UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
INSTITUTO METRÓPOLE DIGITAL
Soluções de Exercícios de Matemática Elementar

Nome: Andriel Fernandes

Capítulo 04 - Exercício de Funções - Parte I

1. "Em cada um dos itens abaixo, defina uma função com a lei de formação dada (indicando domínio e contradomínio). Verifique se é injetiva, sobrejetiva ou bijetiva, a função:"

   (a) "Que a cada ponto do plano cartesiano associa a distância desse plano à origem do plano;"
   Resolução. Seja a função

   $$\begin{aligned} d &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+ \\ (x, y) &\to \sqrt{(x-0)+(y-0)} \end{aligned}$$

   Injetividade: **não**. Sejam os pontos $(6, 4), (4, 6) \in \mathbb{R}$ e note que:

   $$f(6, 4) = \sqrt{10} = f(4, 6)$$

   Sobrejetividade: **sim**. Tomando $\sqrt{x+y} \in \mathbb{R}_+$ e $x, y \in \mathbb{R}$, temos:

   $$f(x, y) = \sqrt{(x-0)+(y-0)} = \sqrt{x+y}$$

   (b) "Que a cada dois números naturais associa seu MDC;"
   Resolução: Tomando *mdc* como uma função que calcula o

máximo divisor comum entre dois números, seja a função

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N}^2 &\to \mathbb{N}^* \\ a, b &\to mdc(a, b). \end{aligned}$$

Injetividade: **não**, visto que

$$f(6, 2) = 2 = f(4, 2)$$

Sobrejetividade: **sim**. Tomando $x \in \mathbb{N}^*$ e $a, b \in \mathbb{N}$, temos:

$$f(a, b) \implies mdc(a, b) = x.$$

Como é válido para qualquer $x \in \mathbb{N}^*$ temos que a função é sobrejetiva.

(c) "Que a cada polinômio (não nulo) com coeficientes reais associa seu grau;"
Não fiz ainda.

(d) "Que a cada figura plana fechada e limitada associa a sua área;"
Não fiz ainda.

(e) "Que a cada subconjunto de $\mathbb{R}$ associa seu complementar;"
Resolução: Seja a função

$$\begin{aligned} c : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ R &\to R^C \end{aligned}$$

Injetividade: **sim**. Sejam $A, B \subseteq \mathbb{R}$, de modo que $A \neq B$. Então temos:

$$A \neq B \implies c(A) \neq c(B) \implies A^C \neq B^C$$

Portanto é injetiva.

Sobrejetiva: **sim**. Seja $N^C \subseteq \mathbb{R}$; logo, existe $N \subseteq \mathbb{R}$ de modo que

$$c(N) = N^C$$

Portanto é sobrejetiva e, além disso, é também bijetiva.

(f) "Que a cada subconjunto finito de $\mathbb{N}$ associa seu número de elementos;"
Resolução: Tomando n como uma função que calcula a quantidade de elementos de um conjunto, seja a função

$$\begin{aligned} h : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ X &\to n(X) \end{aligned}$$

Injetividade: **não**. Tomando $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{6, 7, 8\}$, temos

$$h(A) = 3 = h(B)$$

Sobrejetividade: **sim**. Seja $n \in \mathbb{N}$; temos um conjunto $X \subseteq \mathbb{N}$:

$$h(X) \implies n(X) = n$$

Portanto é sobrejetiva.

(g) "Que a cada subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ associa seu menor elemento;"
Resolução: Tomando inf como uma função que calcula o menor elemento de um conjunto, seja a função

$$\begin{aligned} i : \mathbb{N} \backslash \emptyset &\to \mathbb{N} \\ X &\to inf(X) \end{aligned}$$

Injetividade: **não**. Sendo os conjuntos $A = \{1, 3, 5, 7\}$ e $B = \{1, 2, 4, 8\}$, note que

$$i(A) = 1 = i(B)$$

Sobrejetividade: **sim**. Tome $C \subseteq \mathbb{N}$ e $n \in C$; então, temos:

$$i(C) \implies inf(C) = n$$

Portanto é sobrejetiva.

2. Fiz, mas falta colocar.

3. "Considere a função $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{Z}$ tal que

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{-n}{2}; & \text{se } n \text{ é par} \\ \dfrac{n-1}{2}; & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Mostre que f é bijetiva."
Resolução: Devemos mostrar que f é injetiva e sobrejetiva para todos os casos. Começamos com a injetividade para:

- Se n é par:
  Sejam $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$ e ambos pares. Temos:

$$\begin{aligned} f(n_1) = f(n_2) &\implies \frac{-n_1}{2} = \frac{-n_2}{2} && (\cdot 2) \\ &\implies (-n_1) = (-n_2) && (\cdot -1) \\ &\implies n_1 = n_2 \end{aligned}$$

- Se n é ímpar:
  Sejam $n_3, n_4 \in \mathbb{N}^*$ e ambos ímpares. Temos:

$$\begin{aligned} f(n_3) = f(n_4) &\implies \frac{n_3 - 1}{2} = \frac{n_4 - 1}{2} && (\cdot 2) \\ &\implies n_3 - 1 = n_4 - 1 && (+1) \\ &\implies n_3 = n_4 \end{aligned}$$

- Se um elemento é ímpar e outro par:
  Sejam $n_5, n_6 \in \mathbb{N}^*$, onde n_5 é ímpar e n_6 é par. Com $n_5 \neq n_6$, temos:

$$\begin{aligned} n_5 \neq n_6 &\implies f(n_5) \neq f(n_6) \\ &\implies \frac{n_5 - 1}{2} \neq \frac{-n_6}{2} \\ &\implies n_5 - 1 \neq -n_6 \end{aligned}$$

Assim, está provada a injetividade da função f. Vejamos a sobrejetividade:

- Se n é par:
  Note que, quando executada sobre os números pares, a função f gera um inteiro negativo.
  Logo, seja $y \in \mathbb{N}^*, (-2y) \in \mathbb{Z}_-$, tal que y é par. Portanto, ao aplicar a função sobre $(-2y)$:

$$f(-2y) = \frac{-(-2y)}{2} = y$$

- Se n é ímpar:
  Note que executando a função f sobre os números impares naturais, temos somente números inteiros não-negativos.
  Logo, seja $z \in \mathbb{N}^*$ e $(2z+1) \in \mathbb{Z}_+$, tal que z é ímpar. Assim, temos:

$$f(2z+1) = \frac{(2z+1) - 1}{2} = z$$

Portanto, está provada a sobrejetividade para ambos os casos de n. Consequentemente também está provada a bijetividade de f.

4. "Considere a função $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*_+$ tal que $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Responda as seguintes perguntas apresentando as respectivas justificativas:"

(a) "f é injetiva"?
Não. Tomando $1, -1$, temos:

$$\begin{aligned}
1 \neq -1 &\implies f(1) \neq f(-1) \\
&\implies \frac{1}{1+1^2} \neq \frac{1}{1+(-1)^2} \\
&\implies \frac{1}{2} \neq \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Contudo, tal conclusão é um absurdo e mostra que dois elementos diferentes podem gerar a mesma imagem. Portanto, a função f não é injetiva.

(b) "f é sobrejetiva"?
Não. Note que, sendo $1 \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned}
f(x) = 1 &\implies \frac{1}{1+x^2} = 1 \\
&\implies 1 = 1 \cdot (1 + x^2) \\
&\implies 1 = 1 + x^2 \\
&\implies x^2 = 0
\end{aligned}$$

Como $0 \notin \mathbb{R}^*$, temos que a função não é sobrejetiva, pois não há $x \in \mathbb{R}^*$ tal que $f(x) = 1$.

5. Fiz, mas falta colocar.

6. "Considere as funções reais $f : X \to Y, g : Y \to Z$. Demonstre ou refute com contraexemplos as afirmações abaixo:"

   (a) "Se f e g são injetivas, então $(g \circ f)$ é injetiva;"
   Resolução. Temos que $(g \circ f)$ é definida tal que

$$g \circ f : X \to Z$$

Se f é injetiva e g também, tomando $a, b \in X$ e $x, y \in Y$ temos:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(a) = (g \circ f)(b) &\implies g(f(a)) = g(f(b)) \\ &\implies g(x) = g(y) \\ &\implies x = y\end{aligned}$$

Portanto, $(g \circ f)$ é de fato injetiva e a afirmação é verdadeira.

(b) "Se $(g \circ f)$ é injetiva, então f e g são injetivas."
Resolução. Sejam as funções

$$\begin{aligned}&f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N} \\ &x \to \begin{cases} x, & \text{se } x \text{ é ímpar} \\ \frac{x}{2}, & \text{se } x \text{ é par} \end{cases},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ y &\to 2y,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g \circ f : \mathbb{N}^* &\to \mathbb{N} \\ x \to y &\to 2y\end{aligned}$$

Note, portanto, os seguintes casos:

- Se x_1, x_2 são ímpares:

$$\begin{aligned}g(f(x_1)) = g(f(x_2)) &\implies g(x_1) = g(x_2) \\ &\implies 2x_1 = 2x_2 \\ &\implies x_1 = x_2\end{aligned}$$

- Se x_1, x_2 são pares:

$$\begin{aligned}g(f(x_1)) = g(f(x_1)) &\implies g(\frac{x_1}{2}) = g(\frac{x_2}{2}) \\ &\implies x_1 = x_2\end{aligned}$$

- Se um elemento é ímpar e outro é par:

$$\begin{aligned} x_1 \neq x_2 &\implies f(x_1) \neq f(x_2) \\ &\implies g(\frac{x_1}{2}) \neq g(x_2) \\ &\implies x_1 \neq 2x_2 \end{aligned}$$

Está provada, portanto, que a função composta $(g \circ f)$ é injetiva. Contudo, note que a função f não é, pois

$$f(1) = 1 = f(2)$$

Logo, a afirmação é falsa.

(c) “Se f e g são sobrejetivas, então $(g \circ f)$ é sobrejetiva.”
Resolução. Temos que $(g \circ f)$ é definida tal que

$$g \circ f : X \to Z$$

Desse modo, se f e g são sobrejetivas, e tomando $x \in X, y \in Y$ e $z \in Z$, temos

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$$

Logo, $(g \circ f)$ é sobrejetiva e a afirmação é verdadeira.

(d) “Se $(g \circ f)$ é sobrejetiva, então f e g são sobrejetivas.”
Resolução. Sejam as funções

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+^* \\ x &\to x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R}_+ \\ y &\to \sqrt{y}, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
g \circ f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+ \\
x \to \sqrt{x^2} &\to y
\end{aligned}
$$

Tomando $y \in \mathbb{R}_+$, temos que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que

$$g(f(x)) = g(x^2) = y$$

Logo, a função $(g \circ f)$ é sobrejetiva. Note, contudo, que g não é sobrejetiva pois, tomando $0 \in \mathbb{R}_+$, não há nenhum elemento de $\mathbb{R}_+^*$ que resulte nele.

7. "Considere
$$f : [3,5; +\infty[\to [-2,25; +\infty[$$
tal que $f(x) = x^2 - 7x + 10$. Prove que f é bijetiva."
Resolução. Provemos primeiro sua sobrejetividade. Seja $y \in [-2,25; +\infty[$; logo, se a função é sobrejetiva, existe um número $\sqrt{y + \frac{9}{4}} + \frac{7}{2}$ tal que

$$
\begin{aligned}
f(\sqrt{y + \frac{9}{4}} + \frac{7}{2}) &= (\sqrt{y + \frac{9}{4}} + \frac{7}{2})^2 - 7 \cdot (\sqrt{y + \frac{9}{4}} + \frac{7}{2}) + 10 \\
&= y + \frac{9}{4} + 2 \cdot \frac{7}{2} \cdot \sqrt{y + \frac{9}{4}} + \frac{49}{4} - 7\sqrt{y + \frac{9}{4}} - \frac{49}{2} + 10 \\
&= y + \frac{9}{4} + \frac{49}{4} - \frac{49}{2} + 10 \\
&= y + \frac{58}{4} - \frac{29}{2} \\
&= y + \frac{58 - 58}{4} \\
&= y
\end{aligned}
$$

Portanto, está provada a sobrejetividade.
Por fim, provemos sua injetividade. Tomando $a, b \in [3,5; +\infty[$,

temos que

$$\begin{aligned}
f(a) = f(b) &\implies a^2 - 7a + 10 = b^2 - 7b + 10 \\
&\implies a^2 - 7a = b^2 - 7b \\
&\implies a^2 - 7a + (\frac{7}{2})^2 = b^2 - 7a + (\frac{7}{2})^2 \\
&\implies (a - \frac{7}{2})^2 = (b - \frac{7}{2})^2 \\
&\implies a - \frac{7}{2} = b - \frac{7}{2} \\
&\implies a = b
\end{aligned}$$

Assim está provada a injetividade e, consequentemente, a bijetividade da função.