

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO  
NORTE

INSTITUTO METRÓPOLE DIGITAL

Soluções de Exercícios de Matemática Elementar

Nome: Andriel Fernandes

**Capítulo 05 - Exercício de Funções Polinomiais**

1. “Mostre que uma função afim  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fica inteiramente determinada quando conhecemos  $f(x_1)$  e  $f(x_2)$  para  $x_1 \neq x_2$ . Em outras palavras, calcule  $a, b \in \mathbb{R}$  onde  $f(x) = ax + b$ .”

*Resolução.* Sejam  $a, b, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ . Temos o seguinte sistema:

$$f(x_1) = ax_1 + b$$

$$f(x_2) = ax_2 + b$$

Fazendo uma ”subtração”, temos:

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= ax_1 - ax_2 \implies x_1 - x_2 = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{a} \\ \implies a &= \frac{x_1 - x_2}{f(x_1) - f(x_2)} \end{aligned}$$

Sabendo  $a$ , retornemos à primeira equação:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= ax_1 + b \implies f(x_1) = \frac{x_1 - x_2}{f(x_1) - f(x_2)} \cdot x_1 + b \\ \implies b &= f(x_1) - \frac{x_1 - x_2}{f(x_1) - f(x_2)} x_1 \end{aligned}$$

Logo, quando  $a = \frac{x_1 - x_2}{f(x_1) - f(x_2)}$  e  $b = f(x_1) - \frac{x_1 - x_2}{f(x_1) - f(x_2)} x_1$ , a função fica inteiramente determinada.

2. “Pessoas apressadas podem diminuir o tempo gasto em uma escada rolante subindo alguns degraus da escada no percurso. Para uma certa escada, observa-se que uma pessoa gasta 30 seg na escada quando sobe 5 degraus e 20 seg quando sobe 10 degraus. Quantos são os degraus da escada e qual o tempo gasto no percurso?”

*Resolução.* Seja a função  $f(d) = ad + b$  a função que calcula o tempo gasto na escada rolante em função da quantidade de passos dados. A princípio temos:

$$\begin{aligned}f(5) &= 30 = a \cdot 5 + b \\f(10) &= 20 = a \cdot 10 + b\end{aligned}$$

Podemos ”subtrair” as equações:

$$\begin{aligned}30 - 20 &= 5a - 10a \implies 10 = -5a \\&\implies a = -2\end{aligned}$$

Calculado  $a$ , vamos substituir para encontrar  $b$ :

$$30 = -2 \cdot 5 + b \implies b = 40$$

Portanto, temos a função  $f$  modelada como  $f(d) = 40 - 2d$ . Podemos calcular o tempo total gasto quando não há degraus andados, ou seja,  $d = 0$ :

$$f(0) = 40 - 0 = 40$$

Logo, o tempo total é de 40 segundos. Em seguida, para calcular a quantidade de degraus, podemos supôr  $f(d) = 0$  de modo que:

$$40 - 2d = 0 \implies -2d = -40 \implies d = 20$$

Logo, a quantidade de degraus da escada é 20.

3. Não fiz ainda.
4. Não fiz ainda.
5. “Para cada uma das funções quadráticas abaixo, escreva-a na forma  $a(x - m)^2 + k$ . A seguir, calcule suas raízes (se existirem), o eixo de simetria de seu gráfico e seu valor mínimo e máximo.”

(a)  $f(x) = x^2 - 8x + 23$

*Resolução.*

$$\begin{aligned}x^2 - 8x + 23 &= x^2 - 8x + 16 + 7 \\&= (x - 4)^2 + 7\end{aligned}$$

Note que a função não tem raízes reais visto que:

$$\Delta = 64 - 92 = -28$$

Seja  $x \in \mathbb{R}$  o eixo de simetria tal que

$$x = -\frac{-8}{2} = 4$$

Como  $a > 0$ , a função não tem valor máximo. Contudo, existe um valor mínimo  $y_0 \in \mathbb{R}$  tal que

$$y_0 = f(4) = (4 - 4)^2 + 7 = 7$$

Portanto, o valor mínimo da função é 4 e o ponto  $(4, 7)$  é o ponto de mínimo.

(b)  $f(x) = 8x - 2x^2$ .

*Resolução.*

$$8x - 2x^2 = (x - 4)(x - 0)$$

Como encontramos a forma fatorada, temos que suas raízes são 0 e 4.

Seja  $x \in \mathbb{R}$  o eixo de simetria tal que

$$x = -\frac{8}{-4} = 2$$

Como  $a < 0$ , a função não tem valor mínimo. Contudo, existe um ponto máximo  $y_1 \in \mathbb{R}$  tal que

$$y_1 = f(2) = 8 \cdot 2 - 2 \cdot 4 = 8$$

Portanto, o valor máximo da função é 2 e o ponto (2, 8) é o ponto de máximo absoluto.

(c)  $f(x) = 2x^2 - 16x + 46$

*Resolução.*

$$\begin{aligned} 2x^2 - 16x + 46 &= 2x^2 - 16x + 64 - 18 \\ &= 2(x - 8)^2 - 18 \end{aligned}$$

Note que a função não tem raízes reais visto que:

$$\Delta = 256 - 368 = -112$$

Seja  $x \in \mathbb{R}$  o eixo de simetria tal que

$$x = -\frac{-16}{4} = 4$$

Como  $a > 0$ , a função não tem valor máximo. Contudo, existe um ponto mínimo  $y_2 \in \mathbb{R}$  tal que

$$y_2 = f(4) = 2 \cdot 16 - 16 \cdot 4 + 46 = 14$$

Portanto, o valor mínimo da função é 4 e o ponto (4, 14) é o ponto de mínimo absoluto.

6. “Considere a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = x^2 - 7x + 12$ .”

- (a) “Calcule as raízes de  $f$  e qual  $x_0 \in \mathbb{R}$  é o mínimo absoluto de  $f$ ;

*Resolução.* Para calcular as raízes temos:

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2}$$

Logo, temos como raízes  $x_1 = \frac{8}{2} = 4$  e  $x_2 = \frac{6}{2} = 3$ .

Além disso, para calcular o mínimo absoluto de  $f$  (já que  $a > 0$ ), tomemos  $x_0 \in \mathbb{R}$  tal que

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{7}{2}$$

e  $y_0 \in \mathbb{R}$  tal que

$$y_0 = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{1}{4}$$

Logo, o ponto  $(\frac{7}{2}, -\frac{1}{4})$  é o ponto mínimo de  $f$  e  $x_0 = \frac{7}{2}$  é o mínimo absoluto de  $f$ .

- (b) “Mostre que  $f$  é monótona no intervalo  $] -\infty, x_0] = \{x; x \leq x_0\}$ ”.

*Resolução.* Mostremos que  $f$  é monótona decrescente no intervalo  $] -\infty; \frac{7}{2}]$ . Sejam  $a, b \in ] -\infty; \frac{7}{2}]$  onde  $a < b$  tal que

$$\begin{aligned} a < b \leq \frac{7}{2} &\implies a - \frac{7}{2} < b - \frac{7}{2} \leq 0 \\ &\implies (a - \frac{7}{2})^2 > (b - \frac{7}{2})^2 \geq 0 \\ &\implies a^2 - 7a + \frac{49}{4} > b^2 - 7b + \frac{49}{4} \\ &\implies a^2 - 7a + 12 > b^2 - 7b + 12 \\ &\implies f(a) > f(b) \end{aligned}$$

Logo, está mostrada que a função  $f$  é decrescente no intervalo  $] -\infty; \frac{7}{2}]$ .

7. “Encontre os valores mínimo e máximo assumidos pela função  $f(x) = x^2 - 4x + 3$  em cada um dos intervalos abaixo:”

(a)  $[1; 4]$ ;

*Resolução.* Como  $a > 0$ , podemos encontrar o valor mínimo da função a partir do vértice da parábola. Então, sejam  $x \in \mathbb{R}$  tal que

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2} = 2$$

e  $y \in \mathbb{R}$  tal que

$$y = f(2) = 4 - 8 + 3 = -1$$

Portanto, o ponto  $(2, -1)$  é o ponto mínimo da função e  $x = 2$  é o valor mínimo dela.

Mostremos agora que  $f$  é decrescente no intervalo  $[1; 2]$  e crescente no intervalo  $[2; 4]$ . Tomando  $a, b \in [1; 2]$ , onde  $a < b$ , temos:

$$\begin{aligned} 1 \leq a < b \leq 2 &\implies -1 \leq a - 2 < b - 2 \leq 0 \\ &\implies (a - 2)^2 > (b - 2)^2 \\ &\implies a^2 - 4a + 4 > b^2 - 4b + 4 \\ &\implies a^2 - 4a + 3 > b^2 - 4b + 3 \\ &\implies f(a) > f(b) \end{aligned}$$

Portanto, mostrado que o intervalo é, de fato, decrescente, tome um  $x \in [1; 2]$  qualquer, ou seja

$$1 \leq x \leq 2$$

Como o intervalo é decrescente, temos

$$1 \leq x \implies f(1) \geq f(x)$$

Logo, 1 é o ponto máximo deste intervalo. Agora, tome  $p, q \in [2; 4]$ , onde  $p < q$ , tal que:

$$\begin{aligned} 2 \leq p < q &\implies 0 \leq p - 2 < q - 2 \\ &\implies (p - 2)^2 < (q - 2)^2 \\ &\implies p^2 - 4p + 4 < q^2 - 4q + 4 \\ &\implies p^2 - 4p + 3 < q^2 - 4q + 3 \\ &\implies f(p) < f(q) \end{aligned}$$

Sabendo que  $f$  é crescente no intervalo, tome qualquer  $x \in [2; 4]$ , ou seja

$$2 \leq x \leq 4$$

Portanto, temos que

$$x \leq 4 \implies f(x) \leq f(4)$$

Logo, 4 é o ponto máximo do intervalo crescente. Com dois elementos candidatos ao posto de ponto máximo, basta comparar suas imagens:

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 - 4 + 3 = 0 \\ f(4) &= 16 - 16 + 3 = 3 \end{aligned}$$

Logo,  $f(4) > f(1)$ ,  $(4, 3)$  é o ponto máximo da função e  $x = 4$ , o valor máximo.

(b)  $[6; 10]$ .

*Resolução.* Vamos mostrar que  $f$  é monótona crescente no

intervalo  $[6; 10]$ . Portanto tome  $a, b \in [6; 10]$ , onde  $a < b$ , tais que

$$\begin{aligned} 6 \leq a < b \leq 10 &\implies 4 \leq a - 2 < b - 2 \leq 8 \\ &\implies (a - 2)^2 < (b - 2)^2 \\ &\implies a^2 - 4a + 4 < b^2 - 4a + 4 \\ &\implies a^2 - 4a + 3 < b^2 - 4a + 3 \\ &\implies f(a) < f(b) \end{aligned}$$

Logo, sabendo que a função  $f$  é crescente neste intervalo, tome qualquer  $x \in [6; 10]$ , ou seja,

$$6 \leq x \leq 10 \implies f(6) \leq f(x) \leq f(10)$$

Assim, sabemos que 6 é valor mínimo de  $f$  e 10 seu valor máximo, ao menos no intervalo.

8.

9. “Considere  $f : [-5; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = -x^2 - 2x + 8$ .”

(a) “Faça um esboço do gráfico da função  $f$  e aponte os extremos absolutos da função;”

*Resolução.* Vamos calcular alguns dados. A princípio, vejamos suas raízes:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{-2} = \frac{2 \pm 6}{-2}$$

Então,  $x_1 = \frac{8}{-2} = -4$  e  $x_2 = \frac{-4}{-2} = 2$ . Calculemos então o vértice da parábola, tomando  $x \in [-5; 1], y \in \mathbb{R}$  tais que

$$x = -\frac{-2}{-2} = -1$$



e

$$y = -1 + 2 + 8 = 9$$

Logo, o vértice da parábola é o ponto  $(-1, 9)$  e o valor máximo de  $f$  é  $-1$ .

Conhecendo o valor máximo de  $f$ , podemos montar os intervalos  $[-5; -1]$  e  $[-1; 1]$  onde o primeiro é crescente e o segundo decrescente, visto que  $a < 0$  e o gráfico de uma função quadrática tem formato de parábola, ou seja, tem um intervalo crescente e outro decrescente. Vejamos o ponto mínimo no primeiro intervalo, tomando qualquer  $x \in [-5; -1]$ :

$$-5 \leq x \leq -1 \implies f(-5) \leq f(x) \leq f(-1)$$

Logo,  $-5$  é o valor mínimo neste intervalo. Tomando qualquer  $x \in [-1; 1]$ , temos também:

$$-1 \leq x \leq 1 \implies f(-1) \geq f(x) \geq f(1)$$

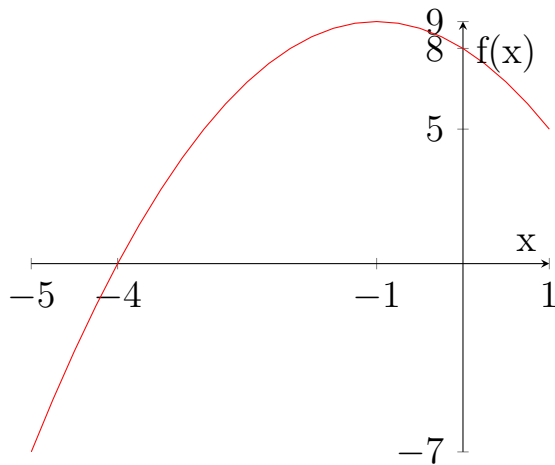
Logo, sabendo que  $f$  é decrescente neste intervalo, temos que o valor mínimo dele é  $1$ . Para concluir o mínimo absoluto de  $f$ , basta comparar:

$$f(-5) = -25 + 10 + 8 = -7$$

$$f(1) = -1 - 2 + 8 = 5$$

Como  $f(-5) < f(1)$ ,  $-5$  é, de fato, o mínimo absoluto de  $f$ . Por fim, sabemos que o ponto  $(0, 8)$  “encosta” no eixo  $y$ , pois  $f(0) = 0 + 0 + 8 = 8$ .

Com todos esses dados, teremos o seguinte gráfico:



- (b) “Defina uma função bijetiva  $f'$  onde  $f'(x) = f(x)$  para todo  $x$  pertencente ao intervalo que será o domínio de  $f'$  e que preserve os extremos de  $f$ ;

*Resolução.* Podemos definir uma função  $f' : [-5; -1] \rightarrow [-7; 9]$ , tornando a função tanto injetiva quanto sobrejetiva e preservando os pontos mínimo e máximo absolutos.

- (c) “Prove que  $f'$  é monótona.”

*Resolução.* Sejam  $a, b \in [-5; -1]$  onde  $a < b$  tais que

$$\begin{aligned}
 a < b \leq -1 &\implies a + 1 < b + 1 \leq 0 \\
 &\implies (a + 1)^2 > (b + 1)^2 \\
 &\implies a^2 + 2a + 2 > b^2 + 2b + 2 \\
 &\implies -a^2 - 2a - 2 < -b^2 - 2b - 2 \\
 &\implies -a^2 - 2a + 8 < -b^2 - 2b + 8 \\
 &\implies f(a) < f(b)
 \end{aligned}$$

Então, está mostrado que a função  $f'$  é monótona crescente.

10.

11. “Considere a função polinomial  $p(x) = x^2 - 2$ .”

- (a) “Usando o Teorema de raízes racionais prove que  $p(x)$  não possui raízes racionais”;

*Resolução.* Temos, pelo Teorema, que os candidatos às raízes de  $p(x)$  são obtidos a partir dos divisores de:

- 2:  $\pm 1, \pm 2$ ;
- 1:  $\pm 1$

Podemos formar as frações  $\frac{p}{q}$  a partir dos divisores; são elas  $\pm \frac{1}{1}$  e  $\pm \frac{2}{1}$ . Vamos testar cada uma delas:

$$\begin{aligned}p(1) &= 1 - 2 = -1 \\p(-1) &= 1 - 2 = -1 \\p(2) &= 4 - 2 = 2 \\p(-2) &= 4 - 2 = 2\end{aligned}$$

Como não houve nenhum  $p(\frac{p}{q}) = 0$ , então  $p$  não tem raízes racionais.

- (b) “Mostre que  $\sqrt{2}$  é raiz de  $p(x)$ ;

*Resolução.*  $p$  não tem raízes racionais, mas pode ter irracionais. Tomando  $p(x) = 0$ , vejamos:

$$\begin{aligned}x^2 - 2 = 0 &\implies x^2 = 2 \\&\implies |x| = \sqrt{2} \\&\implies x = \pm\sqrt{2}\end{aligned}$$

Aplicando:

$$\begin{aligned}p(\sqrt{2}) &= (\sqrt{2})^2 - 2 = 2 - 2 = 0 \\p(-\sqrt{2}) &= (-\sqrt{2})^2 - 2 = 2 - 2 = 0\end{aligned}$$

Logo,  $\sqrt{2}$  é de fato raiz de  $p$ .

- (c) “Conclua que  $\sqrt{2}$  é irracional;”

*Resolução.*