

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO
NORTE

INSTITUTO METRÓPOLE DIGITAL

Soluções de Exercícios de Matemática Elementar

Nome: Andriel Fernandes

Capítulo 05 - Exercício de Funções Polinomiais

1. “Mostre que uma função afim $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fica inteiramente determinada quando conhecemos $f(x_1)$ e $f(x_2)$ para $x_1 \neq x_2$. Em outras palavras, calcule $a, b \in \mathbb{R}$ onde $f(x) = ax + b$.”

Resolução. Sejam $a, b, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Temos o seguinte sistema:

$$f(x_1) = ax_1 + b$$

$$f(x_2) = ax_2 + b$$

Fazendo uma ”subtração”, temos:

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= ax_1 - ax_2 \implies x_1 - x_2 = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{a} \\ \implies a &= \frac{x_1 - x_2}{f(x_1) - f(x_2)} \end{aligned}$$

Sabendo a , retornemos à primeira equação:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= ax_1 + b \implies f(x_1) = \frac{x_1 - x_2}{f(x_1) - f(x_2)} \cdot x_1 + b \\ \implies b &= f(x_1) - \frac{x_1 - x_2}{f(x_1) - f(x_2)} x_1 \end{aligned}$$

Logo, quando $a = \frac{x_1 - x_2}{f(x_1) - f(x_2)}$ e $b = f(x_1) - \frac{x_1 - x_2}{f(x_1) - f(x_2)} x_1$, a função fica inteiramente determinada.

2. “Pessoas apressadas podem diminuir o tempo gasto em uma escada rolante subindo alguns degraus da escada no percurso. Para uma certa escada, observa-se que uma pessoa gasta 30 seg na escada quando sobe 5 degraus e 20 seg quando sobe 10 degraus. Quantos são os degraus da escada e qual o tempo gasto no percurso?”

Resolução. Seja a função $f(d) = ad + b$ a função que calcula o tempo gasto na escada rolante em função da quantidade de passos dados. A princípio temos:

$$\begin{aligned}f(5) &= 30 = a \cdot 5 + b \\f(10) &= 20 = a \cdot 10 + b\end{aligned}$$

Podemos ”subtrair” as equações:

$$\begin{aligned}30 - 20 &= 5a - 10a \implies 10 = -5a \\&\implies a = -2\end{aligned}$$

Calculado a , vamos substituir para encontrar b :

$$30 = -2 \cdot 5 + b \implies b = 40$$

Portanto, temos a função f modelada como $f(d) = 40 - 2d$. Podemos calcular o tempo total gasto quando não há degraus andados, ou seja, $d = 0$:

$$f(0) = 40 - 0 = 40$$

Logo, o tempo total é de 40 segundos. Em seguida, para calcular a quantidade de degraus, podemos supôr $f(d) = 0$ de modo que:

$$40 - 2d = 0 \implies -2d = -40 \implies d = 20$$

Logo, a quantidade de degraus da escada é 20.

3. Não fiz ainda.
4. Não fiz ainda.
5. “Para cada uma das funções quadráticas abaixo, escreva-a na forma $a(x - m)^2 + k$. A seguir, calcule suas raízes (se existirem), o eixo de simetria de seu gráfico e seu valor mínimo e máximo.”

(a) $f(x) = x^2 - 8x + 23$

Resolução.

$$\begin{aligned}x^2 - 8x + 23 &= x^2 - 8x + 16 + 7 \\&= (x - 4)^2 + 7\end{aligned}$$

Note que a função não tem raízes reais visto que:

$$\Delta = 64 - 92 = -28$$

Seja $x \in \mathbb{R}$ o eixo de simetria tal que

$$x = -\frac{-8}{2} = 4$$

Como $a > 0$, a função não tem valor máximo. Contudo, existe um valor mínimo $y_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$y_0 = f(4) = (4 - 4)^2 + 7 = 7$$

Portanto, o valor mínimo da função é 7 e o ponto $(4, 7)$ é o ponto de mínimo.

(b) $f(x) = 8x - 2x^2$.

Resolução.

$$8x - 2x^2 = (x - 4)(x - 0)$$

Como encontramos a forma fatorada, temos que suas raízes são 0 e 4.

Seja $x \in \mathbb{R}$ o eixo de simetria tal que

$$x = -\frac{8}{-4} = 2$$

Como $a < 0$, a função não tem valor mínimo. Contudo, existe um ponto máximo $y_1 \in \mathbb{R}$ tal que

$$y_1 = f(2) = 8 \cdot 2 - 2 \cdot 4 = 8$$

Portanto, o valor máximo da função é 8 e o ponto (2, 8) é o ponto de máximo absoluto.

(c) $f(x) = 2x^2 - 16x + 46$

Resolução.

$$\begin{aligned} 2x^2 - 16x + 46 &= 2x^2 - 16x + 64 - 18 \\ &= 2(x - 8)^2 - 18 \end{aligned}$$

Note que a função não tem raízes reais visto que:

$$\Delta = 256 - 368 = -112$$

Seja $x \in \mathbb{R}$ o eixo de simetria tal que

$$x = -\frac{-16}{4} = 4$$

Como $a > 0$, a função não tem valor máximo. Contudo, existe um ponto mínimo $y_2 \in \mathbb{R}$ tal que

$$y_2 = f(4) = 2 \cdot 16 - 16 \cdot 4 + 46 = 14$$

Portanto, o valor mínimo da função é 14 e o ponto (4, 14) é o ponto de mínimo absoluto.

6. “Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 - 7x + 12$.”

- (a) “Calcule as raízes de f e qual $x_0 \in \mathbb{R}$ é o mínimo absoluto de f ;

Resolução. Para calcular as raízes temos:

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2}$$

Logo, temos como raízes $x_1 = \frac{8}{2} = 4$ e $x_2 = \frac{6}{2} = 3$.

Além disso, para calcular o mínimo absoluto de f (já que $a > 0$), tomemos $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{7}{2}$$

e $y_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$y_0 = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{1}{4}$$

Logo, o ponto $(\frac{7}{2}, -\frac{1}{4})$ é o ponto mínimo de f e $x_0 = \frac{7}{2}$ é o mínimo absoluto de f .

- (b) “Mostre que f é monótona no intervalo $] -\infty, x_0] = \{x; x \leq x_0\}$ ”.

Resolução. Mostremos que f é monótona decrescente no intervalo $] -\infty; \frac{7}{2}]$. Sejam $a, b \in] -\infty; \frac{7}{2}]$ onde $a < b$ tal que

$$\begin{aligned} a < b \leq \frac{7}{2} &\implies a - \frac{7}{2} < b - \frac{7}{2} \leq 0 \\ &\implies (a - \frac{7}{2})^2 > (b - \frac{7}{2})^2 \geq 0 \\ &\implies a^2 - 7a + \frac{49}{4} > b^2 - 7b + \frac{49}{4} \\ &\implies a^2 - 7a + 12 > b^2 - 7b + 12 \\ &\implies f(a) > f(b) \end{aligned}$$

Logo, está mostrada que a função f é decrescente no intervalo $] -\infty; \frac{7}{2}]$.

7. “Encontre os valores mínimo e máximo assumidos pela função $f(x) = x^2 - 4x + 3$ em cada um dos intervalos abaixo:”

- (a) $[1; 4]$;

Resolução. Como $a > 0$, podemos encontrar o valor mínimo da função a partir do vértice da parábola. Então, sejam $x \in \mathbb{R}$ tal que

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2} = 2$$

e $y \in \mathbb{R}$ tal que

$$y = f(2) = 4 - 8 + 3 = -1$$

Portanto, o ponto $(2, -1)$ é o ponto mínimo da função e -1 é o valor mínimo dela.

Mostremos agora que f é decrescente no intervalo $[1; 2]$ e crescente no intervalo $[2; 4]$. Tomando $a, b \in [1; 2]$, onde $a < b$, temos:

$$\begin{aligned} 1 \leq a < b \leq 2 &\implies -1 \leq a - 2 < b - 2 \leq 0 \\ &\implies (a - 2)^2 > (b - 2)^2 \\ &\implies a^2 - 4a + 4 > b^2 - 4b + 4 \\ &\implies a^2 - 4a + 3 > b^2 - 4b + 3 \\ &\implies f(a) > f(b) \end{aligned}$$

Portanto, mostrado que o intervalo é, de fato, decrescente, tome um $x \in [1; 2]$ qualquer, ou seja

$$1 \leq x \leq 2$$

Como o intervalo é decrescente, temos

$$1 \leq x \implies f(1) \geq f(x)$$

Logo, 1 é o ponto máximo deste intervalo. Agora, tome $p, q \in [2; 4]$, onde $p < q$, tal que:

$$\begin{aligned} 2 \leq p < q &\implies 0 \leq p - 2 < q - 2 \\ &\implies (p - 2)^2 < (q - 2)^2 \\ &\implies p^2 - 4p + 4 < q^2 - 4q + 4 \\ &\implies p^2 - 4p + 3 < q^2 - 4q + 3 \\ &\implies f(p) < f(q) \end{aligned}$$

Sabendo que f é crescente no intervalo, tome qualquer $x \in [2; 4]$, ou seja

$$2 \leq x \leq 4$$

Portanto, temos que

$$x \leq 4 \implies f(x) \leq f(4)$$

Logo, 4 é o ponto máximo do intervalo crescente. Com dois elementos candidatos ao posto de ponto máximo, basta comparar suas imagens:

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 - 4 + 3 = 0 \\ f(4) &= 16 - 16 + 3 = 3 \end{aligned}$$

Logo, $f(4) > f(1)$ e $(4, 3)$ é o ponto máximo da função e 3 o valor máximo.

- (b) $[6; 10]$.
Não fiz ainda.

8.
9.
10.
11. “Considere a função polinomial $p(x) = x^2 - 2$.”

(a) “Usando o Teorema de raízes racionais prove que $p(x)$ não possui raízes racionais”;

Resolução. Temos, pelo Teorema, que os candidatos às raízes de $p(x)$ são obtidos a partir dos divisores de:

- 2: $\pm 1, \pm 2$;
- 1: ± 1

Podemos formar as frações $\frac{p}{q}$ a partir dos divisores; são elas $\pm \frac{1}{1}$ e $\pm \frac{2}{1}$. Vamos testar cada uma delas:

$$\begin{aligned}p(1) &= 1 - 2 = -1 \\p(-1) &= 1 - 2 = -1 \\p(2) &= 4 - 2 = 2 \\p(-2) &= 4 - 2 = 2\end{aligned}$$

Como não houve nenhum $p(\frac{p}{q}) = 0$, então p não tem raízes racionais.

(b) “Mostre que $\sqrt{2}$ é raiz de $p(x)$;

Resolução. p não tem raízes racionais, mas pode ter irracionais. Tomando $p(x) = 0$, vejamos:

$$\begin{aligned}x^2 - 2 = 0 &\implies x^2 = 2 \\&\implies |x| = \sqrt{2} \\&\implies x = \pm\sqrt{2}\end{aligned}$$

Aplicando:

$$\begin{aligned}p(\sqrt{2}) &= (\sqrt{2})^2 - 2 = 2 - 2 = 0 \\p(-\sqrt{2}) &= (-\sqrt{2})^2 - 2 = 2 - 2 = 0\end{aligned}$$

Logo, $\sqrt{2}$ é de fato raiz de p .

- (c) “Conclua que $\sqrt{2}$ é irracional;”
Resolução.