UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE

INSTITUTO METRÓPOLE DIGITAL

Soluções de Exercícios de Matemática Elementar

Nome: Andriel Fernandes

Capítulo 05 - Exercício de Funções Polinomiais

1. "Mostre que uma função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fica inteiramente determinada quando conhecemos $f(x_1)$ e $f(x_2)$ para $x_1 \neq x_2$. Em outras palavras, calcule $a, b \in \mathbb{R}$ onde $f(x) = ax + b$."

   Resolução. Sejam $a, b, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Temos o seguinte sistema:

   $$f(x_1) = ax_1 + b$$
   $$f(x_2) = ax_2 + b$$

   Fazendo uma "subtração", temos:

   $$f(x_1) - f(x_2) = ax_1 - ax_2 \implies x_1 - x_2 = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{a}$$
   $$\implies a = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

   Sabendo a, retornemos à primeira equação:

   $$f(x_1) = ax_1 + b \implies f(x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \cdot x_1 + b$$
   $$\implies b = f(x_1) - \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} x_1$$

   Logo, quando $a = \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$ e $b = f(x_1) - \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} x_1$, a função fica inteiramente determinada.

2. “Pessoas apressadas podem diminuir o tempo gasto em uma escada rolante subindo alguns degraus da escada no percurso. Para uma certa escada, observa-se que uma pessoa gasta 30 seg na escada quando sobre 5 degraus e 20 seg quando sobe 10 degraus. Quantos são os degraus da escada e qual o tempo gasto no percurso?”

   Resolução. Seja a função $f(d) = ad + b$ a função que calcula o tempo gasto na escada rolante em função da quantidade de passos dados. A princípio temos:

$$\begin{aligned} f(5) &= 30 = a \cdot 5 + b \\ f(10) &= 20 = a \cdot 10 + b \end{aligned}$$

   Podemos ”subtrair” as equações:

$$\begin{aligned} 30 - 20 = 5a - 10a &\implies 10 = -5a \\ &\implies a = -2 \end{aligned}$$

   Calculado a, vamos substituir para encontrar b:

$$30 = -2 \cdot 5 + b \implies b = 40$$

   Portanto, temos a função f modelada como $f(d) = 40 - 2d$. Podemos calcular o tempo total gasto quando não há degraus andados, ou seja, $d = 0$:

$$f(0) = 40 - 0 = 40$$

   Logo, o tempo total é de 40 segundos. Em seguida, para calcular a quantidade de degraus, podemos supôr $f(d) = 0$ de modo que:

$$40 - 2d = 0 \implies -2d = -40 \implies d = 20$$

   Logo, a quantidade de degraus da escada é 20.

3. "Uma aplicação financeira rende a juros simples quando os juros são calculados somente sobre a aplicação inicial durante todo o período de tempo.
   Edson faz uma aplicação que rende juros $j > 0$ em um mês. Ou seja, se ele investiu um capital inicial c_0, então ao fim de 1 mês, Edson poderia resgatar $c = c_0(1 + j)$. Caso a aplicação renda juros simples, defina uma função afim que calcule o capital c_s em função do tempo t (em meses) da aplicação."
   Resolução. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(t) = at + b$ é a função que calcula os juros simples. Sabemos que $f(0) = c_0$, onde $c_0 \in \mathbb{R}$ é o capital inicial. Sabemos, também, que $f(1) = c_0(1 + j)$, onde $j \in \mathbb{R}$ são os juros.
   Então, apliquemos $f(0)$:
   $$f(0) = a \cdot 0 + b = b$$
   Logo, b é o capital inicial c_0. Além disso, apliquemos $f(0)$:
   $$\begin{aligned} f(1) = c_0(1 + j) = a \cdot 1 + b &\implies b(1 + j) = a + b \\ &\implies a = b - b(1 + j) \\ &\implies a = b - b + b \cdot j \\ &\implies a = b \cdot j \end{aligned}$$
   Logo, reescrevendo f:
   $$f(t) = c_0 \cdot j \cdot t + c_0 = c_0(t \cdot j + 1)$$
   Assim, essa é a função que calcula o capital em função dos meses.

4. Não fiz ainda.

5. "Para cada uma das funções quadráticas abaixo, escreva-a na forma $a(x - m)^2 + k$. A seguir, calcule suas raízes (se existirem), o eixo de simetria de seu gráfico e seu valor mínimo e máximo."

(a) $f(x) = x^2 - 8x + 23$
Resolução.

$$\begin{aligned} x^2 - 8x + 23 &= x^2 - 8x + 16 + 7 \\ &= (x-4)^2 + 7 \end{aligned}$$

Note que a função não tem raízes reais visto que:

$$\Delta = 64 - 92 = -28$$

Seja $x \in \mathbb{R}$ o eixo de simetria tal que

$$x = -\frac{-8}{2} = 4$$

Como $a > 0$, a função não tem valor máximo. Contudo, existe um valor mínimo $y_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$y_0 = f(4) = (4-4)^2 + 7 = 7$$

Portanto, o valor mínimo da função é 4 e o ponto (4, 7) é o ponto de mínimo.

(b) $f(x) = 8x - 2x^2$.
Resolução.

$$8x - 2x^2 = -2x(x-4)$$

Temos que suas raízes são 0 e 4 pois são os valores que zeram a expressão e geram $y = 0$.
Seja $x \in \mathbb{R}$ o eixo de simetria tal que

$$x = -\frac{8}{-4} = 2$$

Como $a < 0$, a função não tem valor mínimo. Contudo, existe um ponto máximo $y_1 \in \mathbb{R}$ tal que

$$y_1 = f(2) = 8 \cdot 2 - 2 \cdot 4 = 8$$

Portanto, o valor máximo da função é 2 e o ponto (2, 8) é o ponto de máximo absoluto.

(c) $f(x) = 2x^2 - 16x + 46$
Resolução.

$$\begin{aligned} 2x^2 - 16x + 46 &= 2x^2 - 16x + 32 + 14 \\ &= 2(x-4)^2 + 14 \end{aligned}$$

Note que a função não tem raízes reais visto que:

$$\Delta = 256 - 368 = -112$$

Seja $x \in \mathbb{R}$ o eixo de simetria tal que

$$x = -\frac{-16}{4} = 4$$

Como $a > 0$, a função não tem valor máximo. Contudo, existe um ponto mínimo $y_2 \in \mathbb{R}$ tal que

$$y_2 = f(4) = 2 \cdot 16 - 16 \cdot 4 + 46 = 14$$

Portanto, o valor mínimo da função é 4 e o ponto (4, 14) é o ponto de mínimo absoluto.

6. "Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 - 7x + 12$."

   (a) "Calcule as raízes de f e qual $x_0 \in \mathbb{R}$ é o mínimo absoluto de f;"
   Resolução. Para calcular as raízes temos:

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2}$$

Logo, temos como raízes $x_1 = \frac{8}{2} = 4$ e $x_2 = \frac{6}{2} = 3$.
Além disso, para calcular o mínimo absoluto de f (já que $a > 0$), tomemos $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{7}{2}$$

e $y_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$y_0 = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{1}{4}$$

Logo, o ponto $(\frac{7}{2}, -\frac{1}{4})$ é o ponto mínimo de f e $x_0 = \frac{7}{2}$ é o mínimo absoluto de f.

(b) "Mostre que f é monótona no intervalo $]-\infty, x_0] = \{x; x \leq x_0\}$".
Resolução. Mostremos que f é monótona decrescente no intervalo $]-\infty; \frac{7}{2}$. Sejam $a, b \in]-\infty; \frac{7}{2}]$ onde $a < b$ tal que

$$\begin{aligned} a < b \leq \frac{7}{2} &\implies a - \frac{7}{2} < b - \frac{7}{2} \leq 0 \\ &\implies (a - \frac{7}{2})^2 > (b - \frac{7}{2})^2 \geq 0 \\ &\implies a^2 - 7a + \frac{49}{4} > b^2 - 7b + \frac{49}{4} \\ &\implies a^2 - 7a + 12 > b^2 - 7b + 12 \\ &\implies f(a) > f(b) \end{aligned}$$

Logo, está mostrada que a função f é decrescente no intervalo $]-\infty; \frac{7}{2}]$.

7. "Encontre os valores mínimo e máximo assumidos pela função $f(x) = x^2 - 4x + 3$ em cada um dos intervalos abaixo:"

(a) $[1;4]$;

Resolução. Como $a > 0$, podemos encontrar o valor mínimo da função a partir do vértice da parábola. Então, sejam $x \in \mathbb{R}$ tal que

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2} = 2$$

e $y \in \mathbb{R}$ tal que

$$y = f(2) = 4 - 8 + 3 = -1$$

Portanto, o ponto (2, -1) é o ponto mínimo da função e $x = 2$ é o valor mínimo dela.

Mostremos agora que f é decrescente no intervalo [1; 2] e crescente no intervalo [2; 4]. Tomando $a, b \in [1;2]$, onde $a < b$, temos:

$$\begin{aligned}
1 \leq a < b \leq 2 &\implies -1 \leq a - 2 < b - 2 \leq 0 \\
&\implies (a-2)^2 > (b-2)^2 \\
&\implies a^2 - 4a + 4 > b^2 - 4b + 4 \\
&\implies a^2 - 4a + 3 > b^2 - 4b + 3 \\
&\implies f(a) > f(b)
\end{aligned}$$

Portanto, mostrado que o intervalo é, de fato, decrescente, tome um $x \in [1;2]$ qualquer, ou seja

$$1 \leq x \leq 2$$

Como o intervalo é decrescente, temos

$$1 \leq x \implies f(1) \geq f(x)$$

Logo, 1 é o ponto máximo deste intervalo. Agora, tome $p, q \in [2; 4]$, onde $p < q$, tal que:

$$\begin{aligned}
2 \leq p < q &\implies 0 \leq p - 2 < q - 2 \\
&\implies (p-2)^2 < (q-2)^2 \\
&\implies p^2 - 4p + 4 < q^2 - 4q + 4 \\
&\implies p^2 - 4p + 3 < q^2 - 4q + 3 \\
&\implies f(p) < f(q)
\end{aligned}$$

Sabendo que f é crescente no intervalo, tome qualquer $x \in [2; 4]$, ou seja

$$2 \leq x \leq 4$$

Portanto, temos que

$$x \leq 4 \implies f(x) \leq f(4)$$

Logo, 4 é o ponto máximo do intervalo crescente. Com dois elementos candidatos ao posto de ponto máximo, basta comparar suas imagens:

$$\begin{aligned}
f(1) &= 1 - 4 + 3 = 0 \\
f(4) &= 16 - 16 + 3 = 3
\end{aligned}$$

Logo, $f(4) > f(1)$, (4, 3) é o ponto máximo da função e $x = 4$, o valor máximo.

(b) $[6; 10]$.
Resolução. Vamos mostrar que f é monótona crescente no intervalo $[6; 10]$. Portanto tome $a, b \in [6; 10]$, onde $a < b$,

tais que

$$\begin{aligned} 6 \le a < b \le 10 &\implies 4 \le a-2 < b-2 \le 8 \\ &\implies (a-2)^2 < (b-2)^2 \\ &\implies a^2 - 4a + 4 < b^2 - 4a + 4 \\ &\implies a^2 - 4a + 3 < b^2 - 4a + 3 \\ &\implies f(a) < f(b) \end{aligned}$$

Logo, sabendo que a função f é crescente neste intervalo, tome qualquer $x \in [6;10]$, ou seja,

$$6 \le x \le 10 \implies f(6) \le f(x) \le f(10)$$

Assim, sabemos que 6 é valor mínimo de f e 10 seu valor máximo, ao menos no intervalo.

8.

9. "Considere $f : [-5;1] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = -x^2 - 2x + 8$."

   (a) "Faça um esboço do gráfico da função f e aponte os extremos absolutos da função;"
   Resolução. Vamos calcular alguns dados. A princípio, vejamos suas raízes:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{-2} = \frac{2 \pm 6}{-2}$$

Então, $x_1 = \frac{8}{-2} = -4$ e $x_2 = \frac{-4}{-2} = 2$. Calculemos então o vértice da parábola, tomando $x \in [-5;1], y \in \mathbb{R}$ tais que

$$x = -\frac{-2}{-2} = -1$$

e

$$y = -1 + 2 + 8 = 9$$

Logo, o vértice da parábola é o ponto (-1, 9) e o valor máximo de f é -1.
Conhecendo o valor máximo de f, podemos montar os intervalos $[-5; -1]$ e $[-1; 1]$ onde o primeiro é crescente e o segundo decrescente, visto que $a < 0$ e o gráfico de uma função quadrática tem formato de parábola, ou seja, tem um intervalo crescente e outro decrescente. Vejamos o ponto mínimo no primeiro intervalo, tomando qualquer $x \in [-5; -1]$:

$$-5 \leq x \leq -1 \implies f(-5) \leq f(x) \leq f(-1)$$

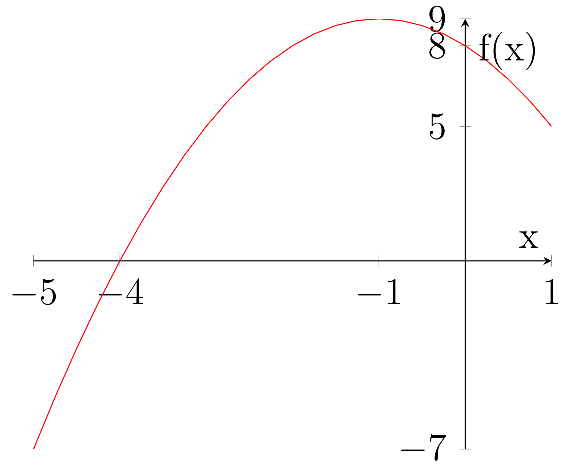
Logo, -5 é o valor mínimo neste intervalo. Tomando qualquer $x \in [-1; 1]$, temos também:

$$-1 \leq x \leq 1 \implies f(-1) \geq f(x) \geq f(1)$$

Logo, sabendo que f é decrescente neste intervalo, temos que o valor mínimo dele é 1. Para concluir o mínimo absoluto de f, basta comparar:

$$f(-5) = -25 + 10 + 8 = -7$$
$$f(1) = -1 - 2 + 8 = 5$$

Como $f(-5) < f(1)$, -5 é, de fato, o mínimo absoluto de f.
Por fim, sabemos que o ponto (0, 8) "encosta" no eixo y, pois $f(0) = 0 + 0 + 8 = 8$.
Com todos esses dados, teremos o seguinte gráfico:



(b) "Defina uma função bijetiva f' onde $f'(x) = f(x)$ para todo x pertencente ao intervalo que será o domínio de f' e que preserve os extremos de f;"
Resolução. Podemos definir uma função $f' : [-5; -1] \to [-7; 9]$, tornando a função tanto injetiva quanto sobrejetiva e preservando os pontos mínimo e máximo absolutos.

(c) "Prove que f' é monótona."
Resolução. Sejam $a, b \in [-5; -1]$ onde $a < b$ tais que

$$\begin{aligned}
a < b \leq -1 &\implies a + 1 < b + 1 \leq 0 \\
&\implies (a+1)^2 > (b+1)^2 \\
&\implies a^2 + 2a + 2 > b^2 + 2b + 2 \\
&\implies -a^2 - 2a - 2 < -b^2 - 2b - 2 \\
&\implies -a^2 - 2a + 8 < -b^2 - 2b + 8 \\
&\implies f(a) < f(b)
\end{aligned}$$

Então, está mostrado que a função f' é monótona crescente.

10.

11. "Considere a função polinomial $p(x) = x^2 - 2$."

(a) “Usando o Teorema de raízes racionais prove que $p(x)$ não possui raízes racionais”;
Resolução. Temos, pelo Teorema, que os candidatos às raízes de $p(x)$ são obtidos a partir dos divisores de:

- 2: $\pm 1, \pm 2$;
- 1: ± 1

Podemos formar as frações $\frac{p}{q}$ a partir dos divisores; são elas $\pm\frac{1}{1}$ e $\pm\frac{2}{1}$. Vamos testar cada uma delas:

$$\begin{aligned} p(1) &= 1 - 2 = -1 \\ p(-1) &= 1 - 2 = -1 \\ p(2) &= 4 - 2 = 2 \\ p(-2) &= 4 - 2 = 2 \end{aligned}$$

Como não houve nenhum $p(\frac{p}{q}) = 0$, então p não tem raízes racionais.

(b) “Mostre que $\sqrt{2}$ é raíz de $p(x)$;”
Resolução. Note que existe um número $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ tal que:

$$p(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 - 2 = 2 - 2 = 0$$

Logo $\sqrt{2}$ é, de fato, raíz de p.

(c) “Conclua que $\sqrt{2}$ é irracional;”
Resolução. Sabendo que p não tem raízes racionais e $\sqrt{2}$ é raíz de p, temos que $\sqrt{2}$ é irracional.

12. “Considere a função polinomial $p(x) = x^2 - q$, onde $q \in \mathbb{N}^*$ é um número primo.”

(a) “Usando o Teorema de raízes racionais prove que $p(x)$ não possui raízes racionais;”

Resolução. Pelo Teorema, temos como candidatos a raízes de p os divisores de:

- $q : \pm 1, q$;
- 1: ± 1,

Combinando cada um dos divisores, geramos os números racionais 1, -1, q e $-q$. Podemos testá-los:

$$\begin{aligned} p(1) &= 1 - q \\ p(-1) &= 1 - q \\ p(q) &= q^2 - q \\ p(-q) &= q^2 - q \end{aligned}$$

Portanto, não há raízes racionais para p.

(b) "Mostre que $\sqrt{q}$ é raíz de $p(x)$;"
Resolução. Note que, tomando $\sqrt{q} \in \mathbb{R}$, temos

$$p(\sqrt{q}) = (\sqrt{q})^2 - q = q - q = 0$$

Logo $\sqrt{q}$ é, de fato, raíz de p.

(c) "Conclua que $\sqrt{q}$ é irracional;"
Resolução. Como p não tem raízes racionais e $\sqrt{q}$ é raíz de p, temos que $\sqrt{q}$ é irracional.

13. "Considere a função polinomial $p(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 + 2x$. Utilize o Teorema das Raízes Racionais pelo menos uma vez para encontrar todas as raízes reais de $p(x)$.
Dica: Antes de aplicar o Teorema das Raízes Racionais, identifique uma das raízes de $p(x)$ e fatore $p(x)$ para então usar o Teorema. Porque é preciso usar a dica ao invés de aplicar o Teorema diretamente em $p(x)$?"
Resolução. Não podemos aplicar diretamente o Teorema sobre a

função polinomial p pois nela temos $a_0 = 0$, o que faria com que a única raíz do polinômio fosse 0. Desse modo, note que 0 é, de fato, uma raíz de p visto que

$$p(0) = 0 - 0 - 0 - 0 = 0$$

Logo, temos:

$$\begin{aligned} p(x) &= (x - 0) \cdot q(x) \\ &= (x - 0) \cdot (x^3 - x^2 - 2x + 2) \quad \text{(Divisão de polinômios)} \end{aligned}$$

Aplicando o teorema para calcular as raízes de q, temos os divisores:

- $a_0(2) : \pm 1, \pm 2$

- $a_n(1) : \pm 1$

Montando os números racionais, temos os candidatos $1, -1, 2, -2$. Vamos testar:

$$\begin{aligned} p(1) &= 1 - 1 - 2 + 2 = 0 \\ p(-1) &= -1 - 1 + 2 + 2 \neq 0 \\ p(2) &= 8 - 4 - 4 + 2 \neq 0 \\ p(-2) &= -8 - 4 + 4 + 2 \neq 0 \end{aligned}$$

Ademais, como existe uma raíz racional pra q, temos

$$\begin{aligned} q(x) &= (x - 1)r(x) \\ &= (x - 1)(x^2 - 2) \quad \text{(Divisão de polinômios)} \end{aligned}$$

Como raízes de r, temos:

$$x^2 - 2 = 0 \iff x^2 = 2 \iff x = \pm\sqrt{2}$$

Por fim temos as raízes racionais de p sendo 0 e 1, e as irracionais, $-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$.

14. "Determine o polinômio $p(x)$ de menor grau possível tal que $p(1) = 2, p(2) = 1, p(3) = 4, p(4) = 3$."

15. "Mostre que se n é um número par, então o polinômio $p(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1$ não possui raíz real."
Resolução. Sejam $a \neq 1$ e $n \in \mathbb{R}$ par. Para esse caso, note que $p(x) = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$. Suponha por absurdo que este a é raiz de p. Logo, temos:

$$\begin{aligned} p(a) = \frac{a^{n+1}-1}{a-1} = 0 &\iff a^{n+1} - 1 = 0 && \cdot(a-1) \\ &\iff a^{n+1} = 1 \\ &\implies \sqrt[n+1]{a^{n+1}} = \sqrt[n+1]{1} \\ &\implies a = 1 && (n+1 \text{ é ímpar}) \end{aligned}$$

Contudo, como $a \neq 1$, chegamos em um absurdo. Logo, não existe raiz real para p quando n é par e $a \neq 1$. Note, porém, que tomando $a = 1$:

$$p(1) = 1^2 + 1^1 + 1 + 1 \neq 0$$

Portanto não há raíz real para p.