UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
INSTITUTO METRÓPOLE DIGITAL
Soluções de Exercícios de Matemática Elementar

Nome: Andriel Fernandes

Capítulo 01 - Exercício de Conjuntos

1. De que outras formas podemos representar o conjunto vazio utilizando as duas notações de definição de conjuntos que conhecemos?
   Primeira: Seja $\emptyset = \{\}$.
   Segunda: Seja o conjunto A o conjunto dos inteiros, e A^C o seu complementar. Temos, portanto, que $A \cap A^C = \emptyset$.

2. Decida quais das afirmações a seguir estão corretas. Justifique suas respostas.

   (a) $\emptyset \in \emptyset$;
   - **Proposição falsa**: se $\emptyset \in \emptyset$, significa que $\emptyset$ tem ao menos um elemento, o que vai contra sua definição e nos leva a um absurdo.

   (b) $\emptyset \subseteq \emptyset$;
   - **Proposição verdadeira**: suponha que $\emptyset \not\subseteq \emptyset$. Logo, há um elemento $x \in \emptyset$ que não pertence a $\emptyset$. Isso gera um absurdo pois, por definição, o conjunto vazio não contém elementos. Logo, a proposição é verdadeira.

   (c) $\emptyset \in \{\emptyset\}$;
   - **Proposição verdadeira**: tomado o conjunto $A = \{\emptyset\}$, suponha que $\emptyset \notin \{\emptyset\}$. No entanto, sabendo que o conjunto A tem $\emptyset$ como elemento, chegamos a uma contradição. Logo, a proposição é verdadeira.

   (d) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$.
   - **Proposição verdadeira**: tome o conjunto $A = \{\emptyset\}$. De acordo com a Inclusão Universal do $\emptyset$, para todo conjunto A, vale $\emptyset \subseteq A$. Desse modo, a proposição é verdadeira.

3. Considere $A = \{x \in \mathbb{Z}_+; x < 3\}$. Calcule $\mathbb{P}(A)$.
   Temos que $\mathbb{P}(A)$ é o conjunto das partes de A. Logo, temos $\mathbb{P}(A) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{1, 2\}, \{0, 2\}, A\}$

4. Dê exemplos de conjuntos A, B, C, justificando com os cálculos, que satisfaçam:

(a) $A \cup (B \cap C) \neq (A \cup B) \cap C$. Qual o conjunto que será sempre igual a $A \cup (B \cap C)$?
Sejam $A = \{2,4,6\}, B = \{3,6,9\}, C = \{4,9,14\}$. Assim, temos:

$$\begin{aligned} & A \cup (B \cap C) \neq (A \cup B) \cap C \\ \implies & \{2,4,6\} \cup (\{3,6,9\} \cap \{4,9,14\}) \neq (\{2,4,6\} \cup \{3,6,9\}) \cap \{4,9,14\} \\ \implies & \{2,4,6\} \cup \{9\} \neq \{2,3,4,6,9\} \cap \{4,9,14\} \\ \implies & \{2,4,6,9\} \neq \{4,9\} \end{aligned}$$

De acordo com a propriedade distributiva, podemos afirmar que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Vejamos:

$$\begin{aligned} & (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ = & (\{2,4,6\} \cup \{3,6,9\}) \cap (\{2,4,6\} \cup \{4,9,14\}) \\ = & \{2,3,4,6,9\} \cap \{2,4,6,9,14\} \\ = & \{2,4,6,9\} \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que os conjuntos são iguais.

(b) $A \subseteq B$, mas $A^C \nsubseteq B^C$. Qual inclusão é sempre válida envolvendo A^C e B^C?
Sejam $A = \{4,6\}, B = \{2,4,6,8\}, C = \{5\}, \mathbb{U} = A \cup B \cup C$. Logo, temos que:

$$A \subseteq B = \{4,6\} \subseteq \{2,4,6,8\}$$

é verdadeiro, assim como

$$A^C \nsubseteq B^C = \{2,5,8\} \nsubseteq \{5\}$$

Logo, $A^C \nsubseteq B^C$. Contudo, de acordo com uma das propriedades do complementar, se $A \subseteq B$, então $B^C \subseteq A^C$. Logo, vejamos se é de fato:

$$B^C \subseteq A^C \implies \{5\} \subseteq \{2,5,8\}$$

Portanto, a inclusão de B^C em A^C é válida.

(c) $A \subsetneq B$
Sejam os conjuntos $A = \{1,2,3\}, B = \{1,2,3,4,5,6\}$. Temos, portanto, que, para qualquer $x \in A$, também $x \in B$; mas, tomando um $y \in B$, não é sempre verdadeiro que $y \in A$. Logo, $A \subseteq B$ e $B \nsubseteq A$, o que configura a inclusão própria, representada por $A \subsetneq B$.

(d) $(A \cap B)^C \neq A^C \cap B^C$. Qual o conjunto que será sempre igual a $(A \cap B)^C$?
Sejam os conjuntos $A = \{2,4,6\}, B = \{3,6,9\}, \mathbb{U} = A \cup B$. Assim, temos:

$$\begin{aligned} (A \cap B)^C &\neq A^C \cap B^C \\ = (\{2,4,6\} \cap \{3,6,9\})^C &\neq (\{2,4,6\})^C \cap (\{3,6,9\})^C \\ = (\{6\})^C &\neq (\{3,9\}) \cap (\{2,4\}) \\ = \{2,3,4,9\} &\neq \emptyset \end{aligned}$$

De acordo com as Leis de DeMorgan, nós temos que o conjunto $(A \cap B)^C$ pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} A^C \cup B^C &= (\{2,4,6\})^C \cup (\{3,6,9\})^C \\ \implies \{3,9\} \cup \{2,4\} &= \{2,3,4,9\} \end{aligned}$$

Assim, concluímos que os conjuntos são iguai s.

5. As igualdades abaixo acerca dos conjuntos A, B, C não são válidas geralmente. Em cada um dos itens, dê um exemplo que ilustre esse fato:

(a) $A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$;
Sejam $A = \{1,4\}, B = \{1,8\}, C = \{4,9\}$. Temos:

$$\begin{aligned} A \backslash (B \cap C) &= (A \backslash B) \cap (A \backslash C) \\ \implies \{1,4\} \backslash (\{1,8\} \cap \{4,9\} &= (\{1,4\} \backslash \{1,8\}) \cap \{1,4\} \backslash \{4,9\}) \\ \implies \{1,4\} \backslash \emptyset &= (\{4\} \cap \{1\} \\ \implies \{1,4\} &= \emptyset \end{aligned}$$

Chegamos em um absurdo, logo, a proposição não é válida para este caso.

(b) $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$;
Sejam $A = \{1,4\}, B = \{1,8\}, C = \{4,9\}$. Temos:

$$\begin{aligned} A \backslash (B \cup C) &= (A \backslash B) \cup (A \backslash C) \\ \implies \{1,4\} \backslash (\{1,8\} \cup \{4,9\} &= (\{1,4\} \backslash \{1,8\}) \cup \{1,4\} \backslash \{4,9\}) \\ \{1,4\} \backslash \{1,4,8,9\} &= \{4\} \cup \{1\} \\ \implies \emptyset &= \{1,4\} \end{aligned}$$

Chegamos a um absurdo, portanto, a proposição não é válida para este caso.

6. Sejam A, B conjuntos quaisquer. Classifique como verdadeiro ou falso cada sentença abaixo. Justifique ou dê um contra-exemplo para o caso da sentença ser falsa.

   (a) $(A\backslash B) \subseteq B$;
   Falsa. Suponha, por absurdo, que a afirmação é verdadeira. Logo, existe x tal que $x \in (A\backslash B)$ e $x \in B$. Contudo, se $x \in (A\backslash B)$, então $x \in A$ e $x \notin B$, o que é um absurdo pois, anteriormente, definimos que $x \in B$. Logo, a proposição é falsa.

   (b) $(A\backslash B) \subseteq (A \cup B)$;
   Verdadeira. Suponha que $(A\backslash B) \nsubseteq (A \cup B)$. Assim, por definição de diferença, existe um elemento x tal que $x \in (A\backslash B)$, ou seja, $x \in A, x \notin B$. Contudo, se $(A\backslash B) \nsubseteq (A \cup B)$, então $x \notin (A \cup B)$, o que significa que, pela definição de união, $x \notin A$ nem $x \notin B$. Isso é um notável absurdo pois $x \in A$ e $x \notin A$ simultaneamente. Logo, a proposição é verdadeira.

7. Sejam A, B, C conjuntos tais que $A \cup B \cup C = \mathbb{U}$. Em cada um dos itens, use propriedades para obter um conjunto igual aos escritos abaixo somente com **uniões de conjuntos**.

   (a) $A \cup (B \cap C^C) \cup (A^C \cap B^C \cap C^C) \cup C$;
   Resolução. Temos:

$$\begin{aligned}
&A \cup (B \cap C^C) \cup (A^C \cap B^C \cap C^C) \cup C \\
&\quad = A \cup (B \cap C^C) \cup [A^C \cap (B^C \cap C^C)] \cup C \quad \text{(Associatividade)} \\
&\quad = A \cup (B \cap C^C) \cup [A^C \cap (B \cup C)^C] \cup C \quad \text{(DeMorgan)} \\
&\quad = A \cup (B \cap C^C) \cup [A \cup B \cup C]^C \cup C \quad \text{(DeMorgan)} \\
&\quad = A \cup (B \cap C^C) \cup \emptyset \cup C \quad (\mathbb{U}^C = \emptyset) \\
&\quad = A \cup [(B \cap C^C) \cup C] \quad \text{(Associatividade)} \\
&\quad = A \cup [(B \cup C) \cap (C^C \cup C)] \quad \text{(Distributividade)} \\
&\quad = A \cup [(B \cup C) \cap \mathbb{U}] \quad (C^C \cup C = \mathbb{U}) \\
&\quad = A \cup B \cup C \quad (A \cap \mathbb{U} = A) \\
&\quad = \mathbb{U}
\end{aligned}$$

   (b) $[(A^C \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C)]^C$

Resolução. Temos:

$$\begin{aligned}
&[(A^C \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C)]^C \\
&\quad = (A^C \cap B \cap C)^C \cap (A \cap B \cap C)^C \quad \text{(DeMorgan)} \\
&\quad = [A \cup (B \cap C)^C] \cap [A^C \cup (B \cap C)^C] \quad \text{(DeMorgan)} \\
&\quad = (B \cap C)^C \cup (A \cap A^C) \quad \text{(Distributividade)} \\
&\quad = (B \cap C)^C \cup \emptyset \\
&\quad = (B \cap C)^C \\
&\quad = B^C \cup C^C
\end{aligned}$$

(c) $[(A \cup B^C \cup C) \cup (B \cup C^C)]^C$
Resolução. Temos:

$$\begin{aligned}
&[(A \cup B^C \cup C) \cup (B \cup C^C)]^C \\
&\quad = (A \cup B^C \cup C)^C \cap (B \cup C^C)^C \quad \text{(DeMorgan)} \\
&\quad = [A^C \cap (B^C \cup C)^C] \cap (B \cup C^C)^C \quad \text{(DeMorgan)} \\
&\quad = A^C \cap (B \cap C^C) \cap (B \cup C^C)^C \quad \text{(DeMorgan)} \\
&\quad = A^C \cap (B \cap C^C) \cap (B^C \cap C) \quad \text{(DeMorgan)} \\
&\quad = A^C \cap (B \cap B^C) \cap (C \cap C^C) \quad \text{(Comutatividade)} \\
&\quad = (A^C \cap \emptyset) \cap \emptyset \\
&\quad = \emptyset
\end{aligned}$$

8. Sejam A, B, C, D conjuntos. Use propriedades do nosso material para obter um conjunto igual ao escrito abaixo somente com interseções de, no máximo, 3 conjuntos.

$$[A^C \cap B \cap (C \cup D^C)^C] \cup [A \cap (B^C \cup C)^C \cap D]$$

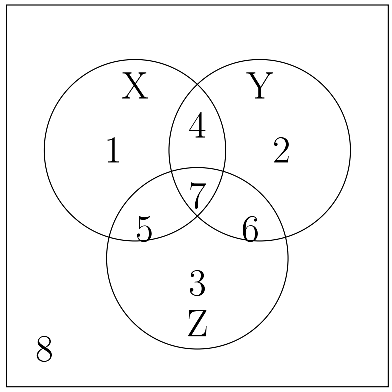
Resolução. Temos:

$$\begin{aligned}
&[A^C \cap B \cap (C \cup D^C)^C] \cup [A \cap (B^C \cup C)^C \cap D] \\
&\quad = (A^C \cap B \cap C^C \cap D) \cup (A \cap B \cap C^C \cap D) \quad \text{(DeMorgan)} \\
&\quad = (B \cap C^C \cap D) \cup (A^C \cap A) \quad \text{(Distributividade)} \\
&\quad = (B \cap C^C \cap D) \cup \emptyset \quad (A^C \cap A = \emptyset) \\
&\quad = B \cap C^C \cap D
\end{aligned}$$

Encontramos, então, um conjunto equivalente ao inicial proposto.

9. O Diagrama de Venn para os conjuntos X, Y, Z decompõe o plano em oito regiões. Numere essas regiões e exprima cada um dos conjuntos

abaixo como reunião de algumas dessas regiões. (Por exemplo: $X \cap Y = 1 \cup 2$)
Tome o diagrama como base:



(a) $(X^C \cup Y)^C$
$= (\{2,3,6,8\} \cup \{2,4,6,7\})^C$
$= (\{2,3,4,6,7,8\})^C$
$= \{1,5\}$

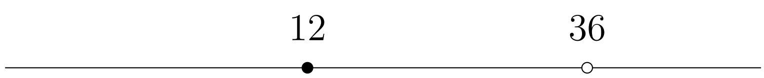
(b) $(X^C \cup Y) \cup Z^C$
$= (\{2,3,6,8\} \cup \{2,4,6,7\}) \cup \{1,2,4\}$
$= \{2,3,4,6,7,8\} \cup \{1,2,4\}$
$= \{1,2,3,4,6,7,8\}$

(c) $(X^C \cap Y) \cup (X \cap Z^C)$
$= (\{2,3,6,8\} \cap \{2,4,6,7\}) \cup (\{1,4,5,7\} \cap \{1,2,4,8\})$
$= (\{2,6\} \cup \{1,4\})$
$= \{1,2,4,6\}$

(d) $(X \cup Y)^C \cap Z$
$= (\{1,4,5,7\} \cup \{2,4,6,7\})^C \cap \{3,5,6,7\}$
$= (\{1,2,4,5,6,7\})^C \cap \{3,5,6,7\}$
$= \{3,8\} \cap \{3,5,6,7\}$
$= \{3\}$

10. Reduza as expressões abaixo a um intervalo ou a união de intervalos disjuntos.

(a) $[12;36[\cup [-2;37]$;

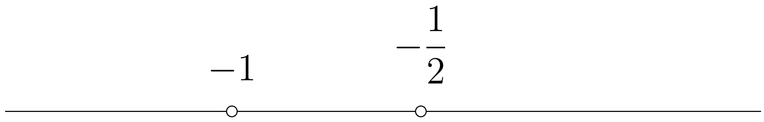


$\cup$

Resolução: $[-2;37]$.

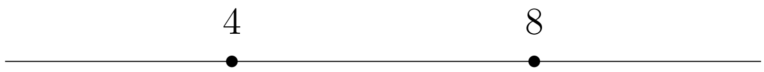
(b) $]-\infty;-2[\cap]-1;-\dfrac{1}{2}[$;

$\cap$

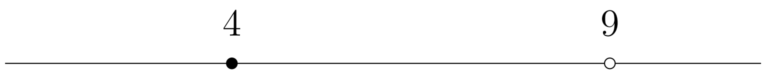


Resolução: $]-\infty;-\dfrac{1}{2}[$.

(c) $([4;6]\cup]5;8]) \cap ([4;6] \cup [4;9[)$;
Vou simplificar e considerar os novos intervalos gerados a partir das uniões:



$\cap$



Resolução: $[4;8]$.

(d) $[2;+\infty[^C$

Resolução: Levando em conta o intervalo complementar, temos que a resolução é $[-\infty;2[$.