UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
INSTITUTO METRÓPOLE DIGITAL
Soluções de Exercícios de Matemática Elementar

Nome: Andriel Fernandes

Capítulo 04 - Exercício de Funções

1. "Em cada um dos itens abaixo, defina uma função com a lei de formação dada (indicando domínio e contradomínio). Verifique se é injetiva, sobrejetiva ou bijetiva, a função:"

   (a) "Que a cada ponto do plano cartesiano associa a distância desse plano à origem do plano;"
   Resolução. Seja a função

   $$d : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$$
   $$(x, y) \to \sqrt{(x - 0) + (y - 0)}$$

   Injetividade: **não**. Sejam os pontos $(6, 4), (4, 6) \in \mathbb{R}$ e note que:

   $$f(6, 4) = \sqrt{10} = f(4, 6)$$

   Sobrejetividade: **sim**. Tomando $\sqrt{x + y} \in \mathbb{R}_+$ e $x, y \in \mathbb{R}$, temos:

   $$f(x, y) = \sqrt{(x - 0) + (y - 0)} = \sqrt{x + y}$$

   (b) "Que a cada dois números naturais associa seu MDC;"
   Resolução: Tomando *mdc* como uma função que calcula o

máximo divisor comum entre dois números, seja a função

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N}^2 &\to \mathbb{N}^* \\ a, b &\to mdc(a, b). \end{aligned}$$

Injetividade: **não**, visto que

$$f(6, 2) = 2 = f(4, 2)$$

Sobrejetividade: **sim**. Tomando $x \in \mathbb{N}^*$ e $a, b \in \mathbb{N}$, temos:

$$f(a, b) \implies mdc(a, b) = x.$$

Como é válido para qualquer $x \in \mathbb{N}^*$ temos que a função é sobrejetiva.

(c) "Que a cada polinômio (não nulo) com coeficientes reais associa seu grau;"
Não fiz ainda.

(d) "Que a cada figura plana fechada e limitada associa a sua área;"
Não fiz ainda.

(e) "Que a cada subconjunto de $\mathbb{R}$ associa seu complementar;"
Resolução: Seja a função

$$\begin{aligned} c : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ R &\to R^C \end{aligned}$$

Injetividade: **sim**. Sejam $A, B \subseteq \mathbb{R}$, de modo que $A \neq B$. Então temos:

$$A \neq B \implies c(A) \neq c(B) \implies A^C \neq B^C$$

Portanto é injetiva.

Sobrejetiva: **sim**. Seja $N^C \subseteq \mathbb{R}$; logo, existe $N \subseteq \mathbb{R}$ de modo que

$$c(N) = N^C$$

Portanto é sobrejetiva e, além disso, é também bijetiva.

(f) "Que a cada subconjunto finito de $\mathbb{N}$ associa seu número de elementos;"
Resolução: Tomando n como uma função que calcula a quantidade de elementos de um conjunto, seja a função

$$\begin{aligned} h : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ X &\to n(X) \end{aligned}$$

Injetividade: **não**. Tomando $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{6, 7, 8\}$, temos

$$h(A) = 3 = h(B)$$

Sobrejetividade: **sim**. Seja $n \in \mathbb{N}$; temos um conjunto $X \subseteq \mathbb{N}$:

$$h(X) \implies n(X) = n$$

Portanto é sobrejetiva.

(g) "Que a cada subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ associa seu menor elemento;"
Resolução: Tomando inf como uma função que calcula o menor elemento de um conjunto, seja a função

$$\begin{aligned} i : \mathbb{N} \backslash \emptyset &\to \mathbb{N} \\ X &\to inf(X) \end{aligned}$$

Injetividade: **não**. Sendo os conjuntos $A = \{1, 3, 5, 7\}$ e $B = \{1, 2, 4, 8\}$, note que

$$i(A) = 1 = i(B)$$

Sobrejetividade: **sim**. Tome $C \subseteq \mathbb{N}$ e $n \in C$; então, temos:

$$i(C) \implies inf(C) = n$$

Portanto é sobrejetiva.

2. "Considere a função $g : [0; 5] \to \mathbb{R}$ definida por:"

$$g(x) = \begin{cases} 4x - x^2; & x < 3 \\ x - 2; & x \geq 3 \end{cases}$$

"Determine as soluções de:"

(a) $g(x) = -1$;

i. Se $x < 3$:
Temos $4x - x^2 = -1 \implies 4x - x^2 + 1 = 0$. Aplicando lei de Bhaskara, temos:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - (-4)}}{-2}$$
$$\implies x = \frac{-4 \pm \sqrt{20}}{-2}$$
$$\implies x = \frac{-4 \pm 2\sqrt{5}}{-2}$$

Portanto, tomando $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, temos as possibilidades:

$$x_1 = \frac{-4 + 2\sqrt{5}}{-2} \implies 2 - \sqrt{5}$$
$$x_2 = \frac{-4 - 2\sqrt{5}}{-2} \implies 2 + \sqrt{5}$$

Como $x_2 < 3$ e $x_1 \notin [0; 5]$, temos que não há conjunto solução para este caso.

ii. Se $x \geq 3$:
Temos

$$x - 2 = -1 \implies x - 1 = 0 \implies x = 1.$$

Temos que x não é maior ou igual a três. Logo, não há solução para quando $g(x) = -1$.

(b) $g(x) = 0$;

i. Se $x < 3$:
Temos:

$$4x - x^2 = 0$$

Aplicando lei de Bhaskara, temos:

$$x = \frac{(-4) \pm \sqrt{16 - 0}}{-2}$$
$$\implies x = \frac{(-4) \pm 4}{-2}$$

Tomando $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, temos as seguintes possibilidades:

$$x_1 = \frac{(-4) - 4}{-2} \implies x_1 = 4$$
$$x_2 = \frac{(-4) + 4}{-2} \implies x_2 = 0$$

Temos que $x_1 > 3$, logo não é solução. Então, seja S_1 o seguinte conjunto solução:

$$S_1 = \{0\} \cap] - \infty; 3[\cap [0; 5] = 0$$

ii. Se $x \geq 3$:
Temos:

$$x - 2 = 0 \implies x = 2$$

Temos que x não é maior ou igual a 3. Portanto a solução para $g(x) = 0$ é somente 0.

(c) $g(x) = 3$;

i. Se $x < 3$:
Temos:

$$4x - x^2 = 3 \implies 4x - x^2 - 3 = 0$$

Aplicando lei de Bhaskara, temos:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - (-12)}}{-2}$$
$$\implies x = \frac{-4 \pm 2\sqrt{7}}{-2}$$

Tomemos as possibilidades $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$:

$$x_1 = \frac{-4 + 2\sqrt{7}}{-2} \implies x_1 = 2 - \sqrt{7};$$
$$x_2 = \frac{-4 - 2\sqrt{7}}{-2} \implies x_2 = 2 + \sqrt{7}$$

Temos que $x_1 \notin [0; 5]$ e x_2 não é menor que 3. Logo, não há solução para este caso.

ii. Se $x \geq 3$:
Temos:

$$x - 2 = 3 \implies x = 5$$

Seja S, então, o seguinte conjunto solução:

$$S = 5 \cap [3; \infty[\cap [0; 5] = 5$$

Portanto, a única solução para quando $g(x) = 3$ é 5.

(d) Se $g(x) = 4$:

i. Caso $x < 3$:
Temos:

$$4x - x^2 = 4 \implies 4x - x^2 - 4 = 0$$

Aplicando lei de Bhaskara, temos:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 16}}{-2} \\ \implies x &= \frac{-4 \pm 0}{-2} \\ \implies x &= 2 \end{aligned}$$

Temos o conjunto solução S_1 tal que:

$$S_1 = 2 \cap]-\infty; 3[\cap [0; 5] = 2$$

ii. Caso $x \geq 3$:
Temos:

$$x - 2 = 4 \implies x = 6$$

Temos S_2 como o seguinte conjunto solução:

$$S_2 = 6 \cap [3; \infty[\cap [0; 5] = \emptyset$$

Portanto, temos que a única solução para $g(x) = 4$ é 2.

(e) Se $g(x) < 3$:

i. Caso $x < 3$:
Em desenvolvimento.

ii. Caso $x \geq 3$:
Temos:

$$x - 2 \geq 3 \implies x \geq 5$$

Temos o seguinte conjunto-solução para este caso:

$$S_2 = [5; \infty[\cap [3; \infty[\cap [0; 5] = 5$$

Temos, portanto, que as soluções para $g(x) < 3$ são

Em desenvolvimento.

3. "Considere a função $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{Z}$ tal que

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{-n}{2}; & \text{se } n \text{ é par} \\ \dfrac{n-1}{2}; & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Mostre que f é bijetiva."
Resolução: Devemos mostrar que f é injetiva e sobrejetiva para todos os casos. Começamos com a injetividade para:

- Se n é par:
Sejam $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$ e ambos pares. Temos:

$$\begin{aligned} f(n_1) = f(n_2) &\implies \frac{-n_1}{2} = \frac{-n_2}{2} \\ &\implies (-n_1) = (-n_2) \\ &\implies n_1 = n_2 \end{aligned}$$

- Se n é ímpar:
Sejam $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$ e ambos ímpares. Temos:

$$\begin{aligned} f(n_1) = f(n_2) &\implies \frac{n_1 - 1}{2} = \frac{n_2 - 1}{2} \\ &\implies n_1 - 1 = n_2 - 1 \\ &\implies n_1 = n_2 \end{aligned}$$

- Se um elemento é ímpar e outro par:
  Sejam $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$, onde n_1 é ímpar e n_2 é par. Temos:

$$\begin{aligned} n_1 > 0 &\implies -n_1 < 0 \\ &\implies \frac{-n}{2} < 0 \\ &\implies f(n_1) < 0 \end{aligned}$$

  Temos também que:

$$\begin{aligned} n_2 \geq 1 &\implies n_2 - 1 \geq 0 \\ &\implies \frac{n_2 - 1}{2} \geq 0 \\ &\implies f(n_2) \geq 0 \end{aligned}$$

  Dessa forma $n_1 \neq n_2 \implies f(n_1) \neq f(n_2)$.

Assim, está provada a injetividade da função f. Vejamos a sobrejetividade:

- Se n é par:
  Note que quando executada sobre os números pares a função f gera um inteiro negativo.
  Seja $y \in \mathbb{Z}^*_-$. Note que:

$$\begin{aligned} y < 0 &\implies 2y < 0 \\ &\implies -2y > 0 \end{aligned}$$

  Logo, existe um número $-2y \in N^*$ tal que

$$f(-2y) = \frac{-(-2y)}{2} = y$$

- Se n é ímpar:
  Note que executando a função f sobre os números impares

naturais, temos somente números inteiros não-negativos.
Seja $y \in \mathbb{Z}_+$. Note que:

$$\begin{aligned} y \geq 0 &\implies 2y \geq 0 \\ &\implies 2y + 1 \geq 1 \end{aligned}$$

Logo, existe um número $2y + 1 \in \mathbb{N}^*$ tal que

$$f(2y+1) = \frac{2y+1-1}{2} = y$$

Portanto, está provada a sobrejetividade para ambos os casos de n. Consequentemente também está provada a bijetividade de f.

4. "Considere a função $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*_+$ tal que $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Responda as seguintes perguntas apresentando as respectivas justificativas:"

   (a) "f é injetiva"?
   Não. Note que, tomando $1, -1 \in \mathbb{R}^*$, temos

   $$f(-1) = \frac{1}{2} = f(1)$$

   Logo, a função f não é injetiva.

   (b) "f é sobrejetiva"?
   Não. Note que, sendo $1 \in \mathbb{R}^*_+$:

   $$\begin{aligned} f(x) = 1 &\implies \frac{1}{1+x^2} = 1 \\ &\implies 1 = 1 \cdot (1 + x^2) \\ &\implies 1 = 1 + x^2 \\ &\implies x^2 = 0 \end{aligned}$$

Como $0 \notin \mathbb{R}^*$, temos que a função não é sobrejetiva, pois não há $x \in \mathbb{R}^*$ tal que $f(x) = 1$.

5. "Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função cuja lei de associação é da forma abaixo:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x; & \text{se } x \geq 0 \\ \dfrac{3}{2}x; & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Mostre que f é bijetiva."

Resolução. Provemos que é injetiva.

- Se $a, b \geq 0$;
  Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Temos que:

$$\begin{aligned} f(a) = f(b) &\implies a^2 + 3a = b^2 + 3b \\ &\implies a^2 + 3a + (\frac{3}{2})^2 = b^2 + 3b + (\frac{3}{2})^2 \\ &\implies (a + \frac{3}{2})^2 = (b + \frac{3}{2})^2 \\ &\implies \sqrt{(a + \frac{3}{2})^2} = \sqrt{(b + \frac{3}{2})^2} \\ &\implies |a + \frac{3}{2}| = |b + \frac{3}{2}| \\ &\implies a + \frac{3}{2} = b + \frac{3}{2} \quad (a, b \geq 0) \\ &\implies a = b \end{aligned}$$

- Se $a, b < 0$;

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Temos que:

$$\begin{aligned} f(a) = f(b) &\implies \frac{3}{2}a = \frac{3}{2}b \\ &\implies \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}a = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}b \\ &\implies a = b \end{aligned}$$

- Se $a \geq 0$ e $b < 0$;
  Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Temos:

$$\begin{aligned} a \geq 0 &\implies a + \frac{3}{2} \geq \frac{3}{2} \\ &\implies (a + \frac{3}{2})^2 \geq (\frac{3}{2})^2 \\ &\implies a^2 + 3a + \frac{9}{4} \geq \frac{9}{4} \\ &\implies a^2 + 3a \geq 0 \\ &\implies f(a) \geq 0 \end{aligned}$$

  Também temos que:

$$\begin{aligned} b < 0 &\implies \frac{3}{2}b < 0 \\ &\implies f(b) < 0 \end{aligned}$$

  Assim, $a \neq b \implies f(a) \neq f(b)$.

Logo, a função é injetiva para todos os casos. Provemos agora que é sobrejetiva.

- Se $x \geq 0$;

Seja $y \in \mathbb{R}_+$, ou seja:

$$\begin{aligned} y \geq 0 &\implies y + \frac{9}{4} \geq \frac{9}{4} \\ &\implies \sqrt{y + \frac{9}{4}} \geq \frac{3}{2} \\ &\implies \sqrt{y + \frac{9}{4}} - \frac{3}{2} \geq 0 \end{aligned}$$

Logo, existe um número $\sqrt{y + \frac{9}{4}} - \frac{3}{2} \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} f(\sqrt{y + \frac{9}{4}} - \frac{3}{2}) &= (\sqrt{y + \frac{9}{4}} - \frac{3}{2})^2 + 3 \cdot (\sqrt{y + \frac{9}{4}} - \frac{3}{2}) \\ &= y + \frac{9}{4} - 3 \cdot \sqrt{y + \frac{9}{4}} + \frac{9}{4} + 3\sqrt{y + \frac{9}{4}} - \frac{9}{2} \\ &= y + \frac{18}{4} - \frac{9}{2} \\ &= y \end{aligned}$$

Portanto, a função é sobrejetiva para quaisquer $x \in \mathbb{R}_+$.

- Se $x < 0$;
  Seja $y \in \mathbb{R}_-^*$. Note que:

$$y < 0 \implies \frac{2}{3}y < 0$$

Logo, existe um número $\frac{2}{3}y \in \mathbb{R}_-^*$ tal que

$$\begin{aligned} f(\frac{2}{3}y) &= \frac{3}{2}x \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}y \\ &= y \end{aligned}$$

A função é, portanto, sobrejetiva para quaisquer $x \in \mathbb{R}^*_-$.

Como f é sobrejetiva para ambos os casos temos que a função é, de fato, sobrejetiva para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

6. "Considere a função $f :]0; 1[\to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} - 2; & \text{se } x \leq \dfrac{1}{2} \\ 2 - \dfrac{1}{1-x}; & \text{se } x > \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Mostre que f é bijetiva."

Resolução. Provemos sua injetividade para cada caso:

- Se $x \leq \frac{1}{2}$;
Sejam $a, b \in]0; 1[$ tal que

$$\begin{aligned} f(a) = f(b) &\implies \frac{1}{a} - 2 = \frac{1}{b} - 2 \\ &\implies \frac{1}{a} = \frac{1}{b} \\ &\implies a = b \end{aligned}$$

- Se $x > \frac{1}{2}$;

Sejam $a, b \in]0;1[$ tal que

$$\begin{aligned} f(a) = f(b) &\implies 2 - \frac{1}{1-a} = 2 - \frac{1}{1-b} \\ &\implies -\frac{1}{1-a} = -\frac{1}{1-b} \\ &\implies \frac{1}{1-a} = \frac{1}{1-b} \\ &\implies 1-a = 1-b \\ &\implies a = b \end{aligned}$$

- Se $x_1 \leq \frac{1}{2}$ e $x_2 > \frac{1}{2}$;
  Sejam a, b tais que:

$$\begin{aligned} 0 < a \leq \frac{1}{2} &\implies \frac{1}{a} \geq \frac{1}{\frac{1}{2}} \\ &\implies \frac{1}{a} \geq 2 \\ &\implies \frac{1}{a} - 2 \geq 0 \\ &\implies f(a) \geq 0 \end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
1 > b > \frac{1}{2} &\implies 0 > b - 1 > -\frac{1}{2} \\
&\implies 1 - b < \frac{1}{2} \\
&\implies \frac{1}{1-b} > 2 \\
&\implies -\frac{1}{1-b} < -2 \\
&\implies 2 - \frac{1}{1-b} < 0 \\
&\implies f(b) < 0
\end{aligned}
$$

Assim, $a \neq b \implies f(a) \neq f(b)$.

Provada sua injetividade, provemos também sua sobrejetividade.

- Se $x \leq \frac{1}{2}$;
  Seja $y \in \mathbb{R}_+$. Note que:

$$
\begin{aligned}
y \geq 0 &\implies y + 2 \geq 0 \\
&\implies \frac{1}{y+2} \leq \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

e

$$
1 > 0 \implies \frac{1}{y+2} > 0
$$

Portanto,

$$
0 < \frac{1}{y+2} \leq \frac{1}{2}
$$

Logo, existe um número $\frac{1}{y+2} \in]0;1[$ tal que

$$\begin{aligned} f(\frac{1}{y+2}) &= \frac{1}{\frac{1}{y+2}} - 2 \\ &= y + 2 - 2 \\ &= y \end{aligned}$$

Temos que a função é sobrejetiva para $x \leq \frac{1}{2}$.

- Se $x > \frac{1}{2}$;
  Seja $y \in \mathbb{R}^*_-$. Note que:

$$\begin{aligned} y < 0 &\implies -y > 0 \\ &\implies -y + 2 > 2 \\ &\implies \frac{1}{-y+2} < \frac{1}{2} \\ &\implies -\frac{1}{-y+2} > -\frac{1}{2} \\ &\implies 1 - \frac{1}{-y+2} > \frac{1}{2} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} 1 > 0 &\implies \frac{1}{-y+2} > 0 \\ &\implies -\frac{1}{-y+2} < 0 \\ &\implies 1 - \frac{1}{-y+2} < 1 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{1}{2} < 1 - \frac{1}{-y+2} < 1,$$

Logo, existe um número $1 - \frac{1}{-y+2} \in]0;1[$ tal que

$$\begin{aligned} f(1 - \frac{1}{-y+2}) &= 2 - \frac{1}{1 - (1 - \frac{1}{-y+2})} \\ &= 2 - \frac{1}{\frac{1}{-y+2}} \\ &= 2 - (-y+2) \\ &= y \end{aligned}$$

Temos que a função é sobrejetiva para $x > \frac{1}{2}$.

Assim, com a sobrejetividade provada para ambos os casos, temos que f é sobrejetiva.

7. "Considere
$$f : [3,5;+\infty[\to [-2,25;+\infty[$$
tal que $f(x) = x^2 - 7x + 10$. Prove que f é bijetiva."
Resolução. Provemos primeiro sua sobrejetividade. Seja $y \in [-2,25;+\infty[$. Note que:

$$\begin{aligned} y \geq -\frac{9}{4} &\implies y + \frac{9}{4} \geq 0 \\ &\implies \sqrt{y + \frac{9}{4}} \geq 0 \\ &\implies \sqrt{y + \frac{9}{4}} + \frac{7}{2} \geq \frac{7}{2} \end{aligned}$$

Logo, existe um número $\sqrt{y+\frac{9}{4}}+\frac{7}{2}$ tal que

$$\begin{aligned}
f(\sqrt{y+\frac{9}{4}}+\frac{7}{2}) &= (\sqrt{y+\frac{9}{4}}+\frac{7}{2})^2 - 7\cdot(\sqrt{y+\frac{9}{4}}+\frac{7}{2}) + 10 \\
&= y + \frac{9}{4} + 2\cdot\frac{7}{2}\cdot\sqrt{y+\frac{9}{4}} + \frac{49}{4} - 7\sqrt{y+\frac{9}{4}} - \frac{49}{2} + 10 \\
&= y + \frac{9}{4} + \frac{49}{4} - \frac{49}{2} + 10 \\
&= y + \frac{58}{4} - \frac{29}{2} \\
&= y + \frac{58-58}{4} \\
&= y
\end{aligned}$$

Portanto, está provada a sobrejetividade.
Por fim, provemos sua injetividade. Tomando $a, b \in [3,5;+\infty[$, temos que

$$\begin{aligned}
f(a) = f(b) &\implies a^2 - 7a + 10 = b^2 - 7b + 10 \\
&\implies a^2 - 7a = b^2 - 7b \\
&\implies a^2 - 7a + (\frac{7}{2})^2 = b^2 - 7a + (\frac{7}{2})^2 \\
&\implies (a-\frac{7}{2})^2 = (b-\frac{7}{2})^2 \\
&\implies \sqrt{(a-\frac{7}{2})^2} = \sqrt{(b-\frac{7}{2})^2} \\
&\implies |a-\frac{7}{2}| = |b-\frac{7}{2}| \\
&\implies a-\frac{7}{2} = b-\frac{7}{2} \quad (a-\frac{7}{2}\geq 0, b-\frac{7}{2}\geq 0) \\
&\implies a = b
\end{aligned}$$

Assim está provada a injetividade e, consequentemente, a bijetividade da função.

8. "Considere as funções:"

$$f :]-\infty; 0] \to [-4; \infty[, \text{ tal que } f(x) = -x - 4,$$

$$g :]-\infty; 0] \to \mathbb{R}, \text{ tal que } g(x) = \sqrt{-x}$$
$$h : \mathbb{R} \to [-4; \infty[, \text{ tal que } h(x) = x^2 - 4$$

"Quais dessas funções é sobrejetiva e quais não são? Alguma dessas funções é resultante da composição das outras?"
Resolução. Note que f é sobrejetiva pois, tomando $y \in [-4; \infty[$, temos

$$y \geq -4 \implies -y \leq 4 \implies -4 - y \leq 0$$

Logo, há um número $-4 - y \in]-\infty; 0]$ tal que

$$f(-4 - y) = -(-4 - y) - 4 = y$$

Além disso, f é a composta de $(h \circ g)$, pois tomado $x \in \mathbb{R}_-$ temos

$$h(g(x)) = h(\sqrt{-x}) = (\sqrt{-x})^2 - 4 = -x - 4 = f(x)$$

h também é sobrejetiva pois, tomando $y \in [-4; \infty[$, temos que há um número $\sqrt{y + 4} \in \mathbb{R}$ tal que

$$h(\sqrt{y + 4}) = (\sqrt{y + 4})^2 - 4 = y$$

Contudo, g não é sobrejetiva pois $g(x) \geq 0$ para todos os $x \in \mathbb{R}_-$; logo, não existe $g(x) = -1$.

9. "Considere as funções reais $f : X \to Y, g : Y \to Z$. Demonstre ou refute com contraexemplos as afirmações abaixo:"

(a) "Se f e g são injetivas, então $(g \circ f)$ é injetiva;"
Resolução. Temos que $(g \circ f)$ é definida tal que

$$g \circ f : X \to Z$$

Se f é injetiva e g também, tomando $a, b \in X$ temos:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(a) = (g \circ f)(b) &\implies g(f(a)) = g(f(b)) \\ &\implies f(a) = f(b) && (g \text{ é injetiva}) \\ &\implies a = b && (f \text{ é injetiva})\end{aligned}$$

Portanto, $(g \circ f)$ é de fato injetiva e a afirmação é verdadeira.

(b) "Se $(g \circ f)$ é injetiva, então f e g são injetivas."
Resolução. Sejam as funções $f : \{x_1\} \to \{y_1, y_2\}, g : \{y_1, y_2\} \to \{z_1\}, (g \circ f) : \{x_1\} \to \{z_1\}$ tal que $f(x_1) = y_1, g(y_1) = z_1, g(y_2) = z_1$. Note que $(g \circ f)$ é injetiva pois $(g \circ f)(x_1) = (z_1)$, mas g não é pois $g(y_1) = z_1 = g(y_2)$. Logo, a afirmação é falsa.

(c) "Se f e g são sobrejetivas, então $(g \circ f)$ é sobrejetiva."
Resolução. Temos que $(g \circ f)$ é definida tal que

$$g \circ f : X \to Z$$

Desse modo se f e g são sobrejetivas, onde $f(x) = y$ e $g(y) = z$, tomemos um $z \in Z$. Logo, existem $x \in X, y \in Y$ tal que

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$$

Como é válido para todo $z \in Z$, $(g \circ f)$ é sobrejetiva e a afirmação é verdadeira.

(d) "Se $(g \circ f)$ é sobrejetiva, então f e g são sobrejetivas."
Resolução. Sejam $X = \{x_1\}, Y = \{y_1, y_2\}, Z = \{z_1\}$ tal que

$f(x_1) = y_1, g(y_1) = z_1, g(y_2) = z_1$.
Note que $(g \circ f)$ é sobrejetiva, pois $g(f(x_1)) = z_1$, mas f não é sobrejetiva pois não há elemento de X tal que $f(x) = y_2$.
Logo, $Y \neq f(X)$ e f não é sobrejetiva.

10. "Faça uso de pelo menos um dos resultados anteriores para mostrar a injetividade das funções:"

$$f : [1;\infty[\to]-\infty;0], \text{ tal que } f(x) = -x+1,$$

$$g : [1;\infty[\to \mathbb{R}, \text{ tal que } g(x) = x^2 - 2x - 3,$$
$$h :]-\infty;0] \to \mathbb{R}, \text{ tal que } h(x) = x^2 - 4$$

Resolução.

(a) Função f;
Sejam $x_1, x_2 \in [1;\infty[$ tal que

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\implies -x_1 + 1 = -x_2 + 1 \\ &\implies x_1 = x_2 \end{aligned}$$

(b) Função h;
Sejam $x_1, x_2 \in]-\infty;0]$ tal que

$$\begin{aligned} h(x_1) = h(x_2) &\implies x_1^2 - 4 = x_2^2 - 4 \\ &\implies \sqrt{x_1^2} = \sqrt{x_2^2} \\ &\implies |x_1| = |x_2| \\ &\implies -x_1 = -x_2 \quad (x_1 \leq 0, x_2 \leq 0) \\ &\implies x_1 = x_2 \end{aligned}$$

(c) Função g;

Se f e h são injetivas, então $(h \circ f) : [1; \infty[\to \mathbb{R}$ também é injetiva. Como $g : [1; \infty[\to \mathbb{R}$ e para qualquer $x \in [1; \infty[$ temos que

$$\begin{aligned}
(h \circ f)(x) &= h(f(x)) \\
&= h(-x + 1) \\
&= (-x + 1)^2 - 4 \\
&= x^2 - 2x + 1 - 4 \\
&= x^2 - 2x - 3 \\
&= g(x)
\end{aligned}$$

A função g também é, portanto, injetiva pois $(h \circ f) = g$.

11. "Mostre que $f :]-\infty, -4] \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = -x^2 - 8x - 12$ é uma função crescente."

Resolução. Sejam $a, b \in]-\infty, -4]$ de modo que $a < b$. Temos, portanto:

$$\begin{aligned}
a < b \leq -4 &\implies a + 4 < b + 4 \leq 0 \\
&\implies (a + 4)^2 > (b + 4)^2 \geq 0 \\
&\implies a^2 + 8a + 16 > b^2 + 8b + 16 \\
&\implies -a^2 - 8a - 16 < -b^2 - 8b - 16 \\
&\implies -a^2 - 8a - 12 < -b^2 - 8b - 12 \\
&\implies f(a) < f(b)
\end{aligned}$$

Assim, está provada que f é crescente.

12. "Seja a função $f : [3; 5] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = -x^2 + 4x - 3$."

(a) "Mostre que f é decrescente."

Resolução. Sejam $a, b \in [3; 5]$ tal que $a > b$. Temos, portanto, para todos a, b:

$$\begin{aligned}
3 \leq b < a &\Longrightarrow 1 \leq b - 2 < a - 2 \\
&\Longrightarrow (a-2)^2 > (b-2)^2 \\
&\Longrightarrow a^2 - 4a + 4 > b^2 - 4b + 4 \\
&\Longrightarrow -a^2 + 4a - 4 < -b^2 + 4b - 4 \\
&\Longrightarrow -a^2 + 4a - 3 < -b^2 + 4b - 3 \\
&\Longrightarrow f(a) < f(b)
\end{aligned}$$

Logo, está mostrada que a função é decrescente.

(b) "f possui máximo absoluto? Se sim, ocorre em qual ponto?"
Resolução. Seja $x \in [3; 5]$. Então, temos

$$3 \leq x \leq 5$$

Como f é decrescente, temos

$$f(3) \geq f(x),$$

para todo $x \in [3; 5]$. Ou seja, $x_0 = 3$ é o máximo absoluto de f.

(c) "f possui mínimo absoluto? Se sim, ocorre em qual ponto?"
Resolução. Seja $x \in [3; 5]$. Então temos

$$3 \leq x \leq 5$$

Como f é decrescente, temos

$$f(5) \leq f(x),$$

para todo $x \in [3; 5]$. Ou seja, $x_0 = 5$ é o mínimo absoluto de f.

13. “Considere a função $f : \mathbb{R}_{-} \to \mathbb{R}_{+}^{*}$ tal que $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Responda as seguintes perguntas apresentando as respectivas justificativas.”

(a) “f é monótona? Se sim, de que tipo? Se não, f possui algum intervalo de monotonicidade?”
Resolução. Sim, é monótona crescente pois, tomados quaisquer $a, b \in \mathbb{R}_{-}$, temos

$$\begin{aligned} a < b \leq 0 &\implies a^2 > b^2 \geq 0 \\ &\implies 1 + a^2 > 1 + b^2 > 1 \geq 0 \\ &\implies \frac{1}{1+a^2} < \frac{1}{1+b^2} \\ &\implies f(a) < f(b) \end{aligned}$$

A função é, portanto, crescente.

(b) “f possui máximo absoluto?”
Resolução. Seja $x \in \mathbb{R}_{-}$, ou seja, $x \leq 0$. Logo, como a função é crescente, temos que para quaisquer x:

$$f(0) \geq f(x)$$

Então a função possui um máximo absoluto x_0 tal que $x_0 = 0$.

(c) “f possui mínimo absoluto?”
Resolução. Sejam $x_0, x \in \mathbb{R}_{-}$. Suponha, por absurdo, que x é o ponto mínimo de f; então, $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}_{-}$.
Note, contudo, que temos $x_0 - 1 \in \mathbb{R}_{-}$ tal que $x_0 - 1 < x_0$. Desse modo, como a função é crescente, temos que

$$f(x_0 - 1) \leq f(x_0),$$

o que contradiz x_0 ser o mínimo absoluto. Logo, a função não tem mínimo absoluto.

(d) "f é limitada?"
Resolução. Sim. f é limitada superiormente pelo fato de ter um máximo absoluto; e também é limitada inferiormente pois, para qualquer x, temos $f(x) \geq 0$.

14. "Considere a função real f tal que $f(x) = -x^2 + 2x + 8$."

(a) "Mostre que f é crescente no intervalo $]-\infty; 1]$;"
Resolução. Sejam $a, b \in]-\infty; 1]$ tal que $a < b$. Temos:

$$\begin{aligned} a < b \leq 1 &\implies a - 1 < b - 1 \leq 0 \\ &\implies (a-1)^2 > (b-1)^2 \geq 0 \\ &\implies a^2 - 2a + 1 > b^2 - 2b + 1 \\ &\implies -a^2 + 2a - 1 < -b^2 + 2b - 1 \\ &\implies -a^2 + 2a + 8 < -b^2 + 2b + 8 \\ &\implies f(a) < f(b) \end{aligned}$$

Logo, está mostrada que a função é crescente no intervalo citado.

(b) "Mostre que f é decrescente no intervalo $[1; \infty[$;"
Resolução. Sejam $a, b \in [1; \infty[$ tal que $a < b$. Temos:

$$\begin{aligned} 1 \leq b < a &\implies 0 \leq b - 1 < a - 1 \\ &\implies (a-1)^2 < (b-1)^2 \\ &\implies a^2 - 2a + 1 < b^2 - 2b + 1 \\ &\implies -a^2 + 2a - 1 > b^2 + 2b - 1 \\ &\implies f(a) > f(b) \end{aligned}$$

Logo, está mostrada que a função é decrescente no intervalo citado.

(c) "Use os itens anteriores para concluir que $1 \in \mathbb{R}$ é um ponto de máximo absoluto de f."
Resolução. Seja $x_1 \in]-\infty; 1]$, ou seja, $x_1 \leq 1$. Como a função é crescente, temos que

$$f(x_1) \leq f(1)$$

Por outro lado seja $x_2 \in [1; \infty[$, ou seja, $x_2 \geq 1$. Como a função é decrescente, temos que

$$f(1) \geq f(x_2)$$

Logo, está mostrado que 1 é o ponto de máximo absoluto de f.

15. "Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas, justificando suas respostas. As funções que forem usadas como contraexemplo podem ser exibidas somente com o esboço do gráfico de sua função."

(a) Se f é limitada superiormente, então f tem pelo menos um máximo absoluto.
Resolução. Afirmação verdadeira. f é limitada superiormente se existe um número $M \in \mathbb{R}$ tal que

$$M \geq f(x)$$

para qualquer x. Além disso, um máximo absoluto é um número $x_0 \in D$ tal que

$$f(x_0) \geq f(x)$$

para qualquer x.

16. “Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$. Determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas, justificando suas respostas. As funções que forem usadas como contraexemplo podem ser exibidas somente com o esboço de seu gráfico.”

    (a) “A função g pode ser ilimitada inferiormente;”
    Falso. Note que $g(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo, a função não é ilimitada inferiormente, podendo seu limite ser 0, por exemplo.

    (b) “f é limitada superiormente ou f é limitada inferiormente;”
    Falso. Seja
    $$f(x) = \begin{cases} x^2, \text{se } x \text{ é par,} \\ -x, \text{se } x \text{ é ímpar} \end{cases}$$
    Note que não haverá limite inferior nem superior para essa função.

17. “Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas, justificando suas respostas.”

    (a) Se f e g são crescentes, então a composta $(f \circ g)$ é uma função crescente.
    Resolução. Afirmação verdadeira. Por definição, f é crescente se, tomados $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, ocorre
    $$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$$
    Analogamente, tomados $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, temos que g é crescente se
    $$y_1 < y_2 \implies g(y_1) < g(y_2)$$
    Portanto, $(f \circ g)$ é crescente pois:
    $$\begin{aligned} y_1 < y_2 &\implies g(y_1) < g(y_2) \\ &\implies f(g(y_1)) < f(g(y_2)) \end{aligned}$$

(b) Se f e g são crescentes, então o produto $f \cdot g$ é uma função crescente.

Resolução. Afirmação falsa. Sejam $f(x) = x$ e $g(x) = x - 1$. f é crescente pois, tomados $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ onde $x_1 < x_2$, temos

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$$

g é crescente pois, tomados $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ onde $x_1 < x_2$, temos

$$x_1 < x_2 \implies x_1 - 1 < x_2 - 1 \implies f(x_1) < f(x_2)$$

Note que $(f \cdot g)$ não é uma função crescente pois, sendo $f(-5) = -5$ e $g(-5) = -6$, temos

$$f(-5) \cdot g(-5) = 30,$$

enquanto $f(-4) = -4$ e $g(-4) = -5$ temos

$$f(-4) \cdot g(-4) = 20$$

Ou seja, para $x_1 = -5$ e $x_2 = -4$, onde $x_1 < x_2$, temos $f(x_1) \cdot g(x_1) > f(x_2) \cdot g(x_2)$, o que implica que a função $(f \cdot g)$ não é crescente.