

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO
NORTE
INSTITUTO METRÓPOLE DIGITAL
Soluções de Exercícios de Matemática Elementar

Nome: Andriel Fernandes

Capítulo 01 - Exercício de Conjuntos

1. “De que outras formas podemos representar o conjunto vazio utilizando as duas notações de definição de conjuntos que conhecemos?”

Primeira: Seja $\emptyset = \{\}$.

Segunda: Seja o conjunto A o conjunto dos inteiros, e A^C o seu complementar. Temos, portanto, que $A \cap A^C = \emptyset$.

2. “Decida quais das afirmações a seguir estão corretas. Justifique suas respostas.”

(a) $\emptyset \in \emptyset$;

- **Proposição falsa:** se $\emptyset \in \emptyset$, significa que \emptyset tem ao menos um elemento, o que vai contra sua definição e nos leva a um absurdo.

(b) $\emptyset \subseteq \emptyset$;

- **Proposição verdadeira:** suponha que $\emptyset \not\subseteq \emptyset$. Logo, há um elemento $x \in \emptyset$ que não pertence a \emptyset . Isso gera um absurdo pois, por definição, o conjunto vazio não contém elementos. Logo, a proposição é verdadeira.

(c) $\emptyset \in \{\emptyset\}$;

- **Proposição verdadeira:** tomado o conjunto $A = \{\emptyset\}$, suponha que $\emptyset \notin \{\emptyset\}$. No entanto, sabendo que o conjunto A tem \emptyset como elemento, chegamos a uma contradição. Logo, a proposição é verdadeira.

(d) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$.

- **Proposição verdadeira:** tome o conjunto $A = \{\emptyset\}$. De acordo com a Inclusão Universal do \emptyset , para todo conjunto A , vale $\emptyset \subseteq A$. Desse modo, a proposição é verdadeira.

3. Não fiz.

4. “Considere $A = \{x \in \mathbb{Z}_+; x < 3\}$. Calcule $\mathbb{P}(A)$.”
Temos que $\mathbb{P}(A)$ é o conjunto das partes de A . Logo, temos $\mathbb{P}(A) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{1, 2\}, \{0, 2\}, A\}$.
5. “Dê exemplos de conjuntos A, B, C , justificando com os cálculos, que satisfaçam:”

- (a) “ $A \cup (B \cap C) \neq (A \cup B) \cap C$. Qual o conjunto que será sempre igual a $A \cup (B \cap C)$?”
Sejam $A = \{2, 4, 6\}, B = \{3, 6, 9\}, C = \{4, 9, 14\}$. Assim, temos:

$$\begin{aligned} & A \cup (B \cap C) \neq (A \cup B) \cap C \\ \implies & \{2, 4, 6\} \cup (\{3, 6, 9\} \cap \{4, 9, 14\}) \neq (\{2, 4, 6\} \cup \{3, 6, 9\}) \cap \{4, 9, 14\} \\ \implies & \{2, 4, 6\} \cup \{9\} \neq \{2, 3, 4, 6, 9\} \cap \{4, 9, 14\} \\ \implies & \{2, 4, 6, 9\} \neq \{4, 9\} \end{aligned}$$

De acordo com a propriedade distributiva, podemos afirmar

que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Vejamos:

$$\begin{aligned} & (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ &= (\{2, 4, 6\} \cup \{3, 6, 9\}) \cap (\{2, 4, 6\} \cup \{4, 9, 14\}) \\ &= \{2, 3, 4, 6, 9\} \cap \{2, 4, 6, 9, 14\} \\ &= \{2, 4, 6, 9\} \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que os conjuntos são iguais.

- (b) “ $A \subseteq B$, mas $A^C \not\subseteq B^C$. Qual inclusão é sempre válida envolvendo A^C e B^C ?”

Sejam $A = \{4, 6\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, $C = \{5\}$, $\mathbb{U} = A \cup B \cup C$. Logo, temos que:

$$A \subseteq B = \{4, 6\} \subseteq \{2, 4, 6, 8\}$$

é verdadeiro, assim como

$$A^C \not\subseteq B^C = \{2, 5, 8\} \not\subseteq \{5\}$$

Logo, $A^C \not\subseteq B^C$. Contudo, de acordo com uma das propriedades do complementar, “se $A \subseteq B$, então $B^C \subseteq A^C$ ”. Logo, vejamos se é de fato:

$$B^C \subseteq A^C \implies \{5\} \subseteq \{2, 5, 8\}$$

Portanto, a inclusão de B^C em A^C é válida.

- (c) “ $A \subsetneq B$ ”

Sejam os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Temos, portanto, que, para qualquer $x \in A$, também $x \in B$; mas, tomando um $y \in B$, não é sempre verdadeiro que $y \in A$. Logo, $A \subseteq B$ e $B \not\subseteq A$, o que configura a inclusão própria, representada por $A \subsetneq B$.

- (d) “ $(A \cap B)^C \neq A^C \cap B^C$. Qual o conjunto que será sempre igual a $(A \cap B)^C$?”

Sejam os conjuntos $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{3, 6, 9\}$, $\mathbb{U} = A \cup B$. Assim, temos:

$$\begin{aligned} & (A \cap B)^C \neq A^C \cap B^C \\ & = (\{2, 4, 6\} \cap \{3, 6, 9\})^C \neq (\{2, 4, 6\})^C \cap (\{3, 6, 9\})^C \\ & = (\{6\})^C \neq (\{3, 9\}) \cap (\{2, 4\}) \\ & = \{2, 3, 4, 9\} \neq \emptyset \end{aligned}$$

De acordo com as Leis de DeMorgan, nós temos que o conjunto $(A \cap B)^C$ pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & A^C \cup B^C = (\{2, 4, 6\})^C \cup (\{3, 6, 9\})^C \\ & \implies \{3, 9\} \cup \{2, 4\} = \{2, 3, 4, 9\} \end{aligned}$$

Assim, concluímos que os conjuntos são iguais.

6. “As igualdades abaixo acerca dos conjuntos A, B, C não são válidas geralmente. Em cada um dos itens, dê um exemplo que ilustre esse fato.”

- (a) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;

Sejam $A = \{1, 4\}$, $B = \{1, 8\}$, $C = \{4, 9\}$. Temos:

$$\begin{aligned} & A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \\ & \implies \{1, 4\} \setminus (\{1, 8\} \cap \{4, 9\}) = (\{1, 4\} \setminus \{1, 8\}) \cap \{1, 4\} \setminus \{4, 9\} \\ & \implies \{1, 4\} \setminus \emptyset = \{4\} \cap \{1\} \\ & \implies \{1, 4\} = \emptyset \end{aligned}$$

Chegamos em um absurdo, logo, a proposição não é válida para este caso.

$$(b) \quad A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C);$$

Sejam $A = \{1, 4\}$, $B = \{1, 8\}$, $C = \{4, 9\}$. Temos:

$$\begin{aligned} A \setminus (B \cup C) &= (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \\ \implies \{1, 4\} \setminus (\{1, 8\} \cup \{4, 9\}) &= (\{1, 4\} \setminus \{1, 8\}) \cup \{1, 4\} \setminus \{4, 9\} \\ \{1, 4\} \setminus \{1, 4, 8, 9\} &= \{4\} \cup \{1\} \\ \implies \emptyset &= \{1, 4\} \end{aligned}$$

Chegamos a um absurdo. Portanto a proposição não é válida para este caso.

7. “Sejam A, B conjuntos quaisquer. Classifique como verdadeiro ou falso cada sentença abaixo. Justifique ou dê um contra-exemplo para o caso da sentença ser falsa.”

$$(a) \quad (A \setminus B) \subseteq B;$$

Falsa. Suponha, por absurdo, que a afirmação é verdadeira. Logo, existe x tal que $x \in (A \setminus B)$ e $x \in B$. Contudo, se $x \in (A \setminus B)$, então $x \in A$ e $x \notin B$, o que é um absurdo pois, anteriormente, definimos que $x \in B$. Logo, a proposição é falsa.

$$(b) \quad (A \setminus B) \subseteq (A \cup B);$$

Verdadeira. Suponha que $(A \setminus B) \not\subseteq (A \cup B)$. Assim, por definição de diferença, existe um elemento x tal que $x \in (A \setminus B)$, ou seja, $x \in A$, $x \notin B$. Contudo, se $(A \setminus B) \not\subseteq (A \cup B)$, então $x \notin (A \cup B)$, o que significa que, pela definição de união, $x \notin A$ nem $x \notin B$. Isso é um notável absurdo pois $x \in A$ e $x \notin A$ simultaneamente. Logo, a proposição é verdadeira.

8. “Sejam A, B, C conjuntos tais que $A \cup B \cup C = \mathbb{U}$. Em cada um dos itens, use propriedades para obter um conjunto igual aos escritos abaixo somente com **uniões de conjuntos**.”

(a) $A \cup (B \cap C^C) \cup (A^C \cap B^C \cap C^C) \cup C;$

Resolução. Temos:

$$\begin{aligned}
& A \cup (B \cap C^C) \cup (A^C \cap B^C \cap C^C) \cup C \\
&= A \cup (B \cap C^C) \cup [A^C \cap (B^C \cap C^C)] \cup C \quad (\text{Associatividade}) \\
&= A \cup (B \cap C^C) \cup [A^C \cap (B \cup C)^C] \cup C \quad (\text{DeMorgan}) \\
&= A \cup (B \cap C^C) \cup [A \cup B \cup C]^C \cup C \quad (\text{DeMorgan}) \\
&= A \cup (B \cap C^C) \cup \emptyset \cup C \quad (\mathbb{U}^C = \emptyset) \\
&= A \cup [(B \cap C^C) \cup C] \quad (\text{Associatividade}) \\
&= A \cup [(B \cup C) \cap (C^C \cup C)] \quad (\text{Distributividade}) \\
&= A \cup [(B \cup C) \cap \mathbb{U}] \quad (C^C \cup C = \mathbb{U}) \\
&= A \cup B \cup C \quad (A \cap \mathbb{U} = A) \\
&= \mathbb{U}
\end{aligned}$$

(b) $[(A^C \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C)]^C$

Resolução. Temos:

$$\begin{aligned}
& [(A^C \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C)]^C \\
&= (A^C \cap B \cap C)^C \cap (A \cap B \cap C)^C \quad (\text{DeMorgan}) \\
&= [A \cup (B \cap C)^C] \cap [A^C \cup (B \cap C)^C] \quad (\text{DeMorgan}) \\
&= (B \cap C)^C \cup (A \cap A^C) \quad (\text{Distributividade}) \\
&= (B \cap C)^C \cup \emptyset \\
&= (B \cap C)^C \\
&= B^C \cup C^C
\end{aligned}$$

(c) $[(A \cup B^C \cup C) \cup (B \cup C^C)]^C$

Resolução. Temos:

$$\begin{aligned}
& [(A \cup B^C \cup C) \cup (B \cup C^C)]^C \\
&= (A \cup B^C \cup C)^C \cap (B \cup C^C)^C \quad (\text{DeMorgan}) \\
&= [A^C \cap (B^C \cup C)^C] \cap (B \cup C^C)^C \quad (\text{DeMorgan}) \\
&= A^C \cap (B \cap C^C) \cap (B \cup C^C)^C \quad (\text{DeMorgan}) \\
&= A^C \cap (B \cap C^C) \cap (B^C \cap C) \quad (\text{DeMorgan}) \\
&= A^C \cap (B \cap B^C) \cap (C \cap C^C) \quad (\text{Comutatividade}) \\
&= (A^C \cap \emptyset) \cap \emptyset \\
&= \emptyset
\end{aligned}$$

(d) $[(A \cup B^C \cup C) \cap (B \cap C^C)]^C$

Resolução. Temos:

$$\begin{aligned}
& [(A \cup B^C \cup C) \cap (B \cap C^C)]^C \\
&=
\end{aligned}$$

9. “Sejam A, B, C, D conjuntos. Use propriedades do nosso material para obter um conjunto igual ao escrito abaixo somente com interseções de, no máximo, 3 conjuntos.”

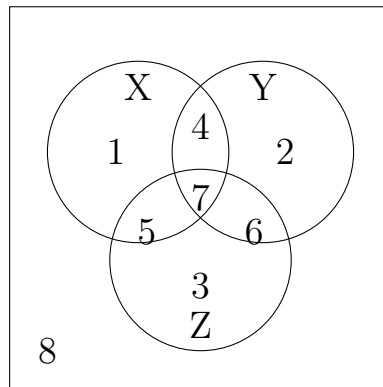
$$[A^C \cap B \cap (C \cup D^C)^C] \cup [A \cap (B^C \cup C)^C \cap D]$$

Resolução. Temos:

$$\begin{aligned}
& [A^C \cap B \cap (C \cup D^C)^C] \cup [A \cap (B^C \cup C)^C \cap D] \\
&= (A^C \cap B \cap C^C \cap D) \cup (A \cap B \cap C^C \cap D) \quad (\text{DeMorgan}) \\
&= (B \cap C^C \cap D) \cup (A^C \cap A) \quad (\text{Distributividade}) \\
&= (B \cap C^C \cap D) \cup \emptyset \quad (A^C \cap A = \emptyset) \\
&= B \cap C^C \cap D
\end{aligned}$$

Encontramos, então, um conjunto equivalente ao inicial proposto.

10. “O Diagrama de Venn para os conjuntos X, Y, Z decompõe o plano em oito regiões. Numere essas regiões e exprima cada um dos conjuntos abaixo como reunião de algumas dessas regiões. (Por exemplo: $X \cap Y = 1 \cup 2$)”
Tome o diagrama como base:



- (a) $(X^C \cup Y)^C$
 $= (\{2, 3, 6, 8\} \cup \{2, 4, 6, 7\})^C$
 $= (\{2, 3, 4, 6, 7, 8\})^C$
 $= \{1, 5\}$
- (b) $(X^C \cup Y) \cup Z^C$
 $= (\{2, 3, 6, 8\} \cup \{2, 4, 6, 7\}) \cup \{1, 2, 4\}$
 $= \{2, 3, 4, 6, 7, 8\} \cup \{1, 2, 4\}$
 $= \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$
- (c) $(X^C \cap Y) \cup (X \cap Z^C)$
 $= (\{2, 3, 6, 8\} \cap \{2, 4, 6, 7\}) \cup (\{1, 4, 5, 7\} \cap \{1, 2, 4, 8\})$
 $= (\{2, 6\} \cup \{1, 4\})$
 $= \{1, 2, 4, 6\}$
- (d) $(X \cup Y)^C \cap Z$
 $= (\{1, 4, 5, 7\} \cup \{2, 4, 6, 7\})^C \cap \{3, 5, 6, 7\}$

$$\begin{aligned}
&= (\{1, 2, 4, 5, 6, 7\})^C \cap \{3, 5, 6, 7\} \\
&= \{3, 8\} \cap \{3, 5, 6, 7\} \\
&= \{3\}
\end{aligned}$$

11. Não fiz.

12. Fiz mas falta colocar.