微积分（考研数学）

2021 年大纲：微积分占比 60%，线性代数和概率论各占 20%。此课程主要面向已经修完微积分（与线性代数）的学生，以考研要求为目标推导、讲解知识要点，辅以题目巩固。

时间安排：

1. 函数，极限；一元微分
2. 一元积分；多元积分
3. 多元微分；级数；微分方程（引）
4. 微分方程、差分方程；**小测，约 1h20min**

考点总结

1.“重要”却少考的考点

间断点 1、渐近线 2、积分+微分中值证明 2、高阶导数 2、二重积分应用 0、积分不等式 0，积分证明 1 次，复杂三角函数积分 0、夹逼定理 0、根值比值审敛法 1

2.容易忽略的考点

拐点 6 次、弹性与边际 5 次、差分方程 2 次、数列极限 4 次、抽样分布 3 次、统计量的数字特征 3、方程的根 3 次、收敛半径 2 次、概率密度的性质 2 次等

3.几乎年年考的考点

1. 相似二次型
2. 方程组（含向量组）
3. 行列式、秩

4.概率基本计算：正态概率、五大概率公式、数字特征
5.概率分布：二维连续概率、全概率（离散+连续）
6. 统计：点估计、抽样分布、统计量的数字特征

7.一阶线性与二阶常系数微分方程
8.一元极值与二元极值、拐点
9. 极坐标为主的二重积分
10. 定积分计算：反常积分、分部积分、旋转体体积
11. 极限计算：0/0、重要极限、无穷小比较
12. 比较：函数、积分比较大小、无穷小比较、比较审敛法

概率线代部分 60 分	高数部分 60 分
1. 相似二次型 2. 方程组（含向量组） 3. 行列式、秩 4.概率基本计算：正态概率、五大概率公式、数字特征 5.概率分布：二维连续概率、全概率（离散+连续） 6. 统计：点估计、抽样分布、统计量的数字特征	1.一阶线性与二阶常系数微分方程 2.一元极值与二元极值、拐点 3. 极坐标为主的二重积分 4. 定积分计算：反常积分、分部积分、旋转体体积 5. 极限计算：0/0、重要极限、无穷小比较 6. 比较：函数、积分比较大小、无穷小比较、比较审敛法

1 函数、极限、连续

1.1 考试要求

- 理解函数的概念，掌握函数的表示法，会建立应用问题的函数关系。
- 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性；理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念；掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念。
- 极限的概念，理解函数左极限与右极限的概念以及函数极限存在与左极限、右极限之间的关系。
- 了解极限的性质（唯一、有界、保号、子序列收敛）与极限存在的两个准则，**掌握极限的四则运算法则，掌握利用两个重要极限求极限的方法**；理解无穷小量、无穷大量的概念，掌握无穷小量的比较方法，会用等价无穷小量求极限；理解函数连续性的概念（含左连续与右连续），会判别函数**间断点的类型**；了解连续函数的性质和初等函数的连续性，理解闭区间上连续函数的性质（**有界性、最大值和最小值定理介值定理**），并会应用这些性质。

1.2 Comments

- 本章节都是基础的知识技术点，大半是高中内容。很少专门拿出来考（选择题中偶尔出现），多作为题目背景基础知识，与其他知识点混合出现。
- 分析的基础：ϵ-N、ϵ-δ 语言，用于从最根本描述证明和序列极限、函数极限相关的问题。考研中较少出现。
- 涉及到可微函数的无穷小量的比较，比值极限，大多数情况可以利用后章的 L'Hôpital 法则以及 Taylor 展开来处理；如果不便使用这两定理（例如余项不好估计）可以使用中值定理推一遍；再不能则需 ϵ-N、ϵ-δ 来分析（考研中几乎不会出现）。
- 两类间断点的在积分中意义更明显：第一类总可积（分段），第二类涉及到奇异积分。至于间断点内更详细的命名，本质无足轻重，不影响后续课程学习 — 只是为考试而设置。
- 闭区间推广到多维闭区块后，最大值最小值介值定理仍成立。

1.3 知识要点

- 重要极限：

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}=1\quad\text{(Stirling formula，不要求掌握，但涉及级数收敛时方便计算)}$$

- 间断点类型:
  1. 第一类，同时拥有左右极限
     - 可去间断点，左右极限相等
     - 跳跃间断点，左右极限不等
  2. 第二类，至少有一侧极限奇异（无穷或不存在）
     - 无穷间断点，至少有一侧极限是无穷
     - 振荡间断点，至少有一侧不收敛，（在有界的范围内）振荡

- 零点定理：闭区间两端连续函数异号，则区间内至少存在一个零点。
  介值定理：闭区间内连续函数在两端点取值不同，则两端之间的值在区间内必能取到。

1.4 讲解与习题

1. 连续性与间断点：判断函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否左连续、右连续，如果有至少一方不连续判断这是第几类间断点中的哪一种；判断 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 与 $(0,+\infty)$ 上是否有界。

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1-\cos x+x^2}{x}, & \text{x}<0,\\ 0, & \text{x}=0,\\ \frac{\sin^2 x+\mathrm{e}^{x^3}-1}{x^2}, & \text{x}>0.\end{cases}$$

2.（20 年考研题）有

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-a}{x-a}=b$$

求

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin f(x)-\sin a}{x-a}.$$

Solution:

$$\frac{\sin f(x)-\sin a}{f(x)-a}=\frac{2\sin(\frac{f(x)-a}{2})}{f(x)-a}\cos(\frac{f(x)+a}{2})\to b\cos a$$

3.（20 年考研题）求

$$f(x)=\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(\mathrm{e}^x-1)(x-2)}$$

第二类间断点个数。

Solution:

间断点有：$x=1,-1,0,2$ 四个，其中 $x=0$ 为可去间断点，$x=-1,2$ 极限为无穷，$x=1^+$ 极限为无穷。故第二类间断点有 3 个。

4.（21 年考研题）已知

$$\lim_{x\to 0}\left[\alpha\arctan\frac{1}{x}+(1+|x|)^{\frac{1}{x}}\right]$$

存在，求 α.

Solution:

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\alpha\arctan\frac{1}{x}+(1+|x|)^{\frac{1}{x}}\right]=\frac{\pi}{2}\alpha+e$$
$$\lim_{x\to 0^+}\left[\alpha\arctan\frac{1}{x}+(1+|x|)^{\frac{1}{x}}\right]=-\frac{\pi}{2}\alpha+1/e$$
$$\alpha=\frac{e^{-1}-e}{\pi}$$

5.（21 年考研题）当 $x\to 0$ 时，$\int_0^{x^2}\left(\mathrm{e}^{t^3}-1\right)\mathrm{d}t$ 是 x^7 的

A. 低阶无穷小

B. 等阶无穷小

C. 高阶无穷小

D. 同阶但非等阶无穷小

Solution:

$$\int_0^{x^2}\left(\mathrm{e}^{t^3}-1\right)\mathrm{d}t<x^2\left(\mathrm{e}^{x^6}-1\right)<x^8,$$

故此积分是 x^7 的高阶无穷小。选 C。

6.（20 年考研题）已知 a,b 为常数，$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-e$ 与 $\frac{b}{n^a}$ 在 $n\to\infty$ 时为等价无穷小，求 a,b。

Solution:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$
$$=\mathrm{e}^{n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\mathcal{O}(\frac{1}{n^3})\right)}=\mathrm{e}^{1-\frac{1}{2n}+\mathcal{O}(\frac{1}{n^2})}$$
$$=e\cdot\left[1-\frac{1}{2n}+\mathcal{O}(\frac{1}{n^2})\right]$$

故 $a=1,b=-\frac{e}{2}$。
Comment: 这次只有用到一阶。有时候复合函数展开的最终结果二阶项里，有内部函数一阶展开的平方项，需要考虑其影响。

7.（20 年考研题）设奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有连续导数，则

A. $\int_0^x [\cos f(t)+f'(t)]\,\mathrm{d}t$ 是奇函数
B. $\int_0^x [\cos f(t)+f'(t)]\,\mathrm{d}t$ 是偶函数
C. $\int_0^x [\cos f'(t)+f(t)]\,\mathrm{d}t$ 是奇函数
D. $\int_0^x [\cos f'(t)+f(t)]\,\mathrm{d}t$ 是偶函数

Solution:
$f(x)$ 奇函数，$f'(x)$ 偶函数，$\cos f(x)$ 与 $\cos f'(x)$ 偶函数。$\cos f'(t)+f(t)$ 这样的奇偶函数之和则无法判定。

$$\int_0^{-x}[\cos f(t)+f'(t)]\,\mathrm{d}t=\int_0^{x}[\cos f(-t)+f'(-t)]\,\mathrm{d}(-t)=-\int_0^{x}[\cos f(t)+f'(t)]\,\mathrm{d}t$$

定积分为奇函数。选 A。

8.（20 年考研题）$f(x)$ 在 [0,2] 上连续可导，$f(0)=f(2)=0$，$M=\max\{|f(x)|,x\in[0,2]\}$

a. 证 $\exists\xi\in[0,2],\ M\le|f'(\xi)|$.
b. 若 $\forall x\in[0,2],\ |f'(x)|\le M$ 则 $M=0$.

Solution:

a. 记最大值点（可能多于一个）为 $x=x_M,f(x_M)=M$。如 $0\le x_M\le 1$，则
$$\exists\xi\in(0,x_M),f'(\xi)=\frac{f(x_M)-f(0)}{x_M-0}=M/x_M\ge M;$$
反之 $1\le x_M\le 2$
$$\exists\xi\in(x_M,2),f'(\xi)=\frac{f(2)-f(x_M)}{2-x_M}=-M/(2-x_M)\le -M.$$
（Lagrange 中值定理）

b. $\forall x\in[0,2],|f'(x)|\le M$ 成立时，结合上问 $|f'(\xi)|\ge M$，故此区间上的导数最大绝对值为 M。
$$M=|f(x_M)|=|f(x_M)-f(0)|=\left|\int_0^{x_M}f'(x)\mathrm{d}x\right|\le\int_0^{x_M}|f'(x)|\mathrm{d}x\le Mx_M$$
$$M=|f(x_M)|=|f(2)-f(x_M)|=\left|\int_{x_M}^{2}f'(x)\mathrm{d}x\right|\le\int_{x_M}^{2}|f'(x)|\mathrm{d}x\le M(2-x_M)$$

两侧求和相等，故式中小于等于号全取等于号，$f'(x)$ 恒大于等于 0 或小于等于 0 且 $|f'(x)| = M$。但根据 Rolle 定理，$f(0) = f(2)$，$(0, 2)$ 上至少有一点 $f'(x) = 0$，故 $|f'(x)| = M = 0$。

2 一元函数微分学

2.1 考试要求

- 理解导数的概念及可导性与连续性之间的关系，了解导数的几何意义与经济意义（含边际与弹性的概念），**会求平面曲线的切线方程和法线方程，掌握基本初等函数的导数公式、导数的四则运算法则及复合函数的求导法则，会求分段函数的导数，会求反函数与隐函数的导数；了解高阶导数的概念，会求简单函数的高阶导数**。

- 了解微分的概念，导数与微分之间的关系以及一阶微分形式的不变性，会求函数的微分；理解并会用**罗尔（Rolle）定理、拉格朗日（Lagrange）中值定理、泰勒（Taylor）定理**，了解并会用**柯西（Cauchy）中值定理**。掌握用洛必达（L'hôpital）法则求未定式极限的方法；掌握**函数单调性的判别方法**，了解函数极值的概念，掌握**函数极值、最大值和最小值的求法**及其应用；会用导数判断函数图形的凹凸性，**会求函数图形的拐点以及水平、铅直和斜渐近线**，会描绘函数的图形。

2.2 Comments

- 法线垂直于切线。从导数得到切线（$k = f'(x)$）自然可以写出法线（$k = -1/f'(x)$）。

- 微分 $(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})$ 的形式相比导数（$f'(x)$）的形式更适合一般形式的求导，链式法则的记忆等等。

- "凸"（convex）这个词在研究和技术中更常被用到（凸优化，凸函数等），凹凸性建议只记住"凸"的定义和图形。

- "可微函数的中值定理"证明和定理都类似"连续函数的介值定理"，多用于残量范围估计（例如泰勒展开）。

2.3 知识/技术要点

- 初等函数的导数公式，导数的四则运算法则及复合函数的求导法则。

- 中值定理（层层递进）：函数 f(x) 满足在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 上可导，

  - Rolle: $f(a) = f(b), \quad \exists \xi \in (a, b), \quad f'(\xi) = 0;$

- Lagrange: $\exists\xi \in (a,b),\quad f'(\xi) = \frac{f(a)-f(b)}{a-b}$;
- Cauchy: 有 $g(x)$ 也在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，同时 $g'(x) \neq 0, \forall x \in [a,b]$，则 $\exists\xi \in (a,b),\quad \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)}$。
- Taylor: 即带余项的泰勒展开，后章会讲。

一般用于证明中，根据题目要求选取合适的定理。

- 凹（concave）凸（convex）对应二阶导小/大于 0（$f''(x) < 0$，$f''(x) > 0$）。
- 渐近线
  - 水平: $\lim_{x\to\infty} y(x) = y_0$?
  - 铅直: $\lim_{y\to\infty} x(y) = x_0$?
  - 斜: $\lim_{x \text{ or } y\to\infty} y(x)/x = k$?以及 $\lim_{x \text{ or } y\to\infty} y(x) - kx = b$?

2.4 讲解与习题

1. 隐函数求导，切线与法线：求下曲线在 $(0,1)$ 点的切线和法线方程。
$$y^3 = \tan\left(x^2 + \frac{\pi}{4}\right).$$
2. 求导，极值：求下函数 $f(x)$ 的极值点，并判断这些极值点是极大值还是极小值。
$$f(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{-x^2}.$$
3. 中值定理：试论证，存在 $\xi \in \begin{cases} (0,x) & \text{if } x > 0, \\ (x,0) & \text{if } x < 0, \end{cases}$ 使得处于定义域上的 x 都有
$$\frac{\cos x - 1}{x} = -\sin\xi,$$
$$\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = \mathrm{e}^\xi,$$
$$\frac{\ln(x+1)}{x} = \frac{1}{\xi+1}.$$
4. 渐近线：求下曲线的所有渐近线
$$y^2 = 2x^2 + 3x + 1 + \frac{3}{x},\quad x \in (-\infty,0) \cup (0,+\infty)$$
5. （21 年考研题）函数
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\mathrm{e}^x-1}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$$
于 $x = 0$ 处

A. 连续且取极大
B. 连续且取极小
C. 可导且导数为 0
D. 可导且导数不为 0

Solution:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=1=f(0),$$

故连续；

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}-1}{x-0}=\frac{1}{2},$$

故可导，导数不为零。

6.（20 年考研题）求曲线

$$x+y+\mathrm{e}^{2xy}=0$$

于 (0,-1) 处的切线方程。

Solution:
y = x - 1

7.（21 年考研题）函数

$$f(x)=ax-b\ln x,\quad a,b>0$$

有两个根，求 $\frac{b}{a}$ 的范围。

Solution:
此函数于正半轴有定义。$f'(x_0)=a-\frac{b}{x\,0}=0 \implies x_0=\frac{b}{a}$，函数先单调下降后单调上升，有极小值 $f(x_0)$。当 $f(x_0)<0$ 时 $f(x)$ 有两根，推得 $\ln\frac{b}{a}>1$，$\frac{b}{a}\in(e,+\infty)$。

8.（20 年考研题）Q 表示产量，成本 $C(Q)=100+13Q$，单价 p，需求量 $Q(p)=\frac{800}{p+3}-2$，求工厂取得利润最大的产量。

Solution:
$p=\frac{800}{2+Q}-3$，目标函数为：

$$\begin{aligned}L(Q)=Qp(Q)-C(Q)&=Q\left(\frac{800}{2+Q}-3\right)-13Q-100\\&=800-\frac{1600}{2+Q}-16Q-100\\&=732-\frac{1600}{2+Q}-16(2+Q)\\&\le 732-2\sqrt{\frac{1600}{2+Q}\cdot 16(2+Q)}=412\end{aligned}$$

最大值在 $\frac{1600}{2+Q}=16(2+Q)$ 时取到，即 $Q=8$。用导数求亦可。

3 一元函数积分学

3.1 考试要求

- 理解原函数与不定积分的概念（导数反函数、求导逆运算），**掌握不定积分的基本性质和基本积分公式，掌握不定积分的换元积分法与分部积分法**。
- 了解定积分的概念和基本性质（无限求和的极限、黎曼和，曲边梯形面积），了解定积分中值定理，理解变积分上限的函数并会求它的导数，**掌握牛顿-莱布尼茨（Newton-Leibniz）公式以及定积分的换元积分法和分部积分法**。
- 会利用**定积分计算平面图形的面积、旋转体的体积和函数的平均值**，会利用定积分求解简单的经济应用问题。
- 理解反常积分的概念，了解反常积分收敛的比较判别法，**会计算反常积分**。

3.2 Comments

- 不定积分作为微分的反函数，但难度远大于微分。
- 教科书中对不定积分和定积分的定义和来源有所区分，但在实际运用中没有过多要求，能算就算。
- 二维图形的面积和三维图形的体积的计算较二维图形的周长和三维图形的表面积要好算得多，后者没有要求。

3.3 知识/技术要点

- 不定积分、定积分的基本性质（线性），基本积分公式（参考吴传声 198 页，大多可由最基本的推出），换元积分（$\int f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x = \int f(g)\mathrm{d}g$）与分部积分（$\int \mathrm{d}(fg) = \int f\mathrm{d}g + \int g\mathrm{d}f$）。
- 三维体积计算：$\int S(h)\mathrm{d}h$，旋转体：$S(h) = \pi r^2(h)$，其体积：$\pi \int r^2(h)\mathrm{d}h$
- 反常积分判别收敛、计算：当被及区域趋向奇点（无穷远点）时的积分极限。

3.4 讲解与习题

1. 换元积分：

$$\int \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{1-x^2}\right)\mathrm{d}x$$

2. 分部积分：

$$\Gamma(n)=\int_0^{+\infty}x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=(n-1)!,\quad n=1,2,\ldots$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\frac{\prod_{k=1}^{n}2k-1}{\prod_{k=1}^{n}2k},\quad n=1,2,\ldots$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1}x\mathrm{d}x=\frac{\prod_{k=1}^{n}2k}{\prod_{k=1}^{n}2k+1},\quad n=0,1,2,\ldots$$

3. 反常积分：如果下反常积分收敛，求 α 的范围

$$\int_1^e\frac{1}{x(\ln x)^\alpha}\mathrm{d}x.$$

4. 定积分求面积：

- 求 $y=x^2+\sin x$ 与 $x=0$，$x=1$，$y=0$ 围成图形的面积。

  Solution:

  $$\int_0^1[y(x)-0]\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{3}x^3-\cos x\right)\Big|_{x=0}^{x=1}=\frac{4}{3}-\cos 1$$

- 求摆线

  $$x=r(t-\sin t),\ y=r(1-\cos t)$$

  在 $t\in[0,2\pi]$ 区间上和 x 轴围成图形面积。
  （提示，从 $S=\int_{x(0)}^{x(2\pi)}y(x)\mathrm{d}x$ 出发。）

  Solution:

  $$\begin{aligned}S=&\int_{x(0)}^{x(2\pi)}\int_0^{y(x)}1\quad\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\=&r^2\int_0^{2\pi}1-\cos t\quad\mathrm{d}(t-\sin t)\\=&r^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\mathrm{d}t=r^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2})\mathrm{d}t=3\pi r^2\end{aligned}$$

5.（20 年考研题）设平面区域

$$D=\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{x}{2}\le y\le\frac{1}{1+x^2},0<x<1\right\},$$

求 D 绕 y 轴旋转所成旋转体体积。

Solution:

$y\in(0,1/2)$ 以 $\frac{x}{2}=y$ 为边界，$y\in(1/2,1)$ 以 $\frac{1}{1+x^2}$ 为边界。

$$\begin{aligned}&\int_0^1\mathrm{d}yS(y)=\pi\int_0^{1/2}(2y)^2\mathrm{d}y+\pi\int_{1/2}^1\left(\frac{1}{y}-1\right)\mathrm{d}y\\=&4\pi\cdot\frac{1}{24}-\frac{\pi}{2}+\pi\ln 2=\pi(\ln 2-\frac{1}{3})\end{aligned}$$

6.（21 年考研题）设平面区域 D 是曲线 $y=\sqrt{x}\sin(\pi x), \quad (0\le x\le 1)$ 与 x 轴围成，计算 D 绕 x 轴旋转所成旋转体体积。

Solution:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 \mathrm{d}x S(x)=\int_0^1 \pi y^2(x)\mathrm{d}x\\
=&\pi\int_0^1 x\sin^2(\pi x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^1 x\left(1-\cos(2\pi x)\right)\mathrm{d}x\\
=&\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\int_0^1 x\cos(2\pi x)\mathrm{d}x\\
=&\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}x\sin(2\pi x)|_{x=0}^{x=1}+\frac{1}{4}\int_0^1 \sin(2\pi x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

7.（19 年考研题）设

$$a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x,\ (n=0,1,2,\dots)$$

a. 证明 $\{a_n\}$ 单调递减，且 $a_n=\frac{n-1}{n+2}a_{n-2}$, $(n=2,3,\dots)$。

b. 求 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}$。

（提示，先回忆/计算 $\int_0^{\pi/2}\sin^n\theta\mathrm{d}\theta$ 之间的关系，算出 a_n。）

Solution:

单调递减显然。

$$a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}\sin^n\theta\cos^2\theta\mathrm{d}\theta=\int_0^{\pi/2}\sin^n\theta(1-\sin^2\theta)\mathrm{d}\theta$$

代入前式即得。$1<\frac{a_n}{a_{n-1}}<\frac{a_n}{a_{n-2}}=\frac{n-1}{n+2}$，夹逼得极限 1。

8.（19 年考研题）已知 $f(x)=\int_1^x\sqrt{1+t^4}\mathrm{d}t$，求

$$\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x$$

Solution:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x^3=\left.\frac{1}{3}x^3 f(x)\right|_0^1-\frac{1}{3}\int_0^1 x^3 f'(x)\mathrm{d}x\\
=&-\frac{1}{3}\int_0^1 x^3\sqrt{1+x^4}\mathrm{d}x=-\frac{1}{12}\int_0^1\sqrt{1+x^4}\mathrm{d}x^4\\
=&-\frac{1}{12}\frac{2}{3}\left.\left(1+x^4\right)^{3/2}\right|_0^1=\frac{1}{18}\left(1-2^{3/2}\right)
\end{aligned}
$$

4 多元函数微积分学

4.1 考试要求

- 了解多元函数的概念，了解二元函数的几何意义。
- 了解二元函数的极限与连续的概念，了解有界闭区域上二元连续函数的性质。
- 了解多元函数偏导数与全微分的概念，**会求多元复合函数一阶、二阶偏导数，会求全微分**，了解隐函数存在定理，**会求多元隐函数的偏导数**。
- 了解多元函数极值和条件极值的概念，**掌握多元函数极值存在的必要条件**，了解二元函数极值存在的充分条件，**会求二元函数的极值，会用拉格朗日乘数法求条件极值，会求简单多元函数的最大值和最小值**，并会解决一些简单的应用问题。
- 理解二重积分的概念，了解二重积分的基本性质，了解二重积分的中值定理，**掌握二重积分的计算方法（直角坐标、极坐标）**，了解无界区域上较简单的反常二重积分并会计算。

4.2 Comments

- 如果这个多元函数是线性的，我们就回到了线性代数的开头几节；如果这个多元函数不是线性的，它的全微分还是线性的，所以有关它的讨论还会让我们回到线性代数的开头几节：全微分所描述的方程是多维空间内函数曲面的切（超）平面方程。
- 多元（二元及以上）连续可导可微解析与一元有较大差别：这些性质要求自变量各自独立，能够交换求极限先后顺序。
- 多元函数的二阶全微分（Hessian 矩阵）正定即为多元凸函数，在优化问题中会反复提及。
- 对于形如 $f(x, y(x))$ 的函数要理解 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 与 $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ 的区别。
- 多重积分的变量替换涉及 Jacobi 行列式 $|\frac{\partial y_i}{\partial x_j}|$，这里我们也可以看出线性代数中行列式的几何意义：$n$ 维空间下，由 n 个向量确定的一个单形（如平行四边形，平行六面体等）的体积。
- Lagrange Multipliers 的意义可以从等高线来理解：如果 $z = f(\mathbf{x})$ 沿着 $\Phi_i(\mathbf{x}) = 0$ 描述的曲线移动达到极值 $\implies$ 从这点出发 $z = f(\mathbf{x})$ 的等高线与限制条件的曲线相切 $\implies$ 二者有相同的 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$。

4.3 知识/技术要点

- 积分换元：
$$\int f(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} = \int f(\mathbf{x}(\mathbf{y}))\left|\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}}\right|\mathrm{d}\mathbf{y} \tag{1}$$
一般 $\left|\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}}\right| = \left|\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}}\right|^{-1}$，一方偏导容易求时不必推反函数。
极坐标变换：$\mathrm{d}x\mathrm{d}y = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$

- Lagrange Multipliers: 目标函数 $z = f(\mathbf{x})$，限制条件 $\Phi_i(\mathbf{x}) = 0$，构建 Lagrange 函数
$$L(\mathbf{x}, \{\lambda_i\}) = f(\mathbf{x}) + \sum_i \lambda_i \Phi_i(\mathbf{x})$$
极值点满足 $\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$ 与 $\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0$，即 Lagrange 函数在扩张的维度下取极值。
Lagrange Multipliers 不会降低求解复杂程度。在不限制解法时可以利用 $\mathrm{d}\Phi(\mathbf{x}) = \sum \Phi_{x_i}\mathrm{d}x_i = 0$ 的条件推出各方程变量线性微元满足的关系，变量替换至 $f(\mathbf{x})$ 中求解。

4.4 讲解与习题

1. 一阶偏导，全微分：求下函数的全微分
$$f(x, y) = x^y + y^x + \tan(xy).$$

2. 隐函数偏导，二阶偏导：
   - 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$（可以表示成 (x, y, z) 的函数）
   $$xyz = x^y + y^x + \tan(xyz)$$
   - 求 $\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y}$, $u(x, y) = \left(x^2 + y^2\right)\mathrm{e}^{x+y}$

3. 二元函数极值：求下函数的极值点（静止点），以及判断极大极小值
$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy,$$
$$f(x, y) = \left(x^2 + y^2\right)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}.$$

4. 拉格朗日乘数法：求下函数 $f(x, y)$ 在条件 $\Phi(x, y) = 0$ 下的极值点并判断极大极小值
$$f(x, y) = x^2 + y^2,\ \Phi(x, y) = x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1 = 0,\ a > b > 0.$$
$$f(x, y) = x^2 y,\ \Phi(x, y) = x + y - a = 0,\ x, y, z > 0.$$

5. 直角坐标和极坐标的二重积分：

$$\Gamma^2(\frac{1}{2}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}y \, e^{-(x^2+y^2)}$$

练习

$$\int_{-1}^{+1} \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y \, x^2 e^{-(x^2+y^2)}$$

6.（20 年考研题）设 $z = \arctan[xy + \sin(x+y)]$，求 $\mathrm{d}z|_{0,\pi}$。

Solution:

$\mathrm{d}z|_{0,\pi} = (\pi - 1)\mathrm{d}x - \mathrm{d}y$

7.（21 年考研题）设函数 $f(x,y)$ 可微，且有

$$f(x+1, \mathrm{e}^x) = x(x+1)^2$$
$$f(x, x^2) = 2x^2 \ln x$$

则 $\mathrm{d}f(1,1) =$

A. $\mathrm{d}x + \mathrm{d}y$

B. $\mathrm{d}x - \mathrm{d}y$

C. $+\mathrm{d}y$

D. $-\mathrm{d}y$

Comment: $\mathrm{d}f(1,1)$ 并不是一个良好的写法：$f(1,1) = 0$ 是常数，$\mathrm{d}f(1,1)$ 常理看来应该是 0。正规的写法应该是 $\mathrm{d}f(x,y)|_{x=1,y=1}$。

Solution:

对上两方程在 $(1,1)$ 关于 x 求微分后联立求解方程。

$$f_1'(1,1) + f_2'(1,1) = (x+1)^2 + 2x(x+1)\big|_{x=0} = 1$$
$$f_1'(1,1) + 2f_2'(1,1) = 4x \ln x + 2x|_{x=1} = 2$$

得

$$f_1'(1,1) = 0, f_2'(1,1) = 1.$$

选 C。Comment: $f_1'(1,1)$ 与 $\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x=1,y=1}$ 两套标记中挑其中一套，避免混合使用，以回避之前所说的误解。

8.（21 年考研题）求下函数的极值（并判断极大极小）

$$f(x,y) = 2\ln|x| + \frac{(x-1)^2 + y^2}{2x^2}.$$

Solution:

$$f'_x = \frac{2x^2+x-1-y^2}{x^3} = 0$$
$$f'_y = \frac{y}{x^2} = 0$$

驻点：(-1,0), (0.5,0).

$$f'_{xx} = \frac{(4x+1)x-3(2x^2+x-1-y^2)}{x^4}$$
$$f'_{xy} = -\frac{2y}{x^3}$$
$$f'_{yy} = \frac{1}{x^2}$$

$(-1,0)$: $A=3, B=0, C=1, AC-B^2>0, A>0$，对应极小值 2；$(-0.5,0)$: $A=24, B=0, C=4, AC-B^2>0, A>0$，对应极小值 $\frac{1}{2}-2\ln 2$。

9.（21 年考研题）设有界区域 D 是圆 $x^2+y^2=1$ 与直线 $y=x$ 及 x 轴在第一象限围成部分，计算二重积分：

$$\iint_D \mathrm{e}^{(x+y)^2}(x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Solution:

$$\begin{aligned}
&\iint_D \mathrm{e}^{(x+y)^2}(x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
=&\int_0^{\pi/4}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}r\ \mathrm{e}^{r^2(1+\sin 2\theta)}r^2\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)\cdot r \\
=&\frac{1}{4}\int_0^1 u\mathrm{e}^u\mathrm{d}u\int_0^{\pi/4}\mathrm{d}(\sin 2\theta)\mathrm{e}^{u(\sin 2\theta)} \\
=&\frac{1}{4}\int_0^1 u\mathrm{e}^u\frac{\mathrm{e}^u-1}{u}\mathrm{d}u \\
=&\frac{1}{4}\int_0^1 \mathrm{e}^{2u}-\mathrm{e}^u\mathrm{d}u=\frac{1}{8}(e^2-1)-\frac{1}{4}(e-1)=\frac{1}{8}e^2-\frac{1}{4}e+\frac{1}{8}
\end{aligned}$$

10.（20 年考研题）

$$f(x,y)=y\sqrt{1-x^2}+x\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 D 为以下区域

$$D=\left\{(x,y)\middle|\begin{cases} x^2+y^2\le 1\\ y\ge 0\end{cases}\right\}$$

求 $\iint_D xf(x,y)\mathrm{d}\sigma$.
Comment: $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 是不依赖于 x,y 的常数，不要被复杂的式子误导。

Solution:

Comment:

$$f(x,y)=y\sqrt{1-x^2}+x\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

中最后一项积分有一定误导性：其值为常数而不是 (x,y) 的函数。为了避免误导，不妨将其写成

$$f(x,y)=y\sqrt{1-x^2}+Sx,\ S=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

对第一式两侧在 D（上半单位圆）上二重积分：

$$\begin{aligned}&\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=S=\iint_D y\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+S\iint_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\=&\iint_D y\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y^2\sqrt{1-x^2}\\=&\int_0^1\mathrm{d}x(1-x^2)^{3/2}=\int_0^{\pi/2}(\mathrm{d}\sin\theta)\cos^3\theta\\=&\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\cos^3\theta=\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\left(\frac{3}{8}+\frac{\cos 2\theta}{2}+\frac{\cos 4\theta}{8}\right)=\frac{3\pi}{16}\end{aligned}$$

对第一式两侧乘 x 再在 D 上二重积分：

$$\begin{aligned}&\iint_D xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D xy\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+S\iint_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\=&\frac{S}{2}\iint_D\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{S}{2}\int_0^{\pi}\theta\int_0^1 r^2\cdot r\mathrm{d}r=\frac{S\pi}{8}=\frac{3\pi^2}{128}\end{aligned}$$

5 无穷级数

5.1 考试要求

- 理解常数项级数收敛、发散以及收敛级数的和的概念，掌握**级数的基本性质（余项收敛，倍数收敛）及收敛的必要条件（一般项趋于 0，任意项加括号收敛）**；掌握**几何级数与 p 级数的收敛与发散的条件**
- **掌握正项级数收敛性的比较判别法、比值判别法、根值判别法，会用积分判别法，掌握交错级数的莱布尼茨判别法**，了解任意项级数绝对收敛与条件收敛的概念以及绝对收敛与收敛的关系；理解幂级数收敛半径的概念，并掌握**幂级数的收敛半径、收敛区间及收敛阈的求法**

- 了解幂级数在其收敛区间内的基本性质（和函数的连续性、逐项求导和逐项积分），会**求一些幂级数在收敛区间内的和函数，并会由此求出某些数项级数的和**
- $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1 \pm x)$, e^x, $(1+x)^\alpha$ 麦克劳林（Maclaurin）展开式，会用它们将一些简单函数间接展开为幂级数.

5.2 Comments

- 大纲中回避了泰勒（Taylor）展开。它比麦克劳林展开更基础，可以广泛代替求 $\frac{0}{0}$ 极限，极值计算的问题。
- "积分判别法" 对应着更基础的 Euler-Maclaurin 公式：

$$\sum_{i=m+1}^{n} f(i) - \int_m^n f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{p} \frac{B_k}{k!}\left[f^{(k-1)}(n) - f^{(k-1)}(m)\right] + R_p. \quad (2)$$

  B_k 为 Bernoulli 数，前几项 $B_1 = 1/2, B_2 = 1/6, B_3 = 0, \ldots$。
- 几何级数与 p 级数（连续化和复平面内解析对应黎曼函数 $\zeta(p)$）都可以推广至复数，有类似的收敛条件。

5.3 知识/技术要点

- 级数收敛判别：
  - 正项级数判别法：
    * 部分和有界
    * （和已知收敛、发散级数比较）比较审敛，极限形式下的比较审敛。
    * 比值审敛，d'Alembert 判据，比较 $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n}$ 与 1 的大小（本质是几何级数的比较审敛）。
  - 交错级数（莱布尼茨判别法：绝对值递减且趋 0 的交错级数收敛）。
  - 积分判别法：一般会要求级数的单调性（或是从某一项起的单调性），以保证 $\int_{n-1}^{n} f(x)\mathrm{d}x \geq f(n) \geq \int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x$，从而利用夹逼定理。
- Taylor 展开：

$$f(x+\Delta) = f(x) + f'(x)\Delta + f''(x)\frac{\Delta^2}{2} + \cdots + f^{(n)}(x)\frac{\Delta^n}{n!} + \ldots. \quad (3)$$

  Maclaurin 展开即取上式 $x = 0$ 的展开。

- 常见 Maclaurin 展开：

$$
\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \dots \\
\ln(1 \pm x) &= \pm x - \frac{x^2}{2} \pm \frac{x^3}{3} - \cdots - (\mp)^n \frac{x^n}{n} + \dots \\
\mathrm{e}^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{(n)!} + \dots \\
\mathrm{e}^{ix} &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \dots \\
&\quad + i(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots) = \cos x + i \sin x \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \dots
\end{aligned}
$$

5.4 讲解与习题

1. （19 年考研题）求

$$\lim_{n\to\infty} \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \right|^n$$

Solution:

$$\lim_{n\to\infty} \left| 1 - \frac{1}{n+1} \right|^n = \frac{1}{e}$$

2. （20 年考研题）设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-2)^n$ 收敛区间为 $(-2,6)$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x+1)^{2n}$ 收敛区间为

   A. $(-2,6)$

   B. $(-3,1)$

   C. $(-5,3)$

   D. $(-17,15)$

Solution:
$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1/4$，第二个级数对应 $(x+1)^2 < 4$，故选 B。

3. （19 年考研题）若 $\sum_{n=1}^{\infty} n u_n$ 绝对收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n/n$ 条件收敛，则

   A. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 条件收敛

   B. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 绝对收敛

   C. $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 收敛

D. $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 发散

Solution:
$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛，v_n/n 有界，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_nv_n$ 绝对收敛。故选 B。
Comment: 一般来说条件收敛范围比绝对收敛广，选条件宽松的总没错；这道题有些例外（争议）。

6 常微分方程与差分方程

由于有的学科的微积分课程不包含此章节，本章节按顺序讲框架而不要走复习模式。

6.1 考试要求

- 了解微分（differential）方程及其阶、解、通解、初始条件和特解等概念。
- 掌握变量可分离的微分方程、齐次微分方程和一阶线性微分方程的求解方法。
- 理解线性微分方程解的性质及解的结构，掌握二阶常系数齐次线性微分方程的解法，并会解某些高于二阶的常系数齐次线性微分方程。
- 会解自由项为多项式、指数函数、正弦函数、余弦函数以及它们的和与积的二阶常系数非齐次线性微分方程。
- 了解差分（difference）与差分方程及其通解与特解等概念；了解一阶常系数线性差分方程的求解方法；会用微分方程求解简单的经济应用问题。

6.2 讲解大纲

- 微分方程的概念练习：一元积分
- 方程例子线性（$y, y', \ldots$ 都以一次项出现）齐次（常项为 0） $\Longrightarrow$ 线性齐次方程的标准形式练习：一阶阶常系数齐次线性微分方程，二阶常系数齐次线性微分方程 $\Longrightarrow$ 微分方程的通解，独立通解的个数与次数的关系 $\Longrightarrow$ 常系数齐次线性微分方程通解的一般形式
- 非齐次线性微分方程的通解与对应齐次线性微分方程通解的关系 $\Longrightarrow$ 寻找特解（待定系数）。
- 从微分方程到差分方程（递归数列） $\Longrightarrow$ 递归数列的特征根（与一阶齐次微分方程）。

6.3 Comments

- 本章节对于财经类属于新知识，数（一）肯定会在这方面很难，数（三）则有备无患。
- 常、偏微分方程对应了单变量和多变量的微分，其中常微分方程有较成熟的理论，而偏微分方程要更复杂（即使如此，常微分方程描述的系统的稳定性等问题也一直是国内数学、工程等方面研究的热点问题）。
- 线性（linear）的意义（$\forall y \in \text{Solution}, \forall A \in \mathbb{R}, Ay \in \text{Solution}$）、齐次（homogeneous）的意义（从 $F(ax, ay) = a^{\nu} F(x, y)$ 出发定义齐次函数的次数）。这里的“线性”和线性代数的“线性”有直接关系，微分作为线性算子，线性的方程保证了特征值方法的意义；“齐次”是指方程有类似齐次函数的性质 — y/x 可以作为独立参量。
- 变系数齐次线性微分方程解法同样待定系数。
- 差分方程对应数列，也对应者微分方程的离散化（反过来微分方程对应差分方程连续化），解法思路类似微分方程；差分的方法也常用于数值求解微分方程。

6.4 讲解与习题

1. 齐次微分方程：
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(\frac{y}{x})$$
引入新变量 $u = \frac{y}{x}$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + u$ 替换原方程中含 y 的项。
练习：
$$x^2 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - xy - y^2 = 0$$
2. 一阶线性微分方程：求解
$$y' + p(x)y = 0$$
的一般形式，从而推出
$$y' + p(x)y = q(x)$$
一般形式。
练习：
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + xy = x^2.$$
3. 二阶常系数齐次、非齐次线性微分方程：求解
$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + p\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + qy = 0$$

的一般形式，从而求解

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+p\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+qy=f(x).$$

$f(x)$ 一般选取正余弦函数、指数函数、多项式函数等形式，对于特定形式的 $f(x)$，构造形式类似的 y，待定系数求解。

练习：

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=x^2.$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+y=\cos 2x.$$

4. 差分方程：差分定义 $\Delta y_x=y_{x+1}-y_x=y(x+1)-y(x)$

   练习：判断下差分方程阶数并求解级数 $\{y_n\},n=1,2,3\ldots$

$$\Delta y_n=y_n,\ y_1=1$$

$$\Delta y_{n+1}=\Delta y_n,\ y_1=1,y_2=3.$$

5. （19 年考研题）已知微分方程 $y''+ay'+by=ce^x$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{-x}+e^x$，则 (a,b,c) 为

   A. (1,0,1)

   B. (1,0,2)

   C. (2,1,3)

   D. (2,1,4)

   Solution:

   对应齐次方程 $y''+ay'+by=0$ 解为 $y=(C_1+C_2x)e^{-x}$，说明特征方程有两重根 (-1)，$a=2,b=1$。代入特解 $y=e^x$，求得 $c=4$。选 D。

6. （21 年考研题）设 n 为正整数，$y=y_n(x)$ 是微分方程 $xy'-(n+1)y=0$ 满足条件 $y_n(1)=\frac{1}{n(n+1)}$ 的解。

   a. 求 $y_n(x)$；

   b. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}y_n(x)$ 的收敛域及和函数。

   Solution:

$$y_n(x)=\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$$

用 D'Alembert 判据，级数在 $(-1,1)$ 上收敛；Leibniz 判据，$x=-1$ 时收敛；直接求和，$x=1$ 时等于 1。收敛域为 $[-1,1]$。另 $x\in[-1,1)$ 时：

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}&=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}\\&=-x\ln(1-x)+[\ln(1-x)+x]=(1-x)\ln(1-x)+x.\end{aligned}$$

7.（20 年考研题) 若

$$f'' + 2f' + 5f = 0, f(0) = 1, f'(0) = -1$$

则

a. 求 $f(x)$；

b. $a_n = \int_{n\pi}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$，求 $\sum_{i=1}^{n} a_i$。

Solution:

特征根 $\lambda = -1 \pm 2i$，代入条件得 $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\cos(2x)$。

$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^{-x}\cos(2x)\mathrm{d}x &= \operatorname{Re}\int \mathrm{e}^{-(1+2i)x}\mathrm{d}x \\ = -\operatorname{Re}\left[\frac{1-2i}{5}\mathrm{e}^{-(1+2i)x} + C\right] &= \frac{\cos 2x + 2\sin 2x}{5}\mathrm{e}^{-x} + C\end{aligned}$$

代入得 $a_n = -\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-n\pi}$，$\sum_{j=1}^{n} a_j = -\frac{1}{5}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{e}^{-j\pi} = \frac{1}{5}\frac{1-e^{-n\pi}}{e^{\pi}-1}$。

微积分公式总结(基础)

说明：以下公式在历年考研数学真题中考察频繁

1. 函数特性：

① 验证函数的周期性：$f(x+T)=f(x)$；

② 验证函数的奇偶性：奇函数$f(-x)=-f(x)$;偶函数$f(-x)=f(x)$.

2. 重要极限简化公式：$1^{\infty}=(1+0)^{\infty}=e^{0\cdot\infty}$；指数对数化公式：$x=e^{\ln x}$

3. 常见固定搭配

$x-\sin x=\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$；$x-arc\sin x=-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$

$x-\tan x=-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$；$x-arc\tan x=\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$

$x-\ln(1+x)=\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$

3. 熟记以下几个常用函数的$x=0$处展开的佩亚诺余项泰勒公式（**前三项**）：

（1）$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+o(x^n)$；

（2）$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}+o(x^{2n+2})$；

（3）$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+o(x^{2n+1})$；

（4）$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$；

（5）$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$.

4. 泰勒公式：$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\quad+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$

其中 $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ 称为$f(x)$在点x_0处的n阶泰勒余项.

5.（仅数一数二）高阶导莱布尼兹公式：$(uv)^{(n)}=\sum_{i=0}^{n}c_n^iu^{(i)}v^{(n-i)}$，其中$u^{(0)}=u$，$v^{(0)}=v$

6. 定积分的几何应用

体积微元：$dV=\pi r^2\cdot dx$(圆盘), $dV=2\pi r\cdot y\cdot dx$(柱壳)

弧长微元：$ds=\sqrt{1+y'^2}dx,\qquad ds=\sqrt{r^2+r'^2}dx$（极坐标）

表面积微元：$dS=2\pi y\cdot\sqrt{1+y'^2}dx$

7. 一阶线性微分方程的解：$y=e^{-\int p(x)dx}[\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C]$

8. 可微判别式 $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\Delta z-f_x^{'}(x,y)\Delta x-f_y^{'}(x,y)\Delta y}{\rho}$=0，其中$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$

9. 矩阵的秩相关公式

若 $AB=O$，则 $r(A)+r(B)\le n$； 若 B 可逆 $\Rightarrow r(AB)=r(A)$ ；矩阵的秩 $r(A^*)=\begin{cases}n, & r(A)=n\\1, & r(A)=n-1\\0, & r(A)<n-1\end{cases}$

10. 考对角化必考重根：对每个 k_i 重根特征值 λ_i，有 $n-r(A-\lambda_i E)=k_i$

11. $P^{-1}AP=\Lambda$ 的用途:有① $A=P\Lambda P^{-1}$，从而有② $A^n=P\Lambda^n P^{-1}$， 也有③ $r(A)=r(\Lambda)$

12. $AB=O$ 的含义

① $r(A)+r(B)\le n$,

② B 的列向量是方程组 $Ax=0$ 的解

③ A 的列向量组、B 的行向量组线性相关

④ A 存在特征值 $\lambda=0$，且若 $r(B)=k$，则 $\lambda=0$ 至少为 k 重根

13.相似必有：迹相同、行列式相等

14.矩阵等价、向量组等价的区别：前者 $r(A)=r(B)$，后者 $r(A)=r(B)=r(A,B)$

15.数字特征计算公式：

① $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2Cov(X,Y)=D(X)+D(Y)\pm 2\rho\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}$

② $D(X)=E(X^2)-E^2(X)$

③ $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$

④ $E(\bar{X})=E(X),E(S^2)=\sigma^2,D(\bar{X})=\dfrac{\sigma^2}{n}$

⑤ 泊松分布的期望和方差：λ、λ ；指数分布的期望和方差：$\dfrac{1}{\lambda}$、$\dfrac{1}{\lambda^2}$

⑥ 对于 $\chi^2\sim\chi^2(n)$，有 $E\chi^2=n,D\chi^2=2n$

微积分公式总结(拓展)

说明：以下公式在历年考研数学真题中多次出现

1.高中几何

① 切线方程：$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$

② 法线方程：$y-y_0=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0), f'(x_0)\neq 0$

③ $M(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ 的距离为 $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

④ $M(x_0,y_0)$ 到直线 $l: Ax+By+C=0$ 的距离为 $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\quad\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2},\text{当}n\text{为偶数}\\ \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\quad\dfrac{2}{3}\cdot 1,\text{当}n\text{为奇数}\end{cases}$

3. $\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx=\dfrac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)dx$

4. 形心坐标公式 $\bar{x}=\dfrac{\iint\limits_D xdxdy}{\iint\limits_D dxdy}$(平面)；$\bar{x}=\dfrac{\iint\limits_D xdS}{\iint\limits_D dS}$(曲面)；$\bar{x}=\dfrac{\iiint\limits_D xdV}{\iiint\limits_D dV}$(立体)

5.（仅数一）斯托克斯公式 $\int_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz=\iint\limits_S\begin{vmatrix}dydz & dzdx & dxdy\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$

6.（仅数一）梯度 $gradf=(f'_x,f'_y,f'_z)$；　散度 $divA=\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}$；　旋度 $rotA=\begin{vmatrix}i & j & k\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$

7.（仅数一数二）曲率：曲线 $y=f(x)$ 在点 (x,y) 处的曲率 $k=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$.

8. 定义向量组线性无关：构造 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=0$，证明 $k_1=k_2=\cdots k_n=0$

9. Schmidt 正交化

$\beta_1=\alpha_1$

$\beta_2=\alpha_2-\dfrac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$$

10.（仅数一数三）切比雪夫不等式：$P\{|X-E(X)|\geq\varepsilon\}\leq\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$或$P\{|X-E(X)|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$

11. （仅数一数三）正态分布的计算：$F(x)=P(X\leq x)=\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$。

12. （仅数一数三）$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i, S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$, 则：

① $\bar{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$或$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$；

② $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\sim\chi^2(n-1)$

③ $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n)$；

④ $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$