UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
INSTITUTO METRÓPOLE DIGITAL
Soluções de Exercícios de Matemática Elementar

Nome: Andriel Fernandes

# Capítulo 06 - Exercício de Funções Exponenciais e Logarítmicas

1.

2. "Uma aplicação rende a juros compostos se o rendimento diário é somado ao capital inicial para o cálculo dos juros dos dias seguintes.
Edson faz uma aplicação que rende juros $j > 0$ em um mês. Ou seja, se ele investiu um capital inicial $c_0$, então ao fim de 1 mês, Edson poderia resgatar $c = c_0(1 + j)$."

   (a) "Caso a aplicação renda juros compostos, defina uma função do tipo exponencial que calcule o capital $c_c$ em função do tempo $t$ (em meses) da aplicação;"
   *Resolução.* Seja $f(t) = a^t \cdot b$ uma função de tipo exponencial que calcula os juros compostos, onde $t$ é o tempo em meses. Sabemos que $f(0) = b$ e que $f(1) = c_0(1 + j)$. Logo, temos que $b$ é o capital inicial $c_0$. Vamos apicar $f(1)$:

$$f(1) = c_0(1+j) = a \cdot c_0 \implies \frac{c_0(1+j)}{c_0}$$
$$\implies a = 1 + j$$

Desse modo, modelemos a função

$$f(t) = a^t \cdot b = (1 + j) \cdot c_0$$

(b) "Suponha que Edson precisará resgatar todo o dinheiro da aplicação em um tempo $t$ menor que um mês. É mais vantajoso aplicar com juros simples ou com juros compostos? Compare com a função criada no Exercício sobre juros simples do capítulo anterior e utilize a Desigualdade de Bernoulli."
*Resolução.* De acordo com a Desigualdade de Bernoulli, temos, para $0 < b < 1$:

$$(1 + a)^b \leq 1 + ab$$

Sendo as funções $simp(t) = c_0(1+jt)$ e $comp(t) = c_0(1+j)^t$ definidas anteriormente temos, analogamente:

$$\begin{aligned}(1 + j)^t \leq (1 + jt) &\implies c_0(1 + j)^t \leq c_0(1 + jt) \quad (c_0 > 0)\\ &\implies comp(t) \leq simp(t)\end{aligned}$$

Deste resultado temos que é mais vantajoso para Edson aplicar com juros simples.

(c) "A conclusão do item anterior também válida caso o tempo de aplicação fosse mais de 1 mês?"
*Resolução.* Não. Note que, para $b > 1$ temos:

$$(1 + a)^b \geq 1 + ab$$

Logo, para as mesmas funções acima, teríamos

$$\begin{aligned}(1 + j)^t \geq (1 + jt) &\implies c_0(1 + j)^t \geq c_0(1 + jt)\\ &\implies comp(t) \geq simp(t)\end{aligned}$$

Para casos onde $t > 1$, portanto, é melhor aplicar em juros compostos.

3.

4. "Use as aproximações $\log 2 \approx 0,301, \log 3 \approx 0,477, \log 5 \approx 0,699$ para obter valores aproximados para:"

   (a) $\log 9$: pela propriedade (a) temos:

$$\begin{aligned}\log(9) &= \log(3 \cdot 3)\\ &= \log 3 + \log 3\\ &= 0,477 + 0,477\\ &= 0,954\end{aligned}$$

   (b) $\log 40$: pelas propriedades (a) e (b) temos:

$$\begin{aligned}\log 40 &= \log(5 \cdot 2^3)\\ &= \log 5 + \log 2^3\\ &= \log 5 + 3 \cdot \log 2\\ &= 0,699 + 0,903\\ &= 1,602\end{aligned}$$

   (c) $\log 200$: pelas propriedades (a) e (b) temos:

$$\begin{aligned}\log 200 &= \log(5^2 \cdot 2^3)\\ &= 2 \cdot \log 5 + 3 \cdot \log 2\\ &= 1,398 + 0,903\\ &= 2,301\end{aligned}$$

(d) $\log 3000$: pelas propriedades (a) e (b) temos:

$$\begin{aligned}
\log 3000 &= \log(200 \cdot 15)\\
&= \log 200 + \log 15\\
&= \log 200 + \log(5 \cdot 3)\\
&= \log 200 + \log 5 + \log 3\\
&= 2,301 + 0,699 + 0,477\\
&= 3,477
\end{aligned}$$

(e) $\log 0,003$: pelas propriedades (a) e (b) temos:

$$\begin{aligned}
\log 0,003 &= \log(3 \cdot 10^{-3})\\
&= \log 3 + (-3 \cdot \log 10)\\
&= 0,477 - 3 \cdot (\log 5 \cdot \log 2)\\
&= 0,477 - 3 \cdot 0,699 + 0,301\\
&= 0,477 - 3 \cdot 1\\
&= -2,523
\end{aligned}$$

(f) $\log 0,81$: pelas propriedades (a) e (b) temos:

$$\begin{aligned}
\log 0,81 &= \log(9^2 \cdot 10^{-2})\\
&= 2 \cdot \log 9 - 2 \cdot \log 10\\
&= 1,908 - 2\\
&= -0,092
\end{aligned}$$

5. “Mostre que

$$\log_{b^n} a^n = \log_b a$$

para todo $a, b, n \in \mathbb{R}_+^*$ e $b \neq 1$.”

*Resolução.* Sejam $a, b, n \in \mathbb{R}_+^*$ onde $b \neq 1$. Note:

$$\begin{aligned}
\log_{b^n} a^n &= \frac{\log_b a^n}{\log_b b^n} && \text{(Mudança de base)} \\
&= \frac{n \cdot \log_b a}{n} && \text{(prop. b)} \\
&= \log_b a
\end{aligned}$$

Assim está mostrado que $\log_{b^n} a^n = \log_b a$.

6. "Considere $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $x = 10^k y$, com $k \in \mathbb{Z}$. Qual é a relação entre $\log x$ e $\log y$?"
   *Resolução.* Sejam $x, y \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$. Temos:

$$\begin{aligned}
x = 10^k \cdot y &\implies \log_{10}(10^k \cdot y) = \log x \\
&\implies \log 10^k + \log y = \log x \\
&\implies \log y = \log x - k
\end{aligned}$$

   Note que $\log x = \log y + k$, enquanto $\log y = \log x - \log k$. Assim, $\log x \geq \log y$.

7. "Uma interpretação do logaritmo decimal é sua relação com a ordem de grandeza, isto é, com o número de algarismos na representação decimal. As questões a seguir exploram essa relação."

   (a) "Considere o número $x = 58.932,1503$. Qual é a parte inteira de $\log x$?"
   *Resolução.* A princípio, temos:

$$\begin{aligned}
\log 10000 = \log(100 \cdot 100) = 2 + 2 = 4 \\
\log 100000 = \log(10000 \cdot 10) = 4 + 1 = 5,
\end{aligned}$$

e que a função logarítmica é crescente quando a base $a > 1$. Note, portanto, que:

$$\begin{aligned} 10000 < x < 100000 &\implies \log 10000 < \log x < \log 100000 \\ &\implies 4 < \log x < 5 \end{aligned}$$

Então, podemos concluir que a parte inteira de $\log x$ é 4.

(b) "Considere $x > 1$ um número real cuja parte inteira tem $k$ algarismos. Use que a função logarítmica é crescente para mostrar que a parte inteira de $\log x$ é igual a $k - 1$."
*Resolução.* Sejam $x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$, onde $x > 1$. Temos:

$$\begin{aligned} 10^k > x \geq 10^{k-1} &\implies \log 10^k > \log x \geq \log 10^{k-1} \quad (\log_1 0 \text{ é crescente}) \\ &\implies k > \log x \geq k - 1 \end{aligned}$$

Portanto, se $\log x \geq k - 1$, sua parte inteira é igual a $k - 1$.

(c) "Generalizando o item anterior, considere o sistema de numeração posicional de base $b \geq 2$. Mostre que, se a representação de um número real $x > 1$ nesse sistema tem $k$ algarismos, então, a parte inteira de $\log_b x$ é igual a $k - 1$."
*Resolução.* Sejam $x, b \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$, onde $x > 1$ e $b \geq 2$. Temos:

$$\begin{aligned} b^k > x \geq b^{k-1} &\implies \log_b b^k > \log_b x \geq \log_b b^{k-1} \\ &\implies k > \log_b x \geq k - 1 \end{aligned}$$

Portanto, se $\log_b x \geq k - 1$, sua parte inteira é $k - 1$.

8. "Um explorador descobriu, na selva amazônica, uma espécie nova de planta e, pesquisando-a durante anos, comprovou que seu crescimento médio variava de acordo com a fórmula $A = 40 \cdot 1,1^t$, onde a altura média $A$ é medida em centímetros e o tempo $t$ em anos. Sabendo-se que $\log 2 \approx 0,30$ e $\log 11 \approx 1,04$, determine:"

(a) A altura média, em centímetros, de uma planta dessa espécie aos 3 anos de vida;
*Resolução.* Tomando $t = 3$, temos:

$$\begin{aligned} A &= 40 \cdot 1,1^3 \\ &= 40 \cdot 1,331 \\ &= 53,24 \end{aligned}$$

Logo, a planta tem altura média de 53,24cm em 3 anos.

(b) A idade, em anos, na qual a planta tem uma altura média de $1,6m$.
*Resolução.* Tomando $A = 160$, temos:

$$\begin{aligned} 160 = 40 \cdot 1,1^t &\implies 4 = 1,1^t \\ &\implies t = \log_{1,1} 4 \\ &\implies t = \frac{\log 4}{\log 1,1} \\ &\implies t = \frac{2 \cdot \log 2}{\log 11 + \log \frac{1}{10}} \\ &\implies t = \frac{0,6}{1,04 - 1} \qquad (\log \frac{1}{10} = -1) \\ &\implies t = 1,5 \end{aligned}$$

Logo, a planta terá 1 ano e 5 meses quando tiver uma altura de 1,6m.