-1} = 4 - \frac{k+2}{2^{k-1}}$ (Hipótese Indutiva).
(Provemos que $P(k+1) = 4 - \frac{k+3}{2^{(k+1)-1}}$).

(e) Então, temos:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k+1} i(\frac{1}{2})^{i-1} &= \sum_{i=0}^{k} i(\frac{1}{2})^{i-1} + (k+1)\cdot(\frac{1}{2})^{k} && \text{(Por def. rec. de } \textstyle\sum\text{)}\\
&= 4 - \frac{k+2}{2^{k-1}} + (k+1)\cdot(\frac{1}{2})^{k} && \text{(Por H.I)}\\
&= 4 - \frac{k+2}{2^{k-1}} + \frac{k+1}{2^{k}} && \text{(Por arit.)}\\
&= 4 + (\frac{-k-2}{2^{k-1}}) + \frac{k+1}{2^{k}} && \text{(Por arit.)}\\
&= 4 + (\frac{-k-2}{2^{k-1}}) + \frac{\frac{k+1}{2}}{\frac{2^k}{2}} && \text{(Por divisão de 2 em } \frac{k+1}{2^k}\text{)}\\
&= 4 + (\frac{-k-2}{2^{k-1}}) + \frac{\frac{k+1}{2}}{2^{k-1}} && \text{(Por arit.)}\\
&= 4 + (\frac{-k-2+\frac{k+1}{2}}{2^{k-1}}) && \text{(Por arit.)}\\
&= 4 + (\frac{\frac{-2k-4+k+1}{2}}{2^{k-1}}) && \text{(Por arit.)}\\
&= 4 + (\frac{\frac{-2k-4+k+1}{2}}{\frac{2^k}{2}}) && \text{(Para } 2^{k-1} = \frac{2^k}{2}\text{)}\\
&= 4 + (\frac{-2k-4+k+1}{2^k}) && \text{(Por arit.)}\\
&= 4 + (\frac{-k-3}{2^k}) && \text{(Por arit.)}\\
&= 4 - \frac{k+3}{2^k} && \text{(Por arit.)}\\
&= 4 - \frac{k+3}{2^{k+1-1}} && \text{(Para } 2^k = 2^{k+1-1}\text{)}
\end{aligned}$$

Logo, $P(k+1)$ é verdadeiro.

4. Demonstre que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

Resolução.

(a) Indução sobre n.

(b) Seja $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) := \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1}$.

(c) Passo-base: $n = 1$

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} &= \frac{1}{(2 \cdot 1 - 1)(2 \cdot 1 + 1)} && \text{(Por def. base de } \textstyle\sum\text{)} \\
&= \frac{1}{1 \cdot 3} && \text{(Por arit.)} \\
&= \frac{1}{2+1} && \text{(Por reescrita de 3)} \\
&= \frac{1}{2 \cdot 1 + 1} && \text{(Por reescrita de 2)} \\
&= \frac{n}{2 \cdot n + 1} && \text{(Para } n = 1\text{)}
\end{aligned}
$$

Logo, $P(1)$ é verdadeiro.

2 Teoria dos Números

1. Demonstre usando Indução sobre x: $\forall x, y \in \mathbb{N}, ((Suc(x) \cdot y) = ((x \cdot y) + y))$.
   Resolução.

   (a) Aplicando indução em x, seja $P(n) := \forall y \in \mathbb{N}, ((Suc(n) \cdot y) = ((n \cdot y) + y))$.

   (b) Vejamos o passo-base $P(0)$:

$$
\begin{aligned}
suc(0) \cdot y &= suc(0+0) \cdot y \\
&= suc(0) + 0 \cdot y
\end{aligned}
$$