UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
INSTITUTO METRÓPOLE DIGITAL
Soluções de Exercícios de Matemática Elementar

Nome: Andriel Fernandes

Capítulo 02 - Exercício de Equações e Inequações (pt. 1)

1. "Descubra os valores de x de modo que seja possível completar o preenchimento do quadrado mágico 3x3, onde x encontra-se no centro."

   Resolução. Seja N o conjunto dos elementos do quadrado mágico; tal conjunto é formado por $N = \{a; 1 \leq a \leq 9\}$. Pela definição de quadrado mágico, temos que a soma de linhas, colunas e diagonais sempre resulta na mesma. Então, teremos que o valor total de todas as somas será a soma desse conjunto: 45.
   Se a soma das linhas, diagonais e colunas será a mesma, vejamos somente a soma das linhas. Tomando L como uma linha, podemos descobrir o valor total da soma dela:

   $$3L = 45 \iff L = 15$$

   Portanto, a soma de qualquer linha, coluna ou diagonal deve ser sempre 15.
   Sabendo que uma linha tem 3 elementos, tomemos x como um elemento dessa linha e note:

   $$3x = 15 \iff x = 5$$

   Como nenhum número se repete, concluímos que o elemento x tem o valor 5.

2. “Observe as multiplicações a seguir:

   - $12.345.679 \cdot 18 = 222.222.222$
   - $12.345.679 \cdot 27 = 333.333.333$
   - $12.345.679 \cdot 54 = 666.666.666$

   Para obter 999.999.999 devemos multiplicar 12.345.679 por quanto?”
   Resolução. Seja x o número de vezes a multiplicar 12.345.679. Podemos definir a seguinte equação:

$$\begin{aligned} 12.345.679 \cdot x = 999.999.999 &\implies x = \frac{999.999.999}{12.345.679} \\ &\implies x = 81 \end{aligned}$$

   81 é, portanto, o número de vezes que 12.345.679 deve ser multiplicado até que obtenha-se 999.999.999.

3. Não resolvi.

4. “Passarinhos brincam em volta de uma velha árvore. Se dois passarinhos pousam em cada galho, um passarinho fica voando. Se todos os passarinhos pousam, com três em cada galho, um galho fica vazio. Quantos são os passarinhos?”
   Resolução. Sejam x o número de passarinhos e y o número de galhos tais que

$$\begin{aligned} x &= 2y + 1 \\ y &= \frac{x}{3} + 1 \end{aligned}$$

Para calcular o número de passarinhos temos:

$$\begin{aligned} x = 2y + 1 &\implies x = 2 \cdot (\frac{x}{3} + 1) + 1 \\ &\implies x = \frac{2x}{3} + 2 + 1 \quad (\cdot 3) \\ &\implies 3x = 2x + 6 + 3 \\ &\implies x = 9 \quad (-2x) \end{aligned}$$

Portanto existem 9 passarinhos.

5. "O número -3 é a raiz da equação $x^2 - 7x - 2c = 0$. Nessas condições, determine o valor do coeficiente c."
Resolução. Tomando -3 como a raiz da equação temos que:

$$\begin{aligned} x^2 - 7x - 2c = 0 &\implies (-3)^2 - 7 \cdot (-3) - 2c = 0 \\ &\implies 9 - (-21) - 2c = 0 \\ &\implies 30 - 2c = 0 \\ &\implies -2c = 30 \\ &\implies c = -15 \end{aligned}$$

O valor de c é, desse modo, -15.

6. "Determine o conjunto solução $S \subseteq \mathbb{Q}$ formado pelo(s) número(s) que, adicionado ao triplo de seu quadrado, resulta em 14".
Resolução. Podemos definir o conjunto $S \subseteq \mathbb{Q}$ como:

$$S = \{x; x + 3x^2 = 14\}$$

Para descobrir quais os elementos de S podemos resolver a equação $x + 3x^2 - 14$:

$$\begin{aligned}
\text{Discriminante}& \\
\Delta = b^2 - 4ac &= 1 - 4 \cdot 3 \cdot (-14) \\
&= 1 + 168 \\
&= 169 \\
\text{Equação}& \\
x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} &\implies x = \frac{-1 \pm \sqrt{169}}{6} \\
&\implies x = \frac{-1 \pm 13}{6} \\
\text{Raízes}& \\
x_1 = \frac{-1+13}{6} &= 2 \\
x_2 = \frac{-1-13}{6} &= -\frac{7}{3}
\end{aligned}$$

Então temos que os elementos do conjunto S são:

$$S = \{-\frac{7}{3}, 2\}.$$

7. "Determine o(s) valor(es) de $m \in \mathbb{R}$ tal(is) que a equação $mx^2 + (m+1)x + (m+1) = 0$ tenha somente uma raiz real."
   Resolução. Calculemos o discriminante desta equação, a princípio:

$$\begin{aligned}
\Delta = b^2 - 4ac &\implies (m+1)^2 - 4 \cdot m \cdot (m+1) \\
&\implies m^2 + 2m + 1 - 4 \cdot (m^2 + m) \\
&\implies m^2 + 2m + 1 - 4m^2 - 4m \\
&\implies -3m^2 - 2m + 1
\end{aligned}$$

Chegamos em uma equação do segundo grau. Então vamos calcular suas raízes e verificar m.

$$m = \frac{2 \pm \sqrt{4 - (-12)}}{-6} \implies \frac{2 \pm \sqrt{16}}{-6}$$
$$\implies \frac{2 \pm 4}{-6}$$

Vejamos as possibilidades de m:

$$m_1 = \frac{2+4}{-6} = -1; m_2 = \frac{2-4}{-6} = -\frac{1}{3}$$

Vamos aplicar na equação encontrada no discriminante cada uma das possibilidades:

- Se $m = -1$:

$$\begin{aligned} -3m^2 - 2m + 1 = 0 &\implies -3 \cdot (-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 1 = 0 \\ &\implies -3 + 2 + 1 = 0 \\ &\implies 0 = 0 \end{aligned}$$

  Esta conclusão é verdadeira, então essa possibilidade para m é válida.

- Se $m = -\frac{1}{3}$:

$$
\begin{aligned}
-3m^2 - 2m + 1 = 0 &\implies -3 \cdot (-\frac{1}{3})^2 - 2 \cdot (-\frac{1}{3}) + 1 = 0 \\
&\implies -1 + \frac{2}{3} + 1 = 0 \\
&\implies \frac{-3+2}{3} + 1 = 0 \\
&\implies \frac{-1}{3} + 1 = 0 \\
&\implies \frac{-1+3}{3} = 0 \\
&\implies \frac{2}{3} = 0
\end{aligned}
$$

  Podemos concluir que tal resultado não é verdadeiro; logo, tal possibilidade de valor para m não é válida.

Assim, para que a equação $mx^2 + (m+1)x + (m+1) = 0$ tenha somente uma raiz real, é necessário que $m = -1$.

8. "Calcule as dimensões de um triângulo de $16cm$ de perímetro e $15cm^2$ de área."
Resolução. Seja x a base do retângulo e y sua altura. Temos a seguinte situação:

$$
\begin{aligned}
2x + 2y &= 16 \\
x \cdot y &= 15
\end{aligned}
$$

Podemos, então, definir $y = \frac{15}{x}$. Aplicando na primeira equação, temos:

$$\begin{aligned}
2x + 2 \cdot (\frac{15}{x}) = 16 &\implies 2x + \frac{30}{x} = 16 \\
&\implies 2x^2 + 30 = 16x \\
&\implies 2x^2 - 16x + 30 = 0
\end{aligned}$$

Chegamos em uma equação de 2º grau. Vamos resolvê-la:

$$\begin{aligned}
\text{Discriminante} & \\
\Delta = b^2 - 4ac &\implies \Delta = (-16)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 30 \\
&\implies \Delta = 256 - 240 \\
&\implies \Delta = 16 \\
\text{Equação} & \\
x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} &\implies x = \frac{16 \pm \sqrt{16}}{4} \\
&\implies x = \frac{16 \pm 4}{4} \\
\text{Raízes} & \\
x_1 = \frac{16 + 4}{4} &\implies x_1 = 5 \\
x_2 = \frac{16 - 4}{4} &\implies x_2 = 3
\end{aligned}$$

Assim, podemos concluir que as raízes x_1 e x_2 equivalem às dimensões do retângulo, onde $x = x_1 = 5$ e $y = x_2 = 3$.

9. "Sejam α_1 e α_2 as raízes da equação do 2° grau $ax^2 + bx + c = 0$. Calcule as seguintes expressões em função de a, b e c:"

   (a) $\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$;
   Resolução. Temos, por soma das raízes, que $\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{-b}{a}$.

Logo, temos:

$$\begin{aligned}\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} &= \frac{\frac{-b}{a}}{2} \\ &= \frac{-b}{2a}\end{aligned}$$

(b) $\sqrt{\alpha_1 \cdot \alpha_2}$;
Resolução. Temos, por produto das raízes, que $\alpha_1 \cdot \alpha_2 = \frac{c}{a}$.
Logo, temos:

$$\begin{aligned}\sqrt{\alpha_1 \cdot \alpha_2} &= \sqrt{\frac{c}{a}} \\ &= \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}}\end{aligned}$$

(c) $\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2}$;

Resolução. Temos:

$$\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2} = \sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} + \sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

$$\implies (\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2})^2 = (\sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} + \sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}})^2$$

$$= (\sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}})^2 + 2 \cdot (\sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}})$$

$$\cdot (\sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}) + (\sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}})^2$$

$$= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + 2 \cdot (\frac{\sqrt{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} \cdot (-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}}{4a^2})$$

$$+ \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + 2 \cdot (\sqrt{\alpha_1 \cdot \alpha_2}) + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= 2 \cdot \sqrt{\alpha_1 \cdot \alpha_2}^1 + \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= 2 \cdot \sqrt{\alpha_1 \cdot \alpha_2} + \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} + (-b) - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= 2 \cdot \sqrt{\alpha_1 \cdot \alpha_2} + \frac{-2b + \sqrt{b^2 - 4ac} - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\implies (\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2})^2 = 2 \cdot \sqrt{\frac{c}{a}} + \frac{-b}{a}$$

$$\implies \sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2} = \sqrt{2 \cdot \sqrt{\frac{c}{a}} + \frac{-b}{a}}$$

(d) $\sqrt[4]{\alpha_1} + \sqrt[4]{\alpha_2}$;
Resolução. Não fiz.

10. Não fiz.

11. "Uma equação biquadrada tem duas de suas raízes iguais a $\sqrt{2}$ e 3. Determine o valor do coeficiente de 2º grau dessa equação."
Resolução. Tome $ax^4 + bx^2 + c = 0$ como uma equação biquadrada. A partir disso, considere as seguintes equações formadas a partir da substituição do x por cada uma das raízes $\sqrt{2}$ e 3, tomando $a = 1$:

$$\begin{cases} 1 \cdot (\sqrt{2})^4 + b \cdot (\sqrt{2})^2 + c & = 0 \\ 1 \cdot (3)^4 + b \cdot (3)^2 + c & = 0 \end{cases}$$

Tomando a equação inferior, definimos c como:

$$\begin{aligned} 1 \cdot (3)^4 + b \cdot (3)^2 + c = 0 &\implies 81 + 9b + c = 0 \\ &\implies c = -9b - 81 \end{aligned}$$

Aplicando na equação superior para descobrir b:

$$\begin{aligned} 1 \cdot (\sqrt{2})^4 + b \cdot (\sqrt{2})^2 - 9b - 81 = 0 &\implies 4 + 2b - 9b - 81 = 0 \\ &\implies 77 - 7b = 0 \\ &\implies 11 - b = 0 \\ &\implies 11 = b \end{aligned}$$

Agora vamos descobrir c:

$$c = -9 \cdot 11 - 81 \implies c = -99 - 81 \implies c = -180$$

Podemos, por fim, substituir os valores na equação inferior para descobrir se resultam em uma verdade:

$$1 \cdot 81 + (11 \cdot 9) + (-180) = 0 \implies 81 + 99 - 180 = 0 \implies 0 = 0$$

Como chegamos em um resultado verdadeiro temos que o coeficiente b, o qual acompanha o termo de 2º grau na equação, é igual a 11.

12. "Determine o produto das raízes da equação $7 + \sqrt{x^2 - 1} = x^2$."
Resolução. Temos:

$$\begin{aligned} 7 + \sqrt{x^2 - 1} = x^2 &\implies \sqrt{x^2 - 1} = x^2 - 7 \\ &\implies (\sqrt{x^2 - 1})^2 = (x^2 - 7)^2 \\ &\implies x^2 - 1 = x^4 - 2 \cdot x^2 \cdot 7 + 49 \\ &\implies x^2 - 1 = x^4 - 14x^2 + 49 \\ &\implies x^4 - 14x^2 - x^2 + 50 = 0 \\ &\implies x^4 - 15x^2 + 50 = 0 \end{aligned}$$

Tomando $y = x^2$ temos:

$$y^2 - 15y + 50 = 0$$

Vamos calcular as raízes:

$$\begin{aligned} &\text{Discriminante} \\ \Delta = 225 - 200 &= 25 \\ &\text{Fórmula} \\ y = \frac{15 \pm \sqrt{25}}{2} &= \frac{15 \pm 5}{2} \\ &\text{Raízes} \\ y_1 = \frac{15 + 5}{2} &\implies y_1 = 10 \\ y_2 = \frac{15 - 5}{2} &\implies y_2 = 5 \end{aligned}$$

Como $y = x^2$, temos que:

$$y_1 = x_1^2 \implies 10 = x_1^2 \implies \sqrt{x_1^2} = \sqrt{10} \implies x_1 = \pm\sqrt{10}$$
$$y_2 = x_2^2 \implies 5 = x_2^2 \implies \sqrt{x_2^2} = \sqrt{5} \implies x_2 = \pm\sqrt{5}$$

Vamos testar cada um dos casos:

- $x_1 = \sqrt{10}$: *Verdadeiro.*

$$\begin{aligned}&(\sqrt{10})^4 - 15 \cdot (\sqrt{10})^2 + 50 = 0\\ &\implies 10^2 - 15 \cdot 10 + 50 = 0\\ &\implies 100 - 150 + 50 = 0\\ &\implies 0 = 0\end{aligned}$$

- $x_1 = -\sqrt{10}$: *Verdadeiro.*

$$\begin{aligned}&(-\sqrt{10})^4 - 15 \cdot (-\sqrt{10})^2 + 50 = 0\\ &\implies 10^2 - 15 \cdot 10 + 50 = 0\\ &\implies 100 - 150 + 50 = 0\\ &\implies 0 = 0\end{aligned}$$

- $x_2 = \sqrt{5}$: *Verdadeiro.*

$$\begin{aligned}&(\sqrt{5})^4 - 15 \cdot (\sqrt{5})^2 + 50 = 0\\ &\implies 25 - 15 \cdot 5 + 50 = 0\\ &\implies 0 = 0\end{aligned}$$

- $x_2 = -\sqrt{5}$: *Verdadeiro.*

$$\begin{aligned}&(-\sqrt{5})^4 - 15 \cdot (-\sqrt{5})^2 + 50 = 0\\ &\implies 25 - 15 \cdot 5 + 50 = 0\\ &\implies 0 = 0\end{aligned}$$

Sabendo que tais raízes são verdadeiras e reais e conhecendo a propriedade de potências no formato $\frac{m}{n}$ tomemos seu produto:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{10} \cdot (-\sqrt{10}) \cdot \sqrt{5} \cdot (-\sqrt{5}) \\
&= 10^{\frac{1}{2}} \cdot (-10^{\frac{1}{2}}) \cdot 5^{\frac{1}{2}} \cdot (-5^{\frac{1}{2}}) \\
&= (-10^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}) \cdot (-5^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}) \\
&= -10 \cdot (-5) \\
&= 50
\end{aligned}$$

Portanto, o produto das raízes da equação é 50.

13. "Dadas as frações

$$\frac{966666555557}{966666555558} \quad \text{e} \quad \frac{966666555558}{966666555559},$$

qual é a maior?"
Resolução. Seja $x = 966666555558$, $a = \dfrac{x-1}{x}$ e $b = \dfrac{x}{x+1}$ e suponha $a < b$. Temos:

$$\begin{aligned}
\frac{x-1}{x} < \frac{x}{x+1} &\implies \frac{(x-1)\cdot(x+1)}{x} < x \\
&\implies \frac{x^2-1}{x} < x \\
&\implies x^2 - 1 < x^2
\end{aligned}$$

Temos que a conclusão é verdadeira, então a fração b é maior que a fração a.

14. "Nove cópias de certas notas custam menos de reais e dez cópias das mesmas notas (custando o mesmo preço cada uma) custam

mais de 11 reais. Quanto custa uma cópia das notas?"
Resolução. Seja c a cópia de uma nota. Temos a seguinte situação de inequações:

$$\begin{aligned} 9c &< 10 \\ 10c &> 11 \end{aligned}$$

Tomando a 2ª inequação, vamos definir c:

$$\begin{aligned} 10c > 11 &\implies c > \frac{11}{10} \\ &\implies c > 1,10 \end{aligned}$$

Tomando a 1ª inequação, vamos definir c:

$$\begin{aligned} 9c < 10 &\implies c < \frac{10}{9} \\ &\implies c < 1,1111... \end{aligned}$$

Portanto, temos que uma cópia de uma nota custa

$$1,10 < c < 1,111...$$

15. "Ache os valores de x para os quais cada uma das seguintes inequações é válida:"

    (a) $x^2 - 9 > 0$;
    Resolução. Temos:

    $$x^2 - 9 > 0 \implies (x-3) \cdot (x+3) > 0$$

    Fazendo o estudo do sinal, notamos que, se $x < -3$ ou $x > 3$, a desigualdade é válida. Logo, o conjunto solução da inequação é

    $$S = \{x \in \mathbb{R}; x < -3 \text{ ou } x > 3\}.$$

(b) $\dfrac{x}{x^2+9} > 0$;
Resolução. Temos:

$$\frac{x}{x^2+9} > 0 \implies x > 0 \quad \cdot (x^2+9)$$

Portanto, o conjunto solução que torna a desigualdade verdadeira é

$$S = \{x; x \in \mathbb{R}_+^*\}$$

(c) $\dfrac{x-3}{x+1} > 0$;
Resolução. Fazendo o estudo de sinal de $x-3, x+1$ e $\dfrac{x-3}{x+1}$, temos que, para que $x > 0$, o conjunto solução será:

$$S = \{x \in \mathbb{R}; x < -1 \text{ ou } x > 3\}$$

(d) $\dfrac{x^2-1}{x^2-3} > 0$;
Resolução. Note que $x^2 - 1 = (x-1)\cdot(x+1)$ e $x^2 - 3 = (x-\sqrt{3})\cdot(x+\sqrt{3})$.
Fazendo o estudo de sinal de $\dfrac{(x-1)\cdot(x+1)}{(x-\sqrt{3})\cdot(x+\sqrt{3})}$, temos que o conjunto solução para a desigualdade é

$$S = \{x \in \mathbb{R}; x < -\sqrt{3} \text{ ou } (x > -1 \text{ e } x < 1) \text{ ou } x > \sqrt{3}\}$$

(e) $\dfrac{x^2+x-6}{x^2+6x+5} \leq 0$
Resolução. Note que $\dfrac{x^2+x-6}{x^2+6x+5} = \dfrac{(x-2)\cdot(x+3)}{(x+1)\cdot(x+5)}$.
Fazendo o estudo do sinal dessa fração, temos que o conjunto solução que atende à desigualdade é

$$S = \{x \in \mathbb{R}; -5 < x \leq -3 \text{ ou } -1 < x \leq 2\}$$

(f) $\dfrac{-x^2 - x + 6}{x^2 - 5x + 4} \leq 0$

Resolução. Note que $\dfrac{-x^2 - x + 6}{x^2 - 5x + 4} = \dfrac{(-x-3)\cdot(x-2)}{(x-4)\cdot(x-1)}$. Fazendo o estudo do sinal, temos que o conjunto solução que atende à desigualdade é

$$S = \{x \in \mathbb{R}; x \leq -3 \text{ ou } 1 < x \leq 2 \text{ ou } x > 4\}$$

16. Não fiz.

17. "Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}_+^*$, tais que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Mostre que"

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

Resolução. Podemos fazer esta prova por partes. Provemos primeiro que $\dfrac{a}{b} < \dfrac{a+c}{b+d}$:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} < \frac{c}{d} &\implies ad < bc \\
&\implies ad + ab < bc + ab \\
&\implies a(b+d) < b(a+c) \\
&\implies \frac{a\cdot(b+d)}{b} < a + c \\
&\implies \frac{a}{b} < \frac{a+b}{c+d}
\end{aligned}$$

Provemos agora que $\dfrac{a+c}{b+d} < \dfrac{c}{d}$:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} < \frac{c}{d} &\implies ad < bc \\
&\implies ad + c < bc + c \\
&\implies 2d \cdot a + c < 2c \cdot b + d \\
&\implies a + c < \frac{2c \cdot b + d}{2d} \\
&\implies \frac{a+c}{b+d} < \frac{2c}{2d} \\
&\implies \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}
\end{aligned}$$

Desse modo, notamos que, de fato

$$\frac{a}{b} < \frac{a+b}{c+d} < \frac{c}{d}$$

18. "Mostre que se r, s são números racionais positivos satisfazendo $r < s$, então existe um outro número racional q tal que $r < q < s$."

Resolução. Podemos reescrever os números como $r = \frac{a}{b}, s = \frac{c}{d}$, onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $b, d \neq 0$. Tomando $q = \frac{a+c}{2 \cdot b \cdot d}$, provemos que $r < q$:

$$\begin{aligned}
r < s &\implies \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \\
&\implies \frac{a}{b} + \frac{a}{b} < \frac{a}{b} + \frac{c}{d} \\
&\implies \frac{2a}{b} < \frac{a}{b} + \frac{c}{d} \\
&\implies \frac{a}{b} < \frac{\frac{a}{b} + \frac{c}{d}}{2} \quad (\cdot \frac{1}{2}) \\
&\implies \frac{a}{b} < \frac{a+c}{2 \cdot b \cdot d}
\end{aligned}$$

Provemos agora que $q < s$:

$$\begin{aligned} r < s &\implies \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \\ &\implies \frac{a}{b} + \frac{c}{d} < \frac{2c}{d} \\ &\implies \frac{\frac{a}{b} + \frac{c}{d}}{2} < \frac{c}{d} \\ &\implies \frac{a+c}{2 \cdot b \cdot d} < \frac{c}{d} \end{aligned}$$

Então, temos provado que

$$r < q < s$$

19. Não fiz.

20. Não fiz.

21. "Determine o conjunto solução de cada uma das equações ou inequações modulares abaixo:"

    (a) $|3x - 5| = 7$;
    Resolução. Temos por definição que:

    $$|3x-5| = \begin{cases} 3x-5, \text{ se } 3x-5 \geq 0 \implies & x \geq \dfrac{5}{3} \\ -(3x-5), \text{ se } 3x-5 < 0 \implies & x < \dfrac{5}{3} \end{cases}$$

    Analisemos cada um dos casos:

    - Se $x \geq \dfrac{5}{3}$: *Verdadeiro.* 4 é maior que $\dfrac{5}{3}$.

    $$\begin{aligned} 3x - 5 = 7 &\implies 3x = 12 \\ &\implies x = 4 \end{aligned}$$

- Se $x < \frac{5}{3}$: *Verdadeiro.* O número negativo é menor que $\frac{5}{3}$.

$$\begin{aligned} -(3x-5) = 7 &\implies -3x+5 = 7 \\ &\implies -3x = 2 \\ &\implies x = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Desse modo o conjunto solução será

$$S = \{-\frac{2}{3}, 4\}$$

(b) $|-x+8| = -1$;

Resolução. Temos por definição:

$$|-x+8| = \begin{cases} -x+8, \text{ se } -x+8 \geq 0 \implies x \leq 8 \\ -(-x+8), \text{ se } -x+8 < 0 \implies x > 8 \end{cases}$$

Analisemos cada um dos casos:

- Se $x \leq 8$; *Falso.* Chegamos em um absurdo, pois 9 não é menor ou igual a 8.

$$\begin{aligned} -x+8 = -1 &\implies -x = -9 \\ &\implies x = 9 \end{aligned}$$

- Se $x > 8$; *Falso.* Chegamos em um absurdo.

$$\begin{aligned} -(-x+8) = -1 &\implies x-8 = -1 \\ &\implies x = 7 \end{aligned}$$

Logo não há conjunto solução para essa equação.

(c) $|x^2 - 9| = 7$
Resolução. Note que $x^2 - 9 = (x-3)\cdot(x+3)$. Temos por definição:

$$|x^2-9| = \begin{cases} x^2 - 9, \text{ se } x^2 - 9 \geq 0 \implies (x-3)\cdot(x+3) \geq 0 \\ -(x^2-9), \text{ se } x^2 - 9 < 0 \implies (x-3)\cdot(x+3) < 0 \end{cases}$$

Fazendo o estudo do sinal temos os seguintes conjunto-solução para os casos:

- Se $x \in]-\infty; -3]$ ou $x \in [3; \infty[$:

$$\begin{aligned} |x^2 - 9| = 7 &\implies x^2 - 9 = 7 \\ &\implies x^2 = 16 \\ &\implies x = \pm 4 \end{aligned}$$

  Temos, portanto, que esse caso é verdadeir, pois $-4 \in]-\infty; -3]$ e $4 \in [3; \infty[$.

- Se $x \in]-3; 3[$:

$$\begin{aligned} |x^2 - 9| = 7 &\implies -x^2 + 9 = 7 \\ &\implies -x^2 = -2 \\ &\implies x^2 = 2 \\ &\implies x = \sqrt{2} \end{aligned}$$

  Temos que este caso também é verdadeiro. Assim podemos concluir que o conjunto solução desta equação modular é:

$$S = \{-4; \sqrt{2}; 4\}$$

(d) $|x^2 - 1| = 3$;
Não fiz.

(e) $|x+1| + |-3x+2| = 6$;
Resolução. Temos por definição:

$$|x+1| = \begin{cases} x+1, \text{ se } x+1 \geq 0 \implies x \geq -1 \\ -(x+1), \text{ se } x+1 < 0 \implies x < -1 \end{cases}$$

$$|-3x+2| = \begin{cases} -3x+2, \text{ se } -3x+2 \geq 0 \implies x \geq \frac{2}{3} \\ -(-3x+2), \text{ se } -3x+2 < 0 \implies x < \frac{2}{3} \end{cases}$$

Podemos resolver tal situação com partição de intervalos:

- Se $x < -1$: *Falso.* Chegamos em um absurdo, então não há solução para este caso.

$$\begin{aligned} -x-1+3x-2=6 &\implies 2x-9=0 \\ &\implies x=\frac{9}{2} \end{aligned}$$

- Se $-1 \leq x < \frac{2}{3}$: *Falso.* Não há solução para este caso.

$$\begin{aligned} x+1+3x-2=6 &\implies 4x-7=0 \\ &\implies x=\frac{7}{4} \end{aligned}$$

- Se $x \geq \frac{2}{3}$: *Falso.* Não há solução para este caso.

$$\begin{aligned} x+1-3x+2=6 &\implies -2x=3 \\ &\implies x=-\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Portanto temos que esta equação modular não tem soluções.

(f) $|x-1| \cdot |x+2| = 3$;
Resolução. Temos por definição:

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, \text{ se } x-1 \geq 0 \implies x \geq 1 \\ -(x-1), \text{ se } x-1 < 0 \implies x < 1 \end{cases}$$

$$|x+2| = \begin{cases} x+2, \text{ se } x+2 \geq 0 \implies x \geq -2 \\ -(x+2), \text{ se } x+2 < 0 \implies x < -2 \end{cases}$$

Apliquemos a partição entre intervalos:

- Se $x < -2$: *Verdadeiro para* $x = \dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}$.

$$\begin{aligned} (-x+1)\cdot(-x-2) = 3 &\implies x^2 + 2x - x - 2 = 3 \\ &\implies x^2 + x - 5 = 0 \end{aligned}$$

Fórmula

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-(-20)}}{2} \implies x = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$$

Raízes

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{21}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-1-\sqrt{21}}{2}$$

  – Caso $x = \frac{-1+\sqrt{21}}{2}$: *Falso*. Um número positivo não é menor que um número negativo.

$$\begin{aligned} \frac{-1+\sqrt{21}}{2} < -2 &\implies -1+\sqrt{21} < -4 \\ &\implies \sqrt{21} < -3 \end{aligned}$$

  – Caso $x = \frac{-1-\sqrt{21}}{2}$: *Verdadeiro.*

$$\begin{aligned} \frac{-1-\sqrt{21}}{2} < -2 &\implies -\sqrt{21} < -3 \\ &\implies (-\sqrt{21})^2 < (-3)^2 \\ &\implies 21 > 9 \end{aligned}$$

- Se $-2 \leq x < 1$: *Falso.* Não há solução real.

$$\begin{aligned} -(x-1)\cdot(x+2) = 3 &\implies (-x+1)\cdot(x+2) - 3 = 0 \\ &\implies -x^2 - 2x + x + 2 - 3 = 0 \\ &\implies -x^2 - x - 1 = 0 \end{aligned}$$

Fórmula

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{-2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{-2}$$

- Se $x \geq 1$: *Falso.*

$$\begin{aligned} (x-1)\cdot(x+2) = 3 &\implies x^2 + 2x - x + 2 - 3 = 0 \\ &\implies x^2 + x - 1 = 0 \end{aligned}$$

Fórmula

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Raízes

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

  - Caso $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$: *Falso.*

$$\begin{aligned} \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \geq 1 &\implies -1 + \sqrt{5} \geq 2 \\ &\implies \sqrt{5} \geq 3 \end{aligned}$$

- Caso $x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$: *Falso.*

$$\begin{aligned} \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \geq 1 &\implies -1-\sqrt{5} \geq 2 \\ &\implies -\sqrt{5} \geq 3 \end{aligned}$$

Analisando todos os casos podemos concluir, portanto, que o conjunto solução para a equação modular é:

$$S = \{\frac{-1-\sqrt{21}}{2}\}$$

(g) $|2x-5|-3 \leq -2$;
Resolução. Note que:

$$|2x-5|-3 \leq -2 \implies |2x-5| \leq 1$$

Portanto temos que:

$$\begin{aligned} |2x-5| \leq 1 &\implies -1 \leq 2x-5 \leq 1 \\ &\implies 4 \leq 2x \leq 6 \\ &\implies 2 \leq x \leq 3 \end{aligned}$$

Desse modo temos que o conjunto solução desta inequação é:

$$S = \{x \in \mathbb{R}; 2 \leq x \leq 3\}$$

(h) $|x^2-1| \leq 3$;

Resolução. Temos:

$$\begin{aligned}|x^2-1|\leq 3 &\implies -3\leq x^2+1\leq 3\\ &\implies -2\leq x^2\leq 4\\ &\implies 0\leq x^2\leq 4 \quad (x^2\geq 0)\\ &\implies \sqrt{x^2}\leq\sqrt{4}\\ &\implies |x|\leq \pm 2\\ &\implies -2\leq x\leq 2\end{aligned}$$

Desse modo o conjunto solução para esta inequação é

$$S=\{x\in\mathbb{R}; -2\leq x\leq 2\}$$

(i) $|x+1|-|x-1|<-2$;

Resolução. Podemos utilizar da partição em intervalos. Note que:

$$|x+1|=\begin{cases} x+1, \text{ se } x+1\geq 0 \implies x\geq -1\\ -(x+1), \text{ se } x+1<0 \implies x<-1\end{cases}$$

$$|x-1|=\begin{cases} x-1, \text{ se } x-1\geq 0 \implies x\geq 1\\ -(x-1), \text{ se } x-1<0 \implies x<1\end{cases}$$

Temos os seguintes casos:

- Se $x<-1$: *Falso.* Não existe solução para este caso.

$$\begin{aligned}|x+1|-|x-1|<-2 &\implies -x-1-(-x+1)<-2\\ &\implies -2<-2\end{aligned}$$

- Se $x\geq -1$ e $x<1$: *Falso.* Chegamos em um absurdo pois $x\geq -1$; não existe solução.

$$\begin{aligned}|x+1|-|x-1|<-2 &\implies x+1-(-x+1)<-2\\ &\implies 2x<-2\\ &\implies x<-1\end{aligned}$$

- Se $x \geq 1$: *Falso.* Não existe solução para este caso.

$$\begin{aligned} |x+1| - |x-1| < -2 &\implies x + 1 - (x-1) < -2 \\ &\implies 2 < -2 \end{aligned}$$

Como não encontramos solução para nenhum dos outros casos, temos que o conjunto solução é

$$S = \emptyset$$

22. "Prove que $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$".
Resolução. Temos, por definição:

$$|x| = \begin{cases} x \text{ se } x \geq 0 \\ -(x), \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

$$|y| = \begin{cases} y, \text{ se } y \geq 0 \\ -(y), \text{ se } y < 0 \end{cases}$$

$$|x \cdot y| = \begin{cases} x \cdot y, \text{ se } x \cdot y \geq 0 \\ -(x \cdot y), \text{ se } x \cdot y < 0 \end{cases}$$

Podemos utilizar a partição em intervalos:

- Se $x, y \geq 0$:

$$\begin{aligned} |x \cdot y| = |x| \cdot |y| &\implies |x \cdot y| = x \cdot y \\ &\implies x \cdot y = x \cdot y \end{aligned}$$

- Se $x \geq 0, y < 0$: *O resultado é análogo para* $x < 0, y \geq 0$.

$$\begin{aligned} |x \cdot y| = |x \cdot |y| &\implies |x \cdot y| = -(x \cdot y) \\ &\implies -(x \cdot y) = -(x \cdot y) \end{aligned}$$

- Se $x, y < 0$:

$$\begin{aligned} |x \cdot y| = |x| \cdot |y| &\implies |x \cdot y| = -x \cdot (-y) \\ &\implies |x \cdot y| = x \cdot y \\ &\implies x \cdot y = x \cdot y \end{aligned}$$

Portanto, está provada a equivalência das expressões.

23. "Seja $x \in \mathbb{R}$. Mostre que"

(a) $|x-5| < 0,1 \implies |2x-10| < 0,2$;
Resolução. Temos:

$$\begin{aligned} |x-5| < 0,1 &\implies -0,1 < x-5 < 0,1 \\ &\implies -0,2 < 2x-10 < 0,2 \quad (\cdot 2) \\ &\implies |2x-10| < 0,2 \end{aligned}$$

Assim, está provada a implicação.

(b) $|x+3| < 0,1 \implies |-\frac{3}{2}x + 3 - 7,5| < 0,15$;
Resolução. Temos:

$$\begin{aligned} |x+3| < 0,1 &\implies -0,1 < x+3 < 0,1 \\ &\implies -0,1 < x+3-7,5 \\ &\implies -0,1 < x-2+5 < 0,1 \quad (3 = 5-2) \\ &\implies -0,1 \cdot (-\frac{3}{2}) < (x-2+5) \cdot (-\frac{3}{2}) < 0,1 \cdot (-\frac{3}{2}) \\ &\implies 0,15 > -\frac{3}{2}x + 3 - 7,5 > -0,15 \\ &\implies |-\frac{3}{2}x + 3 - 7,5| < 0,15 \quad (\text{"Fecho" o módulo}) \end{aligned}$$

Assim, está provada a implicação.

(c) $|x-2| < \sqrt{5} - 2 \implies |x^2 - 4| < 1$;
Não fiz.

(d) $|x-3| < \sqrt{46} - 5 \implies |x^2 + 4x - 21| < 21$
Resolução. Temos que:

$$
\begin{aligned}
|x-3| < \sqrt{46} - 5 &\implies -(\sqrt{46} - 5) < x - 3 < \sqrt{46} - 5 \\
&\implies -\sqrt{46} + 5 < x - 3 < \sqrt{46} - 5 \\
&\implies -\sqrt{46} + 10 < x + 2 < \sqrt{46} \quad (+5) \\
&\implies (-\sqrt{46} + 10)^2 < (x+2)^2 < (\sqrt{46})^2 \\
&\implies 46 - 20\sqrt{46} + 100 < x^2 + 4x + 4 < 46 \\
&\implies 21 - 20\sqrt{46} + 100 < x^2 + 4x - 21 < 21 \quad (-21) \\
&\implies -21 < 21 - 20\sqrt{46} + 10 < x^2 + 4x - 21 < 21 \\
&\implies -21 < x^2 + 4x - 21 < 21 \quad \text{(Transitividade)} \\
&\implies |x^2 + 4x - 21| < 21
\end{aligned}
$$

Assim, está provada a implicação.

24. “Suponha que $0 < a < b$. Prove que”

$$a < \sqrt{a \cdot b} < b$$

Resolução. Temos primeiro que:

$$0 < a < b \implies 0 < a^2 < b$$

Também temos:

$$0 < a < b \implies 0 < ab < b^2$$

Logo, por transitividade, podemos afirmar que

$$\begin{aligned} 0 < a < b &\implies a^2 < ab < b^2 \\ &\implies \sqrt{a^2} < \sqrt{ab} < \sqrt{b^2} \\ &\implies |a| < \sqrt{ab} < |b| \\ &\implies a < \sqrt{ab} < b \quad (a, b > 0) \end{aligned}$$

Assim, está provada a proposição.