UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
INSTITUTO METRÓPOLE DIGITAL
Soluções de Exercícios de Matemática Elementar

Nome: Andriel Fernandes

Capítulo 03 - Exercício de Matrizes

1. “Determine, caso exista, a matriz A, tal que $AB = C$, em que”

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Resolução. Temos que, para que a multiplicação seja possível, a matriz A é obrigatoriamente do tipo 2x3. Suponhamos a matriz A como

$$A = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{bmatrix}$$

Façamos a multiplicação da matriz A, definida genericamente, pela matriz B:

$$A \cdot B = C \implies \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Conhecendo os elementos da matriz C, teremos as seguintes expressões para cada um deles:

$$
\begin{aligned}
(C_{11}) &\quad x_{11} + 2 \cdot x_{12} + x_{13} = 3 \\
(C_{12}) &\quad -x_{11} + 2 \cdot x_{12} = 1 \\
(C_{21}) &\quad x_{21} + 2 \cdot x_{22} + x_{23} = -1 \\
(C_{22}) &\quad -x_{21} + 2 \cdot x_{22} = 4
\end{aligned}
$$

Transformemos essas expressões em dois sistemas diferentes, um para cada linha, e tomemos $k \in \mathbb{N}^*$:

$$
C_{1k} = \left\{ \begin{array}{cccc} x_{11} & +2x_{12} & +x_{13} & = 3 \\ -x_{11} & +2x_{12} & & = 1 \end{array} \right.
$$

$$
C_{2k} = \left\{ \begin{array}{cccc} x_{21} & +2x_{22} & +x_{23} & = -1 \\ -x_{21} & +2x_{22} & & = 4 \end{array} \right.
$$

Analisando C_{1k}, teremos a seguinte matriz aumentada:

$$
\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (l_2 \to l_2 + l_1) \\
= & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad (l_1 \to l_1 - \frac{1}{2} l_2) \\
= & \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad (l_1 \to l_1 \cdot 2) \\
= & \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Portanto, o sistema deve satisfazer:

$$
\begin{aligned}
(I) &\quad 2x_{11} + x_{13} = 2 \implies x_{11} = 1 - \frac{x_{13}}{2} \\
(II) &\quad 4x_{12} + x_{13} = 4 \implies x_{12} = 1 - \frac{x_{13}}{4}
\end{aligned}
$$

Assim, a solução para esse sistema, denotada por S_1, é:

$$S_1 = (1 - \frac{x_{13}}{2}, 1 - \frac{x_{13}}{4}, x_{13}),$$

onde $x_{13} \in \mathbb{R}$.
Por outro lado, analisando C_{2k}, temos a seguinte matriz aumentada:

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad (l_2 \to l_2 + l_1) \\
=&\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad (l_1 \to 2l_1) \\
=&\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad (l_1 \to l_1 - l_2) \\
=&\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Portanto, o sistema deve satisfazer:

$$(I) \quad 2x_{21} + x_{23} = -5 \implies x_{21} = \frac{-5 - x_{23}}{2}$$
$$(II) \quad 4x_{22} + x_{23} = 3 \implies x_{22} = \frac{3 - x_{23}}{4}$$

Assim, a solução para esse sistema, denotada de S_2, será:

$$S_2 = (\frac{-5 - x_{23}}{2}, \frac{3 - x_{23}}{4}, x_{23}),$$

onde $x_{23} \in \mathbb{R}$.
Desse modo, temos que a matriz A existe, tal que:

$$A = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x_{13}}{2} & 1 - \frac{x_{13}}{4} & x_{13} \\ \frac{-5 - x_{23}}{2} & \frac{3 - x_{23}}{4} & x_{23} \end{bmatrix}$$

2. “Sejam A e B matrizes $m \times n$ e $n \times p$ respectivamente. A afirmação abaixo é sempre válida?”

$$\text{Se } AB = 0_{m\times p}, \text{ então } A = 0_{m\times p} \text{ ou } B = 0_{m\times p}$$

Resolução. Não. Suponha as matrizes $A_{2\times 2}, B_{2\times 2}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Façamos seu produto, que será armazenado na matriz $C_{2\times 2}$:

$$\begin{aligned} C_{11} &= 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0 \\ C_{12} &= 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0 \\ C_{21} &= -1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0 \\ C_{22} &= -1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0 \end{aligned}$$

Assim, temos um caso onde o produto de duas matrizes é nulo, mas elas não. Logo, a afirmação não é válida para todos os casos.

3. “Encontre uma matriz $A_{2\times 2}$ tal que $AA = 0_{2\times 2}$.”
Resolução. Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Logo, tomando C como a matriz resultante do produto de $A \cdot A$, temos:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto, a matriz A é válida como resultado, pois C é uma matriz nula $2_{2\times 2}$.

4. “Determine as soluções dos seguintes sistemas lineares:”

(a) $\begin{cases} x & -2y & -3z & = 0 \\ 3x & +y & -z & = -1 \end{cases}$

Resolução. Temos as matrizes A e B tal que:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Então, temos a seguinte matriz aumentada $(A|B)$:

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (l_2 \to l_2 - 3 \cdot l_1) \\ \to &\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & 8 & -1 \end{bmatrix} \quad (l_1 \to l_1 + \frac{2 \cdot l_2}{7}) \\ \to &\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-5}{7} & \frac{-2}{7} \\ 0 & 7 & 8 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Logo, a solução do sistema será:

$$x - \frac{5}{7}z = -\frac{2}{7} \implies x = \frac{5}{7}z - \frac{2}{7}$$

e

$$7y + 8z = -1 \implies y = \frac{-1 - 8z}{7}$$

Ou seja, a solução será

$$(\frac{5}{7}z - \frac{2}{7}; \frac{-1-8z}{7}; z),$$

onde $z \in \mathbb{R}$.

(b) $\begin{cases} x & +y & +z & = 2 \\ 2x & -y & +3z & = 9 \\ x & +2y & -z & = -3 \end{cases}$

Resolução. Temos as matrizes A, B tais que:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Temos a seguinte matriz aumentada $(A|B)$:

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \quad (l_2 \to l_2 - 2 \cdot l_1; l_3 \to l_3 - l_1) \\
\to &\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \end{bmatrix} \quad (l_2 \leftrightarrow l_3) \\
\to &\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & -3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad (l_1 \to l_1 - l_2; l_3 \to l_3 + 3 \cdot l_2) \\
\to &\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Note que temos na 3ª linha a seguinte expressão:

$$-5z = -10 \implies z = \frac{-10}{-5} \implies z = 2$$

Com z definido, vamos substituir nas outras expressões:

$$\begin{aligned}
&(I) \quad x + 3z = 7 \implies x = 7 - 6 \implies x = 1 \\
&(II) \quad y - 2z = -5 \implies y - 4 = -5 \implies y = -1
\end{aligned}$$

Portanto, temos que a solução para o sistema é:

$$(1; -1; 2).$$

(c) $\begin{cases} x_1 & -2x_2 & +x_3 & +2x_4 & = 1 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & +x_4 & = 2 \\ x_1 & +7x_2 & -5x_3 & -x_4 & = 3 \end{cases}$

Resolução. Temos as matrizes A, B tais que:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & -5 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Temos então a seguinte matriz aumentada $(A|B)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & -5 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad (l_2 \to l_2 - l_1; l_3 \to l_3 - l_1)$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 9 & -6 & -3 & 2 \end{bmatrix} \quad (l_3 \to l_3 - 3 \cdot l_2)$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Logo, conforme a última linha da matriz, temos que essa matriz não tem solução.

5. “Seja

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Para quais matrizes $B_{4\times 1}$ o sistema $AX = B$ tem solução?"
Resolução. Sendo

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

e tomando o seguinte sistema linear:

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} 3x_1 & -6x_2 & +2x_3 & -x_4 & = b_1 \\ -2x_1 & +4x_2 & +x_3 & +3x_4 & = b_2 \\ & & +x_3 & +x_4 & = b_3 \\ x_1 & -2x_2 & +x_3 & & = b_4 \end{array} \right.$$

Teremos a seguinte matriz aumentada $(A|B)$:

$$(A|B) = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 2 & -1 & b_1 \\ -2 & 4 & 1 & 3 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & b_3 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & b_4 \end{bmatrix} \quad (l_1 \leftrightarrow l_4)$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & b_4 \\ -2 & 4 & 1 & 3 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & b_3 \\ 3 & -6 & 2 & -1 & b_1 \end{bmatrix} \quad (l_4 \rightarrow l_4 - 3l_1; l_2 \rightarrow l_2 + 2l_1)$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & b_4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & b_2 + 2b_4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & b_3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & b_1 - 3b_4 \end{bmatrix} \quad (l_2 \leftrightarrow l_3)$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & b_4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & b_3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & b_2 + 2b_4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & b_1 - 3b_4 \end{bmatrix} \quad (l_3 \rightarrow l_3 - 3l_2; l_4 \rightarrow l_4 + l_2)$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & b_4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_2 + 2b_4 - 3b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 - 3b_4 + b_3 \end{bmatrix}$$

Teremos, portanto, o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = b_4 \\ x_3 + x_4 = b_3 \\ 0 = b_2 + 2b_4 - 3b_3 \implies b_2 = -2b_4 + 3b_3 \\ 0 = b_1 - 3b_4 + b_3 \implies b_1 = 3b_4 - b_3 \end{cases}$$

Logo, temos que, para que o sistema $AX = B$ tenha solução, a matriz B deve ser formada por:

$$B = \begin{bmatrix} 3b_4 - b_3 \\ -2b_4 + 3b_3 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix},$$

onde $b_3, b_4 \in \mathbb{R}$.

6. "Mostre que, se A e B são matrizes $n \times n$, ambas invertíveis, então AB é invertível e vale a igualdade $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$."
Resolução. Sejam A, B matrizes $n \times n$ quaisquer e de determinantes diferente de 0. Logo, A e B são matrizes invertíveis, onde A^{-1} e B^{-1} são suas respectivas inversas.
Temos, portanto, que AB é invertível pois seu determinante nada mais é que a multiplicação dos determinantes de A e B; como estes são diferentes de 0, logo, o determinante de AB também é diferente de 0, AB é invertível e sua inversa é denotada por $(AB)^{-1}$. Mostremos que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$:

$$\begin{aligned} I_n = I_n &\implies (AB)^{-1} \cdot AB = A \cdot A^{-1} \quad \text{(Definição)} \\ &\implies (AB)^{-1} \cdot A \cdot B \cdot B^{-1} = A \cdot A^{-1} \cdot B^{-1} \quad (\cdot B^{-1}) \\ &\implies (AB)^{-1} \cdot A \cdot B \cdot B^{-1} \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} \cdot B^{-1} \cdot A^{-1} \quad (\cdot A^{-1}) \\ &\implies (AB)^{-1} \cdot A \cdot I_n \cdot A^{-1} = I_n \cdot B^{-1} \cdot A^{-1} \\ &\implies (AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} \end{aligned}$$

Logo, está mostrada a validade da igualdade.

7. "Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n. Mostre, através de um contra-exemplo, que a seguinte igualdade não é sempre válida:"
$$\det(A + B) = \det A + \det B.$$

Resolução. Sejam A, B as seguintes matrizes 2×2:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, A + B = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Temos que:

$$\begin{aligned} \det A &= (1 \cdot 3) - (2 \cdot -1) = 5 \\ \det B &= (0 \cdot -1) - (5 \cdot 3) = -15 \\ \det(A + B) &= (1 \cdot 2) - (7 \cdot 2) = -12 \end{aligned}$$

Desse modo, como $\det A + \det B = -10$, e é diferente de $\det(A + B)$, a igualdade não é sempre válida.

8. "Calcule a matriz inversa, se existir, e o determinante das matrizes abaixo:"

   (a)
   $$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

   Resolução. Seja A a matriz definida acima. Calculemos seu determinante a partir de um cofator:

   $$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} \quad (c_3 \to c_3 - 2c_2) \\ = &\begin{vmatrix} 0 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Fixada a coluna 3, teremos:

$$\begin{aligned}
\det A =& a_{13} \cdot C_{13} + a_{23} \cdot C_{23} + a_{33} \cdot C_{33} \\
=& -5 \cdot C_{13} + 0 \cdot C_{23} + 0 \cdot C_{33} \\
=& -5 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\
=& -5 \cdot 1 \cdot -1 \\
=& 5
\end{aligned}$$

Como $\det A \neq 0$, então vamos calcular a matriz inversa:

$$\left[\begin{array}{cccccc} 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad (l_2 \leftrightarrow l_1)$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad (l_3 \rightarrow l_3 - 3l_1)$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right] \quad (l_3 \leftrightarrow l_2)$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad (l_1 \rightarrow l_1 + l_2; l_3 \rightarrow l_3 + 3l_2)$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & -9 & 3 \end{array}\right] \quad (l_2 \rightarrow -l_2; l_3 \rightarrow -l_3)$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -1 & 9 & -3 \end{array}\right] \quad (l_2 \rightarrow l_2 - \frac{2}{5}l_3)$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 5 & -1 & 9 & -3 \end{array}\right] \quad (l_3 \rightarrow \frac{l_3}{5})$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{9}{5} & -\frac{3}{5} \end{array}\right]$$

Logo, a matriz inversa A^{-1} é

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{9}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

(b)

$$\begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ -2 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Resolução. Tomando a matriz acima como B, calculemos $\det B$ com cofatores:

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ -2 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} \quad (l_1 \to \frac{l_1}{3}) \\
=&3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} (l_2 \to l_2 + 2l_1) \\
=&3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Fixando a coluna 1 temos:

$$\begin{aligned}
\det B &= 3 \cdot (a_{11} \cdot C_{11} + a_{21} \cdot C_{21} + a_{31} \cdot C_{31}) \\
&= 3 \cdot (1 \cdot C_{11} + 0 + 0) \\
&= 3 \cdot (1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}) \\
&= 3 \cdot (1 \cdot 1 \cdot 11) \\
&= 33
\end{aligned}$$

Concluímos que $\det B = 33$. Calculemos sua inversa:

$$\left[\begin{array}{cccccc} 3 & -6 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad (l_1 \to \frac{l_1}{3})$$

$$\to \left[\begin{array}{cccccc} 1 & -2 & 3 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -2 & 7 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad (l_2 \to l_2 + 2l_1)$$

$$\to \left[\begin{array}{cccccc} 1 & -2 & 3 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad (l_2 \leftrightarrow l_3)$$

$$\to \left[\begin{array}{cccccc} 1 & -2 & 3 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & \frac{2}{3} & 1 & 0 \end{array}\right] \quad (l_1 \to l_1 + 2l_2; l_3 \to l_3 - 3l_2)$$

$$\to \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 13 & \frac{1}{3} & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -11 & \frac{2}{3} & 1 & -3 \end{array}\right] \quad (l_2 \to l_2 + \frac{5}{11} l_3)$$

$$\to \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 13 & \frac{1}{3} & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{10}{33} & \frac{5}{11} & -\frac{4}{11} \\ 0 & 0 & -11 & \frac{2}{3} & 1 & -3 \end{array}\right] \quad (l_3 \to -\frac{l_3}{11})$$

$$\to \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 13 & \frac{1}{3} & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{10}{33} & \frac{5}{11} & -\frac{4}{11} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{33} & -\frac{1}{11} & \frac{3}{11} \end{array}\right] \quad (l_1 \to l_1 - 13l_3)$$

$$\to \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & \frac{37}{33} & \frac{13}{11} & -\frac{17}{11} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{10}{33} & \frac{5}{11} & -\frac{4}{11} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{33} & -\frac{1}{11} & \frac{3}{11} \end{array}\right]$$

Então, concluímos que a matriz inversa B^{-1} é

$$\begin{bmatrix} \frac{37}{33} & \frac{13}{11} & -\frac{17}{11} \\ \frac{10}{33} & \frac{5}{11} & -\frac{4}{11} \\ -\frac{2}{33} & -\frac{1}{11} & \frac{3}{11} \end{bmatrix}$$

(c)

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 2 & 3 \\ 9 & 4 & 6 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Resolução. Tomando a matriz acima como D, calculemos $\det D$ com cofatores:

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 2 & 3 \\ 9 & 4 & 6 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad (l_5 \to l_5 - l_3) =$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 2 & 3 \\ 9 & 4 & 6 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Fixando a linha 5 temos:

$$\det D = a_{51} \cdot C_{51} + a_{52} \cdot C_{52} + a_{53} \cdot C_{53} + a_{54} \cdot C_{54} + a_{55} \cdot C_{55}$$

$$= a_{51} \cdot (-1)^{5+1} \cdot \det \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Na matriz menor D_{51} fixamos a linha 1 e obtemos:

$$\begin{aligned}
\det D_{51} &= a_{11} \cdot C_{11} + a_{12} \cdot C_{12} + a_{13} \cdot C_{13} + a_{14} \cdot C_{14} \\
&= a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \cdot \det \begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 3 \end{vmatrix} \\
&= 1 \cdot 1 \cdot [(36 + 36 + 0) - (0 + 18 + 54)] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Aplicando o resultado de $\det D_{51}$ no cálculo de $\det D$ teremos como resultado final 0. Não há, portanto, matriz inversa de D.

9. "Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & -5 & -3 \end{bmatrix}$$

Calcule A^{-1}, caso A seja invertível, e calcule as soluções do sistema linear $AX = B$, onde $B = 0_{3\times1}$."

Resolução. Calculemos primeiro $\det A$:

$$\begin{aligned}
\det A &= (12 - 3 + 0) - (0 - 3 - 10) \\
&= 9 - (-13) \\
&= 20
\end{aligned}$$

Como $\det A \neq 0$, então A é invertível e existe A^{-1}. Vamos encontrar a inversa:

$$A^{-1} = \left[\begin{array}{cccccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad (l_2 \leftrightarrow l_1)$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccccc} 1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad (l_2 \rightarrow l_2 - 2l_1; l_3 \rightarrow l_3 - 3l_1)$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccccc} 1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right] \quad (l_2 \leftrightarrow l_3)$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccccc} 1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \quad (l_1 \rightarrow l_1 + 2l_2; l_3 \rightarrow l_3 - 5l_2)$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 13 & -5 \end{array}\right] \quad (l_3 \rightarrow \frac{l_3}{2})$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{13}{2} & -\frac{5}{2} \end{array}\right] \quad (l_1 \rightarrow l_1 + l_3)$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{13}{2} & -\frac{5}{2} \end{array}\right]$$

Logo, temos a matriz

$$A^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -3 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{13}{2} & -\frac{5}{2} \end{array}\right]$$

Calculemos, portanto, as soluções do sistema $AX = B$:

$$\begin{aligned} AX = B &\implies A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \\ &\implies X = A^{-1} \cdot B \end{aligned}$$

Como B é uma matriz $0_{3\times 1}$, concluímos que X é também uma matriz $0_{3\times 1}$ e o sistema tem solução trivial (0, 0, 0).

10. "Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 11 & 4 \\ -2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Calcule $\det A$ e para quais matrizes $B_{3\times 1}$ o sistema $AX = B$ tem solução."

Resolução. Calculemos $\det A$ a princípio:

$$\begin{aligned} \det A &= (2 + 55 - 24) - (4 + 44 - 15) \\ &= 33 - 33 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Como $\det A = 0$, então temos que A não é invertível. Considere, portanto, a seguinte matriz B:

$$B = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

e a matriz aumentada $(A|B)$

$$
\begin{aligned}
(A|B) = &\begin{bmatrix} -1 & 11 & 4 & x \\ -2 & 1 & 5 & y \\ 1 & 3 & -2 & z \end{bmatrix} \quad (l_2 \to l_2 - 2l_1; l_3 \to l_3 + l_1) \\
\to &\begin{bmatrix} -1 & 11 & 4 & x \\ 0 & -21 & -3 & y-2x \\ 0 & 14 & 2 & z+x \end{bmatrix} \quad (l_1 \to -l_1) \\
\to &\begin{bmatrix} 1 & -11 & -4 & -x \\ 0 & -21 & -3 & y-2x \\ 0 & 14 & 2 & z+x \end{bmatrix} \quad (l_3 \to l_3 + \frac{2l_2}{3}) \\
\to &\begin{bmatrix} 1 & -11 & -4 & -x \\ 0 & -21 & -3 & y-2x \\ 0 & 0 & 0 & z+x+\frac{2}{3}\cdot(y-2x) \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Com isso temos que:

$$
\begin{aligned}
z + x + \frac{2}{3} \cdot (y - 2x) = 0 &\implies z + x + \frac{2y}{3} - \frac{4x}{3} = 0 \\
&\implies z + x - \frac{4x}{3} + \frac{2y}{3} = 0 \\
&\implies -\frac{x+2y}{3} = -z \\
&\implies z = \frac{x+2y}{3}
\end{aligned}
$$

Assim, as matrizes $B_{3\times 1}$ que admitem solução no sistema $AX = B$ são descritas na forma

$$
B = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \frac{x+2y}{3} \end{bmatrix},
$$

onde $x, y \in \mathbb{R}$.

11. “Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 & 2 & -1 \\ -3 & -9 & -3 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Calcule $\det A$ e, caso A seja invertível, $\det A^{-1}$. Além disso, para quais matrizes $B_{5\times 1}$ o sistema $AX = B$ possui alguma solução?”
Resolução. Calculemos $\det A$ a partir de cofatores:

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 & 2 & -1 \\ -3 & -9 & -3 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad (l_2 \to l_2 + 3l_5) \\ &= \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Fixando a linha 2 temos:

$$\begin{aligned} detA &= -2 \cdot C_{24} \\ &= -2 \cdot (-1)^6 \cdot \det \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Calculemos o determinante de C_{24}:

$$\begin{aligned}
\det C_{24} &= \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} \quad (l_4 \to l_4 - l_1) \\
&= \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Fixando a linha 4, temos:

$$\begin{aligned}
\det C_{24} &= 3 \cdot C_{41} \\
&= 3 \cdot (-1)^5 \cdot \det \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} \\
&= 3 \cdot -1 \cdot (24 + 0 + 2) - (0 + 2 + 6) \\
&= -3 \cdot 18 \\
&= -54
\end{aligned}$$

Voltando a $\det A$:

$$\begin{aligned}
\det A &= -2 \cdot (-1)^6 \cdot \det C_{24} \\
&= -2 \cdot -54 \\
&= 108
\end{aligned}$$

Como A é, portanto, invertível, temos que o determinante de A^{-1} é:

$$\det A^{-1} = \frac{1}{180}$$

Ademais, se A é invertível, logo o sistema admite uma única solução para quaisquer matrizes $B_{5\times 5}$.

12. "Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcule:"

(a) $A \cdot B$
Resolução. Temos a matriz

$$(A \cdot B) = \begin{bmatrix} -3 & -6 & 6 & -3 \\ -2 & 12 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ -2 & -8 & 8 & -8 \end{bmatrix}$$

(b) $\det(A \cdot B)$

Resolução. Calculemos o determinante a partir de cofatores:

$$\begin{aligned}
\det(A\cdot B) &= \begin{vmatrix} -3 & -6 & 6 & -3 \\ -2 & 12 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ -2 & -8 & 8 & -8 \end{vmatrix} \quad (l_2 \to \frac{l_2}{2}) \\
&= 2\cdot \begin{vmatrix} -3 & -6 & 6 & -3 \\ -1 & 6 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ -2 & -8 & 8 & -8 \end{vmatrix} \quad (c_3 \to c_3 + c_2) \\
&= 2\cdot \begin{vmatrix} -3 & -6 & 0 & -3 \\ -1 & 6 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ -2 & -8 & 0 & -8 \end{vmatrix} \quad (c_4 \to c_4 - \frac{c_3}{3}) \\
&= 2\cdot \begin{vmatrix} -3 & -6 & 0 & -3 \\ -1 & 6 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & -8 & 0 & -8 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Fixando a linha 3, temos:

$$\begin{aligned}
\det(A\cdot B) &= 2\cdot a_{33}\cdot C_{33} \\
&= 2\cdot 3\cdot(-1)^6\cdot\det\begin{vmatrix} -3 & -6 & -3 \\ -1 & 6 & 5 \\ -2 & -8 & -8 \end{vmatrix} \\
&= 6\cdot 72 \\
&= 432
\end{aligned}$$

Temos, portanto, que $\det(A\cdot B) = 432$.

(c) $\det(A+B)$

Resolução. Seja

$$(A+B) = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 & -1 \\ -2 & 6 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Temos:

$$\begin{aligned} \det(A+B) &= \begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 & -1 \\ -2 & 6 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & -1 \end{vmatrix} \quad (c_1 \to c_1 + c_2) \\ &= \begin{vmatrix} 0 & -2 & 2 & -1 \\ 4 & 6 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Fixando a coluna 1 temos:

$$\begin{aligned} \det(A+B) &= a_{21} \cdot C_{21} \\ &= 4 \cdot (-1) \cdot \det \begin{vmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix} \\ &= -4 \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Portanto, $\det(A+B) = 0$.

(d) A inversa da matriz $(A+B)$, caso exista.
Resolução. Como $\det(A+B) = 0$, a matriz $(A+B)$ não é invertível.

(e) A solução do sistema $AX = C$, onde

$$C = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

13. Não fiz ainda.

14. Não fiz ainda.

15. "Seja A uma matriz $n \times n$ com mais de $n^2 - n$ entradas nulas. Mostre que $\det A = 0$."
Resolução. Note que a definição de determinante é o somatório de seus produtos elementares. Por sua vez, a definição destes é o produto de n entradas de uma matriz A sem mais de uma entrada de uma mesma linha ou coluna. Logo, se a matriz tem **mais** de $n^2 - n$ entradas nulas, isso implica que no produto elementar uma das entradas será, necessariamente, nula, o que faz o produto ser 0 para todos os produtos elementares. Como o determinante é a soma de todos os produtos elementares, será uma soma de zeros e $\det A = 0$.