Lista de exercícios 01 - FMC

Andriel Vinicius de M. Fernandes

5 de abril de 2024

1 Indução e Somatório

1. Calcule a soma dos n primeiros pares, em seguida, demonstre por indução.
Resolução. Note que:

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \\ 0+2 &= 2 \\ 0+2+4 &= 6 \\ 0+2+4+6 &= 12 \end{aligned}$$

Ou seja, a soma dos n primeiros pares é dada por n^2+n. Provemos essa proposição por indução sobre n.
Seja $P(n) := \sum_{i=0}^{n} 2i = 0+2+4+6+\cdots+n = n^2+n$
Passo base: $n=0$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{0} &= 0 && \text{(Por def. base de } \textstyle\sum\text{)} \\ &= 0+0 && \text{(Por aritmética)} \\ &= 0^2+0 && \text{(Por aritmética)} \\ &= n^2+n && \text{(Para } n=0\text{)} \end{aligned}$$

Logo, $P(0)$ é verdadeiro.
Passo indutivo:

Seja um certo $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$P(k) := \sum_{i=0}^{k} 2i = k^2 + k \quad \text{(Hipótese Indutiva)}$$

(Provemos que $P(k+1) = (k+1)^2 + (k+1)$).
Logo:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k+1} 2i &= (\sum_{i=0}^{k} 2i) + 2(k+1) && \text{(Por def. rec. de } \textstyle\sum) \\
&= (k^2 + k) + 2(k+1) && \text{(Por H.I)} \\
&= k^2 + k + 2k + 2 && \text{(Por aritmética)} \\
&= k^2 + 3k + 2 && \text{(Por aritmética)} \\
&= (k+1)^2 + (k+1) && \text{(Por aritmética)}
\end{aligned}$$

Logo, $P(k+1)$ é verdadeiro. Portanto, a proposição é verdadeira.

2. Demonstre que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$$

Resolução.
Aplicando indução sobre n.
Seja $P(n) := \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$.
Passo base: $n = 0$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{0} i^2 &= 0^2 && \text{(Por def. base de } \textstyle\sum) \\
&= 0 && \text{(Por aritmética)} \\
&= \frac{0}{6} && \text{(Por aritmética)} \\
&= \frac{0 \cdot (2 \cdot 0 + 1) \cdot (0+1)}{6} && \text{(Por reescrita de 0)} \\
&= \frac{n \cdot (2n+1) \cdot (n+1)}{6} && \text{(Para } n = 0)
\end{aligned}$$

Logo, $P(0)$ é verdadeiro.
Passo indutivo:
Seja um certo $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$P(k) := \sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(2k+1)(k+1)}{6} \quad \text{(Hipótese Indutiva)}$$

(Provemos que $P(k+1) = \frac{(k+1)(2\cdot(k+1)+1)(k+2)}{6}$)
Logo:

$$\begin{aligned}
P(k+1) &= \sum_{i=1}^{k+1} i^2 \\
&= (\sum_{i=1}^{k} i^2) + (k+1)^2 && \text{(Por def. rec. de } \textstyle\sum\text{)} \\
&= \frac{k(2k+1)(k+1)}{6} + (k+1)^2 && \text{(Por HI)} \\
&= \frac{k(2k+1)(k+1) + 6(k+1)^2}{6} && \text{(Por aritmética)} \\
&= \frac{(2k^2+k)(k+1) + 6k^2 + 12k + 6}{6} && \text{(Por aritmética)} \\
&= \frac{2k^3 + 3k^2 + k + 6k^2 + 12k + 6}{6} && \text{(Por aritmética)} \\
&= \frac{2k^3 + 9k^2 + 13k + 6}{6} && \text{(Por aritmética)} \\
&= \frac{(k+1)(2\cdot(k+1)+1)(k+2)}{6} && \text{(Por aritmética)}
\end{aligned}$$

Logo, $P(k+1)$ é verdadeiro. Portanto, a proposição é verdadeira.

3. Demonstre que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i=1}^{n} i(\frac{1}{2})^{i-1} = 4 - \frac{n+2}{2^n - 1}$$

Resolução.
Aplicando indução sobre n.

Seja $P(n) := \sum\limits_{i=0}^{n} i(\frac{1}{2})^{i-1} = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}$.
Passo-base: $n = 0$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{0} i(\frac{1}{2})^{i-1} &= 0 \cdot (\frac{1}{2})^{0-1} && \text{(Por def. base de } \textstyle\sum\text{)} \\
&= 0 && \text{(Por } x \cdot 0 = 0\text{)} \\
&= 4 - 4 && \text{(Por reescrita de 0)} \\
&= 4 - \frac{2}{\frac{1}{2}} && \text{(Por reescrita de 4)} \\
&= 4 - \frac{0+2}{2^{-1}} && \text{(Por reescrita de } \frac{1}{2}\text{)} \\
&= 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}} && \text{(Para } n = 0\text{)}
\end{aligned}$$

Logo, $P(0)$ é verdadeiro.
Passo indutivo:
Seja um certo $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$P(k) := \sum_{i=0}^{k} i(\frac{1}{2})^{i-1} = 4 - \frac{k+2}{2^{k-1}} \quad \text{(Hipótese Indutiva)}$$

(Provemos que $P(k+1) = 4 - \frac{k+3}{2^{(k+1)-1}}$).

Logo:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k+1} i(\frac{1}{2})^{i-1} &= \sum_{i=0}^{k} i(\frac{1}{2})^{i-1} + (k+1)\cdot(\frac{1}{2})^{k} && \text{(Por def. rec. de } \textstyle\sum) \\
&= 4 - \frac{k+2}{2^{k-1}} + (k+1)\cdot(\frac{1}{2})^{k} && \text{(Por H.I)} \\
&= 4 - \frac{k+2}{2^{k-1}} + \frac{k+1}{2^{k}} && \text{(Por aritmética)} \\
&= 4 + (\frac{-k-2}{2^{k-1}}) + \frac{k+1}{2^{k}} && \text{(Por aritmética)} \\
&= 4 + (\frac{-k-2}{2^{k-1}}) + \frac{\frac{k+1}{2}}{\frac{2^{k}}{2}} && \text{(Por divisão de 2 em } \frac{k+1}{2^{k}}) \\
&= 4 + (\frac{-k-2}{2^{k-1}}) + \frac{\frac{k+1}{2}}{2^{k-1}} && \text{(Por aritmética)} \\
&= 4 + (\frac{-k-2+\frac{k+1}{2}}{2^{k-1}}) && \text{(Por aritmética)} \\
&= 4 + (\frac{\frac{-2k-4+k+1}{2}}{2^{k-1}}) && \text{(Por aritmética)} \\
&= 4 + (\frac{\frac{-2k-4+k+1}{2}}{\frac{2^{k}}{2}}) && \text{(Para } 2^{k-1} = \frac{2^{k}}{2}) \\
&= 4 + (\frac{-2k-4+k+1}{2^{k}}) && \text{(Por aritmética)} \\
&= 4 + (\frac{-k-3}{2^{k}}) && \text{(Por aritmética)} \\
&= 4 - \frac{k+3}{2^{k}} && \text{(Por aritmética)} \\
&= 4 - \frac{k+3}{2^{k+1-1}} && \text{(Para } 2^{k} = 2^{k+1-1})
\end{aligned}$$

Logo, $P(k+1)$ é verdadeiro. Portanto, a proposição inicial é verdadeira.

4. Demonstre que $\forall n \in \mathbb{N}^{*}$:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

Resolução.
Aplicando indução sobre n.
Seja $P(n) := \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1}$.
Passo base: $n = 1$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} &= \frac{1}{(2 \cdot 1 - 1)(2 \cdot 1 + 1)} && \text{(Por def. base de } \textstyle\sum\text{)} \\
&= \frac{1}{1 \cdot 3} && \text{(Por arit.)} \\
&= \frac{1}{2+1} && \text{(Por reescrita de 3)} \\
&= \frac{1}{2 \cdot 1 + 1} && \text{(Por reescrita de 2)} \\
&= \frac{n}{2 \cdot n + 1} && \text{(Para } n = 1\text{)}
\end{aligned}$$

Logo, $P(1)$ é verdadeiro.
Passo indutivo:
Seja um certo $k \in \mathbb{N}^*$ tal que

$$P(k) := \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{k}{2k+1} \quad \text{(Hipótese Indutiva)}$$

(Provemos que $P(k+1) = \frac{k+1}{2k+3}$.)

Logo:

$$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = (\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)}) + (\frac{1}{(2\cdot(k+1)-1)(2\cdot(k+1)+1)})$$

(Por def. rec. de $\sum$)

$$= \frac{k}{2k+1} + (\frac{1}{(2k+1)(2k+3)})$$

(Por H.I)

$$= \frac{(2k+3)\cdot k}{(2k+3)\cdot(2k+1)} + (\frac{1}{(2k+1)(2k+3)})$$

(Por aritmética)

$$= \frac{2k^2+3k+1}{(2k+3)\cdot(2k+1)} + (\frac{1}{(2k+1)(2k+3)})$$

(Por aritmética)

$$= \frac{(2k+1)\cdot(k+1)}{(2k+1)(2k+3)}$$

(Por aritmética)

$$= \frac{k+1}{2k+3}$$

(Por aritmética)

Logo, $P(k+1)$ é verdadeiro. Portanto, a proposição inicial é verdadeira.

2 Teoria dos Números

1. Demonstre que $\forall x, y, z \in \mathbb{N}$, se $(x+z) = (y+z)$ então $x = y$.
   Resolução.
   Aplicando indução sobre z.
   Seja $P(n) := \forall x, y \in \mathbb{N}, (x+n) = (y+n) \implies x = y$.
   Passo base: $n = 0$

$$\begin{aligned} P(0) := x+n = y+n &\implies x+0 = y+0 && \text{(Para } n=0) \\ &\implies x = y && \text{(Por A1)} \end{aligned}$$

Logo, $P(0)$ é verdadeiro.
Passo indutivo:
Seja um certo $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall x, y \in \mathbb{N}, (x + k) = (y + k) \implies x = y \quad \text{(Hipótese Indutiva)}$$

(Provemos que $(x + Suc(k)) = (y + Suc(k)) \implies x = y$)
Logo,

$$\begin{aligned} P(Suc(k)) := x + Suc(k) = y + Suc(k) &\implies Suc(x + k) = Suc(y + k) && \text{(Por A2)} \\ &\implies x + k = y + k && \text{(Por S2)} \\ &\implies x = y && \text{(Por H.I)} \end{aligned}$$

Portanto, $P(Suc(k))$ é verdadeiro e o teorema é válido.

2. Demonstre que $\forall x, y, z \in \mathbb{N}, x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.
Resolução.
Aplicando indução sobre z.
Seja $P(n) := \forall x, y \in \mathbb{N}, x \cdot (y \cdot n) = (x \cdot y) \cdot n$.
Passo base: $n = 0$

$$\begin{aligned} P(0) &= (x \cdot y) \cdot 0 \\ &= 0 && \text{(Por M1)} \\ &= y \cdot 0 && \text{(Por M1)} \\ &= x \cdot (y \cdot 0) && \text{(Por M1)} \end{aligned}$$

Logo, $P(0)$ é verdadeiro.
Passo indutivo:
Seja um certo $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall x, y \in \mathbb{N}, x \cdot (y \cdot k) = (x \cdot y) \cdot k \quad \text{(Hipótese Indutiva)}$$

(Provemos que $P(Suc(k)) := (x \cdot y) \cdot Suc(k) = x \cdot (y \cdot Suc(k))$)
Logo:

$$\begin{aligned} P(Suc(k)) &= (x \cdot y) \cdot Suc(k) \\ &= (x \cdot y) \cdot k + (x \cdot y) && \text{(Por M2)} \\ &= x \cdot (y \cdot k) + (x \cdot y) && \text{(Por H.I)} \\ &= x \cdot ((y \cdot k) + y) && \text{(Pelo teorema Q5)} \\ &= x \cdot (y \cdot Suc(k)) && \text{(Por M2)} \end{aligned}$$

Portanto, $P(Suc(k))$ é verdadeiro e o teorema é válido.

3. Demonstre que $\forall x, y, z \in \mathbb{N}, x \cdot (y + z) = (x \cdot y + x \cdot z)$.
   Resolução.
   Aplicaremos indução sobre z.
   Seja $P(n) := \forall x, y \in \mathbb{N}, x \cdot (y + n) = (x \cdot y + x \cdot n)$.
   Passo base: $n = 0$

$$
\begin{aligned}
P(0) &= x \cdot (y + 0) \\
&= x \cdot y && \text{(Por A1)} \\
&= (x \cdot y) + 0 && \text{(Por A1)} \\
&= (x \cdot y) + (x \cdot 0) && \text{(Por M1)}
\end{aligned}
$$

   Logo, $P(0)$ é verdadeiro.
   Passo indutivo:
   Seja um certo $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall x, y \in \mathbb{N}, x \cdot (y + k) = (x \cdot y) + (x \cdot k) \quad \text{(Hipótese Indutiva)}$$

   (Provemos que $P(Suc(k)) := x \cdot (y + Suc(k)) = (x \cdot y) + (x \cdot Suc(k))$)
   Logo:

$$
\begin{aligned}
P(Suc(k)) &= x \cdot (y + Suc(k)) \\
&= x \cdot Suc(y + k) && \text{(Por A2)} \\
&= x \cdot (y + k) + x && \text{(Por M2)} \\
&= (x \cdot y) + (x \cdot k) + x && \text{(Por HI)} \\
&= (x \cdot y) + (x \cdot Suc(k)) && \text{(Por M2)}
\end{aligned}
$$

   Portanto, $P(Suc(k))$ é verdadeiro e o teorema é válido.

3 Divisibilidade

1. Demonstre que $\forall a, b, c \in \mathbb{N}$ Se $a|b$ e $b|c$, então $a|(b \cdot x + c \cdot y)$ para $\forall x, y \in \mathbb{N}$.
   Resolução.
   Seja $a, b, c, x, y \in \mathbb{N}$, com $a > 0, b > 0$.

Temos que $a|b$, ou seja, $\exists w_1 \in \mathbb{N}, a \cdot w_1 = b$.
Temos que $b|c$, ou seja, $\exists w_2 \in \mathbb{N}, b \cdot w_2 = c$.
Note que, por aritmética:

$$a \cdot w_1 = b \iff a \cdot w_1 \cdot x = b \cdot x$$

Analogamente, temos:

$$b \cdot w_2 = c \iff b \cdot w_2 \cdot y = c \cdot y$$

Somando as duas equações, teremos:

$$\begin{aligned}
(a \cdot w_1 \cdot x) + (b \cdot w_2 \cdot y) = (b \cdot x) + (c \cdot y) \\
&\implies (a \cdot w_1 \cdot x) + (a \cdot w_1 \cdot w_2 \cdot y) = (b \cdot x) + (c \cdot y) \\
&\quad \text{(Por reescrita de } b\text{)} \\
&\implies a \cdot (w_1 \cdot x + w_1 \cdot w_2 \cdot y) = (b \cdot x) + (c \cdot y) \\
&\quad \text{(Por aritmética)} \\
&\implies a \cdot w_3 = (b \cdot x) + (c \cdot y) \\
&\quad \text{(Para } w_3 = w_1 \cdot x + w_1 \cdot w_2 \cdot y\text{)}
\end{aligned}$$

Logo, $\exists w_3 \in \mathbb{N}$ (naturais são fechados para soma e multiplicação) tal que $w_3 \cdot a = (b \cdot x) + (c \cdot y)$.
Portanto, a proposição é verdadeira.

2. Demonstre que $\forall a, b, c \in \mathbb{N}, a|b \land a|c \iff a|(b + c)$.
   Resolução.
   Note que, tomando $a = 2, b = 7, c = 9$, temos que $2|16$ (onde $16 = b+c$).
   Contudo, temos que $2|7 \land 2|9$ é falso, pois $\neg\exists w_1 \in \mathbb{N}, 2 \cdot w_1 = 7$ (analogamente para 9).
   Portanto, a proposição é falsa.

3. Demonstre que $\forall a, b \in \mathbb{N}$, Se $a|b$ então $\frac{b}{a}|b$.
   Resolução.
   Seja $a, b \in \mathbb{N}$, com $a > 0$.
   Temos que $a|b$, ou seja, $\exists w_1 \in \mathbb{N}$ tal que $a \cdot w_1 = b$.
   Note que, por aritmética:

$$a \cdot w_1 = b \implies w_1 = \frac{b}{a}$$

$w_1 \in \mathbb{N}$ por definição.
Logo:

$$\begin{aligned} a \cdot w_1 = b &\implies a \cdot \frac{b}{a} = b && \text{(Por reescrita de } w_1\text{)} \\ &\implies w_2 \cdot \frac{b}{a} = b && \text{(Para } w_2 = a\text{)} \end{aligned}$$

Logo, $\exists w_2 \in \mathbb{N}$ tal que $w_2 \cdot \frac{b}{a} = b$.
Portanto, o teorema é válido.

4. Demonstre que $\forall n \in \mathbb{N}, 2|(n^2 + n)$.
Resolução.
Aplicaremos indução sobre n.
Seja $P(n) := \exists k \in \mathbb{N}, k \cdot 2 = n^2 + n$.
Passo base: $n = 0$

$$2|(0^2 + 0)$$

Note que $2|0$ pois, $\forall n \in \mathbb{N}, n|0$. Logo, $P(0)$ é verdadeiro.
Passo indutivo:
Seja um certo $k \in \mathbb{N}$. Temos:

$$\exists w_1 \in \mathbb{N}, w_1 \cdot 2 = (k^2 + k)$$

(Provemos que $P(k+1) = \exists w_2 \in \mathbb{N}$ tal que $w_2 \cdot 2 = (k+1)^2 + (k+1)$).
Logo:

$$\begin{aligned} P(k+1) &= (k+1)^2 + (k+1) \\ &= k^2 + 2k + 1 + k + 1 && \text{(Por aritmética)} \\ &= k^2 + k + 2 + 2k && \text{(Por aritmética)} \\ &= (w_1 \cdot 2) + 2 + 2k && \text{(Por HI)} \\ &= 2 \cdot (w_1 + 1 + k) && \text{(Por aritmética)} \\ &= 2 \cdot w_2 && \text{(Para } w_2 = (w_1 + 1 + k)\text{)} \end{aligned}$$

Logo, $\exists w_2 \in \mathbb{N}$ (naturais são fechados para soma) tal que $w_2 \cdot 2 = (k+1)^2 + (k+1)$.
Portanto, o teorema é válido.

5. Demonstre que $\forall n \in \mathbb{N}, 6|(n^3 - n)$.
Resolução.
Aplicando indução sobre n.
Seja $P(n) := \exists k \in \mathbb{N}, k \cdot 6 = (n^3 - n)$
Passo base: $n = 0$
Note que $6|(0^3 - 0)$ pois $\forall n \in \mathbb{N}, n|0$.
Passo indutivo:
Seja um certo $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\exists w_1 \cdot 6 = (k^3 - k) \quad \text{(Hipótese Indutiva)}$$

(Provemos que $P(k+1) := \exists w_2 \in \mathbb{N}, w_2 \cdot 6 = (k+1)^3 - (k+1)$)
Logo:

$$\begin{aligned}
(k+1)^3 - (k+1) &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1 && \text{(Por aritmética)} \\
&= k^3 - k + 3k^2 + 3k && \text{(Por aritmética)} \\
&= (w_1 \cdot 6) + 3k^2 + 3k && \text{(Por H.I)} \\
&= 6 \cdot (w_1 + \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}) && \text{(Por aritmética)} \\
&= 6 \cdot w_2 && (\text{Para } w_2 = w_1 + \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2})
\end{aligned}$$

Logo, $\exists w_2 \in \mathbb{N}$ (naturais são fechados para soma) tal que $w_2 \cdot 6 = (k+1)^3 - (k+1)$.
Portanto, o teorema é válido.

6. Demonstre que para quaisquer inteiros $a, b, c, (mdc(a,c) = 1 \wedge a|bc) \implies a|b$.
Resolução.
Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$ arbitrários.
Assuma $mdc(a,c) = 1$. Logo, pelo teorema de Bezout, temos que $\exists s, t \in \mathbb{Z}, mdc(a,c) = (a \cdot s) + (c \cdot t)$.
Assuma $a|bc$, ou seja, $\exists w_1 \in \mathbb{Z}, a \cdot w_1 = bc$.
(Provemos que $\exists w_2 \in \mathbb{Z}, a \cdot w_2 = b$)

Note que:

$$
\begin{aligned}
mdc(a,c) = 1 &\implies (a \cdot s) + (c \cdot t) = 1 && \text{(Por reescrita de } mdc\text{)}\\
&\implies (a \cdot s) + (c \cdot t) \cdot b = b && \text{(Por multiplicação de } b\text{)}\\
&\implies (a \cdot s \cdot b) + (c \cdot t \cdot b) = b && \text{(Por distributividade)}\\
&\implies (a \cdot s \cdot b) + (t \cdot c \cdot b) = b && \text{(Por comutatividade)}\\
&\implies (a \cdot s \cdot b) + (t \cdot (w_1 \cdot a)) = b && \text{(Por reescrita de } bc\text{)}\\
&\implies a \cdot (s \cdot b) + (t \cdot w_1) = b && \text{(Por reescrita)}\\
&\implies a \cdot w_2 = b && \text{(Para } w_2 = (s \cdot b) + (t \cdot w_1)\text{)}
\end{aligned}
$$

Note que $w_2 \in \mathbb{Z}$ pois as operações realizadas são fechadas sobre os inteiros.
Portanto, a proposição é válida.