

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO  
NORTE  
INSTITUTO METRÓPOLE DIGITAL  
Soluções de Exercícios de Matemática Elementar

Nome: Andriel Fernandes

**Capítulo 03 - Exercício de Matrizes**

1. “Determine, caso exista, a matriz  $A$ , tal que  $AB = C$ , em que”

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

*Resolução.* Temos que, para que a multiplicação seja possível, a matriz  $A$  é obrigatoriamente do tipo  $2 \times 3$ . Suponhamos a matriz  $A$  como

$$A = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{bmatrix}$$

Façamos a multiplicação da matriz  $A$ , definida genericamente, pela matriz  $B$ :

$$A \cdot B = C \implies \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Conhecendo os elementos da matriz  $C$ , teremos as seguintes ex-

pressões para cada um deles:

$$\begin{aligned}(C_{11}) \quad & x_{11} + 2 \cdot x_{12} + x_{13} = 3 \\(C_{12}) \quad & -x_{11} + 2 \cdot x_{12} = 1 \\(C_{21}) \quad & x_{21} + 2 \cdot x_{22} + x_{23} = -1 \\(C_{22}) \quad & -x_{21} + 2 \cdot x_{22} = 4\end{aligned}$$

Transformemos essas expressões em dois sistemas diferentes, um para cada linha, e tomemos  $k \in \mathbb{N}^*$ :

$$\begin{aligned}C_{1k} &= \begin{cases} x_{11} & +2x_{12} & +x_{13} & = 3 \\ -x_{11} & +2x_{12} & & = 1 \end{cases} \\C_{2k} &= \begin{cases} x_{21} & +2x_{22} & +x_{23} & = -1 \\ -x_{21} & +2x_{22} & & = 4 \end{cases}\end{aligned}$$

Analisando  $C_{1k}$ , teremos a seguinte matriz aumentada:

$$\begin{aligned}& \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (l_2 \rightarrow l_2 + l_1) \\&= \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \end{array} \right] \quad (l_1 \rightarrow l_1 - \frac{1}{2}l_2) \\&= \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \end{array} \right] \quad (l_1 \rightarrow l_1 \cdot 2) \\&= \left[ \begin{array}{cccc} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \end{array} \right]\end{aligned}$$

Portanto, o sistema deve satisfazer:

$$\begin{aligned}(I) \quad & 2x_{11} + x_{13} = 2 \implies x_{11} = 1 - \frac{x_{13}}{2} \\(II) \quad & 4x_{12} + x_{13} = 4 \implies x_{12} = 1 - \frac{x_{13}}{4}\end{aligned}$$

Assim, a solução para esse sistema, denotada por  $S_1$ , é:

$$S_1 = \left(1 - \frac{x_{13}}{2}, 1 - \frac{x_{13}}{4}, x_{13}\right),$$

onde  $x_{13} \in \mathbb{R}$ .

Por outro lado, analisando  $C_{2k}$ , temos a seguinte matriz aumentada:

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 4 \end{array} \right] & (l_2 \rightarrow l_2 + l_1) \\ = & \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \end{array} \right] & (l_1 \rightarrow 2l_1) \\ = & \left[ \begin{array}{cccc} 2 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \end{array} \right] & (l_1 \rightarrow l_1 - l_2) \\ = & \left[ \begin{array}{cccc} 2 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Portanto, o sistema deve satisfazer:

$$\begin{aligned} (I) \quad 2x_{21} + x_{23} = -5 & \implies x_{21} = \frac{-5 - x_{23}}{2} \\ (II) \quad 4x_{22} + x_{23} = 3 & \implies x_{22} = \frac{3 - x_{23}}{4} \end{aligned}$$

Assim, a solução para esse sistema, denotada de  $S_2$ , será:

$$S_2 = \left(\frac{-5 - x_{23}}{2}, \frac{3 - x_{23}}{4}, x_{23}\right),$$

onde  $x_{23} \in \mathbb{R}$ .

Desse modo, temos que a matriz  $A$  existe, tal que:

$$A = \left[ \begin{array}{ccc} 1 - \frac{x_{13}}{2} & 1 - \frac{x_{13}}{4} & x_{13} \\ \frac{-5 - x_{23}}{2} & \frac{3 - x_{23}}{4} & x_{23} \end{array} \right]$$

2. “Sejam  $A$  e  $B$  matrizes  $m \times n$  e  $n \times p$  respectivamente. A afirmação abaixo é sempre válida?”

Se  $AB = 0_{m \times p}$ , então  $A = 0_{m \times p}$  ou  $B = 0_{m \times p}$

*Resolução.* Não. Suponha as matrizes  $A_{2 \times 2}, B_{2 \times 2}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Façamos seu produto, que será armazenado na matriz  $C_{2 \times 2}$ :

$$C_{11} = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0$$

$$C_{12} = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$$

$$C_{21} = -1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0$$

$$C_{22} = -1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$$

Assim, temos um caso onde o produto de duas matrizes é nulo, mas elas não. Logo, a afirmação não é válida para todos os casos.

3. “Encontre uma matriz  $A_{2 \times 2}$  tal que  $AA = 0_{2 \times 2}$ .”

*Resolução.* Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Logo, tomando  $C$  como a matriz resultante do produto de  $A \cdot A$ , temos:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto, a matriz  $A$  é válida como resultado, pois  $C$  é uma matriz nula  $2_{2 \times 2}$ .

4. “Determine as soluções dos seguintes sistemas lineares:”

$$(a) \begin{cases} x & -2y & -3z & = 0 \\ 3x & +y & -z & = -1 \end{cases}$$

*Resolução.* Temos as matrizes  $A$  e  $B$  tal que:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Então, temos a seguinte matriz aumentada  $(A|B)$ :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} & (l_2 \rightarrow l_2 - 3 \cdot l_1) \\ \rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & 8 & -1 \end{bmatrix} & (l_1 \rightarrow l_1 + \frac{2 \cdot l_2}{7}) \\ \rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-5}{7} & \frac{-2}{7} \\ 0 & 7 & 8 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Logo, a solução do sistema será:

$$x - \frac{5}{7}z = -\frac{2}{7} \implies x = \frac{5}{7}z - \frac{2}{7}$$

e

$$7y + 8z = -1 \implies y = \frac{-1 - 8z}{7}$$

Ou seja, a solução será

$$\left(\frac{5}{7}z - \frac{2}{7}; \frac{-1 - 8z}{7}; z\right),$$

onde  $z \in \mathbb{R}$ .

$$(b) \begin{cases} x & +y & +z & = 2 \\ 2x & -y & +3z & = 9 \\ x & +2y & -z & = -3 \end{cases}$$

*Resolução.* Temos as matrizes  $A, B$  tais que:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Temos a seguinte matriz aumentada  $(A|B)$ :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & -1 & -3 \end{bmatrix} & (l_2 \rightarrow l_2 - 2 \cdot l_1; l_3 \rightarrow l_3 - l_1) \\ \rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \end{bmatrix} & (l_2 \leftrightarrow l_3) \\ \rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & -3 & 1 & 5 \end{bmatrix} & (l_1 \rightarrow l_1 - l_2; l_3 \rightarrow l_3 + 3 \cdot l_2) \\ \rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Note que temos na 3ª linha a seguinte expressão:

$$-5z = -10 \implies z = \frac{-10}{-5} \implies z = 2$$

Com  $z$  definido, vamos substituir nas outras expressões:

$$(I) \quad x + 3z = 7 \implies x = 7 - 6 \implies x = 1$$

$$(II) \quad y - 2z = -5 \implies y - 4 = -5 \implies y = -1$$

Portanto, temos que a solução para o sistema é:

$$(1; -1; 2).$$

$$(c) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$$

*Resolução.* Temos as matrizes  $A, B$  tais que:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & -5 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Temos então a seguinte matriz aumentada  $(A|B)$ :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & -5 & -1 & 3 \end{bmatrix} & (l_2 \rightarrow l_2 - l_1; l_3 \rightarrow l_3 - l_1) \\ \rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 9 & -6 & -3 & 2 \end{bmatrix} & (l_3 \rightarrow l_3 - 3 \cdot l_2) \\ \rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Logo, conforme a última linha da matriz, temos que essa matriz não tem solução.

5. “Seja

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Para quais matrizes  $B_{4 \times 1}$  o sistema  $AX = B$  tem solução?"

*Resolução.* Sendo

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

e tomando o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 3x_1 & -6x_2 & +2x_3 & -x_4 & = b_1 \\ -2x_1 & +4x_2 & +x_3 & +3x_4 & = b_2 \\ & & +x_3 & +x_4 & = b_3 \\ x_1 & -2x_2 & +x_3 & & = b_4 \end{cases}$$



Teremos a seguinte matriz aumentada  $(A|B)$ :

$$\begin{aligned}
 (A|B) &= \begin{bmatrix} 3 & -6 & 2 & -1 & b_1 \\ -2 & 4 & 1 & 3 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & b_3 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & b_4 \end{bmatrix} & (l_1 \leftrightarrow l_4) \\
 &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & b_4 \\ -2 & 4 & 1 & 3 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & b_3 \\ 3 & -6 & 2 & -1 & b_1 \end{bmatrix} & (l_4 \rightarrow l_4 - 3l_1; l_2 \rightarrow l_2 + 2l_1) \\
 &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & b_4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & b_2 + 2b_4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & b_3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & b_1 - 3b_4 \end{bmatrix} & (l_2 \leftrightarrow l_3) \\
 &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & b_4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & b_3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & b_2 + 2b_4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & b_1 - 3b_4 \end{bmatrix} & (l_3 \rightarrow l_3 - 3l_2; l_4 \rightarrow l_4 + l_2) \\
 &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & b_4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_2 + 2b_4 - 3b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 - 3b_4 + b_3 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Teremos, portanto, o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = b_4 \\ x_3 + x_4 = b_3 \\ 0 = b_2 + 2b_4 - 3b_3 \implies b_2 = -2b_4 + 3b_3 \\ 0 = b_1 - 3b_4 + b_3 \implies b_1 = 3b_4 - b_3 \end{cases}$$

Logo, temos que, para que o sistema  $AX = B$  tenha solução, a

matriz  $B$  deve ser formada por:

$$B = \begin{bmatrix} 3b_4 - b_3 \\ -2b_4 + 3b_3 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix},$$

onde  $b_3, b_4 \in \mathbb{R}$ .

6. “Mostre que, se  $A$  e  $B$  são matrizes  $n \times n$ , ambas invertíveis, então  $AB$  é invertível e vale a igualdade  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .”

*Resolução.* Sejam  $A, B$  matrizes  $n \times n$  quaisquer e de determinantes diferente de 0. Logo,  $A$  e  $B$  são matrizes invertíveis, onde  $A^{-1}$  e  $B^{-1}$  são suas respectivas inversas.

Temos, portanto, que  $AB$  é invertível pois seu determinante nada mais é que a multiplicação dos determinantes de  $A$  e  $B$ ; como estes são diferentes de 0, logo, o determinante de  $AB$  também é diferente de 0,  $AB$  é invertível e sua inversa é denotada por  $(AB)^{-1}$ . Mostremos que  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ :

$$\begin{aligned} I_n = I_n &\implies (AB)^{-1} \cdot AB = A \cdot A^{-1} \quad (\text{Definição}) \\ &\implies (AB)^{-1} \cdot A \cdot B \cdot B^{-1} = A \cdot A^{-1} \cdot B^{-1} \quad (\cdot B^{-1}) \\ &\implies (AB)^{-1} \cdot A \cdot B \cdot B^{-1} \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} \cdot B^{-1} \cdot A^{-1} \quad (\cdot A^{-1}) \\ &\implies (AB)^{-1} \cdot A \cdot I_n \cdot A^{-1} = I_n \cdot B^{-1} \cdot A^{-1} \\ &\implies (AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} \end{aligned}$$

Logo, está mostrada a validade da igualdade.

7. “Sejam  $A$  e  $B$  matrizes quadradas de ordem  $n$ . Mostre, através de um contra-exemplo, que a seguinte igualdade não é sempre válida:”

$$\det(A + B) = \det A + \det B.$$

*Resolução.* Sejam  $A, B$  as seguintes matrizes  $2 \times 2$ :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, A + B = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Temos que:

$$\det A = (1 \cdot 3) - (2 \cdot -1) = 5$$

$$\det B = (0 \cdot -1) - (5 \cdot 3) = -15$$

$$\det(A + B) = (1 \cdot 2) - (7 \cdot 2) = -12$$

Desse modo, como  $\det A + \det B = -10$ , e é diferente de  $\det(A + B)$ , a igualdade não é sempre válida.

8. “Calcule a matriz inversa, se existir, e o determinante das matrizes abaixo.”

(a)

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

*Resolução.* Seja  $A$  a matriz definida acima. Calculemos seu determinante a partir de um cofator:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} \quad (c_3 \rightarrow c_3 - 2c_2) \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Fixada a coluna 3, teremos:

$$\begin{aligned}\det A &= a_{13} \cdot C_{13} + a_{23} \cdot C_{23} + a_{33} \cdot C_{33} \\ &= -5 \cdot C_{13} + 0 \cdot C_{23} + 0 \cdot C_{33} \\ &= -5 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -5 \cdot 1 \cdot -1 \\ &= 5\end{aligned}$$

Como  $\det A \neq 0$ , então vamos calcular a matriz inversa:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & (l_2 \leftrightarrow l_1) \\
\rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & (l_3 \rightarrow l_3 - 3l_1) \\
\rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} & (l_3 \leftrightarrow l_2) \\
\rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & (l_1 \rightarrow l_1 + l_2; l_3 \rightarrow l_3 + 3l_2) \\
\rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & -9 & 3 \end{bmatrix} & (l_2 \rightarrow -l_2; l_3 \rightarrow -l_3) \\
\rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -1 & 9 & -3 \end{bmatrix} & (l_2 \rightarrow l_2 - \frac{2}{5}l_3) \\
\rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 5 & -1 & 9 & -3 \end{bmatrix} & (l_3 \rightarrow \frac{l_3}{5}) \\
\rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{9}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Logo, a matriz inversa  $A^{-1}$  é

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{9}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

(b)

$$\begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ -2 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

*Resolução.* Tomando a matriz acima como  $B$ , calculemos  $\det B$  com cofatores:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ -2 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} \quad (l_1 \rightarrow \frac{l_1}{3}) \\ &= 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} \quad (l_2 \rightarrow l_2 + 2l_1) \\ &= 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Fixando a coluna 1 temos:

$$\begin{aligned} \det B &= 3 \cdot (a_{11} \cdot C_{11} + a_{21} \cdot C_{21} + a_{31} \cdot C_{31}) \\ &= 3 \cdot (1 \cdot C_{11} + 0 + 0) \\ &= 3 \cdot (1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}) \\ &= 3 \cdot (1 \cdot 1 \cdot 11) \\ &= 33 \end{aligned}$$

Concluimos que  $\det B = 33$ . Calculemos sua inversa:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & (l_1 \rightarrow \frac{l_1}{3}) \\
\rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -2 & 7 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & (l_2 \rightarrow l_2 + 2l_1) \\
\rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & (l_2 \leftrightarrow l_3) \\
\rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & \frac{2}{3} & 1 & 0 \end{bmatrix} & (l_1 \rightarrow l_1 + 2l_2; l_3 \rightarrow l_3 - 3l_2) \\
\rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 13 & \frac{1}{3} & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -11 & \frac{2}{3} & 1 & -3 \end{bmatrix} & (l_2 \rightarrow l_2 + \frac{5}{11}l_3) \\
\rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 13 & \frac{1}{3} & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{10}{33} & \frac{5}{11} & -\frac{4}{11} \\ 0 & 0 & -11 & \frac{2}{3} & 1 & -3 \end{bmatrix} & (l_3 \rightarrow -\frac{l_3}{11}) \\
\rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 13 & \frac{1}{3} & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{10}{33} & \frac{5}{11} & -\frac{4}{11} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{33} & -\frac{1}{11} & \frac{3}{11} \end{bmatrix} & (l_1 \rightarrow l_1 - 13l_3) \\
\rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{37}{33} & \frac{13}{11} & -\frac{17}{11} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{10}{33} & \frac{5}{11} & -\frac{4}{11} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{33} & -\frac{1}{11} & \frac{3}{11} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Então, concluímos que a matriz inversa  $B^{-1}$  é

$$\begin{bmatrix} \frac{37}{33} & \frac{13}{11} & -\frac{17}{11} \\ \frac{10}{33} & \frac{5}{11} & -\frac{4}{11} \\ -\frac{2}{33} & -\frac{1}{11} & \frac{3}{11} \end{bmatrix}$$

(c)

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 2 & 3 \\ 9 & 4 & 6 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

*Resolução.* Tomando a matriz acima como  $D$ , calculemos  $\det D$  com cofatores:

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 2 & 3 \\ 9 & 4 & 6 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad (l_5 \rightarrow l_5 - l_3) =$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 2 & 3 \\ 9 & 4 & 6 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Fixando a linha 5 temos:

$$\det D = a_{51} \cdot C_{51} + a_{52} \cdot C_{52} + a_{53} \cdot C_{53} + a_{54} \cdot C_{54} + a_{55} \cdot C_{55}$$

$$= a_{51} \cdot (-1)^{5+1} \cdot \det \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$



Na matriz menor  $D_{51}$  fixamos a linha 1 e obtemos:

$$\begin{aligned}\det D_{51} &= a_{11} \cdot C_{11} + a_{12} \cdot C_{12} + a_{13} \cdot C_{13} + a_{14} \cdot C_{14} \\ &= a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \cdot \det \begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot 1 \cdot [(36 + 36 + 0) - (0 + 18 + 54)] \\ &= 0\end{aligned}$$

Aplicando o resultado de  $\det D_{51}$  no cálculo de  $\det D$  teremos como resultado final 0. Não há, portanto, matriz inversa de  $D$ .

9. “Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & -5 & -3 \end{bmatrix}$$

Calcule  $A^{-1}$ , caso  $A$  seja invertível, e calcule as soluções do sistema linear  $AX = B$ , onde  $B = 0_{3 \times 1}$ .”

*Resolução.* Calculemos primeiro  $\det A$ :

$$\begin{aligned}\det A &= (12 - 3 + 0) - (0 - 3 - 10) \\ &= 9 - (-13) \\ &= 20\end{aligned}$$

Como  $\det A \neq 0$ , então  $A$  é invertível e existe  $A^{-1}$ . Vamos en-

contrar a inversa:

$$\begin{aligned}
A^{-1} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & (l_2 \leftrightarrow l_1) \\
&\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & (l_2 \rightarrow l_2 - 2l_1; l_3 \rightarrow l_3 - 3l_1) \\
&\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} & (l_2 \leftrightarrow l_3) \\
&\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} & (l_1 \rightarrow l_1 + 2l_2; l_3 \rightarrow l_3 - 5l_2) \\
&\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 13 & -5 \end{bmatrix} & (l_3 \rightarrow \frac{l_3}{2}) \\
&\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{13}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix} & (l_1 \rightarrow l_1 + l_3) \\
&\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{13}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Logo, temos a matriz

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -3 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{13}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

Calculemos, portanto, as soluções do sistema  $AX = B$ :

$$\begin{aligned} AX = B &\implies A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \\ &\implies X = A^{-1} \cdot B \end{aligned}$$

Como  $B$  é uma matriz  $0_{3 \times 1}$ , concluimos que  $X$  é também uma matriz  $0_{3 \times 1}$  e o sistema tem solução trivial  $(0, 0, 0)$ .

10. “Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 11 & 4 \\ -2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Calcule  $\det A$  e para quais matrizes  $B_{3 \times 1}$  o sistema  $AX = B$  tem solução.”

*Resolução.* Calculemos  $\det A$  a princípio:

$$\begin{aligned} \det A &= (2 + 55 - 24) - (4 + 44 - 15) \\ &= 33 - 33 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Como  $\det A = 0$ , então temos que  $A$  não é invertível. Considere, portanto, a seguinte matriz  $B$ :

$$B = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

e a matriz aumentada  $(A|B)$

$$\begin{aligned}
 (A|B) &= \begin{bmatrix} -1 & 11 & 4 & x \\ -2 & 1 & 5 & y \\ 1 & 3 & -2 & z \end{bmatrix} \quad (l_2 \rightarrow l_2 - 2l_1; l_3 \rightarrow l_3 + l_1) \\
 &\rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 11 & 4 & x \\ 0 & -21 & -3 & y - 2x \\ 0 & 14 & 2 & z + x \end{bmatrix} \quad (l_1 \rightarrow -l_1) \\
 &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -11 & -4 & -x \\ 0 & -21 & -3 & y - 2x \\ 0 & 14 & 2 & z + x \end{bmatrix} \quad (l_3 \rightarrow l_3 + \frac{2l_2}{3}) \\
 &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -11 & -4 & -x \\ 0 & -21 & -3 & y - 2x \\ 0 & 0 & 0 & z + x + \frac{2}{3} \cdot (y - 2x) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Com isso temos que:

$$\begin{aligned}
 z + x + \frac{2}{3} \cdot (y - 2x) &= 0 \implies z + x + \frac{2y}{3} - \frac{4x}{3} = 0 \\
 &\implies z + x - \frac{4x}{3} + \frac{2y}{3} = 0 \\
 &\implies -\frac{x + 2y}{3} = -z \\
 &\implies z = \frac{x + 2y}{3}
 \end{aligned}$$

Assim, as matrizes  $B_{3 \times 1}$  que admitem solução no sistema  $AX = B$  são descritas na forma

$$B = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \frac{x+2y}{3} \end{bmatrix},$$

onde  $x, y \in \mathbb{R}$ .

11. “Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 & 2 & -1 \\ -3 & -9 & -3 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Calcule  $\det A$  e, caso  $A$  seja invertível,  $\det A^{-1}$ . Além disso, para quais matrizes  $B_{5 \times 1}$  o sistema  $AX = B$  possui alguma solução?”

*Resolução.* Calculemos  $\det A$  a partir de cofatores:

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 & 2 & -1 \\ -3 & -9 & -3 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad (l_2 \rightarrow l_2 + 3l_5) \\ &= \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Fixando a linha 2 temos:

$$\begin{aligned} \det A &= -2 \cdot C_{24} \\ &= -2 \cdot (-1)^6 \cdot \det \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Calculemos o determinante de  $C_{24}$ :

$$\begin{aligned}\det C_{24} &= \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} \quad (l_4 \rightarrow l_4 - l_1) \\ &= \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}\end{aligned}$$

Fixando a linha 4, temos:

$$\begin{aligned}\det C_{24} &= 3 \cdot C_{41} \\ &= 3 \cdot (-1)^5 \cdot \det \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 3 \cdot -1 \cdot (24 + 0 + 2) - (0 + 2 + 6) \\ &= -3 \cdot 18 \\ &= -54\end{aligned}$$

Voltando a  $\det A$ :

$$\begin{aligned}\det A &= -2 \cdot (-1)^6 \cdot \det C_{24} \\ &= -2 \cdot -54 \\ &= 108\end{aligned}$$

Como  $A$  é, portanto, invertível, temos que o determinante de  $A^{-1}$  é:

$$\det A^{-1} = \frac{1}{180}$$

Ademais, se  $A$  é invertível, logo o sistema admite uma única solução para quaisquer matrizes  $B_{5 \times 5}$ .