DM de systèmes dynamiques 2020 - Correction.

Exercice n° 1

On considère le SD défini par :

$$2(n-1)(u_{n+2}+u_{n+1})-2(2n+1)u_n+30=0 \quad \text{et} \quad u_0=3 \text{ et } u_1=5.$$

1) Expression de u_n en fonction de n.

Le SD est défini par une relation linéaire sur 3 termes consécutifs mais les coefficients ne sont pas constants. Nous sommes donc dans le cas de l'exercice 5 du TD2 et on cherche un lien simple entre deux termes consécutifs pour amorcer une récurrence.

$u_0=3$, $u_1=5$

$n=0 \Rightarrow \quad 2\times(-1)(u_2+u_1)-2u_0+30=0$

$2u_2 = 30-2u_0-2u_1 = 30-6-10=14 \Rightarrow u_2=7$

u_3 est imposé par l'énoncé : $u_3=9$

Enfin, pour $n=2$: $2(u_4+u_3)-2\times5u_2+30=0 \Rightarrow u_4=\dfrac{10\times7-30-2\times9}{2}=11$

On obtient donc : $u_0=3$; $u_1=5$; $u_2=7$; $u_3=9$; $u_4=11$

Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit arithmétique de raison 2 :

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n=2n+3 \quad (P)$$

La propriété (P) est vraie aux rangs 0 à 4.

Supposons-la vraie jusqu'au rang p : $\forall k\leq p \quad u_k=2k+3$

Par définition, pour $k=p-1$: $2(k-1)(u_{k+2}+u_{k+1})-2(2k+1)u_k+30=0$.

soit : $2(p-2)(u_{p+1}+u_p)-2(2p-2+1)u_{p-1}+30=0$

d'où : $2(p-2)(u_{p+1}+2p+3)-2(2p-1)(2p-2+3)+30=0$

$$\begin{aligned}2(p-2)u_{p+1} &= -2(p-2)(2p+3)+2(2p-1)(2p+1)-30\\ &= -2(2p^2+3p-4p-6)-30+2(4p^2-1)\\ &= 8p^2-2-30-4p^2+2p+12 = 4p^2+2p-20 \text{ polynôme}\end{aligned}$$

à factoriser : $\Delta = 4+16\times20=324=18^2 \Rightarrow p_1=\dfrac{-2+18}{8}=2$ et $p_2=-5/2$

donc : $2(p-2)u_{p+1} = 4(p-2)(p+5/2) = 2(p-2)(2p+5)$.

(P) est vraie jusqu'au rang 4 donc on s'intéresse aux rangs suivants :

$p\neq2 \Rightarrow u_{p+1}=2p+5=2(p+1)+3$ donc (P) vraie au rang $p+1$.

En résumé : (P) est vraie jusqu'au rang 4

Pour $p \neq 2$ si (P) est vraie alors (P) l'est aussi au rang $(p+1)$

donc (P) est vraie pour tout n : $\underline{\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2n+3}$

2) Nature de SD

Il est arithmétique de raison 2, soit $u_{n+1} = u_n + 2$, donc divergent.

<u>Remarque :</u>

La relation qui définit le SD a une particularité : ses coefficients dépendent de n mais leur somme est constante, ce qui veut dire qu'il existe une suite constante qui vérifie la relation.

En effet : $\exists c \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = c \Rightarrow 2(n-1)(c+c) - 2(2n+1)c + 30 = 0$.

soit : $4nc - 4c - 4nc - 2c + 30 = 0 \iff -6c + 30 = 0 \iff c = 5$.

On peut alors étudier la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = c_n - 5$

et on trouve : $2(n-1)(v_{n+2} + v_{n+1}) - 2(2n+1)v_n = 0$ (après un calcul pénible)

ce qui n'est pas très intéressant puisque le cours ne permet pas de traiter ce cas directement. Il faut revenir à la méthode exploratoire : calcul des premiers termes, poser une hypothèse et la démontrer par récurrence.

Exercice 2

On considère le SD défini par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $f(x) = \ln(x+1)$ et $0 < u_0$.

1) Convergence

Si ce SD converge vers ℓ réel alors ℓ est un point fixe donc est solution de : $\ell = \ln(\ell+1)$

0 est solution évidente.

Par ailleurs, on remarque que $f'(x) = \frac{1}{1+x} < 1$ pour $x \in]0,+\infty[$

or $\ln(x+1)$ est strictement croissante et $0 < u_0$ donc l'ensemble des valeurs prises par le SD (orbite $\theta(u_0)$) est inclus dans $]0,+\infty[$

Le SD est donc défini par une fonction à dérivée bornée par 1 strictement en valeur absolue, donc il converge.

2) Limite

Le SD converge et admet un point fixe unique nul donc $\lim\limits_{\infty} u_n = 0$.

Exercice 3

Soit le SD défini par $u_{n+4} = 3u_{n+3} - 8u_{n+2} + 5u_{n+1} + u_n + 1$ (R)

u_i donné pour $-1 < i < 4$

1) Convergence

Supposons que ce SD converge : $\exists \ell \in \mathbb{R} \, / \, \lim\limits_{+\infty} u_n = \ell$

de même $\forall k \in \mathbb{N}$ $\lim\limits_{\infty} u_{n+k} = \ell$

donc, en faisant tendre n vers l'infini dans (R) : $\ell = 3\ell - 8\ell + 5\ell + \ell + 1$

soit : $0 = 1$ contradiction qui fait tomber l'hypothèse : ce SD diverge.

2) Limite : sans objet puisque le SD diverge.

Exercice 4

On considère la SD définie par $u_{n+1} = \dfrac{u_n - 12}{2u_n - 9}$ et u_0 donné hors valeurs interdites. (VI)

Remarque : les valeurs interdites sont en nombre infini dénombrable ; ce sont toutes les valeurs de u_0 conduisant à un $u_n = 9/2$.

1) Convergence

On pose : $E = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \;/\; u_{n+1} = \dfrac{u_n - 12}{2u_n - 9} \;;\; u_0 \text{ hors VI} \right\}$.

Supposons qu'il existe une suite constante dans E notée $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$\forall n \in \mathbb{N} \quad c_n = c \quad$ et $\quad c = \dfrac{c-12}{2c-9} \iff c(2c-9) = c - 12$

et donc : $2c^2 - 9c = c - 12 \iff 2c^2 - 10c + 12 = 0 \iff c^2 - 5c + 6 = 0$

On remarque que $2+3 = 5$ et $2 \times 3 = 6$ donc $c^2 - 5c + 6 = (c-2)(c-3)$

Il existe donc deux suites constantes dans E.

distinguons donc deux cas :

* $\exists n \in \mathbb{N} \;/\; u_n = 3$

  Ou bien $n = 0$ et $u_0 = 3$: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

  Ou bien $n \neq 0$ et $u_n = 3 = \dfrac{u_{n-1} - 12}{2u_{n-1} - 9} \Rightarrow 6u_{n-1} - 27 = u_{n-1} - 12$

  d'où : $5u_{n-1} = 15 \iff u_{n-1} = 3$.

  $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

  Conclusion : la seule suite de E qui admet au moins un terme égal à 3 est constante, elle converge a fortiori.

* $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \neq 3$. On construit $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n - 3}$ pour tout n.

  Par suite : $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} - 3}$

  or : $u_{n+1} - 2 = \dfrac{u_n - 12}{2u_n - 9} - 2 = \dfrac{u_n - 12 - 2(2u_n - 9)}{2u_n - 9} = \dfrac{-3u_n + 6}{2u_n - 9}$

  de même : $u_{n+1} - 3 = \dfrac{u_n - 12}{2u_n - 9} - 3 = \dfrac{u_n - 12 - 3(2u_n - 9)}{2u_n - 9} = \dfrac{-5u_n + 15}{2u_n - 9}$

  d'où : $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} - 3} = \dfrac{-3u_n + 6}{-5u_n + 15} = \dfrac{-3(u_n - 2)}{-5(u_n - 3)} = \dfrac{3}{5} v_n$

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison $\frac{3}{5} < 1$ donc tend vers 0.

Le cours nous permet alors d'affirmer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

2) Limite

Nous avons établi que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Or $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n - 3} \Rightarrow (u_n - 3)\, v_n = u_n - 2 \Rightarrow u_n (v_n - 1) = 3 v_n - 2$

supposons qu'il existe n tel que : $v_n = 1 \Leftrightarrow \dfrac{u_n - 2}{u_n - 3} = 1 \Leftrightarrow u_n - 2 = u_n - 3$

contradiction donc : $v_n \neq 1$ pour tout n et donc :

$$u_n = \frac{3 v_n - 2}{v_n - 1}$$

or $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $3/5$ donc :

$$u_n = \frac{3 v_0 (3/5)^n - 2}{v_0 \left(\frac{3}{5}\right)^n - 1} = \frac{3\left(\frac{3}{5}\right)^n \frac{u_0 - 2}{u_0 - 3} - 2}{\frac{u_0 - 2}{u_0 - 3}\left(\frac{3}{5}\right)^n - 1}$$

distinguons deux cas :

- $u_0 = 3$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante : $\underline{\lim_{\infty} u_n = 3}$
- $u_0 \neq 3$ alors $u_n = \dfrac{3(u_0 - 2)(3/5)^n - 2(u_0 - 3)}{(u_0 - 2)(3/5)^n - (u_0 - 3)}$

d'où : $\underline{\lim_{\infty} u_n = 2}$.

Exercice 5

On considère le SD défini par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $f(x) = x^2 - 7x + 7$ et u_0 donné.

1) Orbite 2-périodique

Supposons qu'il existe une orbite 2-périodique $O_2 = \{x_1, x_2\}$:

$$\forall x \in \{x_1, x_2\} \quad f\circ f(x) = x \neq f(x)$$

donc x annule $f\circ f(x) - x$ et n'annule pas $f(x) - x$

$f(x)$ est de degré 2, $f(x) - x$ aussi et $f\circ f(x) - x$ est de degré 4.

Remarque liminaire : si x^* est un point fixe alors $f(x^*) = x^*$

donc en composant par f : $f\circ f(x^*) = f(x^*) = x^*$

donc x^* annule $f\circ f(x) - x$ de degré 4

or x^* annule $f(x) - x$ de degré 2

toutes les solutions de $f(x) - x = 0$ annulent $f\circ f(x) - x$

$\Rightarrow$ $f(x) - x$ divise $f\circ f(x) - x$

On peut donc mettre[1] $f(x) - x = x^2 - 8x + 7$ dans l'expression de $f\circ f(x) - x$:

$$\begin{aligned}
f\circ f(x) - x &= (x^2-7x+7)^2 - 7(x^2-7x+7) + 7 - x \\
&= (x^2-8x+7+x)^2 - 7(x^2-7x+7+x) + 7 - x \\
&= (x^2-8x+7)^2 + x^2 + 2x(x^2-8x+7) - 7(x^2-7x+7) - 7x + 7 - x \\
&= (x^2-8x+7)(x^2-8x+7+2x-7) + x^2 - 8x + 7 \\
&= (x^2-8x+7)(x^2-6x+1)
\end{aligned}$$

$$x \in O_2 \Rightarrow \begin{cases} f(x) \neq x \Rightarrow x^2 - 8x + 7 \neq 0 \\ f\circ f(x) = x \Rightarrow (x^2-8x+7)(x^2-6x+1) = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 6x + 1 = 0.$$

$\Delta = 36 - 4 = 32 = (4\sqrt{2})^2 \Rightarrow$ $\underline{x_1 = \frac{6+4\sqrt{2}}{2} = 3 + 2\sqrt{2} \text{ et } x_2 = 3 - 2\sqrt{2}}$

2) Stabilité.

$f(x) = x^2 - 7x + 7 \Rightarrow f'(x) = 2x - 7$

Par suite $|f'(x_1) f'(x_2)| = |(2(3+2\sqrt{2}) - 7)(2(3-2\sqrt{2}) - 7)|$

$$= |(-1+4\sqrt{2})(-1-4\sqrt{2})| = |(-1)^2 - (4\sqrt{2})^2| = |1 - 32|$$

$$= 31 > 1$$

L'orbite O_2 est donc instable.

(1) en facteur

3) Points d'entrée de l'orbite.

a) Antécédent de $x_1 = 3+2\sqrt{2}$ (on doit retrouver x_2)

Il est tel que : $f(x) = x_1 \iff x^2 - 7x + 7 = 3 + 2\sqrt{2}$
$\iff x^2 - 7x + 4 - 2\sqrt{2} = 0$.

$\Delta = 49 - 4(4-2\sqrt{2}) = 49 - 16 + 8\sqrt{2} = 33 + 8\sqrt{2}$

or $8\sqrt{2} = 2 \times 4\sqrt{2}$ et $(4\sqrt{2})^2 = 32$ donc : $\Delta = (1+4\sqrt{2})^2$

il vient : $x_3 = \dfrac{7+1+4\sqrt{2}}{2} = 4 + 2\sqrt{2}$

$x_4 = \dfrac{7-1-4\sqrt{2}}{2} = 3 - 2\sqrt{2} = x_2$

b) antécédent de $x_2 = 3 - 2\sqrt{2}$ (on doit retrouver x_1)

Il est tel que : $f(x) = x_2 \iff x^2 - 7x + 7 = 3 - 2\sqrt{2}$
$\iff x^2 - 7x + 4 + 2\sqrt{2} = 0$

$\Delta = 49 - 4(4+2\sqrt{2}) = 49 - 16 - 8\sqrt{2} = 33 - 8\sqrt{2} = 32 + 1 - 2\times 4\sqrt{2}$
$= (4\sqrt{2})^2 + 1 - 2\times 4\sqrt{2} = (1-4\sqrt{2})^2$

il vient : $x_5 = \dfrac{7+1-4\sqrt{2}}{2} = \dfrac{8-4\sqrt{2}}{2} = 4 - 2\sqrt{2}$

$x_6 = \dfrac{7+4\sqrt{2}-1}{2} = 3 + 2\sqrt{2} = x_1$

Conclusion : deux valeurs distinctes de x_1 et x_2 conduisent en un pas à l'orbite 2-périodique O_2, $4+2\sqrt{2}$ et $4-2\sqrt{2}$.

4) Représentation graphique de f : $\mathcal{C}_f$.

a) $f(x) = x^2 - 7x + 7$

f est une fonction polynomiale, elle est donc définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

b) $f'(x) = 2x - 7$ La dérivée s'annule pour $x = 7/2 = 3{,}5$

et $f(7/2) = (7/2)^2 - 7\,7/2 + 7 = \dfrac{49 - 49\times 2 + 28}{4} = \dfrac{-49+28}{4} = \dfrac{-21}{4} = -5{,}25$

c) Les points fixes de f, abscisses et ordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec la première bissectrice Δ annulent $x^2 - 8x + 7$. 1 est racine évidente (somme des coefficients nulle), la seconde est donc 7.

d) $f(x)$ est un polynôme du second degré, $\mathscr{C}_f$ est donc une parabole dont la concavité est tournée vers le haut (coef de x^2 positif). $\mathscr{C}_f$ est donc symétrique par rapport à l'axe $x = 7/2$. Il suffit donc de l'étudier sur $[7/2, +\infty[$ et de compléter par symétrie.

e) Tableau de variation

x	$7/2$	7	$+\infty$
f'	0	$+$	
f	$-21/4$ ↗	7 ↗	$+\infty$

symétrie

δ	x	x	$f(x)$
1,5	2	5	-3
3,5	0	7	7
2,5	1	6	1

PF

Orbite: - - -

$2\sqrt{2} \simeq 2 \times 1{,}4 = 2{,}8$

$3 + 2\sqrt{2} \simeq 5{,}8$

$3 - 2\sqrt{2} \simeq 0{,}2$