

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO
NORTE
INSTITUTO METRÓPOLE DIGITAL
Soluções de Exercícios de Matemática Elementar

Nome: Andriel Fernandes

Capítulo 04 - Exercício de Funções - Parte I

1. “Em cada um dos itens abaixo, defina uma função com a lei de formação dada (indicando domínio e contradomínio). Verifique se é injetiva, sobrejetiva ou bijetiva, a função:”

- (a) “Que a cada ponto do plano cartesiano associa a distância desse plano à origem do plano;”

Resolução. Seja a função

$$\begin{aligned}d : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\(x, y) &\rightarrow \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2}\end{aligned}$$

Injetividade: **não**. Sejam os pontos $(6, 4), (4, 6) \in \mathbb{R}$ e note que:

$$f(6, 4) = \sqrt{10} = f(4, 6)$$

Sobrejetividade: **sim**. Tomando $\sqrt{x + y} \in \mathbb{R}_+$ e $x, y \in \mathbb{R}$, temos:

$$f(x, y) = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{x + y}$$

- (b) “Que a cada dois números naturais associa seu MDC;”

Resolução: Tomando mdc como uma função que calcula o

máximo divisor comum entre dois números, seja a função

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N}^2 &\rightarrow \mathbb{N}^* \\ a, b &\rightarrow mdc(a, b). \end{aligned}$$

Injetividade: **não**, visto que

$$f(6, 2) = 2 = f(4, 2)$$

Sobrejetividade: **sim**. Tomando $x \in \mathbb{N}^*$ e $a, b \in \mathbb{N}$, temos:

$$f(a, b) \implies mdc(a, b) = x.$$

Como é válido para qualquer $x \in \mathbb{N}^*$ temos que a função é sobrejetiva.

- (c) “Que a cada polinômio (não nulo) com coeficientes reais associa seu grau;”

Não fiz ainda.

- (d) “Que a cada figura plana fechada e limitada associa a sua área;”

Não fiz ainda.

- (e) “Que a cada subconjunto de \mathbb{R} associa seu complementar;”

Resolução: Seja a função

$$\begin{aligned} c : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ R &\rightarrow R^C \end{aligned}$$

Injetividade: **sim**. Sejam $A, B \subseteq \mathbb{R}$, de modo que $A \neq B$. Então temos:

$$A \neq B \implies c(A) \neq c(B) \implies A^C \neq B^C$$

Portanto é injetiva.

Sobrejetiva: **sim.** Seja $N^C \subseteq \mathbb{R}$; logo, existe $N \subseteq \mathbb{R}$ de modo que

$$c(N) = N^C$$

Portanto é sobrejetiva e, além disso, é também bijetiva.

- (f) “Que a cada subconjunto finito de \mathbb{N} associa seu número de elementos;”

Resolução: Tomando n como uma função que calcula a quantidade de elementos de um conjunto, seja a função

$$\begin{aligned} h : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ X &\rightarrow n(X) \end{aligned}$$

Injetividade: **não.** Tomando $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{6, 7, 8\}$, temos

$$h(A) = 3 = h(B)$$

Sobrejetividade: **sim.** Seja $n \in \mathbb{N}$; temos um conjunto $X \subseteq \mathbb{N}$:

$$h(X) \implies n(X) = n$$

Portanto é sobrejetiva.

- (g) “Que a cada subconjunto não vazio de \mathbb{N} associa seu menor elemento;”

Resolução: Tomando \inf como uma função que calcula o menor elemento de um conjunto, seja a função

$$\begin{aligned} i : \mathbb{N} \setminus \emptyset &\rightarrow \mathbb{N} \\ X &\rightarrow \inf(X) \end{aligned}$$

Injetividade: **não.** Sendo os conjuntos $A = \{1, 3, 5, 7\}$ e $B = \{1, 2, 4, 8\}$, note que

$$i(A) = 1 = i(B)$$

Sobrejetividade: **sim**. Tome $C \subseteq \mathbb{N}$ e $n \in C$; então, temos:

$$i(C) \implies \inf(C) = n$$

Portanto é sobrejetiva.

2. “Considere a função $g : [0; 5] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:”

$$g(x) = \begin{cases} 4x - x^2; & x < 3 \\ x - 2; & x \geq 3 \end{cases}$$

“Determine as soluções de:”

(a) $g(x) = -1$;

i. Se $x < 3$:

Temos $4x - x^2 = -1 \implies 4x - x^2 + 1 = 0$. Aplicando lei de Bhaskara, temos:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - (-4)}}{-2} \\ \implies x &= \frac{-4 \pm \sqrt{20}}{-2} \\ \implies x &= \frac{-4 \pm 2\sqrt{5}}{-2} \end{aligned}$$

Portanto, tomando $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, temos as possibilidades:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-4 + 2\sqrt{5}}{-2} \implies 2 - \sqrt{5} \\ x_2 &= \frac{-4 - 2\sqrt{5}}{-2} \implies 2 + \sqrt{5} \end{aligned}$$

Como $x_2 < 3$ e $x_1 \notin [0; 5]$, temos que não há conjunto solução para este caso.

ii. Se $x \geq 3$:

Temos

$$x - 2 = -1 \implies x - 1 = 0 \implies x = 1.$$

Temos que x não é maior ou igual a três. Logo, não há solução para quando $g(x) = -1$.

(b) $g(x) = 0$;

i. Se $x < 3$:

Temos:

$$4x - x^2 = 0$$

Aplicando lei de Bhaskara, temos:

$$\begin{aligned} x &= \frac{(-4) \pm \sqrt{16 - 0}}{-2} \\ \implies x &= \frac{(-4) \pm 4}{-2} \end{aligned}$$

Tomando $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, temos as seguintes possibilidades:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{(-4) - 4}{-2} \implies x_1 = 4 \\ x_2 &= \frac{(-4) + 4}{-2} \implies x_2 = 0 \end{aligned}$$

Temos que $x_1 > 3$, logo não é solução. Então, seja S_1 o seguinte conjunto solução:

$$S_1 = \{0\} \cap] - \infty; 3[\cap [0; 5] = 0$$

ii. Se $x \geq 3$:

Temos:

$$x - 2 = 0 \implies x = 2$$

Temos que x não é maior ou igual a 3. Portanto a solução para $g(x) = 0$ é somente 0.

(c) $g(x) = 3$;

i. Se $x < 3$:

Temos:

$$4x - x^2 = 3 \implies 4x - x^2 - 3 = 0$$

Aplicando lei de Bhaskara, temos:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-4 \pm \sqrt{16 - (-12)}}{-2} \\ \implies x &= \frac{-4 \pm 2\sqrt{7}}{-2} \end{aligned}$$

Tomemos as possibilidades $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-4 + 2\sqrt{7}}{-2} \implies x_1 = 2 - \sqrt{7}; \\ x_2 &= \frac{-4 - 2\sqrt{7}}{-2} \implies x_2 = 2 + \sqrt{7} \end{aligned}$$

Temos que $x_1 \notin [0; 5]$ e x_2 não é menor que 3. Logo, não há solução para este caso.

ii. Se $x \geq 3$:

Temos:

$$x - 2 = 3 \implies x = 5$$

Seja S , então, o seguinte conjunto solução:

$$S = 5 \cap [3; \infty[\cap [0; 5] = 5$$

Portanto, a única solução para quando $g(x) = 3$ é 5.

(d) Se $g(x) = 4$:

i. Caso $x < 3$:

Temos:

$$4x - x^2 = 4 \implies 4x - x^2 - 4 = 0$$

Aplicando lei de Bhaskara, temos:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 16}}{-2} \\ \implies x &= \frac{-4 \pm 0}{-2} \\ \implies x &= 2 \end{aligned}$$

Temos o conjunto solução S_1 tal que:

$$S_1 = 2 \cap]-\infty; 3[\cap [0; 5] = 2$$

ii. Caso $x \geq 3$:

Temos:

$$x - 2 = 4 \implies x = 6$$

Temos S_2 como o seguinte conjunto solução:

$$S_2 = 6 \cap [3; \infty[\cap [0; 5] = \emptyset$$

Portanto, temos que a única solução para $g(x) = 4$ é 2.

(e) Se $g(x) < 3$:

i. Caso $x < 3$:

Em desenvolvimento.

ii. Caso $x \geq 3$:

Temos:

$$x - 2 \geq 3 \implies x \geq 5$$

Temos o seguinte conjunto-solução para este caso:

$$S_2 = [5; \infty[\cap [3; \infty[\cap [0; 5] = 5$$

Temos, portanto, que as soluções para $g(x) < 3$ são

Em desenvolvimento.

3. “Considere a função $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Z}$ tal que

$$f(n) = \begin{cases} \frac{-n}{2}; & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{n-1}{2}; & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Mostre que f é bijetiva.”

Resolução: Devemos mostrar que f é injetiva e sobrejetiva para todos os casos. Começamos com a injetividade para:

- Se n é par:

Sejam $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$ e ambos pares. Temos:

$$\begin{aligned} f(n_1) = f(n_2) &\implies \frac{-n_1}{2} = \frac{-n_2}{2} & (\cdot 2) \\ &\implies (-n_1) = (-n_2) & (\cdot -1) \\ &\implies n_1 = n_2 \end{aligned}$$

- Se n é ímpar:

Sejam $n_3, n_4 \in \mathbb{N}^*$ e ambos ímpares. Temos:

$$\begin{aligned} f(n_3) = f(n_4) &\implies \frac{n_3-1}{2} = \frac{n_4-1}{2} & (\cdot 2) \\ &\implies n_3-1 = n_4-1 & (+1) \\ &\implies n_3 = n_4 \end{aligned}$$

- Se um elemento é ímpar e outro par:
Sejam $n_5, n_6 \in \mathbb{N}^*$, onde n_5 é ímpar e n_6 é par. Temos:

$$\begin{aligned} n_5 > 0 &\implies -n_5 < 0 \\ &\implies \frac{-n}{5} < 0 \\ &\implies f(n_5) < 0 \end{aligned}$$

Temos também que:

$$\begin{aligned} n_6 \geq 1 &\implies n_6 - 1 \geq 0 \\ &\implies \frac{n_6 - 1}{2} \geq 0 \\ &\implies f(n_6) \geq 0 \end{aligned}$$

Dessa forma, temos que $n_5 \neq n_6 \implies f(n_5) \neq f(n_6)$. Logo, a função é injetiva para todos os casos.

Assim, está provada a injetividade da função f . Vejamos a sobrejetividade:

- Se n é par:
Note que, quando executada sobre os números pares, a função f gera um inteiro negativo.
Logo, seja $y \in \mathbb{N}^*$, $(-2y) \in \mathbb{Z}_-$, tal que y é par. Portanto, ao aplicar a função sobre $(-2y)$:

$$f(-2y) = \frac{-(-2y)}{2} = y$$

- Se n é ímpar:
Note que executando a função f sobre os números ímpares naturais, temos somente números inteiros não-negativos.

Logo, seja $z \in \mathbb{N}^*$ e $(2z+1) \in \mathbb{Z}_+$, tal que z é ímpar. Assim, temos:

$$f(2z+1) = \frac{(2z+1)-1}{2} = z$$

Portanto, está provada a sobrejetividade para ambos os casos de n . Consequentemente também está provada a bijetividade de f .

4. “Considere a função $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ tal que $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Responda as seguintes perguntas apresentando as respectivas justificativas:”

- (a) “ f é injetiva”?

Não. Tomando $1, -1$, temos:

$$\begin{aligned} 1 \neq -1 &\implies f(1) \neq f(-1) \\ &\implies \frac{1}{1+1^2} \neq \frac{1}{1+(-1)^2} \\ &\implies \frac{1}{2} \neq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Contudo, tal conclusão é um absurdo e mostra que dois elementos diferentes podem gerar a mesma imagem. Portanto, a função f não é injetiva.

- (b) “ f é sobrejetiva”?

Não. Note que, sendo $1 \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned} f(x) = 1 &\implies \frac{1}{1+x^2} = 1 \\ &\implies 1 = 1 \cdot (1+x^2) \\ &\implies 1 = 1+x^2 \\ &\implies x^2 = 0 \end{aligned}$$

Como $0 \notin \mathbb{R}^*$, temos que a função não é sobrejetiva, pois não há $x \in \mathbb{R}^*$ tal que $f(x) = 1$.

5. “Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função cuja lei de associação é da forma abaixo:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x; & \text{se } x \geq 0 \\ \frac{3}{2}x; & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Mostre que f é bijetiva.”

Resolução. Provemos que é injetiva.

- Se $a, b \geq 0$;

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Temos que:

$$\begin{aligned} f(a) = f(b) &\implies a^2 + 3a = b^2 + 3b \\ &\implies a^2 + 3a + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = b^2 + 3b + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\ &\implies \left(a + \frac{3}{2}\right)^2 = \left(b + \frac{3}{2}\right)^2 \\ &\implies \sqrt{\left(a + \frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(b + \frac{3}{2}\right)^2} \\ &\implies a + \frac{3}{2} = b + \frac{3}{2} \\ &\implies a = b \end{aligned}$$

- Se $a, b < 0$;

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Temos que:

$$\begin{aligned} f(a) = f(b) &\implies \frac{3}{2}a = \frac{3}{2}b \\ &\implies \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}a = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}b \\ &\implies a = b \end{aligned}$$

- Se $a \geq 0$ e $b < 0$;
Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Temos:

$$\begin{aligned}
 a \geq 0 &\implies a + \frac{3}{2} \geq \frac{3}{2} \\
 &\implies \left(a + \frac{3}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\
 &\implies a^2 + 3a + \frac{9}{4} \geq \frac{9}{4} \\
 &\implies a^2 + 3a \geq 0 \\
 &\implies f(a) \geq 0
 \end{aligned}$$

Também temos que:

$$\begin{aligned}
 b < 0 &\implies \frac{3}{2}b < 0 \\
 &\implies f(b) < 0
 \end{aligned}$$

Assim, $a \neq b \implies f(a) \neq f(b)$. Logo, a função é injetiva para todos os casos.

Provemos agora que é sobrejetiva. **Em desenvolvimento.**

6. Fiz, mas falta colocar.

7. “Considere

$$f : [3, 5; +\infty[\rightarrow [-2, 25; +\infty[$$

tal que $f(x) = x^2 - 7x + 10$. Prove que f é bijetiva.”

Resolução. Provemos primeiro sua sobrejetividade. Seja $y \in [-2, 25; +\infty[$; logo, se a função é sobrejetiva, existe um número

$\sqrt{y + \frac{9}{4}} + \frac{7}{2}$ tal que

$$\begin{aligned} f\left(\sqrt{y + \frac{9}{4}} + \frac{7}{2}\right) &= \left(\sqrt{y + \frac{9}{4}} + \frac{7}{2}\right)^2 - 7 \cdot \left(\sqrt{y + \frac{9}{4}} + \frac{7}{2}\right) + 10 \\ &= y + \frac{9}{4} + 2 \cdot \frac{7}{2} \cdot \sqrt{y + \frac{9}{4}} + \frac{49}{4} - 7\sqrt{y + \frac{9}{4}} - \frac{49}{2} + 10 \\ &= y + \frac{9}{4} + \frac{49}{4} - \frac{49}{2} + 10 \\ &= y + \frac{58}{4} - \frac{29}{2} \\ &= y + \frac{58 - 58}{4} \\ &= y \end{aligned}$$

Portanto, está provada a sobrejetividade.

Por fim, provemos sua injetividade. Tomando $a, b \in [3, 5; +\infty[$, temos que

$$\begin{aligned} f(a) = f(b) &\implies a^2 - 7a + 10 = b^2 - 7b + 10 \\ &\implies a^2 - 7a = b^2 - 7b \\ &\implies a^2 - 7a + \left(\frac{7}{2}\right)^2 = b^2 - 7a + \left(\frac{7}{2}\right)^2 \\ &\implies \left(a - \frac{7}{2}\right)^2 = \left(b - \frac{7}{2}\right)^2 \\ &\implies a - \frac{7}{2} = b - \frac{7}{2} \\ &\implies a = b \end{aligned}$$

Assim está provada a injetividade e, consequentemente, a bijetividade da função.

8. Não fiz ainda.

9. “Considere as funções reais $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$. Demonstre ou refute com contraexemplos as afirmações abaixo:”

- (a) “Se f e g são injetivas, então $(g \circ f)$ é injetiva;”
Resolução. Temos que $(g \circ f)$ é definida tal que

$$g \circ f : X \rightarrow Z$$

Se f é injetiva e g também, tomando $a, b \in X$ e $x, y \in Y$ temos:

$$\begin{aligned} (g \circ f)(a) = (g \circ f)(b) &\implies g(f(a)) = g(f(b)) \\ &\implies g(x) = g(y) \\ &\implies x = y \end{aligned}$$

Portanto, $(g \circ f)$ é de fato injetiva e a afirmação é verdadeira.

- (b) “Se $(g \circ f)$ é injetiva, então f e g são injetivas.”
Resolução. Sejam as funções

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N}^* &\rightarrow \mathbb{N} \\ x &\rightarrow \begin{cases} x, & \text{se } x \text{ é ímpar} \\ \frac{x}{2}, & \text{se } x \text{ é par} \end{cases}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ y &\rightarrow 2y, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g \circ f : \mathbb{N}^* &\rightarrow \mathbb{N} \\ x &\rightarrow y \rightarrow 2y \end{aligned}$$

Note, portanto, os seguintes casos:

- Se x_1, x_2 são ímpares:

$$\begin{aligned} g(f(x_1)) = g(f(x_2)) &\implies g(x_1) = g(x_2) \\ &\implies 2x_1 = 2x_2 \\ &\implies x_1 = x_2 \end{aligned}$$

- Se x_1, x_2 são pares:

$$\begin{aligned} g(f(x_1)) = g(f(x_2)) &\implies g\left(\frac{x_1}{2}\right) = g\left(\frac{x_2}{2}\right) \\ &\implies x_1 = x_2 \end{aligned}$$

- Se um elemento é ímpar e outro é par:

Aguardando validação.

Está provada, portanto, que a função composta $(g \circ f)$ é injetiva. Contudo, note que a função f não é, pois

$$f(1) = 1 = f(2)$$

Logo, a afirmação é falsa.

- (c) “Se f e g são sobrejetivas, então $(g \circ f)$ é sobrejetiva.”

Resolução. Temos que $(g \circ f)$ é definida tal que

$$g \circ f : X \rightarrow Z$$

Desse modo, se f e g são sobrejetivas, e tomando $x \in X, y \in Y$ e $z \in Z$, temos

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$$

Logo, $(g \circ f)$ é sobrejetiva e a afirmação é verdadeira.

- (d) “Se $(g \circ f)$ é sobrejetiva, então f e g são sobrejetivas.”

Resolução. Sejam as funções

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x &\rightarrow x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}_+^* &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ y &\rightarrow \sqrt{y}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g \circ f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\rightarrow \sqrt{x^2} \rightarrow y \end{aligned}$$

Tomando $y \in \mathbb{R}_+$, temos que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que

$$g(f(x)) = g(x^2) = y$$

Logo, a função $(g \circ f)$ é sobrejetiva. Note, contudo, que g não é sobrejetiva pois, tomando $0 \in \mathbb{R}_+$, não há nenhum elemento de \mathbb{R}_+^* que resulte nele.

10. Não fiz ainda.

11. “Mostre que $f :]-\infty, -4] \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = -x^2 - 8x - 12$ é uma função crescente.”

Resolução. Sejam $a, b \in]-\infty, -4]$ de modo que $a < b$. Temos, portanto:

$$\begin{aligned} a < b &\implies a + 4 < b + 4 \\ &\implies (a + 4)^2 > (b + 4)^2 \\ &\implies a^2 + 8a + 16 > b^2 + 8b + 16 \\ &\implies -a^2 - 8a - 16 < -b^2 - 8b - 16 \\ &\implies -a^2 - 8a - 12 < -b^2 - 8b - 12 \\ &\implies f(a) < f(b) \end{aligned}$$

Assim, está provada que f é crescente.

12. “Seja a função $f : [3; 5] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = -x^2 + 4x - 3$.”

- (a) “Mostre que f é decrescente.”

Resolução. Sejam $a, b \in [3; 5]$ tal que $a > b$. Temos, portanto, para todos a, b :

$$\begin{aligned} a > b &\implies a - 2 > b - 2 \\ &\implies (a - 2)^2 > (b - 2)^2 \\ &\implies a^2 - 4a + 4 > b^2 - 4b + 4 && \cdot (-1) \\ &\implies -a^2 + 4a - 4 < -b^2 + 4b - 4 \\ &\implies -a^2 + 4a - 3 < -b^2 + 4b - 3 && +1 \\ &\implies f(a) < f(b) \end{aligned}$$

Logo, está mostrada que a função é decrescente.

- (b) “ f possui máximo absoluto? Se sim, ocorre em qual ponto?”
Aguardando validação.
- (c) “ f possui mínimo absoluto? Se sim, ocorre em qual ponto?”
Aguardando validação.