CO8SFMA : Recherche opérationnelle

Consignes

L'examen suivant comprend quatre exercices qui peuvent être traités indépendamment.

— *Tous les documents sont autorisés.*
— *La calculatrice est autorisée.*
— *Le téléphone est interdit.*
— *Le prêt de matériel est interdit.*
— *Toute communication entre élève est interdite.*

1 Modélisation (7 points)

Exercice 1 (3 points)

Nous sommes en -9 avant B.Y (Bataille de Yavin), bien avant les événements qui ont conduit Han Solo a rencontrer Luke Skywalker et combattre l'Empire. Han est un célèbre contrebandier qui gagne sa vie de manière plus ou moins honnête. Séjournant dans la ville de Mos Espa situé sur la planète désertique de Tatooine, ce dernier, suite a l'une de ses innombrables dettes, se retrouve dans une situation délicate.

Un de ses créanciers, gérant des nombreuses fermes de Tatooine, lui offre une chance de rembourser sa dette en lui proposant d'acheter pour lui des banthas au marché local pour ensuite les revendre dans la capitale de la planète, Bestine.

Ayant plus d'un tour dans son sac. Han réfléchit immédiatement à un moyen de se remplir les poches sans que son "employeur" ne le remarque. Il prépare donc son itinéraire en prévoyant de passer par Mos Taike, ville réputée pour sa grande quantité de cristaux à combustible qu'il pourrait facilement revendre à Bestine.

Dans la capitale , un bantha se vend 200 CR (crédits républicains) et l kg de cristal se vend à $1,5$ *CR.*

Mais avant cela, Han va devoir acheter les banthas et les cristaux. Le prix à Mos Espa d'un bantha est de 100 CR et, à Mos Taike, les cristaux s'achètent au poids à $0,5$ *CR le kilo. Pour ne pas attirer l'attention, il ne veut pas acheter plus que la consommation annuelle moyenne de cristaux, soit* 600 *kg.*

Sachant que le gérant lui a fourni une bourse de 500 CR et qu'un bantha peut transporter 2OO kg de cistaux, Han réfléchi à comment investir ses fonds pour tirer un bénéfice maximal.

1. Donner une modélisation de ce problème sous forme d'un programme linéaire.

Exercice 2 (4 points)

Un pays dont nous tairons le nom a un grand besoin d'électricité : il doit fournir à ses citoyens au moins 500TWh par an qu'il ne peut pas vendre à plus de 60 € le MWh sans provoquer une crise sociale. Pour ce faire, il dispose de plusieurs types de centrale électrique.

— *Les centrales nucléaires produisent 200 tonnes de déchets radioactifs et 6 000 tonnes de CO2 par TWh, avec un cout de 42 M€ le TWh*
— *Les centrales hydrauliques émettent 4 000 tonnes de CO2 par TWh produite pour un coût de 55 M€ le TWh.*
— *Les centrales au charbons qui émettent 950 000 tonnes de CO2 par TWh avec un coût de 66 M€ le TWh.*
— *Les centrales au Gaz qui émettent 350 000 tonnes de CO2 par TWh pour un coût de 61 M€ le TWh.*
— *Les autres mode de production renouvelable qui émettent 60 000 tonnes de CO2 par TWh pour lesquels le TWh coûte en moyenne 86 M€.*

Vu l'urgence climatique et social, ce pays souhaite minimiser son émission de CO2 sans dépasser le prix symbolique de 60 M€ le TWh et sans produire plus de déchets radioactif qu'il ne peut en traiter lui-même, soit 50 000 tonnes par an. Il est aussi limité par le nombre de ses cours d'eau à une production hydraulique annuelle de 55 TWh.

1. Donner une modélisation de ce problème sous forme d'un programme linéaire.
2. Donner une solution réalisable (pas forcément optimale) de ce problème.

2 Quelques résolutions (13 points)

Exercice 3 (6 points) Résoudre graphiquement le problème suivant :

$$\max z = x + 100y \quad \text{sous contraintes} \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & + & 200y & \leq & 1000 \\ -x & + & 200y & \geq & 0 \\ & & y & \leq & 600 \\ x & & & \geq & 0 \\ & & y & \in & \mathbb{N} \end{array} \right.$$

— Tracer la région réalisable.
— Tracer les lignes d'isovaleur correspondant à la valeur 0 et à la valeur maximale.
— Certaines inéquations sont inutiles. Lesquels ? (Justifier graphiquement et par le calcul)
— Donner la solution du problème.

Exercice 4 (7 points) Soit le problème suivant :

$$\min z = 6x_1+4x_2+950x_3+350x_4+60x_5 \quad \text{sous contraintes} \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & \geq & 500 \\ 6x_3 + x_4 + 26x_5 & \leq & 18x_1 + 5x_2 \\ x_1 & \leq & 250 \\ x_4 & \leq & 55 \\ \forall i \in [\![1;5]\!] \qquad x_i & \geq & 0 \end{array} \right.$$

1. Mettre ce problème sous forme standard.
2. Voyez-vous une base réalisable de ce problème ?
   — Si oui, écrire le problème sous forme canonique par rapport à cette base puis le premier tableau du simplexe.
   — Si non, ajouter des variables auxiliaires puis écrire le premier tableau du simplexe de la première phase de ce problème.
3. Après avoir mis ce problème sous forme de tableau et fait quelques itérations, nous trouvons le tableau suivant :

	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	
x_4	0	0	1	1	1	1	-1	0	-1	0	250
x_7	0	0	-6	5	0	25	1	1	19	0	4250
x_1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	250
x_9	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	55
Z	1	0	-346	600	0	-290	350	0	344	0	-89000

   Quelle est la valeur de l'objectif ? Quelle est la solution de base correspondante ?
4. Calculer le tableau suivant. Le critère d'arrêt est-il vérifié ? Si oui, donner la solution du problème, si non, dire quelle variable doit entrer et quelle variable doit sortir.
5. Déterminer la solution optimale du problème.

Question bonus (2 points) : En utilisant les parties 1 et 2, répondre aux questions que se posent Han et le pays producteur d'electricité.