

UE CO8 - Commande et Automatique

**CO8SFCA0-Commande Linéaire
(CL)**

Pierre MELCHIOR

pierre.melchior@enseirb-matmeca.fr

(notes de cours)

CO8SFCA0- Commande Linéaire

1- Introduction, objectifs de la commande

Un **automatisme** permet de contrôler un système pour passer d'un état à un autre, quand la condition de passage, établie à partir des informations venant des capteurs, est vérifiée.

En automatisme, on ne s'intéresse pas à l'état transitoire entre deux états établis du système. Systèmes à évènements discrets

En **Automatique**, au contraire on s'intéresse à la dynamique du système et donc au contrôle des transitoires. Un système dynamique est un système dont le fonctionnement est régi par des équations différentielles. Cela concerne des systèmes mécaniques, électroniques, biologiques, chimiques, ...

Plusieurs classes de systèmes dynamiques :

monovariable / multivariable

continu / discret / hybrides

linéaire / non linéaire

stationnaire / à paramètres variant

...

Dans ce cours, on s'intéresse aux systèmes dynamiques monovariables, continus, linéaires, stationnaires.

Commande en boucle ouverte

```
clear all
close all
clc
```

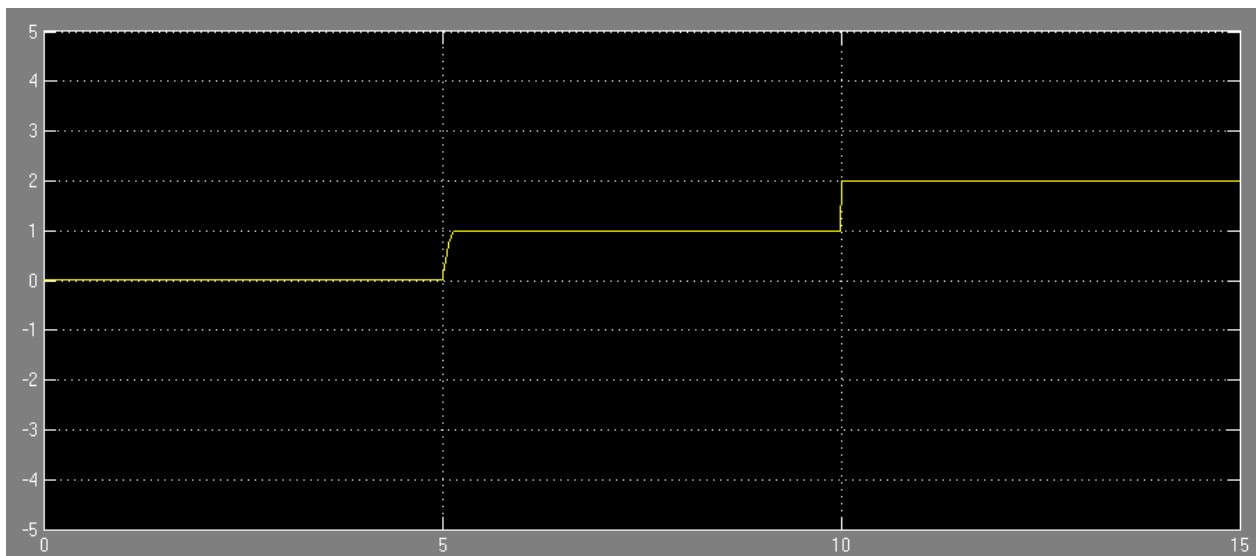
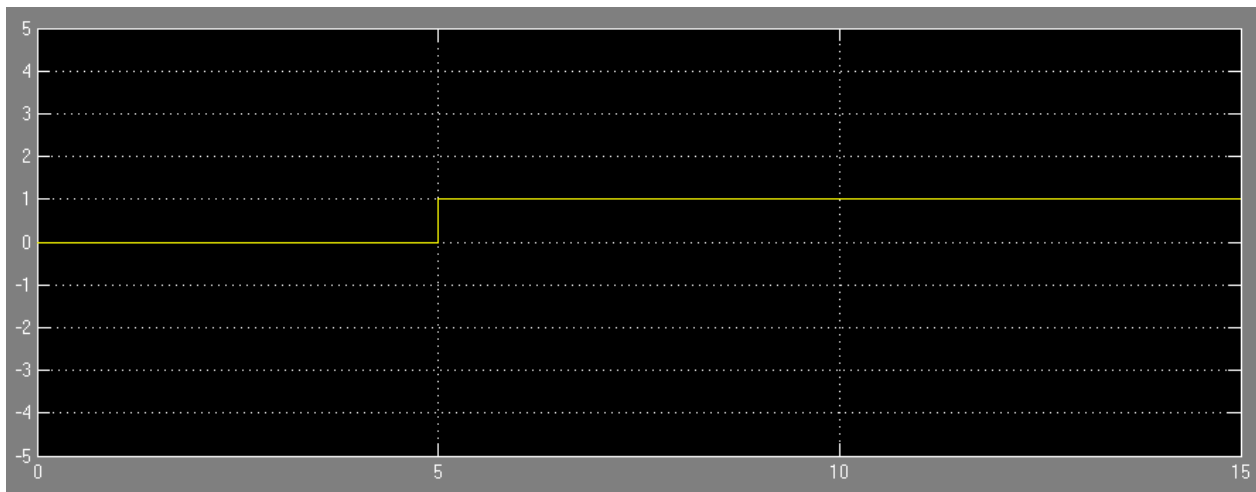
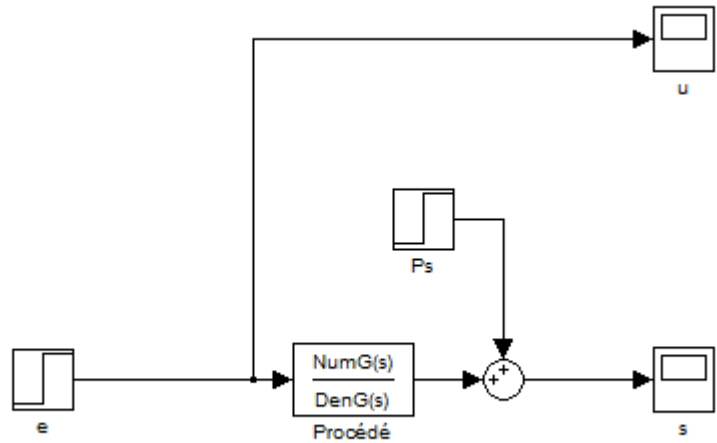
```
NumG=[1];
DenG=[1/(16.89*50) 1/16.89
1];
```

```
NumC=[0];
DenC=[1];
```

```
DataHistory=15000;
```

```
Stepte=0; Ive=0; Fve=1;
SteptPu=5; IvPu=0; FvPu=1;
SteptPs=10; IvPs=0; FvPs=1;
```

```
Startt=0; Stoptt=15;
```



Commande en boucle fermée

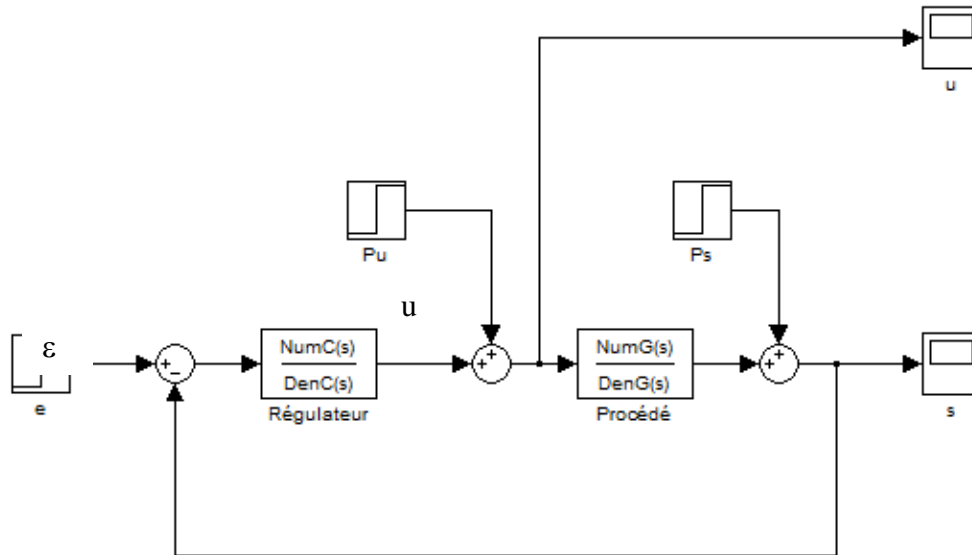
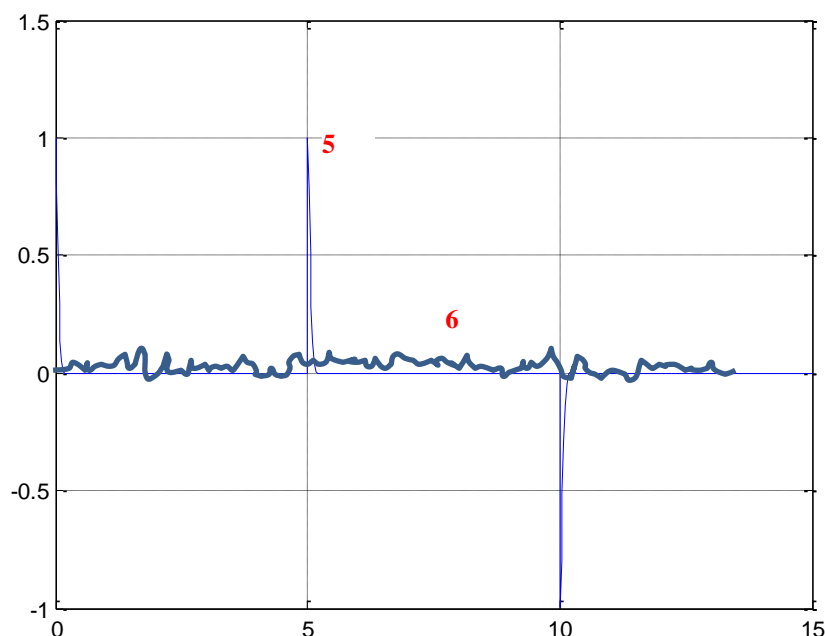
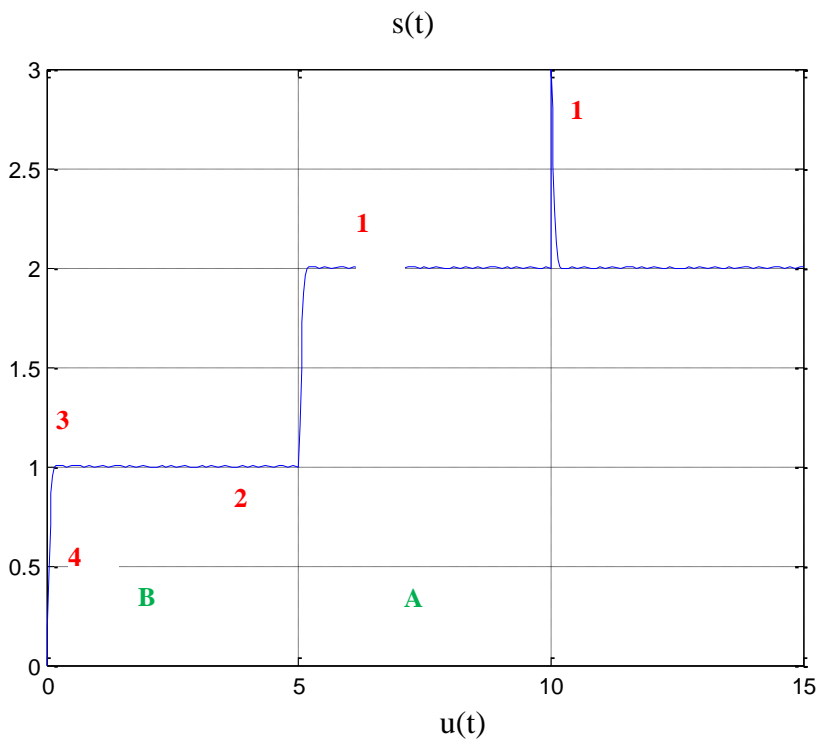


Figure 1 – Schéma de principe d'une commande en boucle fermée avec $e(t)$: consigne, $\varepsilon(t)$: erreur, $u(t)$: commande, $s(t)$: mesure, $pu(t)$: perturbation de commande, $ps(t)$: perturbation de sortie, $C(p)$: Régulateur et $G(p)$: Procédé (interface de puissance + actionneur + capteur)



Objectifs de la commande

- Rejeter les perturbations
- Stabiliser un système instable en boucle ouverte (exemple : lanceur, fusée, pendule inversé, ...)
- Contrôler le système malgré les incertitudes

1 boucle, 2 fonctions :

A > Fonction **régulation** : fait en sorte que la sortie **ne suive pas** les perturbations

B > Fonction **asservissement** : fait en sorte que la sortie **suive** la consigne

D'où les objectifs :

- en régulation

1 > faire en sorte que les perturbations aient le moins d'influence possible sur la sortie et donc que les perturbations soient rejetées le plus rapidement possible

- en asservissement

2 > assurer la précision statique

3 > fixer le degré de stabilité pour contrôler les oscillations (le premier dépassement)

4 > fixer la rapidité de la réponse

5 > étude de la saturation : vérifier que $u(t) \leq U_{\max}$ admissible

6 > filtrer le bruit de commande

Pour gérer les transitoires et obtenir les performances souhaitées fixées par le cahier des charges, le degré de liberté est le régulateur $C(p)$ qu'il faut synthétiser.

Pour cela, il faut :

- un modèle de procédé

- étudier les procédés, notamment dans les domaines temporel et fréquentiel

- Etablir les différentes relations entrées/sorties (fonctions de transfert)

- Analyser l'influence de $C(j\omega)$ et en déduire pour chacun des points précédents les actions nécessaires du régulateur pour assurer les spécifications

- en particulier pour étudier la stabilité

- Définir le cahier des charges en régulation et en asservissement

- Etablir une méthodologie de synthèse des différentes actions (seules ou combinées) du régulateur

En discret :

- Outils d'analyse en discret (Transformée en Z)

- Choix de la période d'échantillonnage

- Schéma de principe et d'étude d'une commande en temps discret

- Méthodologies de synthèse fréquentielle d'un régulateur discret

- Etablissement de l'équation récurrente qui sera implémentée.

Plan

1- Introduction, objectifs de la commande

2- Modélisation

- 2.1- Modèle de connaissance
- 2.2- Modèle de comportement (identification)
 - Analyse temporelle
 - Analyse fréquentielle

3- Représentations fréquentielles

Fonction de transfert, réponse en fréquences

- 3.1- Diagrammes de Bode
- 3.2- Lieu de Nichols

4- Commande en boucle fermée

- 4.1 - Fonctions de transfert
- 4.2- Analyse de la précision
- 4.3- Analyse du rejet de perturbation
- 4.4- Analyse de la stabilité
- 4.5- Relation boucle ouverte / boucle fermée ; analyse de la rapidité
- 4.6- Analyse de la sensibilité de la commande et de la saturation
- 4.7- Analyse du filtrage

5- Commande

- 5.1- Principe
- 5.2- Commande Proportionnelle
- 5.2- Commande Proportionnelle Intégrale (PI)
- 5.3- Commande Proportionnelle Dérivée (PD)
- 5.4- Commande PIDF

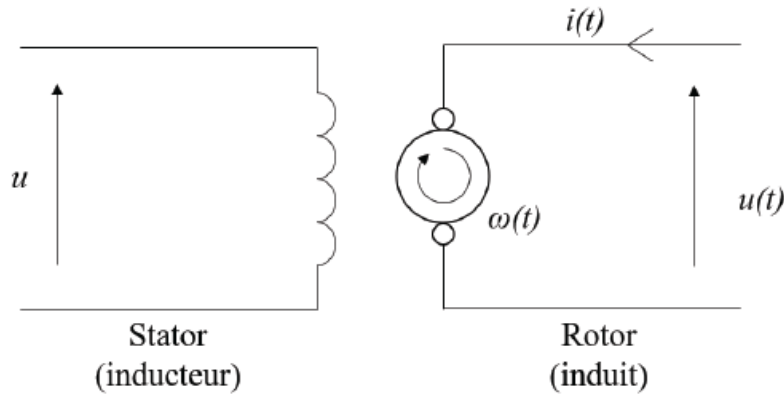
6- Exemples / TD

2- Modélisation

2.1- Modèle de connaissance

Exemple : Modèle d'un moteur à courant continu

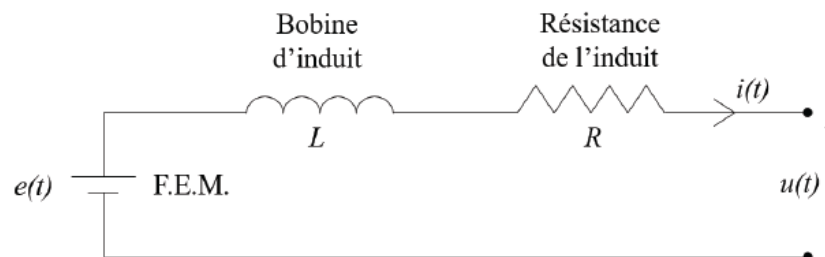
Le moteur à courant continu commandé en tension par l'induit et en vitesse.



Dans notre exemple, l'entrée du système est le courant d'induit $u(t)$ et la sortie du système est la vitesse angulaire du rotor $\omega(t)$. Le courant induit est $i(t)$ et la tension du stator u est constante.

On cherche la relation entrée/sortie, c'est-à-dire la relation entre $u(t)$ et $\omega(t)$.

Équations électriques :



Les équations électriques du système sont donc :

$$\begin{aligned} - u(t) &= Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + e(t) \\ - e(t) &= k\omega(t) \end{aligned}$$

Équations mécaniques :

On sait que $J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = \sum \Gamma$ avec J le moment d'inertie et Γ un couple.

Les couples s'appliquant sur notre système sont : $c_m(t)$ le couple moteur, f' les frottements secs et $f\omega(t)$ les frottements visqueux.

De plus, $\theta(t)$ étant la position angulaire, $\frac{d\theta(t)}{dt} = \omega(t)$ puis $\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = \frac{d\omega(t)}{dt}$.

Les équations mécaniques du système sont donc :

$$\begin{aligned} - J \frac{d\omega(t)}{dt} &= c_m(t) - f' - f\omega(t) \\ - c_m(t) &= ki(t) \end{aligned}$$

Passage au domaine opérationnel :

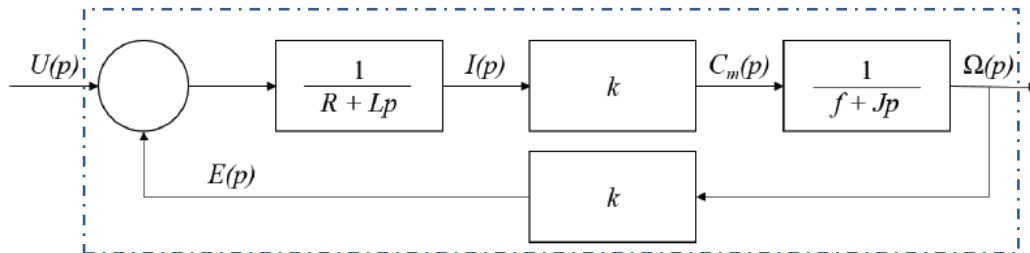
Les équations précédentes deviennent, en négligeant f' devant $f\omega(t)$ (i.e. $f' \ll f\omega(t)$) :

- $U(p) = RI(p) + LpI(p) + E(p)$ avec $E(p) = k\Omega(p)$
- $Jp\Omega(p) = C_m(p) - f\Omega(p)$ avec $C_m(p) = kI(p)$

Puis :

- $I(p) = \frac{U(p) - E(p)}{R + Lp}$ avec $E(p) = k\Omega(p)$
- $\Omega(p) = \frac{C_m(p)}{f + Jp}$ avec $C_m(p) = kI(p)$

On peut donc en déduire le schéma fonctionnel suivant :



Remarques :

- $\frac{1}{R+Lp} = \frac{1}{R} \frac{1}{1+\frac{L}{R}p}$ avec $\frac{L}{R}$ la constante de temps électrique
- $\frac{1}{f+Jp} = \frac{1}{f} \frac{1}{1+\frac{J}{f}p}$ avec $\frac{J}{f}$ la constante de temps mécanique

Conclusion :

La relation entrée-sortie est du moteur à courant continu : $\frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{k}{k^2 + (R + Lp)(f + Jp)}$.

2.2- Modèle de comportement (identification)

Dans le cas où on ne peut pas écrire les équations différentielles qui régissent le fonctionnement du système, et donc établir son modèle de connaissance, on peut effectuer une identification du système en appliquant à son entrée un signal d'excitation. A l'aide des signaux d'entrée et de sortie, on peut alors établir un modèle de comportement entrée/sortie du système.

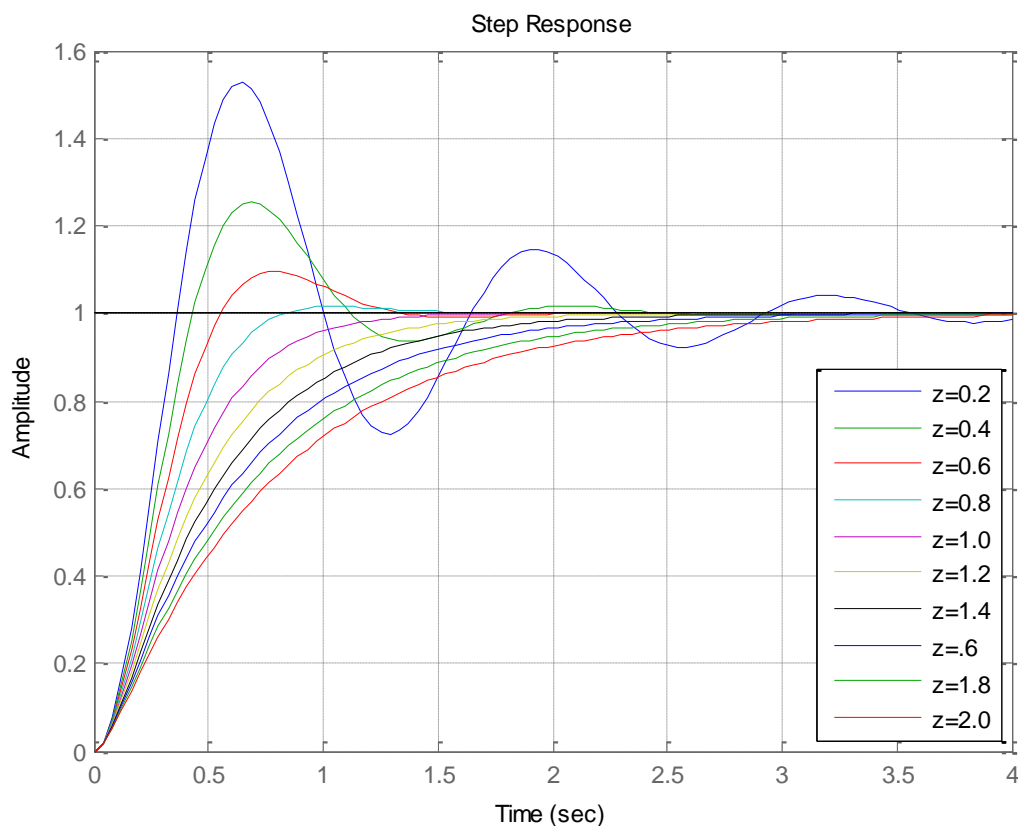
Plus le signal d'entrée aura un spectre riche en fréquences (ou excitera les autres fréquences), plus le signal de sortie permettra d'avoir des informations en hautes fréquences et plus le modèle sera précis.

On peut appliquer comme signal d'entrée :

- . un échelon (réponse indicielle)
- . une SBPA (Séquence Binaire Pseudo-Aléatoire, spectre plus riche en fréquences)
- . une sinusoïde.

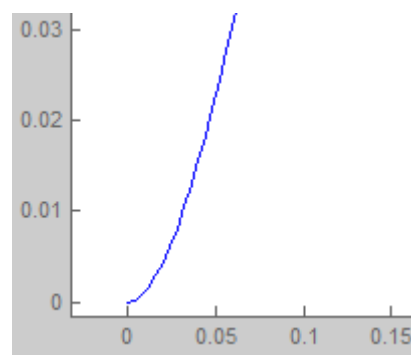
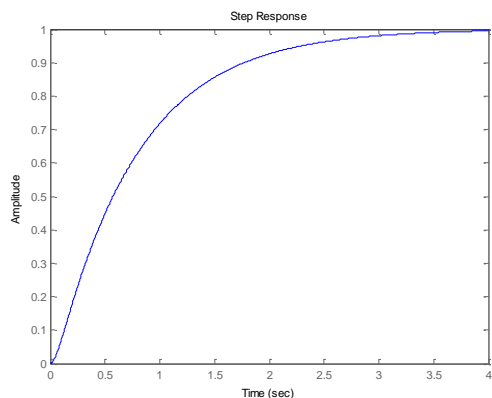
2.2.1- Analyse temporelle, réponse indicielle

Trois types de réponse :



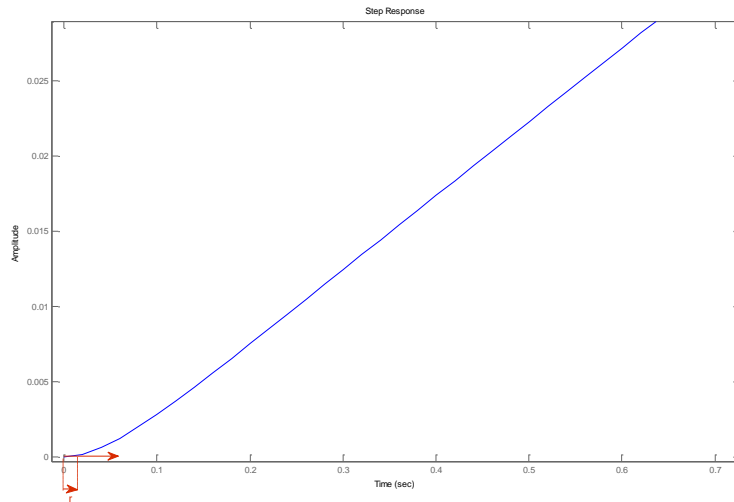
Les mesures suivantes sont à faire dans l'ordre :

- Tangente à l'origine :



>si la tangente à l'origine est non nulle, alors le système est du 1^{er} ordre, et le modèle est donné par :

$$G(p) = \frac{G_0 e^{-rp}}{(1 + \frac{p}{\omega_c})}$$



>si la tangente à l'origine est nulle, alors le système est d'ordre ≥ 2 , et le modèle est donné par :

$$G(p) = \frac{G_0 e^{-rp}}{\left(1 + \frac{p}{\omega_{c1}}\right) \left(1 + \frac{p}{\omega_{c2}}\right) (\dots)}$$

- Gain statique, G_0 :

$$G_0 = \frac{s_{\infty} - s_i}{e_{\infty} - e_i}$$

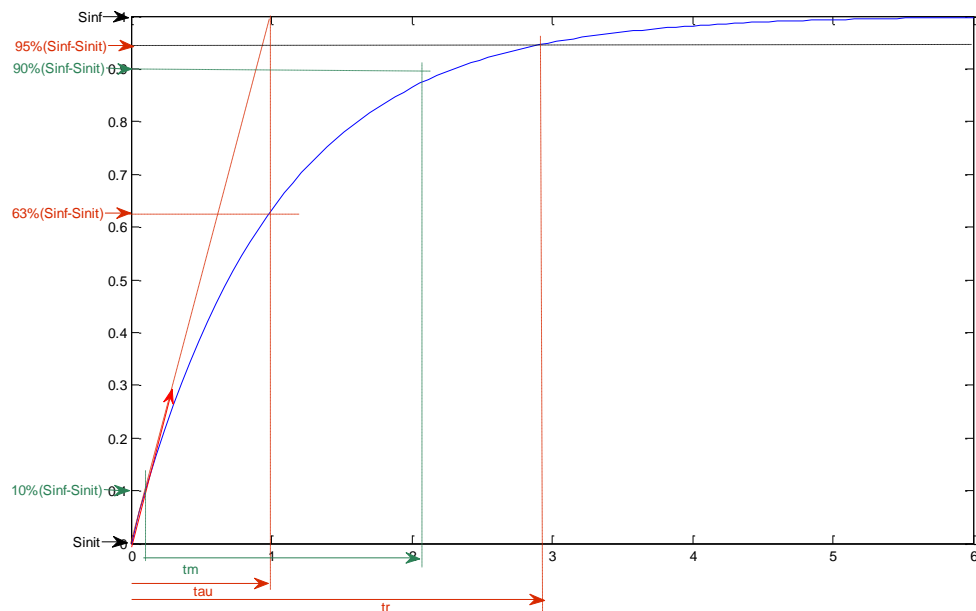
- Retard pur, r : temps qui s'écoule entre l'instant d'application de la consigne ($t=0$) et l'instant pour lequel la sortie devient $\neq 0$.

Dans le cas d'un système du 1^{er} ordre :

- Constate de temps τ : se mesure à 63% ($s_{\infty} - s_i$) ou au croisement de la tangente et de l'asymptote au régime permanent.

- On a τ (en s) $= 1/\omega_c$, ω_c étant la pulsation de coupure (en rad/s), et $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\tau}$ (f_c en Hz).

```
t=linspace(0,6,100)
y=1-exp(-t)
figure(1)
plot(t,y)
```

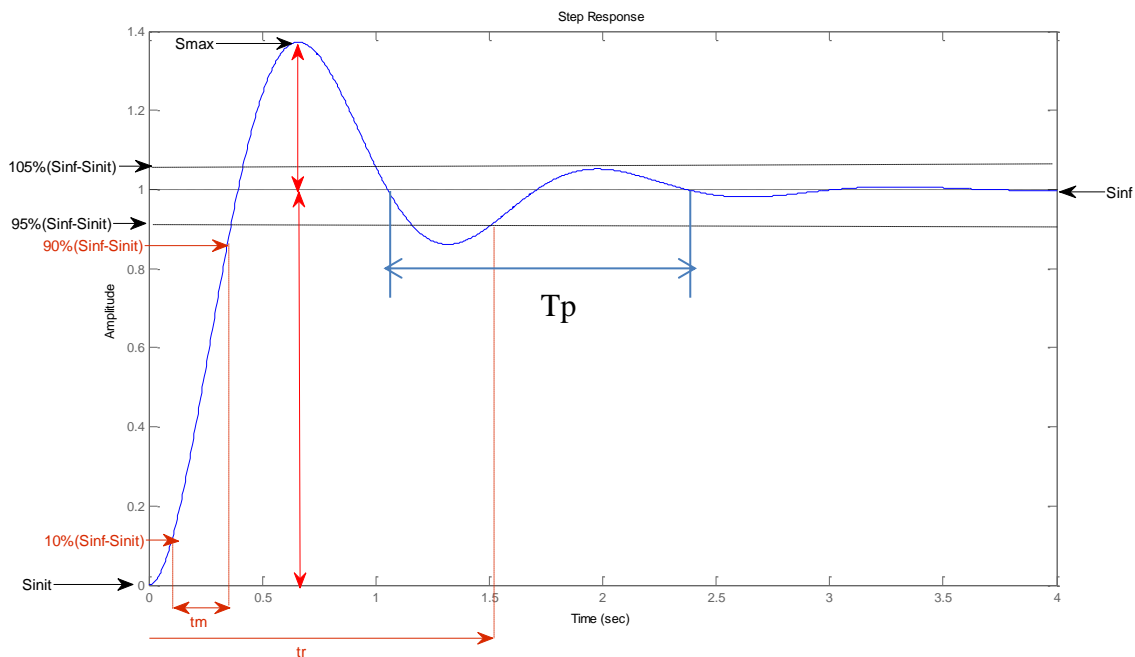


- temps de montée, t_m : caractérise l'attaque, se mesure entre 10%(s ∞ -si) et 90%(s ∞ -si)
- temps de réponse à $\pm 5\%$, t_r : caractérise le temps nécessaire pour atteindre 95% du régime permanent ; se mesure entre l'instant d'application de la consigne ($t=0$) et l'instant pour lequel la sortie rentre dans le tuyau $\pm 5\%$ (s ∞ -si) pour ne plus en sortir.

Dans le cas d'un système d'ordre supérieur à 2 hyper-amorti :

- on peut approximer dans un premier temps le système à un système du 1^{er} ordre et déterminer τ (en s)= $1/\omega_{c1}$, ce qui permet d'obtenir la plus petite pulsation de coupure,
- chercher ensuite les autres pulsations de coupure en faisant une étude harmonique (fréquentielle).

Dans le cas d'un système d'ordre 2 amorti, on mesure :



- 1^{er} dépassement, D_1 : $D_1 = \frac{s_{max} - s_{\infty}}{s_{\infty} - s_i}$

$$D_1 = e^{-\frac{z\pi}{\sqrt{1-z^2}}}$$

On en déduit z , le facteur d'amortissement : $z = \frac{\ln(D_1)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(D_1)}}$ avec D_1 en décimal.

- temps de montée, t_m : caractérise l'attaque, se mesure entre 10%(s∞-si) et 90%(s∞-si)
- temps de réponse à +/- 5%, t_r : caractérise le temps nécessaire pour atteindre 95% du régime permanent ; se mesure entre l'instant d'application de la consigne ($t=0$) et l'instant pour lequel la sortie rentre dans le tuyau +/- 5%(s∞-si) pour ne plus en sortir.

- la période propre amortie T_p

On en déduit :

- la pulsation propre amortie ω_p
- la pulsation propre non amortie ω_n :

$$\omega_p = \frac{2\pi}{T_p} = \omega_n \sqrt{1 - z^2}$$

$$\text{d'où : } \omega_n = \frac{2\pi}{T_p \sqrt{1 - z^2}} .$$

$$G(p) = \frac{G_0 e^{-rp}}{\left(1 + \frac{p}{\omega_{c1}}\right)\left(1 + \frac{p}{\omega_{c2}}\right)} = \frac{G_0 e^{-rp}}{\left(1 + \frac{2z\omega_n p}{\omega_n^2} + \frac{p^2}{\omega_n^2}\right)} .$$

2.2.2- Analyse fréquentielle

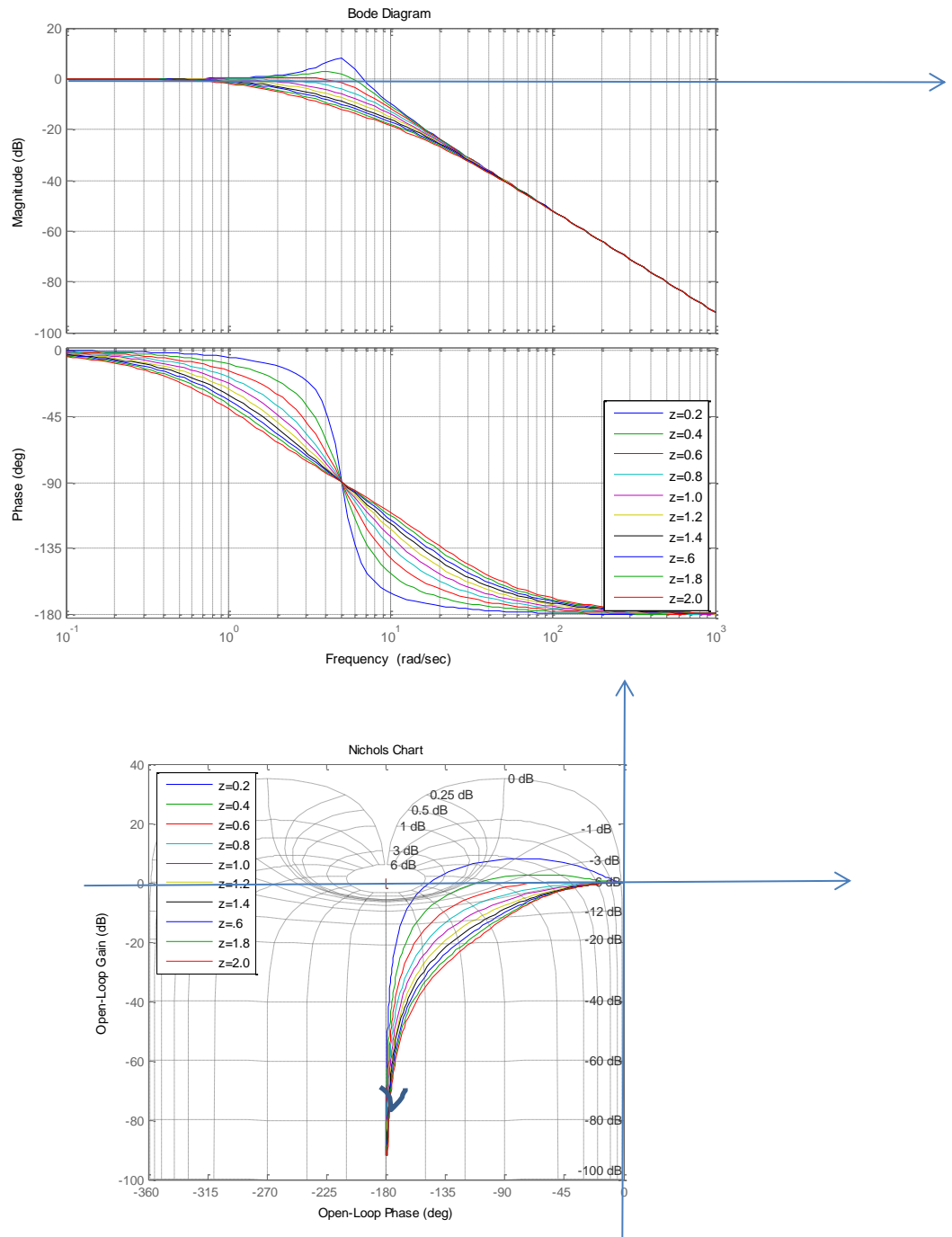
Pour faire une étude fréquentielle (étude harmonique), on applique une sinusoïde en entrée du système et, en régime permanent, connaissant la sinusoïde de sortie, on en déduit le module (gain) et l'argument (déphasage).

$$\begin{cases} e(t) = e_0 \sin(\omega_0 t) \\ s(t) = s_0 \sin(\omega_0 t + \varphi(\omega_0)) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |G(j\omega_0)| = \frac{s_0}{e_0} \\ \text{Arg}(G(j\omega_0)) = \varphi(\omega_0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |G(j\omega_0)|_{\text{dB}} = 20 \log \left| \frac{s_0}{e_0} \right| \\ \text{Arg}(G(j\omega_0)) = \varphi(\omega_0) \end{cases}$$

Pour représenter la réponse en fréquences, on utilise une échelle logarithmique pour les pulsations (fréquences angulaires).

On prend généralement : 0.1 0.2 0.5 0.8 1 2 5 8 10 20 50 80 ...

3 représentations graphiques : Diagrammes de Bode, Lieu de Nichols, plan complexe



3- Représentations fréquentielles

Fonction de transfert, réponse en fréquences

A partir du modèle de connaissance, on obtient la fonction de transfert $G(p)$. En se mettant en régime sinusoïdale permanent, on obtient la réponse en fréquences :

$$p = j\omega \text{ et } G(p) = G(j\omega)$$

-Remarques : rappels sur le calcul des modules et arguments

$$\begin{aligned}
- a + jb &\Rightarrow \begin{cases} |a + jb| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ |a + jb|_{\text{dB}} = 10 \log(a^2 + b^2) \\ \text{Arg}(a + jb) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \end{cases} \\
- 1 + j\frac{\omega}{\omega_c} &\Rightarrow \begin{cases} \left|1 + j\frac{\omega}{\omega_c}\right| = \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_c^2}} \\ \left|1 + j\frac{\omega}{\omega_c}\right|_{\text{dB}} = 10 \log\left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_c^2}\right) \\ \text{Arg}\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_c}\right) = \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \end{cases} \\
- \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_c}} &\Rightarrow \begin{cases} \left|\frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_c}}\right| = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\omega^2}{\omega_c^2}}} \\ \left|\frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_c}}\right|_{\text{dB}} = -10 \log\left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_c^2}\right) \\ \text{Arg}\left(\frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_c}}\right) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \end{cases} \\
- j\omega &\Rightarrow \begin{cases} |j\omega| = \omega \\ |j\omega|_{\text{dB}} = 20 \log(\omega) \Rightarrow \text{DÉRIVATEUR} \\ \text{Arg}(j\omega) = 90^\circ \end{cases} \\
- \frac{1}{j\omega} &\Rightarrow \begin{cases} \left|\frac{1}{j\omega}\right| = \frac{1}{\omega} \\ \left|\frac{1}{j\omega}\right|_{\text{dB}} = -20 \log(\omega) \Rightarrow \text{INTÉGRATEUR} \\ \text{Arg}\left(\frac{1}{j\omega}\right) = -90^\circ \end{cases} \\
- G_0 &\Rightarrow \begin{cases} |G_0| = G_0 \\ |G_0|_{\text{dB}} = 20 \log(G_0) \\ \text{Arg}(G_0) = 0^\circ \end{cases}
\end{aligned}$$

3.1- Diagrammes de Bode

3.2- Lieu de Nichols

3.3-Exemples

-Exemple 1

$$F_1(p) = \frac{10}{p(1+5p)}$$

$$F_1(p) = \frac{10}{p(1 + \frac{p}{0.2})}$$

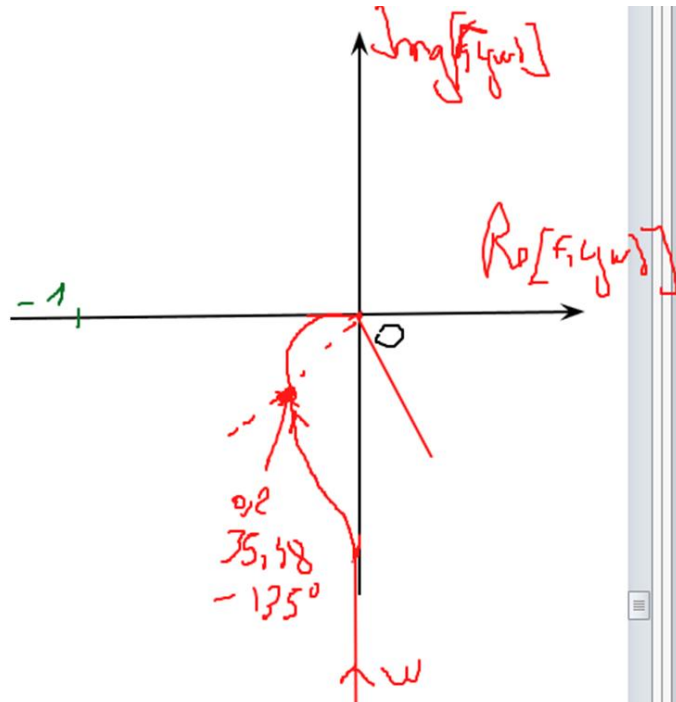
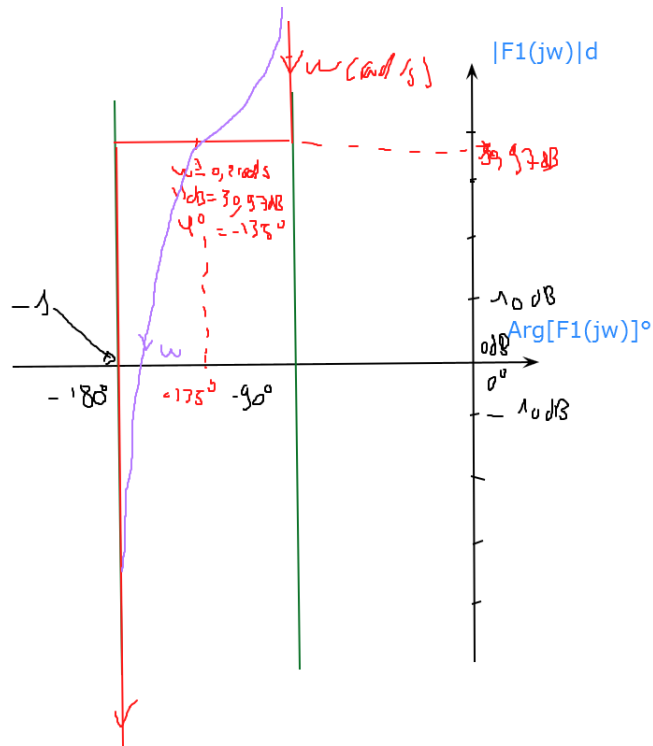
On en déduit la réponse en fréquences :

$$F_1(j\omega) = \frac{10}{j\omega(1 + j\frac{\omega}{0.2})}$$

et

$$|F_1(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \cdot \log[10] - 20 \cdot \log[\omega] - 10 \cdot \log\left[1 + \left(\frac{\omega}{0.2}\right)^2\right]$$

$$\text{Arg}[F_1(j\omega)]^\circ = -90 - \text{arctg}\left[\frac{\omega}{0.2}\right]$$



-Exemple 2 :

$$F_2(p) = \frac{p}{(1 + 5 \frac{p}{0.2})(1 + 20 \frac{p}{0.05})}$$

$$F_2(p) = \frac{p}{(1 + \frac{p}{0.2})(1 + \frac{p}{0.05})}$$

$$F_{12}(j\omega) = \frac{j\omega}{(1 + j \frac{\omega}{0.05})(1 + j \frac{\omega}{0.2})}$$

et

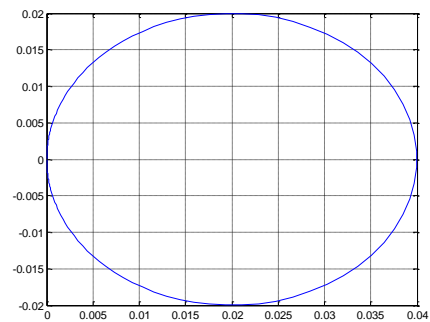
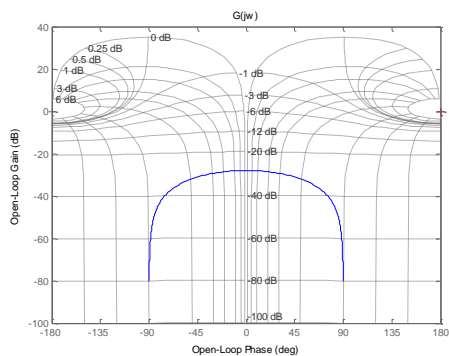
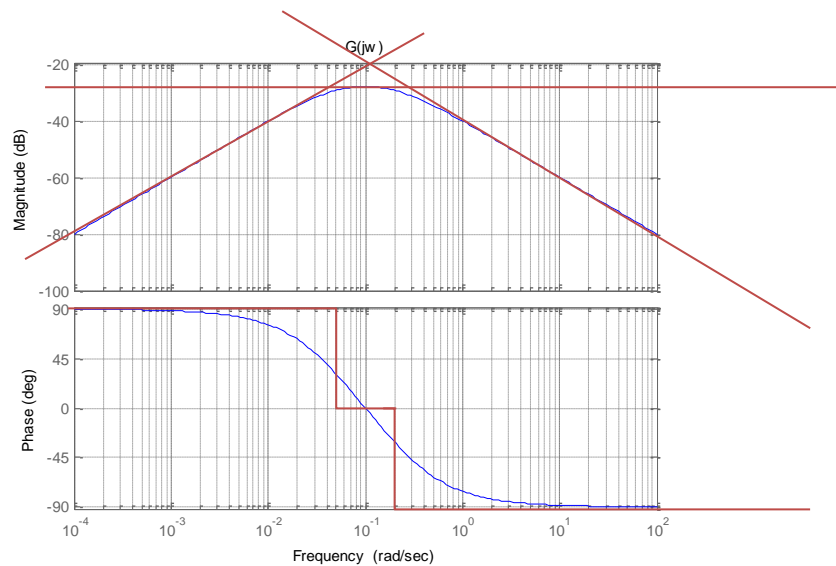
$$|F_2(j\omega)|_{dB} = 20 \cdot \log[\omega] - 10 \cdot \log\left[1 + \left(\frac{\omega}{0.05}\right)^2\right] - 10 \cdot \log\left[1 + \left(\frac{\omega}{0.2}\right)^2\right]$$

$$\text{Arg}[F_{12}(j\omega)]^\circ = +90 - \text{artcg}\left[\frac{\omega}{0.05}\right] - \text{artcg}\left[\frac{\omega}{0.2}\right]$$

>>>programme BodeNicholsPC.m

s

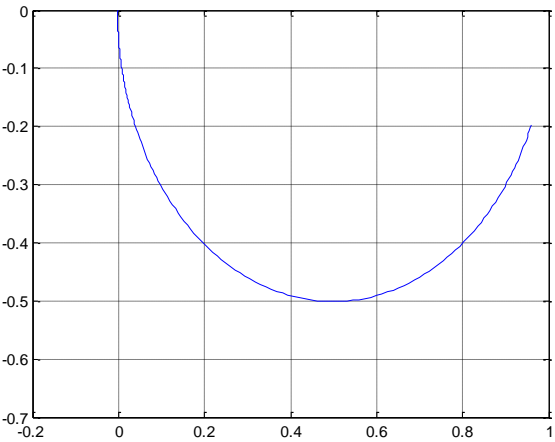
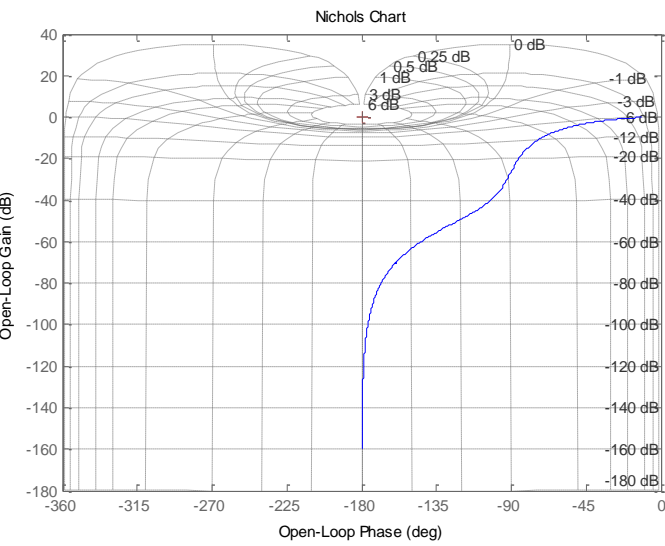
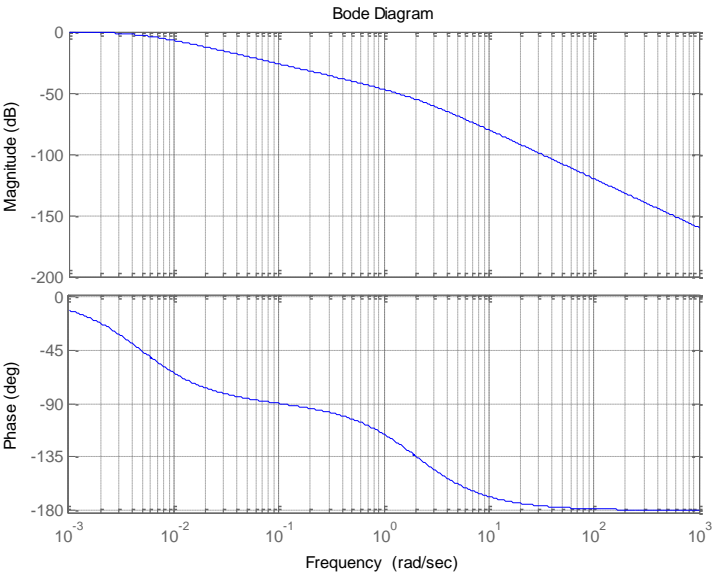
$$G(s) = \frac{\quad}{100 s^2 + 25 s + 1}$$



----- A titre de comparaison

$$F_2(p) = \frac{1}{(1+5\frac{p}{0.1})(1+20\frac{p}{0.1})}$$

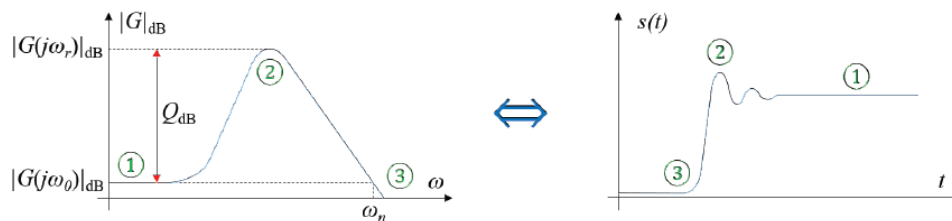
$$F_{12}(j\omega) = \frac{1}{(1+j\frac{\omega}{0.05})(1+j\frac{\omega}{0.2})}$$



-Exemple 3

Tracer les diagrammes de Bode, Nichols, et plan complexe.

3.4- Cas particulier d'un système du 2ème ordre



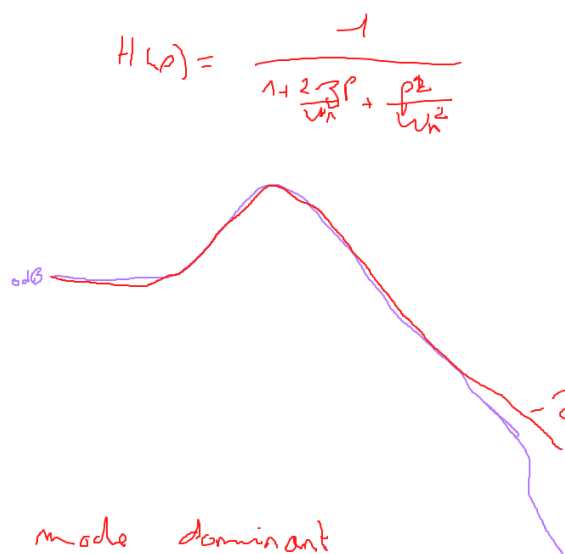
Avec :

- $|G(j\omega_0)|_{dB} = G_0 = \text{gain statique}$
- $|G(j\omega_r)|_{dB} = \text{gain maximal avec } \omega_r \text{ la pulsation de résonance}$
- $Q = \frac{|G(j\omega_r)|}{|G(j\omega_0)|} = \frac{\text{gain maximal}}{\text{gain statique}} = \frac{1}{2z\sqrt{1-z^2}} = \text{facteur de résonance}$
- $Q_{dB} = 20 \log(Q) = |G(j\omega_r)|_{dB} - |G(j\omega_0)|_{dB} = \text{facteur de résonance en décibel}$

Lien entre ω_r , ω_n et ω_p :

- la pulsation propre non-amortie ω_n est donnée par le croisement entre les asymptotes des hautes et basses fréquences
- la pulsation propre amortie ω_p est donnée par la relation $\omega_p = \omega_n \sqrt{1-z^2}$
- la pulsation de résonance ω_r est donnée par la relation $\omega_r = \omega_n \sqrt{1-2z^2}$

Dans le cas d'une boucle de commande bien faite, l'allure générale est toujours la même : gain de 1 (ou 0dB) en basses fréquences, résonance à ω_r , et filtrage des hautes fréquences avec un ordre élevé quelconque. Un mode dominant du 2^{ème} ordre pourra toujours être défini et approximer correctement les basses et moyennes fréquences ; les hautes fréquences seront mal approximées, mais comme elles correspondent aux temps très courts de la réponse indicielle, et l'erreur d'approximation influence peu la réponse globale :

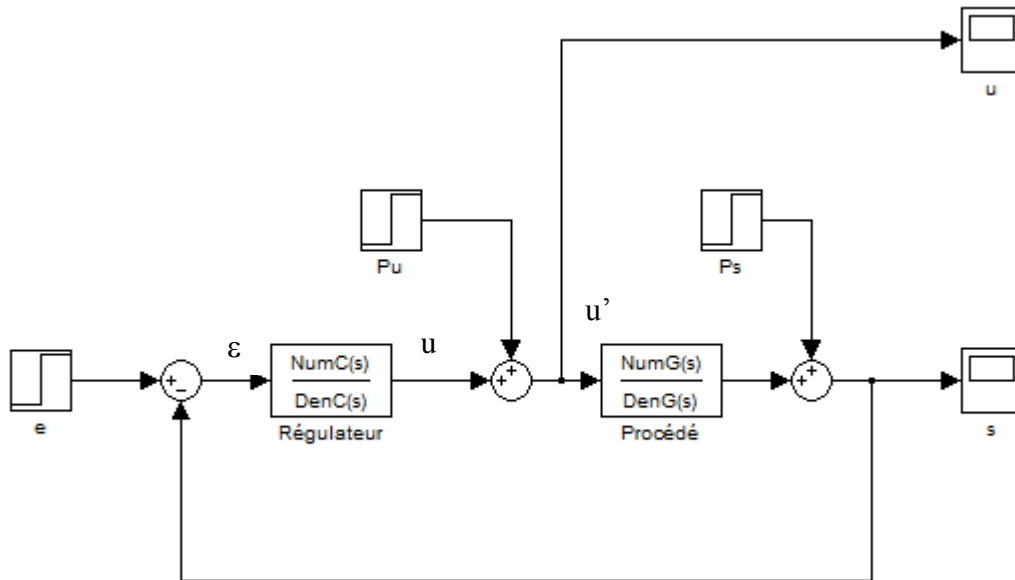


4- Commande en boucle fermée

4.0-Commande en boucle ouverte

Voir l'introduction.

4.1 - Fonctions de transfert



Propriétés des systèmes linéaires :

Définis par une ou des ED linéaires

2 propriétés fondamentales: Principe de proportionnalité

Principe de superposition

Réponse indicielle : observation de s et u.

Fonction asservissement $S(p)/E(p)$

Fonction régulation $S(p)/Pu(p)$

Fonction régulation $S(p)/Ps(p)$

Fonction de sensibilité U/E

Fonction de sensibilité U/Pu

Fonction de sensibilité U/Ps

Notations :

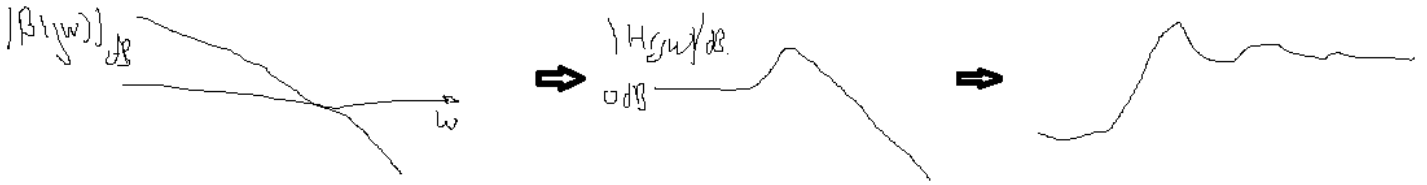
-Procédé = $G(p)$

-Régulateur = $C(p)$

-Boucle ouverte : $\beta(p)=C(p)*G(p)$

-Boucle fermée : $H(p)=\beta(p)/(1+\beta(p))$

En modelant la réponse en fréquences en boucle ouverte $\beta(p)$, on en déduit la réponse en fréquences en boucle fermée, ce qui modèle la réponse indicielle dans le domaine temporelle :



Fonction asservissement ($P_s(p)=P_u(p)=0$) : $H(p) = S(p)/E(p) = \beta(p)/(1+\beta(p))$

$$S(p) = C(p)G(p)\varepsilon(p)$$

$$\varepsilon(p) = E(p) - S(p)$$

$$\text{d'où } S(p)/E(p) = C(p)G(p)/(1 + C(p)G(p))$$

Fonction régulation par rapport aux perturbations de commande S/P_u : $S(p)/P_u(p) = G(p)/(1+\beta(p))$

Fonction régulation S/P_s : $S(p)/P_s(p) = 1/(1+\beta(p))$

Expression globale de la transformée de Laplace de la sortie :

$$S(p) = \beta(p)/(1+\beta(p)) \cdot E(p) + G(p)/(1+\beta(p)) \cdot P_u(p) + 1/(1+\beta(p)) \cdot P_s(p)$$

Fonction de sensibilité par rapport à la consigne U/E : $U(p)/E(p) = C(p)/(1+\beta(p))$

Fonction de sensibilité par rapport aux perturbations de commande U/P_u : $U(p)/P_u(p) = -C(p)G(p)/(1+\beta(p))$

$$U = -CS$$

$$S = G(U + P_u)$$

$$U/P_u = -CG/(1+CG)$$

Fonction de sensibilité par rapport aux perturbations de sortie U/P_s : $U(p)/P_s(p) = -C(p)/(1+\beta(p))$

$$U = -CS$$

$$S = (P_s + GU)$$

$$\gg U = -CP_s - CGU$$

$$U/P_s = -C/(1+CG)$$

U'/P_u

$$U' = (P_u - CS)$$

$$S = GU'$$

$$\gg U' = P_u - CGU'$$

$$U'/P_u = 1/(1+CG)$$

U'/P_s

$$U' = -C(P_s + GU')$$

$$U'/P_s = -C/(1+CG)$$

4.2- Analyse de la précision (Spécification 2)

L'erreur est donnée par la limite d'Epsilon en régime permanent, c'est-à-dire pour t tendant vers l'infini :
On a

$$\frac{C(p)}{G(p)}$$

$$\beta(p) = C(p)G(p)$$

$$H(p) = \frac{\beta(p)}{1 + \beta(p)}$$

$$\beta(p) = \frac{1}{p^i} \frac{a_0 + a_1 p^1 + a_2 p^2 + a_3 p^3 + \dots + a_n p^n}{b_0 + b_1 p^1 + b_2 p^2 + b_3 p^3 + \dots + b_d p^d}$$

$$\beta(p) = \frac{\beta_0}{p^i} \frac{\left(1 + \frac{p}{\omega_{cn1}}\right) \left(1 + \frac{p}{\omega_{cn2}}\right) \dots \left(1 + \frac{p}{\omega_{cn}}\right)}{\left(1 + \frac{p}{\omega_{cd1}}\right) \left(1 + \frac{p}{\omega_{cd2}}\right) \dots \left(1 + \frac{p}{\omega_{cd}}\right)}$$

β_0 gain statique de la boucle ouverte

$$\varepsilon \text{ en régime permanent} = \lim_{t \rightarrow \infty} (\varepsilon(t))$$

ou

$$\varepsilon = \lim_{p \rightarrow 0} (p \varepsilon(p))$$

or

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + \beta(p)} E(p)$$

d'où

$$\varepsilon = \lim_{p \rightarrow 0} \left(p \frac{1}{1 + \beta(p)} E(p) \right)$$

et pour $p \rightarrow 0$

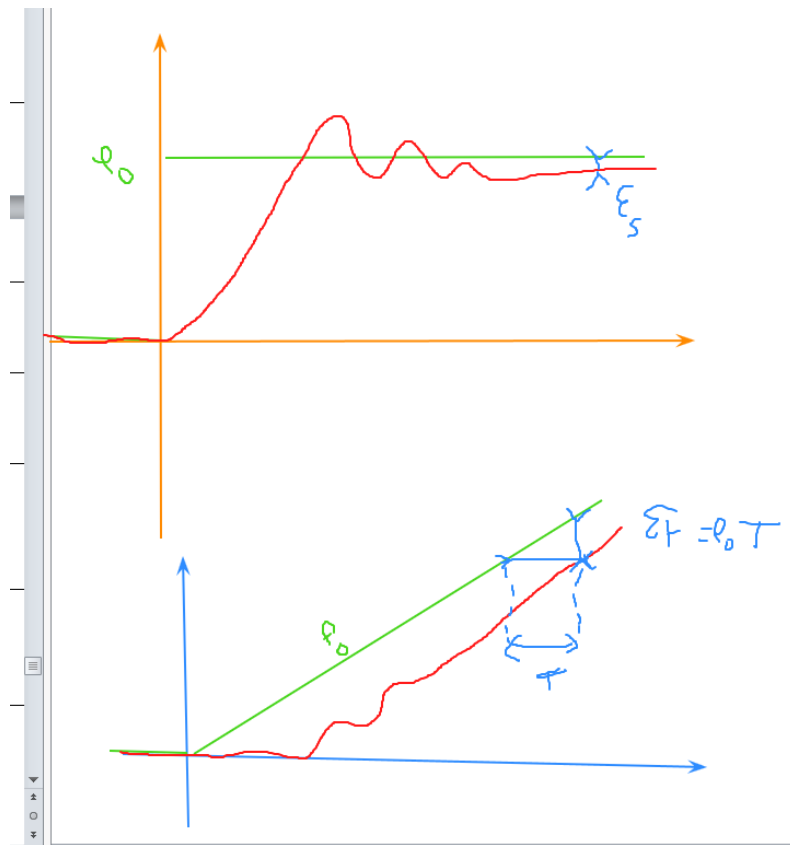
$$\beta(p) = \frac{\beta_0}{p^i}$$

d'où

$$\varepsilon \text{ en régime permanent} = \lim_{p \rightarrow 0} \left(p \frac{1}{1 + \frac{\beta_0}{p^i}} E(p) \right)$$

d'où

Nombre d'intégration <i>i</i> dans la boucle	Erreur statique ε_s	Erreur de traînage ε_t ; retard T
	$e(t) = e_0 h(t)$ $E(p) = \frac{e_0}{p}$ $\varepsilon_s = e_0 \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1 + \frac{\beta_0}{p^i}} \right)$	$e(t) = e_0 t h(t)$ $E(p) = \frac{e_0}{p^2}$ $\varepsilon_t = e_0 \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{1}{p} \frac{1}{1 + \frac{\beta_0}{p^i}} \right)$
0	$\varepsilon_s = \frac{e_0}{1 + \beta_0}$	∞
1	0	$\varepsilon_t = \frac{e_0}{\beta_0}$ $T = \frac{1}{\beta_0}$
2	0	0



Donc la précision est assurée par le nombre d'intégration dans la boucle.

> **1er rôle de l'action intégrale**

4.3- Analyse du rejet de perturbation (Spécification 1)

Même type de calcul

4.3.1-Perturbation de sortie

Fonction régulation S/Ps $S(p)/P_s(p) = 1/(1+B(p))$

La perturbation est rejetée si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (s(t)) = 0$$

ou

$$\lim_{p \rightarrow 0} (p S(p)) = 0$$

or

$$S(p) = \frac{1}{1 + \beta(p)} P_s(p)$$

et pour $p \rightarrow 0$

$$\beta(p) = \frac{\beta_0}{p^i}$$

d'où

$$\lim_{p \rightarrow 0} \left(p \frac{1}{1 + \frac{\beta_0}{p^i}} P_s(p) \right) = 0$$

Pour des perturbations de sortie indicielles

$$P_s(p) = \frac{p_{s0}}{p}$$

D'où

$$p_{s0} \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1 + \frac{\beta_0}{p^i}} \right) = 0$$

Donc pour qu'une perturbation de sortie de type indicielle soit rejetée, il faut qu'il y ait au moins une intégration dans la boucle (soit dans G(p) ou dans C(p)).

Donc si il y a une intégration dans G(p), cela est déjà assuré ;

Si il n'y a pas d'intégration dans G(p), il en faut une dans C(p) .

> 2^{ème} rôle de l'action intégrale

4.3.2-Perturbation de commande Pu(t)

S/Pu : $S(p)/Pu(p) = G(p)/(1+B(p))$

La perturbation est rejetée si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (s(t)) = 0$$

Même type de calcul

ou

$$\lim_{p \rightarrow 0} (p S(p)) = 0$$

or

$$S(p) = \frac{G(p)}{1 + \beta(p)} P_u(p)$$

et pour $p \rightarrow 0$

$$\beta(p) = \frac{\beta_0}{p^i}$$

d'où

$$\lim_{p \rightarrow 0} \left(p \frac{G(p)}{1 + \frac{\beta_0}{p^{\underline{i}}}} P_u(p) \right) = 0$$

$$G(p) = \frac{G_0}{p^{\underline{j}}} \frac{\left(1 + \frac{p}{\omega_{cn1}}\right) \left(1 + \frac{p}{\omega_{cn2}}\right) \dots \left(1 + \frac{p}{\omega_{cn}}\right)}{\left(1 + \frac{p}{\omega_{cd1}}\right) \left(1 + \frac{p}{\omega_{cd2}}\right) \dots \left(1 + \frac{p}{\omega_{cd}}\right)}$$

et pour $p \rightarrow 0$

$$G(p) = \frac{G_0}{p^{\underline{j}}}$$

$$\beta_0 = C_0 * G_0$$

$i=j+k$, j le nombre d'intégration dans $G(p)$ et k nombre d'intégration dans $C(p)$.

Pour des perturbations de commande indicielles

$$P_u(p) = \frac{p_{u0}}{p}$$

D'où

$$p_{u0} \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{G_0}{p^{\underline{j}}}}{1 + \frac{\beta_0}{p^{\underline{i}}}} \right) = 0$$

ou

$$p_{u0} \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{G_0}{p^{\underline{j}} + \frac{\beta_0}{p^{\underline{i}-\underline{j}}}} \right) = 0$$

ou

$$p_{u0} \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{G_0}{\frac{\beta_0}{p^{\underline{i}-\underline{j}}}} \right) = 0$$

ou

$$p_{u0} \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\frac{C_0}{p^{\underline{k}}}} \right) = 0$$

Donc pour qu'une perturbation de commande de type indicielle soit rejetée, il faut qu'il y ait au moins une intégration dans $C(p)$.

Donc globalement, pour qu'une perturbation de type indicielle soit rejetée, il faut qu'il y ait une intégration placée avant son entrée d'application.

> 2^{ème} rôle de l'action intégrale

4.4- Analyse de la stabilité (Spécification 3)

L'étude de la stabilité peut s'effectuer en boucle fermée sur $H(p) = S(p)/E(p) = \beta(p)/(1 + \beta(p))$:

-Méthode 1 : Recherche des pôles de $H(p)$, c'est-à-dire recherche des zéros de $1 + \beta(p) = 0$, autrement dit recherche des zéros de l'équation caractéristique $1 + \beta(p) = 0$. On vérifie que les pôles soient à partie réelle négative. Si c'est le cas, La boucle sera stable.

Cette méthode est vite compliquée si l'ordre de $\beta(p)$ est supérieur ou égal à 3.

Remarque : fonction ZPK.m dans Matlab

-Méthode 2 : Critère de Routh.

À partir des coefficients du polynôme en p de $1 + \beta(p)$, on construit un tableau et on vérifie si les conditions établies par Routh soient vérifiées, ce qui garantit que les pôles soient à partie réelle négative, et donc la stabilité.

Cette méthode est aussi vite compliquée si l'ordre de $\beta(p)$ est supérieur ou égal à 3.

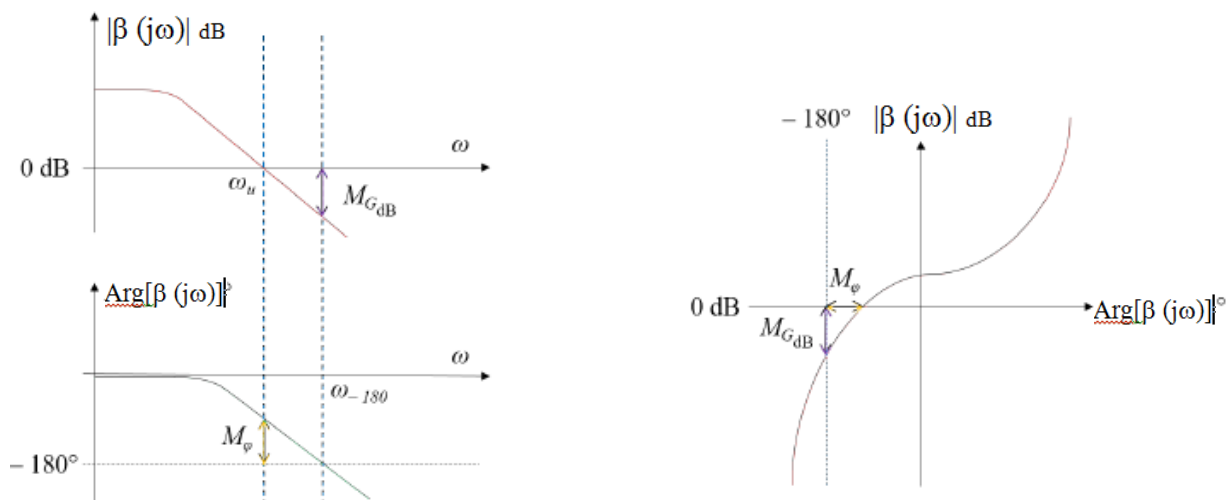
-Méthode 3 : Étude de la stabilité peut s'effectuer en boucle ouverte :

Recherche des zéros de l'équation caractéristique $1 + \beta(p) = 0 \Leftrightarrow \beta(p) = -1$.

En régime sinusoïdal permanent, cela revient à résoudre $\beta(j\omega) = -1$, c'est-à-dire :

$$|\beta(j\omega)| = 1 \text{ ou } |\beta(j\omega)|_{dB} = 0 \text{ dB et } \text{Arg}[\beta(j\omega)] = -180^\circ$$

Donc l'étude de stabilité peut se faire graphiquement en étudiant $\beta(j\omega)$ par rapport au point critique -1, dans le plan de Bode, de Nichols ou complexe.



L'asservissement est stable si :

- à ω_u (pulsation pour laquelle $|\beta(j\omega)| = 1$ ou $|\beta(j\omega)|_{dB} = 0$), on a $|\text{Arg}[\beta(j\omega_u)]| < |-180|$, i.e. la marge de phase $M_\varphi = \text{Arg}[\beta(j\omega_u)] - (-180)$ existe et est supérieure à 0
- à ω_{-180} (pulsation pour laquelle $\text{Arg}[\beta(j\omega)] = -180$), on a $|\beta(j\omega_{-180})|_{dB} < 0$, i.e. la marge de gain $M_{GdB} = 0 - |\beta(j\omega_{-180})|_{dB}$ existe et est supérieure à 0

Degré de stabilité : plus les marges sont grandes, plus le degré de stabilité est important, plus le facteur d'amortissement ζ est grand, plus QdB et D1 faible.

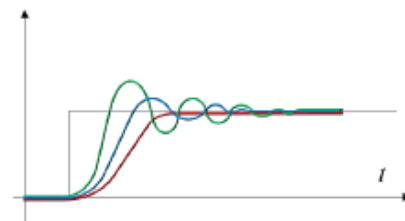
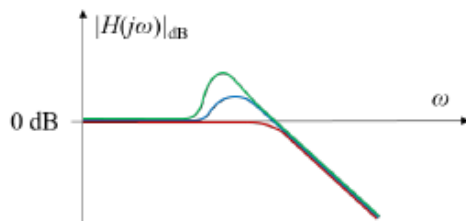
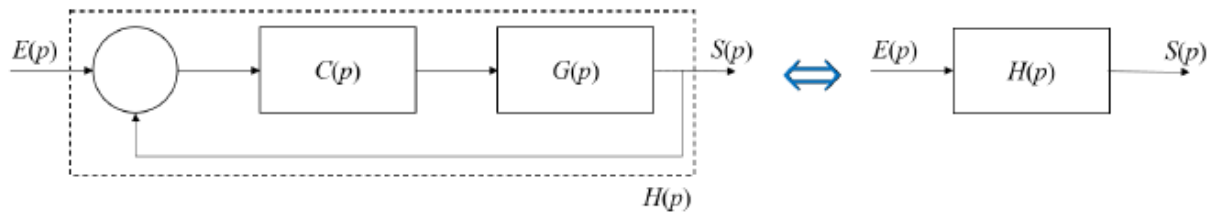
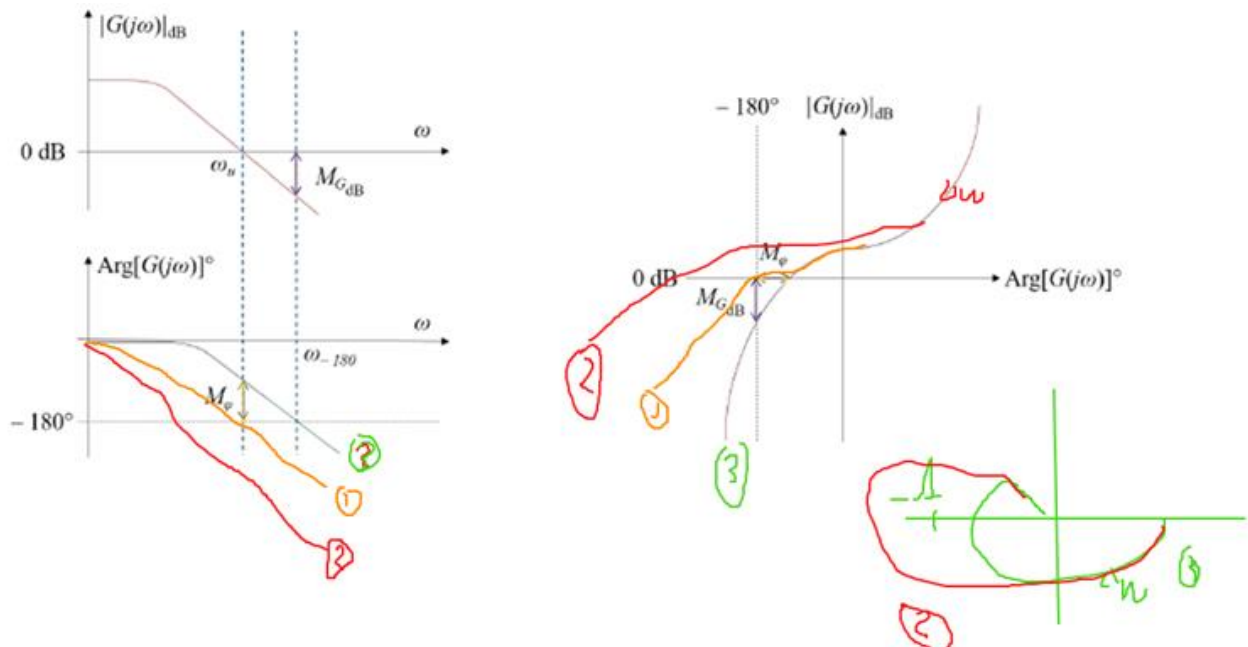
Relation 1^{er} Dépassement / Marge de Phase, Ordre de grandeur :

D_1	M_φ
25 %	45°
10 %	60°

Cas 3 : L'asservissement est stable.

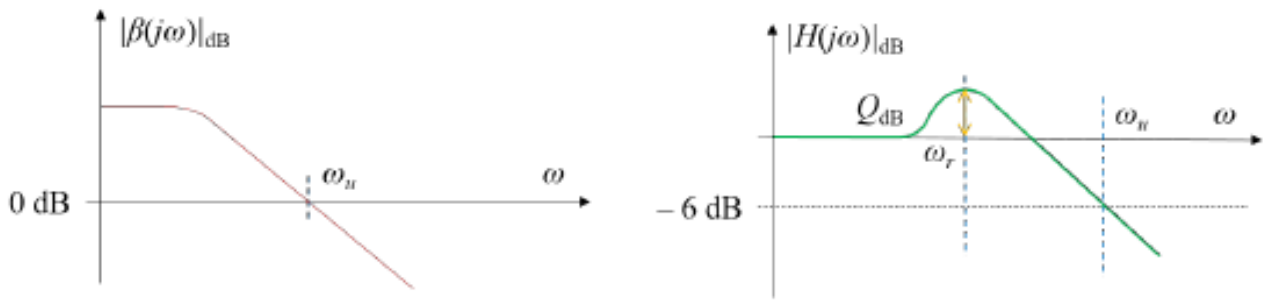
Cas 2 : L'asservissement est instable mais l'oscillation est stable : oscillateur.

Cas 1 : L'asservissement est instable : la sortie diverge.



>pour régler la Marge de Phase : Action avance de phase > Action Dérivée

4.5- Relation boucle ouverte / boucle fermée ; analyse de la rapidité (Spécification 4)



ω_r : pulsation de résonance, ω_H pulsation en gain unité en boucle ouverte \approx pulsation de coupure à - 6 dB en boucle fermée.

Donc en fixant ω_H en boucle ouverte, on fixe la bande-passante de la boucle fermée \Rightarrow on fixe la rapidité de la réponse indicielle \Rightarrow on fixe le temps de réponse à $\pm 5\%$.

On a la relation pour un 2^{ème} ordre : **$\tau = 3/\omega_H$** .

En agissant sur le gain de $\beta(j\omega)$, à travers le gain du correcteur $C(j\omega)$, on fixe ω_H et donc la rapidité :
> Action Proportionnelle.

4.6- Analyse de la sensibilité de la commande et de la saturation (Spécification 5)

Vérifier que $u(t) \leq U_{\text{max admissible}}$

Fonction de sensibilité par rapport à la consigne U/E

$$U(p)/E(p) = C(p)/(1+B(p))$$

Expression du pic de commande :

On a

$$\frac{C(p)}{G(p)}$$

$$\beta(p) = C(p)G(p)$$

$$H(p) = \frac{\beta(p)}{1 + \beta(p)}$$

$$\beta(p) = \frac{\beta_0 \left(1 + \frac{p}{\omega_{cn1}}\right) \left(1 + \frac{p}{\omega_{cn2}}\right) \dots \left(1 + \frac{p}{\omega_{cn}}\right)}{p^i \left(1 + \frac{p}{\omega_{cd1}}\right) \left(1 + \frac{p}{\omega_{cd2}}\right) \dots \left(1 + \frac{p}{\omega_{cd}}\right)}$$

Pic de commande à 0^+

$$u_0 = \lim_{t \rightarrow 0} (u(t))$$

ou

$$u_0 = \lim_{p \rightarrow \infty} (p U(p))$$

Or

$$U(p) = \frac{C(p)}{1 + \beta(p)} E(p)$$

et

$$E(p) = \frac{e_0}{p}$$

d'où

$$u_0 = \lim_{p \rightarrow \infty} \left(p \frac{C(p)}{1 + \beta(p)} E(p) \right)$$

D'où

$$u_0 = e_0 \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{C(p)}{1 + \beta(p)} \right)$$

ou encore

$$u_0 = e_0 \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\frac{1}{C(p)} + G(p)} \right)$$

Or procédé physique toujours du type passe-bas, d'où :

$$u_0 = e_0 \lim_{p \rightarrow \infty} (C(p))$$

**Donc le pic de commande est donné par :
l'amplitude de la consigne * gain haute fréquences du régulateur.**

Il faut assurer : **$u_0 < U_{\max}$ admissible.**

4.7- Analyse du filtrage (Spécification 6)

Afin d'éviter que le bruit sur le signal de commande soit appliqué à l'entrée du procédé, il est souvent nécessaire d'introduire dans le correcteur une action de filtrage en HF.

> Action Filtrage.

5- Commande, Synthèse d'un régulateur

5.1-Principe

L'étude de la commande nous a montré que 4 actions sont nécessaires :

- P : Proportionnelle → fixer ω_u et donc la rapidité
- I : Intégrale → fixer la précision et le rejet des perturbations
- D : Dérivée → fixer le degré de stabilité M_φ et le premier dépassement
- F : Filtrage → filtrer le bruit sur le signal de commande

On écrit directement l'expression temporelle de la commande $u(t)$: $u(t) = C_P \varepsilon(t) + C_I \int \varepsilon(t) dt + C_D \frac{d\varepsilon(t)}{dt} + \dots$

Mais cette approche présente plusieurs inconvénients. En effet, on a une somme des actions, ce qui ne permet pas un réglage découplé des actions : $U(p) = C_P \varepsilon(p) + C_I \frac{\varepsilon(p)}{p} + C_D p \varepsilon(p) + \dots \Leftrightarrow C(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = C_P + \frac{C_I}{p} + C_D p + \dots$

Il faut tronquer l'action intégrale en hautes fréquences

L'intégrateur $\frac{1}{p} = \frac{1}{j\omega}$ apporte un déphasage de -90° à toutes les fréquences, notamment à ω_u . Il faut tronquer l'intégrateur en hautes fréquences, par exemple on multiplie l'intégrateur par $1+p$. On obtient alors la fonction de transfert $\frac{1}{p} (1+p)$.

Dans le cas général, on utilise $C_I(p) = \frac{1 + \frac{p}{\omega_i}}{\frac{p}{\omega_i}}$. Le déphasage apporté par l'intégrateur $C_I(j\omega)$ à la pulsation ω_u est alors de $\text{Arg}[C_I(j\omega_u)] = -90 + \arctan\left(\frac{\omega_u}{\omega_i}\right)$.

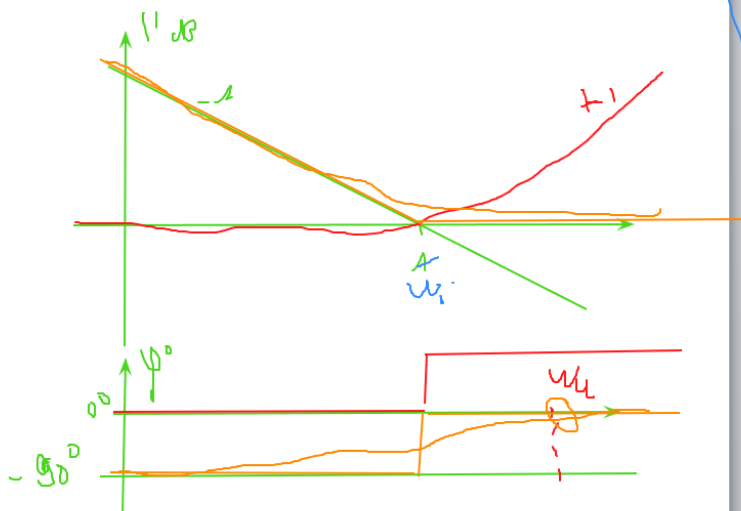
Il faut tronquer l'action dérivée en basses et hautes fréquences

Le dérivateur $p = j\omega$ doit être tronqué en hautes et basses fréquences.

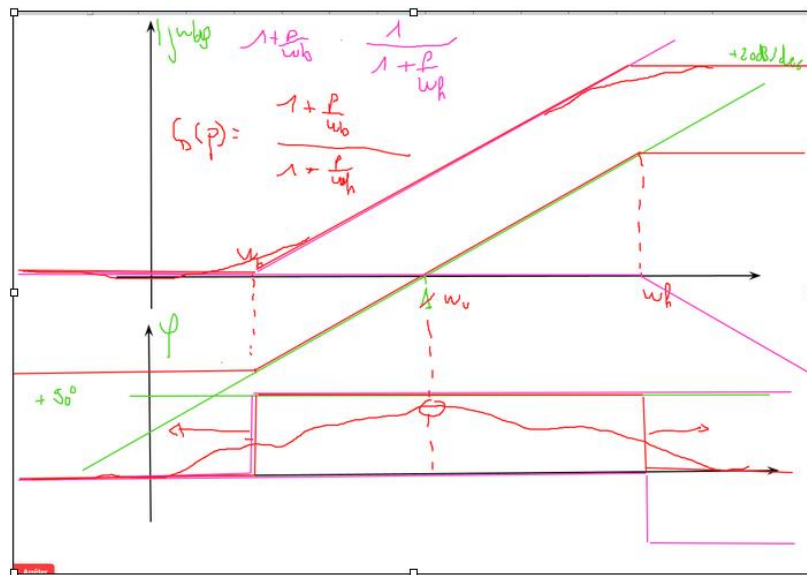
Dans le cas général, on utilise $C_D(p) = \frac{1 + \frac{p}{\omega_h}}{1 + \frac{p}{\omega_l}}$. Ce dérivateur annule l'action intégrale en basses fréquences, et amplifie le bruit en hautes fréquences. De plus, il n'apporte que $+90^\circ$.

$$u(t) : u(t) = C_P \varepsilon(t) + C_I \int \varepsilon(t) dt + C_D \frac{d\varepsilon(t)}{dt} + \dots$$

$$U(p) = C_P \varepsilon(p) + C_I \frac{\varepsilon(p)}{p} + C_D p \varepsilon(p) + \dots \Leftrightarrow C(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = C_P + \frac{C_I}{p} + C_D p + \dots$$



$$\frac{1}{\frac{p}{\omega_i}} \times \left(1 + \frac{p}{\omega_i}\right)$$



Conclusion

Donc pour synthétiser un correcteur PIDF, la synthèse s'effectue dans le domaine fréquentiel ce qui permet un réglage découplé de chaque action, et on utilise la structure suivante :

$$C(p) = C_0 \frac{1 + \frac{p}{\omega_i}}{\frac{p}{\omega_i}} \frac{1 + \frac{p}{\omega_b}}{1 + \frac{p}{\omega_h}} \frac{1}{1 + \frac{p}{\omega_f}}$$

5.2-Commande Proportionnelle

$C(p)=C_0$; 1 seul degré de liberté.

3 possibilités :

- On fixe la rapidité, donc t_r , donc $\omega_u=3/t_r$,

On veut donc $|\beta(j\omega_u)| = 1$ ou $|\beta(j\omega_u)| \text{ dB} = 0\text{dB}$

On en déduit $|C(j\omega_u)G(j\omega_u)| = 1$ ou $|C(j\omega_u)G(j\omega_u)| \text{ dB} = 0\text{dB}$

ou encore $|C_0G(j\omega_u)| = 1$ ou $|C_0G(j\omega_u)| \text{ dB} = 0\text{dB}$

d'où

$$C_0 = \frac{1}{|G(j\omega_u)|}$$

ou $C_0\text{dB} = -|G(j\omega_u)| \text{ dB}$

ou $C_0 = 10^{(C_0\text{dB}/20)}$

et on en déduit la précision ϵ_s et le degré de stabilité ou marge de phase $M\phi = \text{Arg}[G(j\omega_u)] - (-180^\circ)$.

- On fixe le degré de stabilité, donc la marge de phase $M\phi$

On cherche $\omega_u / \text{Arg}[\beta(j\omega_u)] = -180^\circ + M\phi$

c'est-à-dire $\text{Arg}[C_0G(j\omega_u)] = \text{Arg}[G(j\omega_u)] = -180^\circ + M\phi$ (le gain n'affecte pas la phase)

On mesure $|G(j\omega_u)|$

d'où $|C_0G(j\omega_u)| = 1$

$$C_0 = \frac{1}{|G(j\omega_u)|}$$

ou $C_0\text{dB} = -|G(j\omega_u)| \text{ dB}$

et on en déduit la précision ϵ_s et la rapidité ω_u (et $t_r=3/\omega_u$).

- On fixe la précision ou erreur statique dans le cas où $G(p)$ n'a pas d'action intégrale

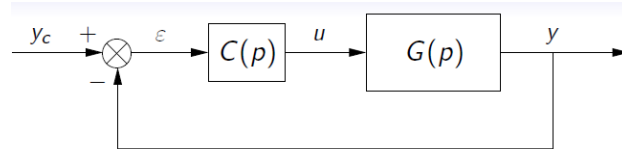
$$\text{On a } \varepsilon_s = \frac{C_0 G_0}{1 + C_0 G_0}$$

D'où C_0

Tracer $|\beta(j\omega)|$ dB et $\text{Arg}[\beta(j\omega)]$

On en déduit ω la rapidité τ_r , et marge de phase $M\phi$.

-Exercice 1, T51 :



1- Fonctions de transfert :

$$\begin{matrix} C(p) \\ G(p) \end{matrix}$$

$$\beta(p) = C(p)G(p)$$

$$\frac{\varepsilon(p)}{y_c(p)} = \frac{1}{1 + \beta(p)}$$

$$\frac{U(p)}{y_c(p)} = \frac{C(p)}{1 + \beta(p)}$$

$$H(p) = \frac{Y(p)}{y_c(p)} = \frac{\beta(p)}{1 + \beta(p)}$$

2- Déterminer la réponse en fréquences $G(j\omega)$

$$G(p) = \frac{35000}{p(1+10p)}$$

$$G(p) = \frac{35000}{p(1 + \frac{p}{0.1})}$$

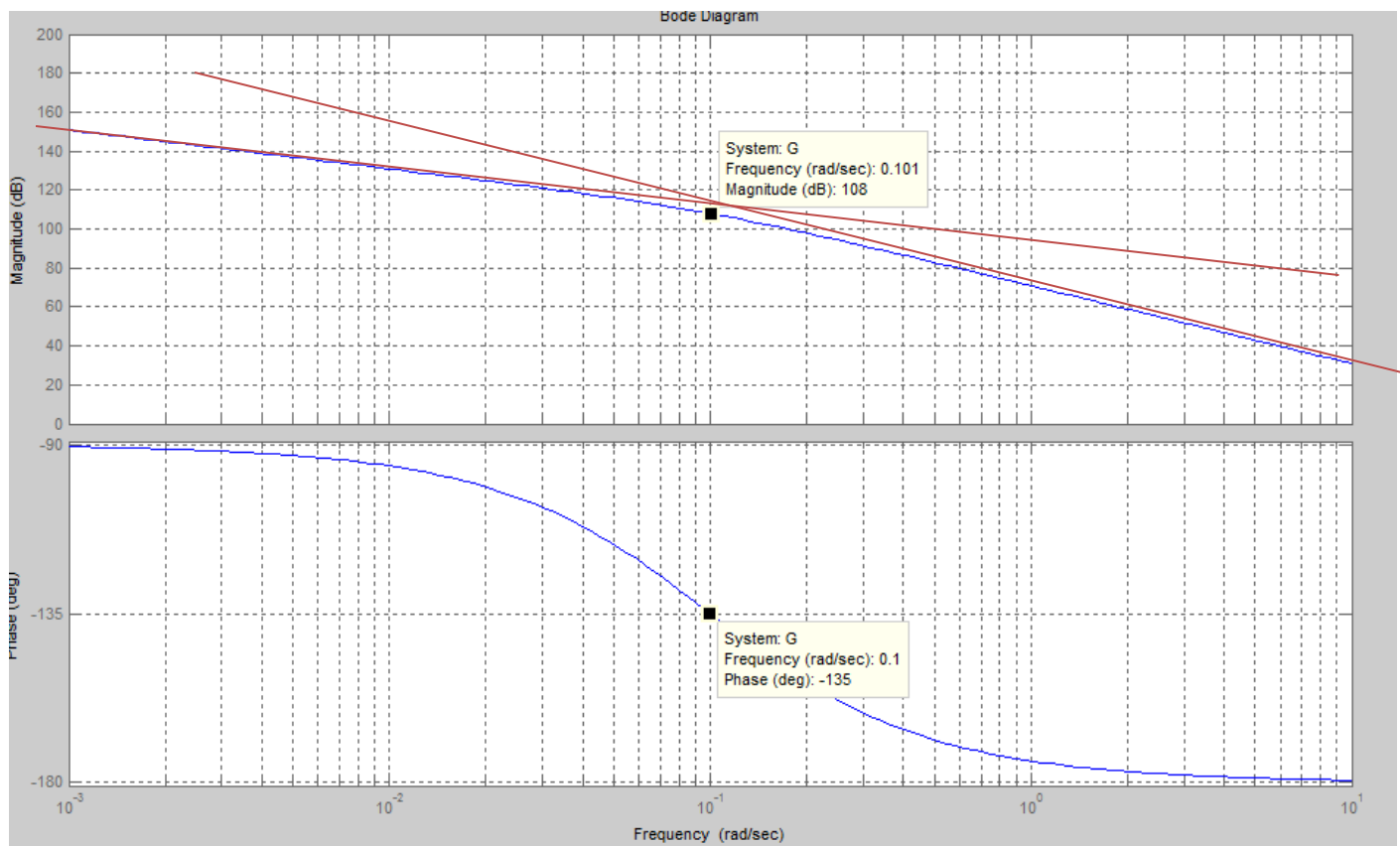
On en déduit la réponse en fréquences :

$$G(j\omega) = \frac{35000}{j\omega(1 + j\frac{\omega}{0.1})}$$

et

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \cdot \log[35000] - 20 \cdot \log[\omega] - 10 \cdot \log[1 + (\frac{\omega}{0.1})^2] \quad \text{avec } 20 \cdot \log[35000] = +91\text{dB}$$

$$\text{Arg}[G(j\omega)]^\circ = -90 - \text{artcg}[\frac{\omega}{0.1}]$$



3-C(p)=C0 ; Déterminer C0 tel que la Marge de Phase soit de 65°

On cherche ω_u / $\text{Arg}[\beta(j\omega_u)] = -180^\circ + M\phi$

$$\Leftrightarrow \text{Arg}[C_0 G(j\omega_u)] = \text{Arg}[G(j\omega_u)] = -180^\circ + M\phi = -115^\circ$$

d'où graphiquement $\omega_u = 0.047 \text{ rad/s}$

$$\text{ou analytiquement : } \text{Arg}[G(j\omega_u)]^\circ = -90 - \text{arctg}\left[\frac{\omega_u}{0.1}\right] = -115^\circ$$

on veut $|C_0 G(j\omega_u)| = 1$

On mesure graphiquement $|G(j\omega_u)| \text{ dB} = +117 \text{ dB}$

ou on calcule analytiquement :

$$|G(j\omega_u)| \text{ dB} = 20 \cdot \log[35000] - 20 \cdot \log[\omega_u] - 10 \cdot \log\left[1 + \left(\frac{\omega_u}{0.1}\right)^2\right]$$

$$\text{d'où } |G(j\omega_u)| = 10^{(117/20)} = 708.10^3$$

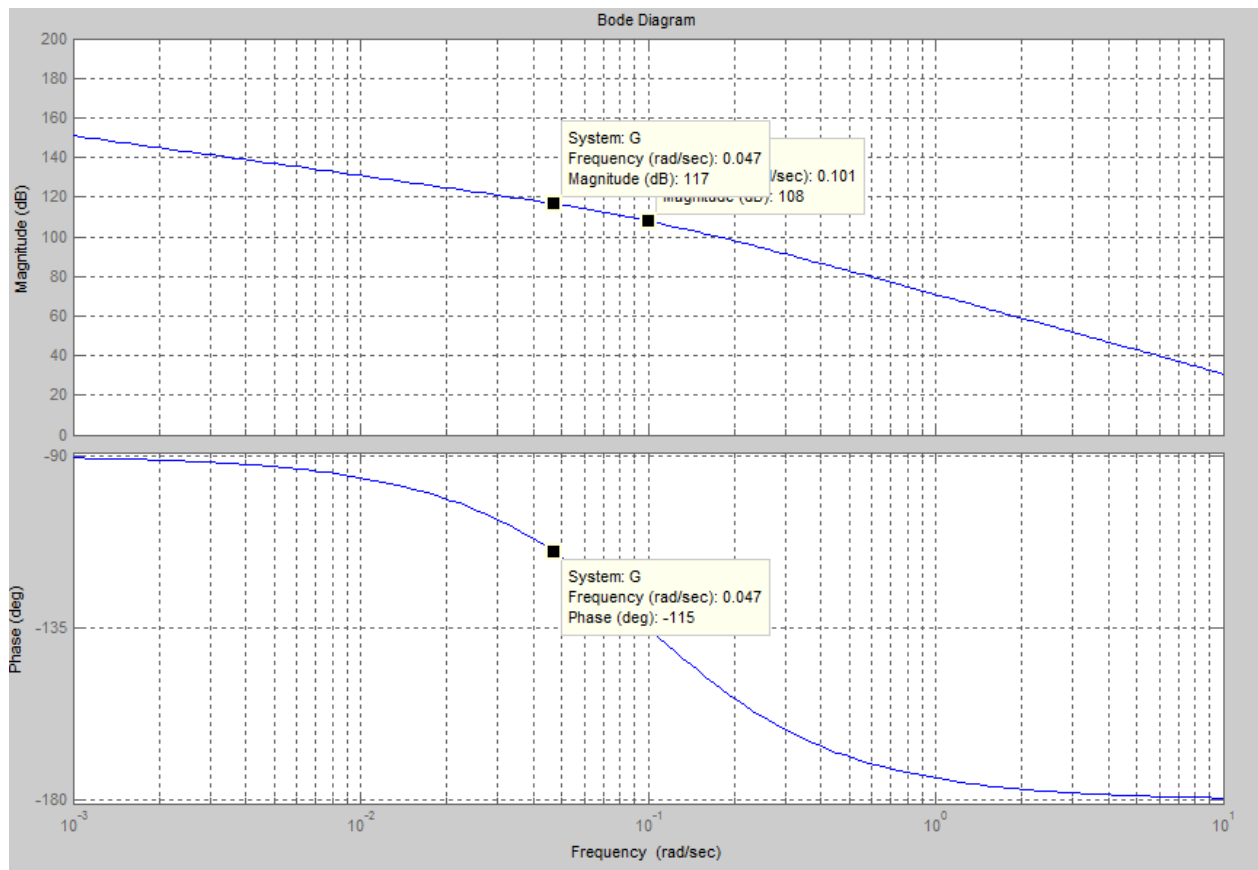
On veut donc à ω_u $|\beta(j\omega_u)| = 1$

On en déduit $|C(j\omega_u)G(j\omega_u)| = 1$

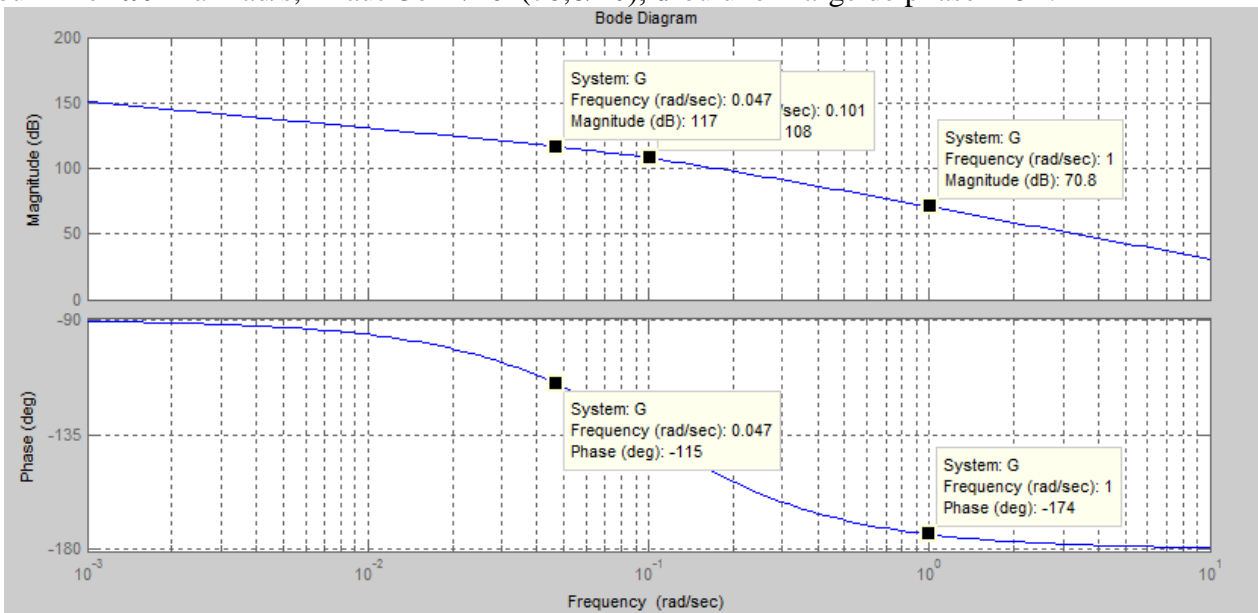
ou encore $|C_0 G(j\omega_u)| = 1$

d'où

$$C_0 = \frac{1}{|G(j\omega_u)|} = 1/708.10^3 = 1,4 \cdot 10^{-6}$$



Si je veux fixer $\omega_u = 1 \text{ rad/s}$, il faut $C_0 = 1/10^{(70,8/20)}$, d'où une Marge de phase = 6° .



4-Déterminer le facteur d'amortissement et la pulsation propre non amortie du système bouclé

$$H(p) = \frac{Y(p)}{yc(p)} = \frac{\beta(p)}{1 + \beta(p)}$$

Donc

$$H(p) = \frac{Y(p)}{yc(p)} = \frac{C_0 G(p)}{1 + C_0 G(p)}$$

$$H(p) = \frac{Y(p)}{yc(p)} = \frac{1}{1 + \frac{p}{C0G0} + \frac{p^2}{0,1C0G0}}$$

or

$$H(p) = \frac{1}{\left(1 + \frac{2 * \xi * p}{\omega_n} + \frac{p^2}{\omega_n^2}\right)}$$

d'où :

$$\frac{2 * \xi}{\omega_n} = \frac{1}{C0G0}$$

et

$$\omega_n^2 = 0,1C0G0$$

d'où

$$\omega_n = \sqrt{0,1C0G0}$$

et

$$\xi = \sqrt{\frac{0,025}{C0G0}}$$

avec :

$$C0=1,4 \cdot 10^{-6}$$

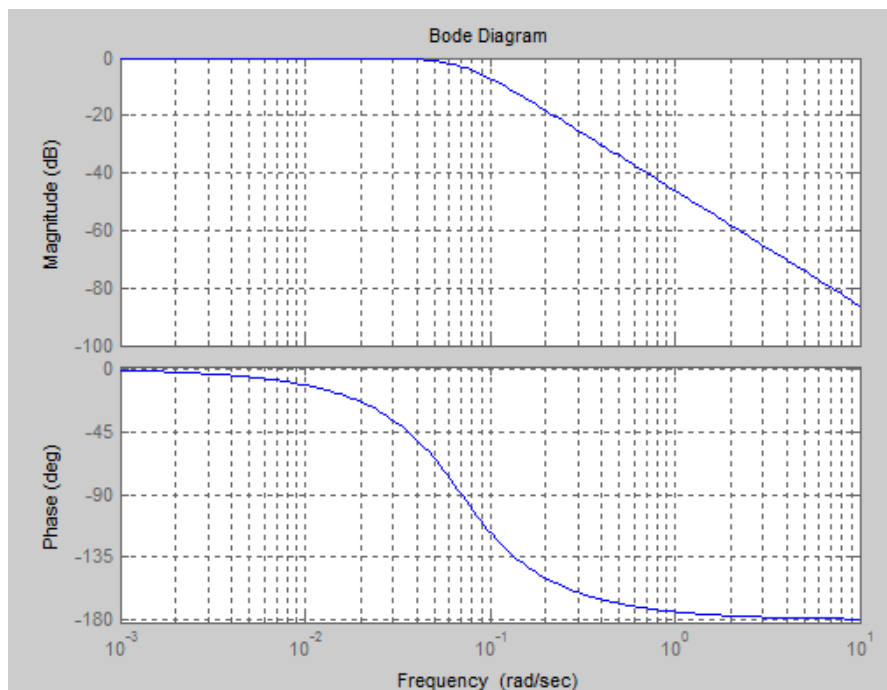
$$G0=35000$$

D'où :

$$\omega_n=0,07 \text{ rad/s}$$

$$\xi=0.71.$$

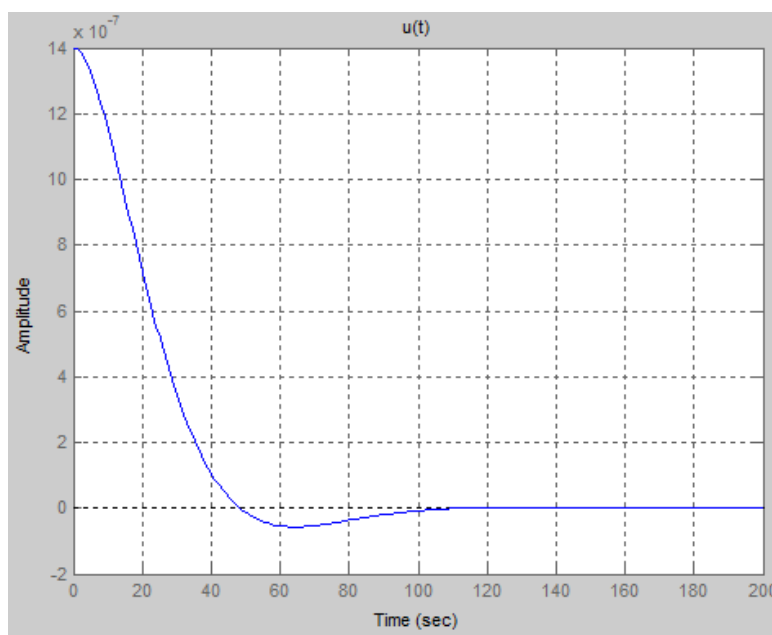
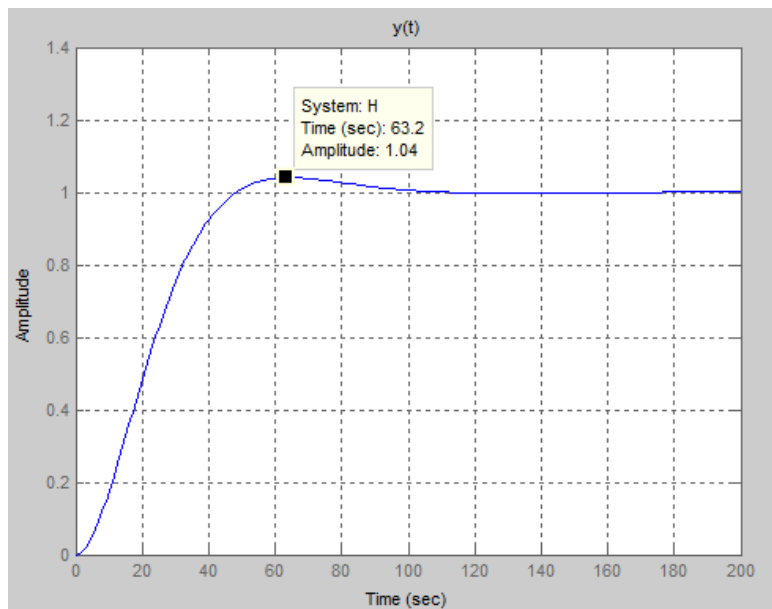
Réponse en fréquences de $H(j\omega)$:



5-Déterminer le régime permanent de la sortie

La boucle comporte une intégration qui est dans le procédé, donc la précision statique est parfaite. Donc pour $yc=20000$, en régime permanent $y(t)=20000$.

6-Tracer la sortie et la commande



7-Déterminer la valeur du 1^{er} dépassement et comparer aux résultats de simulation

On a

(ξ ou z =facteur d'amortissement)

$$D_1 = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 0.042 = 4.2\%$$

8-Une perturbation de commande $d(t)$ agit sur l'entrée du procédé, déterminer les fonctions de transfert $Y(p)/D(p)$, $\varepsilon(p)/D(p)$, $U(p)/D(p)$

Fonction régulation par rapport aux perturbations de commande : $Y(p)/D(p) = G(p)/(1+\beta(p))$

Fonction de sensibilité par rapport aux perturbations de commande : $U(p)/D(p) = -C(p)G(p)/(1+\beta(p))$

$$\frac{\varepsilon(p)}{D(p)} = \frac{-G(p)}{1+\beta(p)}$$

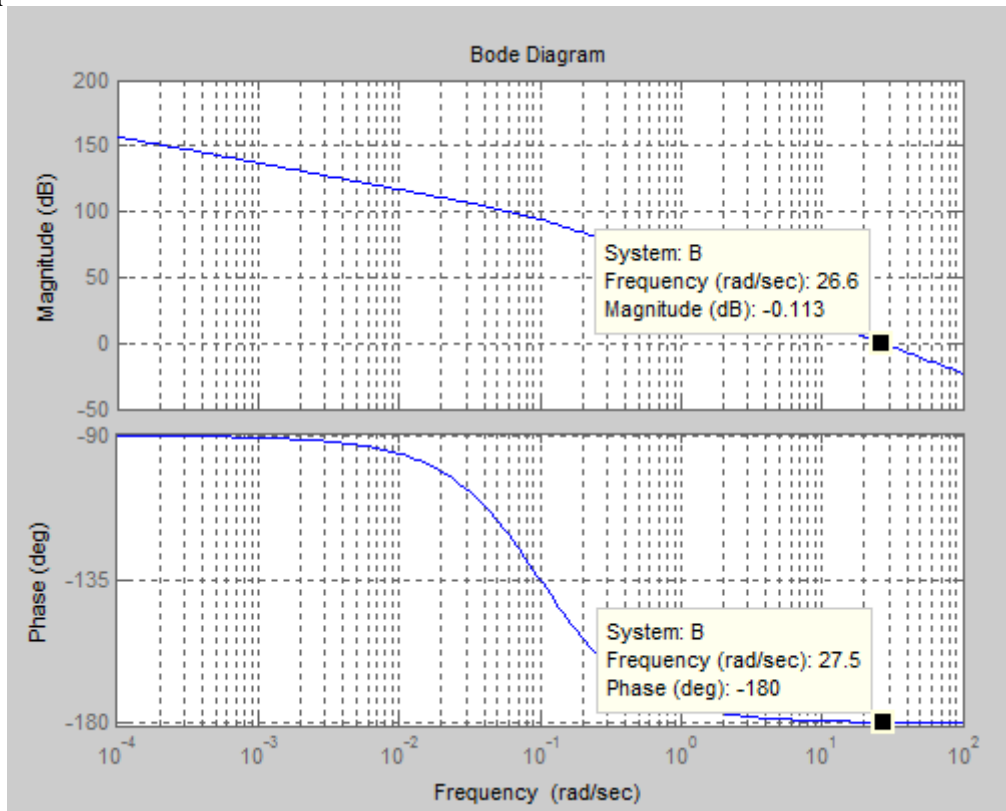
9-Soit $d(t)$, une perturbation de commande indicielle de 0,02 d'amplitude, déterminer le gain C_{0min} permettant d'avoir une erreur statique inférieure en valeur absolue à 0,1. Vérifier la stabilité et les performances du système bouclé. Conclure

$$\varepsilon_s = 0,02 \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\frac{1}{G(p)} + C_0} \right) = 0,02/C_0.$$

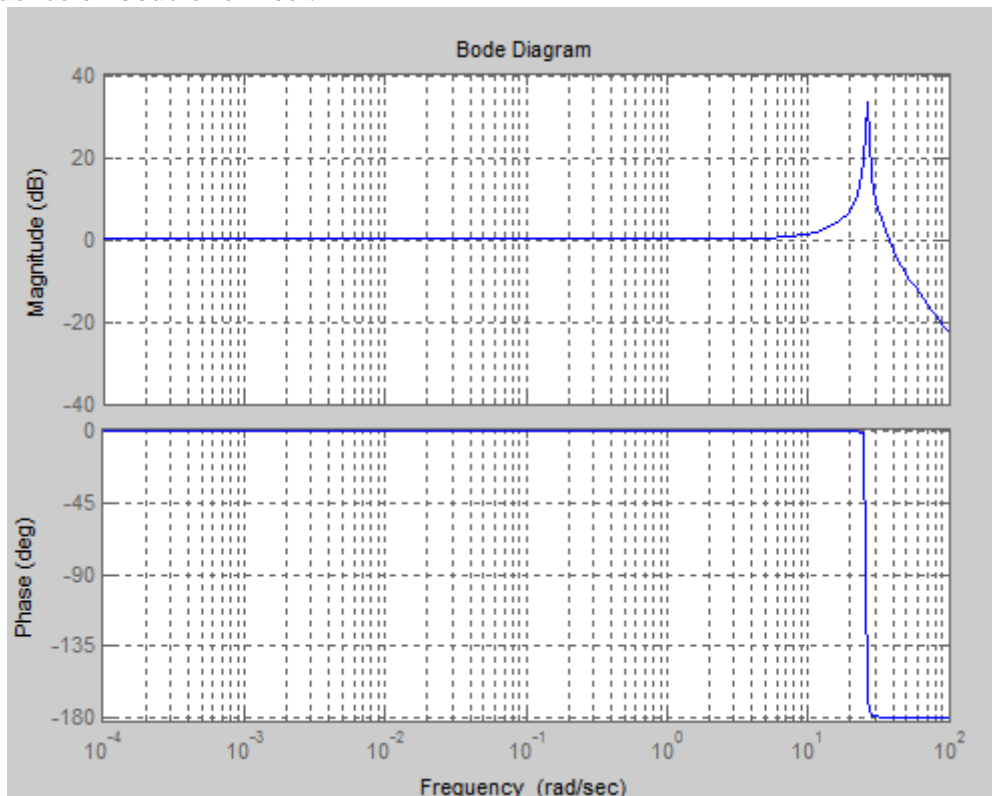
Pour avoir une erreur statique inférieure à 0,1, il faut $C_0 \geq 0,2$.

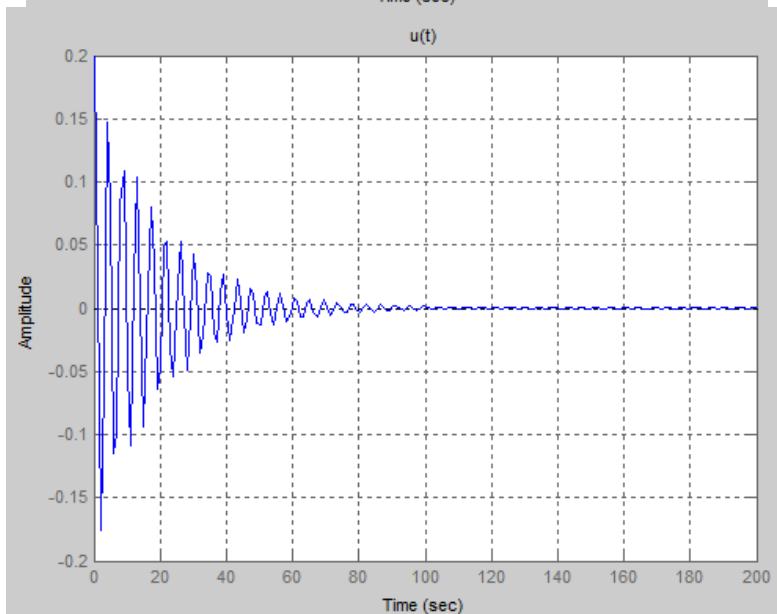
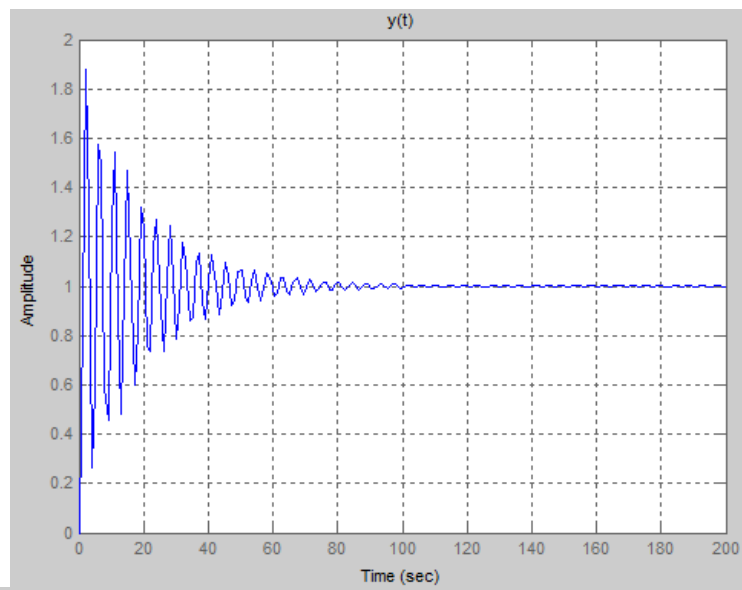
Dans ce cas, pour $C_0=0,2$, on a

Réponse en fréquence en boucle ouverte :



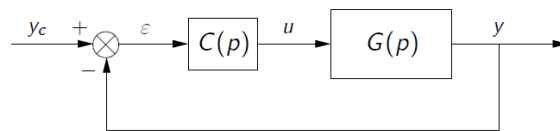
Réponse en fréquence en boucle fermée :





La Marge de phase est quasi nulle, la boucle a un degré de stabilité quasi nulle et la réponse indicielle est très faiblement amortie.

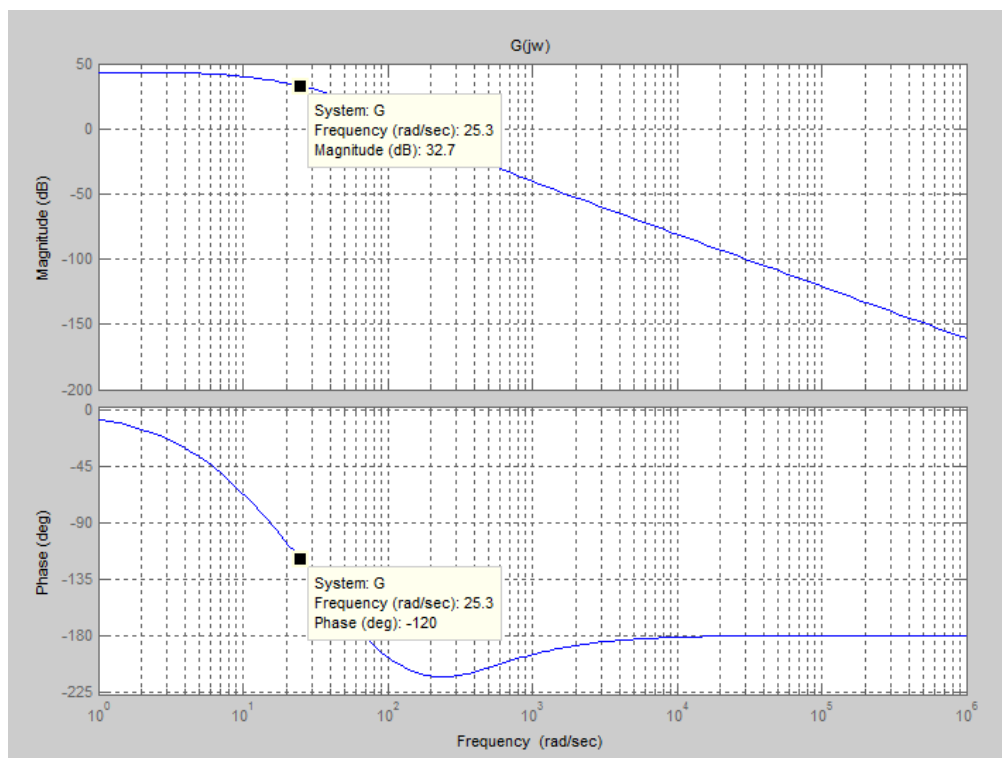
-Exercice 2, T54
Soit

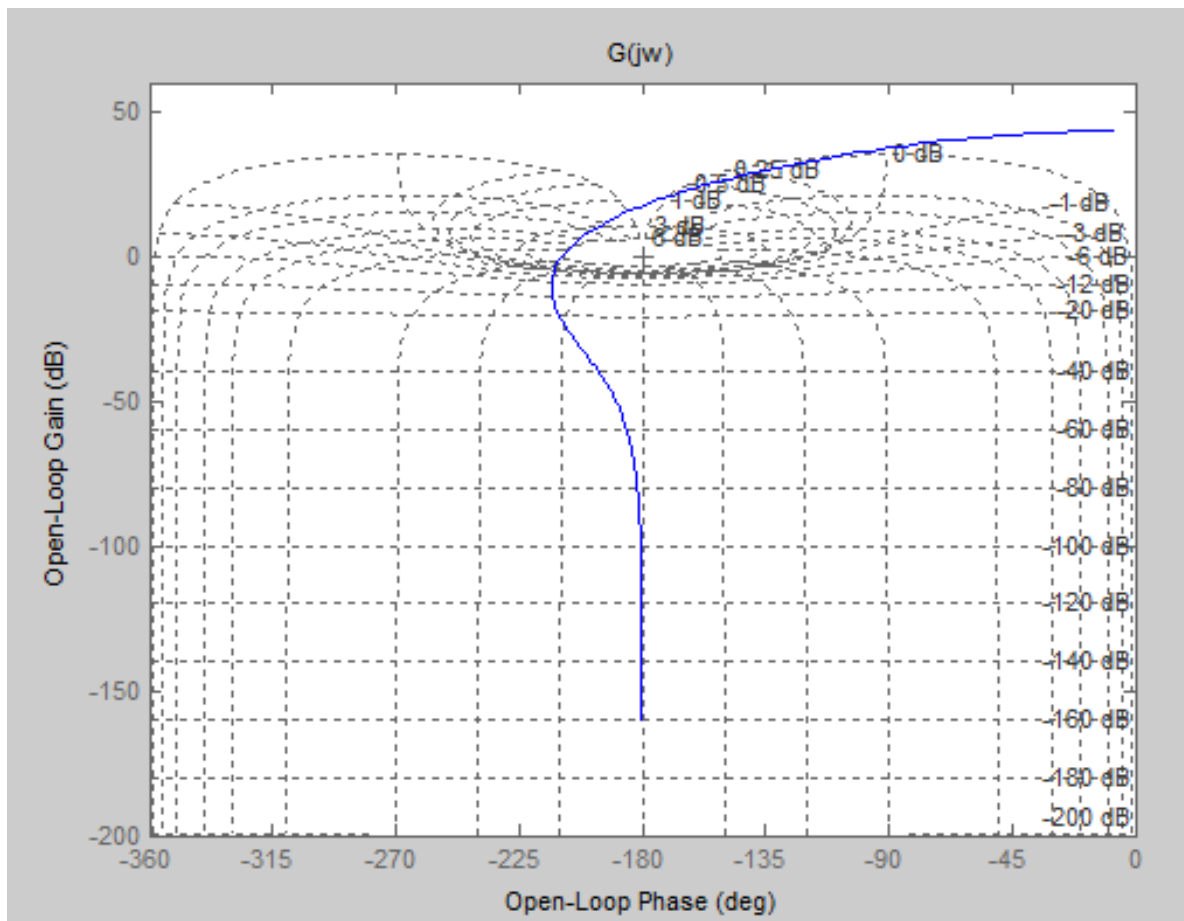


avec

$$G(p) = \frac{150(1 + \frac{p}{400})}{(1 + \frac{p}{10})(1 + \frac{p}{40})(1 + \frac{p}{60})}$$

1- Tracer les diagrammes de Bode et de Nichols de $G(j\omega)$





2-Déterminer le gain C_0 pur avoir une Marge de phase = 60°

On cherche ω / $\text{Arg}[\beta(j\omega)] = -180^\circ + M\phi$

$$\Leftrightarrow \text{Arg}[C_0 G(j\omega)] = \text{Arg}[G(j\omega)] = -180^\circ + M\phi = -120^\circ$$

d'où graphiquement $\omega = 25,3 \text{ rad/s}$

ou analytiquement avec $\text{Arg}[G(j\omega)]^\circ$

on veut $|C_0 G(j\omega)| = 1$

On mesure graphiquement $|G(j\omega)| \text{ dB} = +32,7 \text{ dB}$

ou on calcule analytiquement $|G(j\omega)| \text{ dB}$

$$\text{d'où } |G(j\omega)| = 10^{(32,7/20)} = 43,15$$

On veut donc à ω $|\beta(j\omega)| = 1$

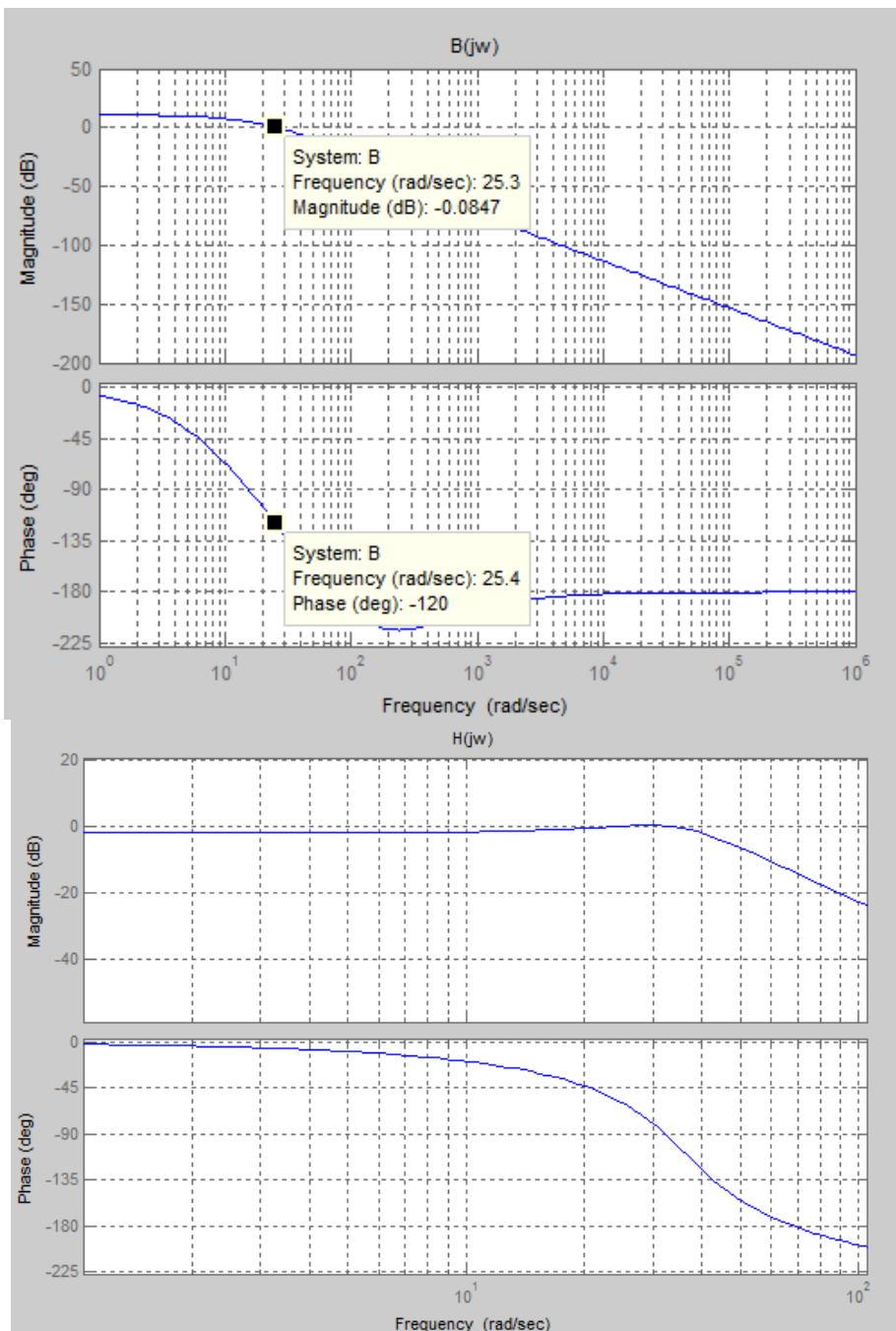
On en déduit $|C(j\omega)G(j\omega)| = 1$

ou encore $|C_0 G(j\omega)| = 1$

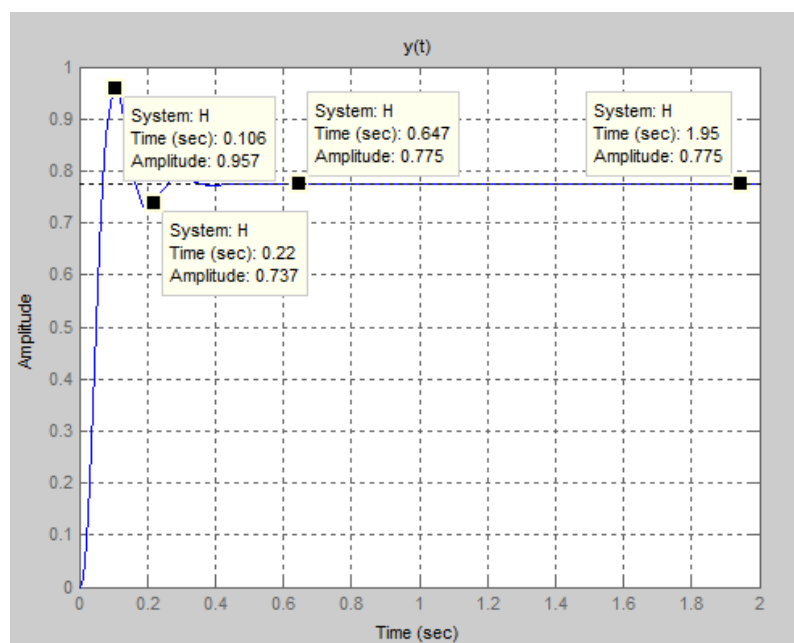
d'où

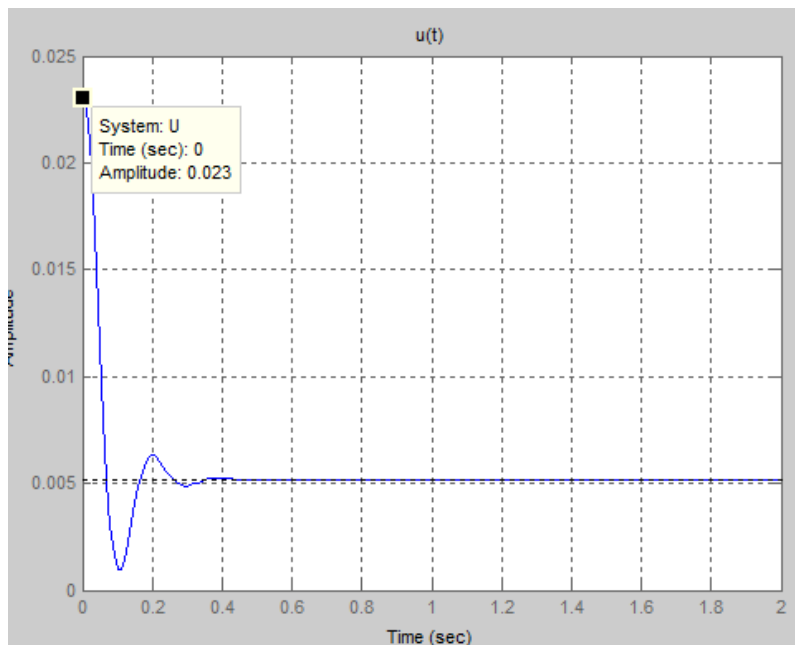
$$C_0 = \frac{1}{|G(j\omega)|} = 1/43,15 = 0,023.$$

3-Vérification Boucle ouverte et boucle fermée



4-



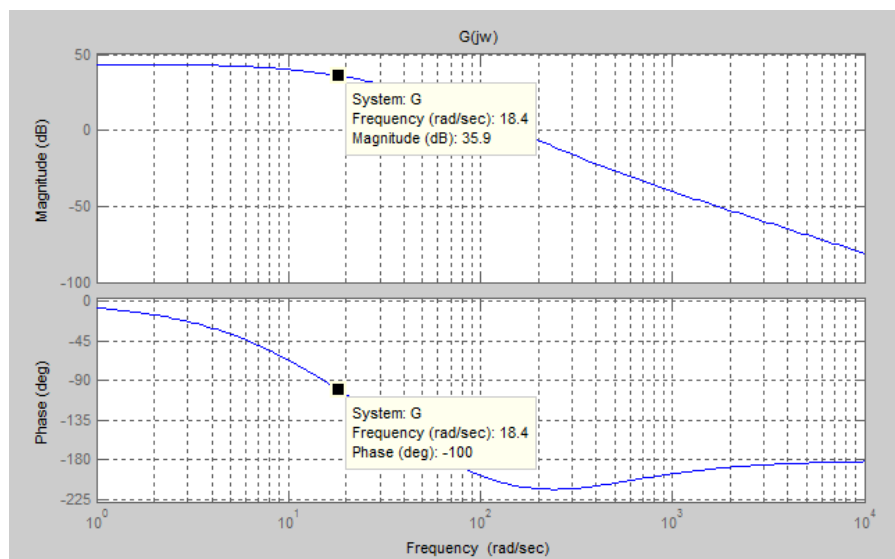


Les résultats peuvent être retrouvés théoriquement.

 $5-\omega_0=18,4 \text{ rad/s}$

Peut-être retrouvée également avec la formule de l'argument de $G(j\omega)$.

$|G(j\omega_0)| \text{ dB} = +35,9\text{dB}$



6- On veut une marge de phase de 60° .

On prend $\omega_u=18,4 \text{ rad/s}$

D'où :

$\text{Arg}[G(j\omega_u)] = -100^\circ$

$|G(j\omega_u)| \text{ dB} = +35,9\text{dB}$, soit $|G(j\omega_u)| = 10^{(35,9/20)} = 62,37$

On veut $\text{Arg}[C(j\omega_u)G(j\omega_u)] = -180^\circ + M\phi = -120^\circ$

On calcule $\text{Arg}[G(j\omega_u)]$

On déduit $\text{Arg}[C(j\omega_u)] = -120^\circ - (-100^\circ) = -20^\circ$

On en déduit ω_i tel que : $\text{Arg}[C(j\omega_u)] = -90^\circ + \text{Actg}(\omega_u/\omega_i) = -20^\circ$; d'où $\omega_i = 6,7 \text{ rad/s}$

Et C_0 tel que

$|C(j\omega_u)G(j\omega_u)| = 1$ ou $|C(j\omega_u)G(j\omega_u)| \text{ dB} = 0\text{dB}$

$$C0. \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega u}{\omega i}\right)^2}}{\frac{\omega u}{\omega i}} |G(j\omega u)| = 1$$

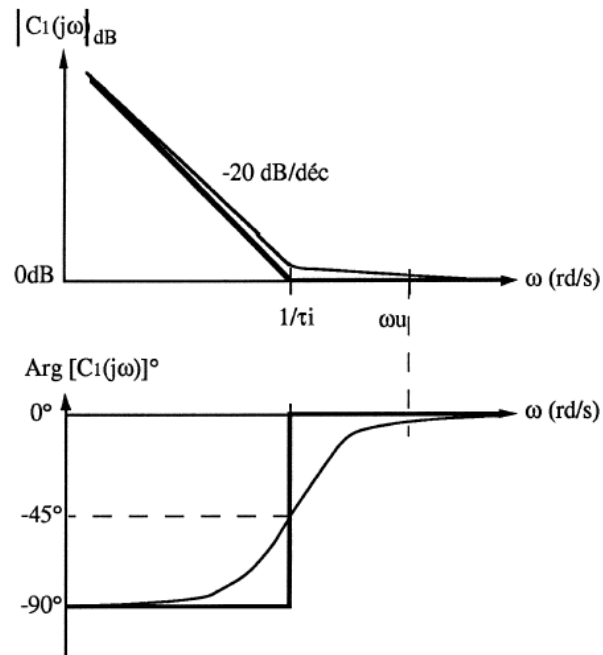
D'où $C0=0.015$.

5.3- Commande PI

Cf document Annexe PIDF.

$$C(p) = C0. \frac{1 + \frac{p}{\omega i}}{\frac{p}{\omega i}}$$

2 paramètres C_0 et ω_i .



Réponse en fréquences :

$$C(j\omega) = C0. \frac{1 + \frac{j\omega}{\omega i}}{\frac{j\omega}{\omega i}}$$

avec

$$|C(j\omega)| = C0. \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega i}\right)^2}}{\frac{\omega}{\omega i}}$$

et

$$\text{Arg}[C(j\omega)] = -90 + \text{Actg}(\omega/\omega i).$$

Plus τ_i est petite, plus ω_i est grande et meilleure est l'action intégrale.

Cependant lorsque $\omega_i = 1/\tau_i$ se déplace vers les hautes fréquences, c'est-à-dire vers ω_u , les courbes de gain et de phase du correcteur PI viennent modifier le gain et la phase de la boucle ouverte autour de ω_u .

Si $\omega_i \text{ reste } < \omega_u/5$ la modification du gain à ω_u pour le PI est pratiquement nulle.

Par contre le PI apporte un retard de phase non négligeable, par exemple :

-26,6° pour $\omega_i = \omega_u/2$,

-11,3° pour $\omega_i = \omega_u/5$,

et -5,7° pour $\omega_i = \omega_u/10$.

Ce retard de phase n'est pas un inconvénient, à condition, d'une part d'en tenir compte lors du calcul du correcteur à avance de phase (correcteur PD) ; d'autre part que le PD puisse apporter l'avance de phase nécessaire afin d'obtenir la marge de phase souhaitée en tenant compte de l'argument du procédé à ω_u et du retard de phase apporté par le PI à ω_u .

$$|\beta(j\omega_u)| = 1 \text{ ou } |\beta(j\omega_u)| \text{ dB} = 0 \text{ dB}$$

$$\text{Arg}[\beta(j\omega_u)] = -180^\circ + M\phi$$

ou

$$|C(j\omega_u)G(j\omega_u)| = 1 \text{ ou } |C(j\omega_u)G(j\omega_u)| \text{ dB} = 0 \text{ dB}$$

$$\text{Arg}[C(j\omega_u)G(j\omega_u)] = -180^\circ + M\phi$$

On connaît ω_u .

3 possibilités

- On choisit ω_i

On en déduit le déphasage apporté par l'intégrateur à ω_u : $\text{Arg}[C(j\omega_u)] = -90^\circ + \text{Actg}(\omega_u/\omega_i)$

On en déduit $\text{Arg}[\beta(j\omega_u)] = \text{Arg}[C(j\omega_u)G(j\omega_u)] = -90^\circ + \text{Actg}(\omega_u/\omega_i) + \text{Arg}[G(j\omega_u)]$

On en déduit la Marge de phase $M\phi = \text{Arg}[\beta(j\omega_u)] - (-180^\circ)$

Et C_0 tel que

$$|C(j\omega_u)G(j\omega_u)| = 1 \text{ ou } |C(j\omega_u)G(j\omega_u)| \text{ dB} = 0 \text{ dB}$$

$$C_0 \cdot \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_u}{\omega_i}\right)^2}}{\frac{\omega_u}{\omega_i}} |G(j\omega_u)| = 1$$

D'où C_0 .

-On fixe le déphasage apporté à ω_u $\text{Arg}[C(j\omega_u)]$

On en déduit ω_i : $\text{Arg}[C(j\omega_u)] = -90^\circ + \text{Arctg}(\omega_u/\omega_i)$

Et C_0 tel que

$$|C(j\omega_u)G(j\omega_u)| = 1 \text{ ou } |C(j\omega_u)G(j\omega_u)| \text{ dB} = 0 \text{ dB}$$

$$C_0 \cdot \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_u}{\omega_i}\right)^2}}{\frac{\omega_u}{\omega_i}} |G(j\omega_u)| = 1$$

-On fixe la Marge de Phase

On déduit $\text{Arg}[C(j\omega_u)G(j\omega_u)] = -180^\circ + M\phi$

On calcule $\text{Arg}[G(j\omega_u)]$

On déduit $\text{Arg}[C(j\omega_u)]$

On en déduit ω_i tel que : $\text{Arg}[C(j\omega_u)] = -90^\circ + \text{Actg}(\omega_u/\omega_i)$

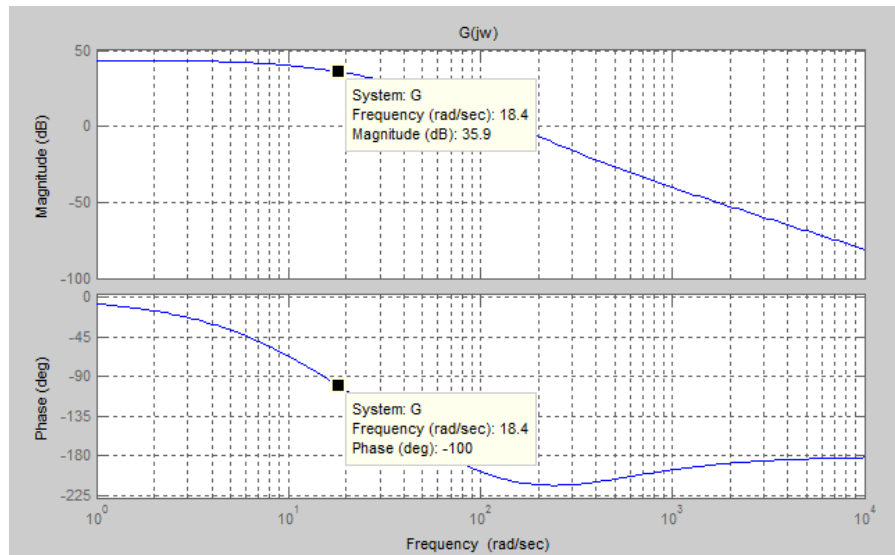
Et C0 tel que

$$|C(j\omega)G(j\omega)| = 1 \text{ ou } |C(j\omega)G(j\omega)| \text{ dB} = 0\text{dB}$$

$$C0. \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega u}{\omega i}\right)^2}}{\frac{\omega u}{\omega i}} |G(j\omega)| = 1$$

-Suite Exercice 2, T54

5-Déterminer la pulsation pour laquelle l'argument du procédé est de -100°



On trouve $\omega_0 = 18,4 \text{ rad/s}$

Peut-être retrouvée également avec la formule de l'argument de $G(j\omega)$.

Et $|G(j\omega_0)| \text{ dB} = +35,9\text{dB}$

6- On veut une marge de phase de 60° à cette pulsation ω_0 , et on veut assurer la précision statique. Déterminer le régulateur C(p) nécessaire.

On a $\omega_0 = 18,4 \text{ rad/s}$

D'où on a :

$$\text{Arg}[G(j\omega)] = -100^\circ$$

$$|G(j\omega)| \text{ dB} = +35,9\text{dB}, \text{ soit } |G(j\omega)| = 10^{(35,9/20)} = 62,37$$

Il faut un régulateur PI.

$$\text{On veut } \text{Arg}[C(j\omega)G(j\omega)] = -180^\circ + M\phi = -120^\circ$$

$$\text{On calcule } \text{Arg}[G(j\omega)]$$

$$\text{On déduit } \text{Arg}[C(j\omega)] = -120^\circ - (-100^\circ) = -20^\circ$$

$$\text{On en déduit } \omega_i \text{ tel que : } \text{Arg}[C(j\omega)] = -90^\circ + \text{Actg}(\omega u / \omega_i) = -20^\circ$$

$$\text{D'où : } \omega_i = \omega u / \text{tg}(70^\circ)$$

$$\text{d'où } \omega_i = 6,7 \text{ rad/s.}$$

Et C0 tel que

$$|C(j\omega)G(j\omega)| = 1 \text{ ou } |C(j\omega)G(j\omega)| \text{ dB} = 0\text{dB}$$

$$C0. \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega u}{\omega i}\right)^2}}{\frac{\omega u}{\omega i}} |G(j\omega)| = 1$$

$$\Leftrightarrow C0. 1,06. 62,37=1$$

$$D'où C0=0.015.$$

7- On veut fixer la rapidité $\omega_u=18,4$ rad/s, et on veut assurer la précision statique.
Déterminer le régulateur C(p) nécessaire.

On a donc $\omega_u=18,4$ rad/s

D'où on a :

$$\text{Arg}[G(j\omega_u)] = -100^\circ$$

$$|G(j\omega_u)| \text{ dB} = +35,9 \text{ dB}, \text{ soit } |G(j\omega_u)| = 10^{(35,9/20)} = 62,37$$

Il faut un régulateur PI.

On fixe ω_i :

$$\omega_i = \omega_u/10$$

On en déduit le déphasage apporté par l'intégrateur à ω_u : $\text{Arg}[C(j\omega_u)] = -90 + \text{Actg}(\omega_u/\omega_i) = -5,7^\circ$

On en déduit $\text{Arg}[\beta(j\omega_u)] = \text{Arg}[C(j\omega_u)G(j\omega_u)] = -90 + \text{Actg}(\omega_u/\omega_i) + \text{Arg}[G(j\omega_u)] = -105,7^\circ$

On en déduit la Marge de phase $M\phi = \text{Arg}[\beta(j\omega_u)] - (-180^\circ) = 74,3^\circ$

$$\Leftrightarrow C0.1. 62,37=1$$

$$D'où C0=1/62,37=0.016.$$

$$\omega_i = \omega_u/2$$

On en déduit le déphasage apporté par l'intégrateur à ω_u : $\text{Arg}[C(j\omega_u)] = -90 + \text{Actg}(\omega_u/\omega_i) = -26,6^\circ$

On en déduit $\text{Arg}[\beta(j\omega_u)] = \text{Arg}[C(j\omega_u)G(j\omega_u)] = -90 + \text{Actg}(\omega_u/\omega_i) + \text{Arg}[G(j\omega_u)] = -126,6^\circ$

On en déduit la Marge de phase $M\phi = \text{Arg}[\beta(j\omega_u)] - (-180^\circ) = 53,4^\circ$

$$C0. \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_u}{\omega_i}\right)^2}}{\frac{\omega_u}{\omega_i}} |G(j\omega_u)| = 1$$

$$\Leftrightarrow C0. 1,12. 62,37=1$$

$$D'où C0=0.013. >\text{plus optimal.}$$

8- On veut fixer la rapidité $\omega_u=70$ rad/s, et on veut assurer la précision statique.
Déterminer le régulateur C(p) nécessaire.

On a donc $\omega_u=70$ rad/s

D'où on a :

$$\text{Arg}[G(j\omega_u)] = -160^\circ$$

$$|G(j\omega_u)| \text{ dB} = +10 \text{ dB}$$

Il faut un régulateur PI.

On fixe ω_i :

$$\omega_i = \omega_u/10$$

On en déduit le déphasage apporté par l'intégrateur à ω_u : $\text{Arg}[C(j\omega_u)] = -90 + \text{Actg}(\omega_u/\omega_i) = -5,7^\circ$

On en déduit $\text{Arg}[\beta(j\omega_u)] = \text{Arg}[C(j\omega_u)G(j\omega_u)] = -90 + \text{Actg}(\omega_u/\omega_i) + \text{Arg}[G(j\omega_u)] = -165,7^\circ$

On en déduit la Marge de phase $M\phi = \text{Arg}[\beta(j\omega_u)] - (-180^\circ) = 14,3^\circ$

Stabilité assurée, mais Marge de phase faible > il faut ajouter un terme avance de phase.

$$\omega_i = \omega_u/2$$

On en déduit le déphasage apporté par l'intégrateur à ω_u : $\text{Arg}[C(j\omega_u)] = -90 + \text{Actg}(\omega_u/\omega_i) = -26,6^\circ$

On en déduit $\text{Arg}[\beta(j\omega_u)] = \text{Arg}[C(j\omega_u)G(j\omega_u)] = -90 + \text{Actg}(\omega_u/\omega_i) + \text{Arg}[G(j\omega_u)] = -186,6^\circ$

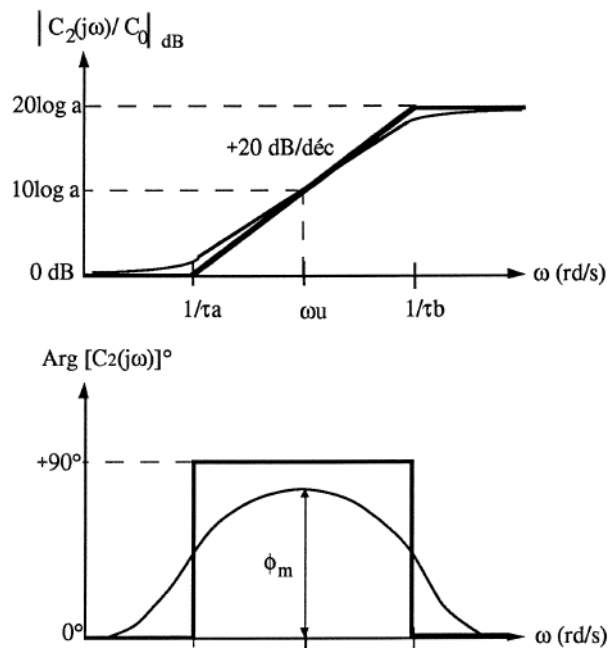
On en déduit la Marge de phase $M\phi = \text{Arg}[\beta(j\omega_u)] - (-180^\circ) = n'$ n'existe pas > boucle instable

il faut ajouter un terme avance de phase.

5.4- Commande PD

$$C(p) = C_0 \frac{1 + \frac{p}{\omega_b}}{1 + \frac{p}{\omega_h}}$$

3 paramètres.



*Caractérisation :

-On a $\omega_h/\omega_b = a$

On choisit ω_u , pulsation au gain unité en boucle ouverte, comme pulsation centrale du régulateur

Dans l'échelle log, on a un écart \sqrt{a} entre les différentes pulsations : $\omega_h/\omega_u = \omega_u/\omega_b = \sqrt{a}$,

d'où :

$$\begin{cases} \omega_b = \omega_u / \sqrt{a} \\ \omega_h = \omega_u \cdot \sqrt{a} \end{cases}$$

-On a
$$\begin{aligned} \phi_m &= \text{Arg}[C(j\omega_u)] = \text{Actg}(\omega_u/\omega_b) - \text{Actg}(\omega_u/\omega_h) \\ &= \text{Actg}(\sqrt{a}) - \text{Actg}(1/\sqrt{a}) \end{aligned}$$

d'où

$$a = \frac{1 + \sin(\phi_m)}{1 - \sin(\phi_m)}$$

-Concernant le module

On a à ω_u :

$$|C(j\omega_u)| = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_u}{\omega_b}\right)^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_u}{\omega_h}\right)^2}}$$

ou

$$|C(j\omega_u)| = \frac{\sqrt{1 + (\sqrt{a})^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2}}$$

ou :

$$|C(j\omega_u)| = \sqrt{a}$$

On a à $\omega \rightarrow \inf$:

$$|C(j\omega_u)| = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega b}\right)^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega h}\right)^2}}$$

$$|C(j\omega_u)| = \sqrt{\left(\frac{\omega h}{\omega b}\right)^2}$$

$$|C(j\omega_u)| = a$$

*Méthodologie de synthèse :

ω_u = pulsation au gain unité désirée (en rd/s),

$\text{Arg}[C(j\omega_u).G(j\omega_u)]^\circ$ = argument de la boucle ouverte désiré (en °) à ω_u désirée, qui dépend de la marge de phase désirée M_ϕ ,

sachant que :

$|C(j\omega_u).G(j\omega_u)|_{dB}$ = module de la boucle ouverte (en dB) à ω_u désirée
= 0 dB par définition,

et deux autres grandeurs sont à mesurer :

$|G(j\omega_u)|_{dB}$ = module du procédé (en dB) à ω_u désirée,

$\text{Arg}[G(j\omega_u)]^\circ$ = argument du procédé (en °) à ω_u désirée.

Les trois paramètres du correcteur τ_a , τ_b et C_0 s'en déduisent alors :

$$\Phi_m = \text{Arg}[C(j\omega_u).G(j\omega_u)]^\circ - \text{Arg}[G(j\omega_u)]^\circ ,$$

$$a = \frac{1 + \sin(\Phi_m)}{1 - \sin(\Phi_m)} ,$$

$$\omega_a = \frac{1}{\tau_a} = \frac{\omega_u}{\sqrt{a}} ,$$

$$\omega_b = \frac{1}{\tau_b} = \omega_u \cdot \sqrt{a} ,$$

Le gain C_0 permet de régler le module de la boucle ouverte corrigée à 0dB pour la pulsation ω_u désirée :

$$|C(j\omega_u).G(j\omega_u)|_{dB} = 20\log[C_0] + 10\log[a] + |G(j\omega_u)|_{dB} = 0dB.$$

$$\begin{cases} \omega_b = \omega_u / \sqrt{a} \\ \omega_h = \omega_u \cdot \sqrt{a} \end{cases}$$

Ou pas en dB :

$$C_0 \cdot \sqrt{a} |G(j\omega_u)| = 1$$

soit :

$$C_0 = \frac{1}{\sqrt{a} |G(j\omega_u)|}$$

-Suite Exercice 2, T54

9- Déterminer $C(p)$ tel que

On veut : $\omega_u = 70 \text{ rad/s}$

Marge de Phase $M\phi = 45^\circ$

Et on a :

$$|G(j\omega_u)|_{dB} = +10dB$$

$$\text{Arg}[G(j\omega_u)] = -160^\circ$$

On veut donc : $|C(j\omega_u)G(j\omega_u)| = 1$ à $\omega_u = 70 \text{ rad/s}$

$$\text{Arg}[C(j\omega_u)G(j\omega_u)] = -180 + 45 = -135^\circ$$

Il faut bien un correcteur PD :

$$C(p) = C_0 \frac{1 + \frac{p}{\omega_b}}{1 + \frac{p}{\omega_h}}$$

D'où :

$$\phi_m = \text{Arg}[C(j\omega_u)] = -135^\circ - (-160^\circ) = +25^\circ$$

$$a = 2,46$$

$$\omega_b = \omega_u / \sqrt{a} = 44,6 \text{ rad/s}$$

$$\omega_h = \omega_u \cdot \sqrt{a} = 109,8 \text{ rad/s}$$

$$|G(j\omega_u)|_{dB} = +10dB, \text{ d'où } |G(j\omega_u)| = 10^{(10/20)} = 3,16$$

$$\text{et } C_0 = \frac{1}{\sqrt{a} |G(j\omega_u)|} = 0,20.$$

*Limitations correcteur PD

- Le maximum théorique d'avance de phase qui peut être apporté par cette structure est $+90^\circ$.

En pratique, on se limite à un maximum d'avance de phase de $+70^\circ$, ceci à cause de l'amplification hautes fréquences du correcteur qui est de : $C0.a$.

Plus l'avance de phase est grande, plus a est grand et plus le gain hautes fréquences du régulateur est important.

D'où :

-amplification du bruit

-augmentation du pic de commande, avec risque de saturation.

L'étude de la sensibilité et du pic de commande nous a montré qu'il faut vérifier que $u(t) \leq U_{\max}$ admissible.

Fonction de sensibilité par rapport à la consigne U/E

$$U(p)/E(p) = C(p)/(1+B(p))$$

Pic de commande à $0+$: $u_0 = \lim_{t \rightarrow 0} (u(t))$

d'où : $u_0 = e_0 \lim_{p \rightarrow \infty} (C(p))$

Donc le pic de commande est donné par :

l'amplitude de la consigne * gain haute fréquences du régulateur.

soit ici : $u(0+) = C0.a. e_0$, e_0 état l'amplitude de l'échelon de consigne.

C'est le critère qui permet de vérifier la validité de la commande, l'optimalité de la commande (choix de w_u , ...).

-Solutions

>pour obtenir des avances de phase plus importante

>et/ou pour limiter le gain haute fréquences du régulateur

Il faut faire n avance de phase identique qui apporte chacune l'avance de phase totale/ n :

$$C(p) = C_0 \left(\frac{1 + \frac{p}{\omega_b}}{1 + \frac{p}{\omega_h}} \right)^n$$

Généralisation des formules :

On veut une avance de phase totale $\phi'_m = \text{Arg}[C(j\omega_u)G(j\omega_u)] - \text{Arg}[G(j\omega_u)] = -180 + M\phi - \text{Arg}[G(j\omega_u)]$

On cherche n tel que $\phi_m = \phi'_m / n < 70^\circ$

d'où $a = \frac{1 + \sin(\phi_m)}{1 - \sin(\phi_m)}$

d'où :
$$\begin{cases} \omega_b = \omega_u / \sqrt{a} \\ \omega_h = \omega_u \cdot \sqrt{a} \end{cases}$$

et $C0. (\sqrt{a})^n |G(j\omega_u)| = 1$

soit :

$$C_0 = \frac{1}{(\sqrt{a})^n |G(j\omega_u)|}$$

et le pic de commande est donné par : $u(0+) = C_0 \cdot a^n \cdot e_0$, e_0 état l'amplitude de l'échelon de consigne.

5.5- Commande PIDF

Méthodologie : Cf paragraphe 3 du document annexe.

-Exemple 1 : Cf paragraphe 3 du document annexe

-Exemple 2 : Cf paragraphe 3 du document annexe

-Calculer le pic de commande avec le régulateur obtenu

On a :

$$C(p) = 0.87 \frac{1 + \frac{p}{2}}{\frac{p}{2}} \frac{1 + \frac{p}{6.90}}{1 + \frac{p}{58.82}} \frac{1}{1 + \frac{p}{200}}$$

D'où : $u(0+) = C_0 \cdot a \cdot e_0$, e_0 état l'amplitude de l'échelon de consigne

$$u(0+) = 0.87 \cdot 8.43 \cdot e_0 = 7.3 \cdot e_0$$

Il faut $u(0+) < U_{\max}$

Si $U_{\max} = 10V$ et si $e_0 = 0.1V$, alors la commande ne sature pas, et $u(0+) = 0.73V >$ sous-optimal

si $e_0 = 1V$, alors la commande ne sature pas, et $u(0+) = 7.3V >$ bien

si $e_0 = 2V$, alors la commande sature, et $u(0+) = 14.6V$; il faut synthétiser un nouveau régulateur.

-Essayer d'optimiser le régulateur

Il faut diminuer $C_0 \cdot a$

*1^{ère} solution :

$$C(p) = C_0 \frac{1 + \frac{p}{\omega_i}}{\frac{p}{\omega_i}} \left(\frac{1 + \frac{p}{\omega_b}}{1 + \frac{p}{\omega_h}} \right)^n \frac{1}{1 + \frac{p}{\omega_f}}$$

$$\omega_i = \omega_u / 10 = 2 \text{ rad/s}$$

$$\omega_f = \omega_u \cdot 10 = 200 \text{ rad/s}$$

$$\phi'_m = 52^\circ$$

$$n = 2$$

$$\phi_m = 26^\circ$$

$$a = 2.56$$

$$\omega_b = 12.5 \text{ rad/s}$$

$$\omega_h = 32 \text{ rad/s}$$

$$C_0 = 0.98$$

$$C_0 = \frac{1}{(\sqrt{a})^n |G(j\omega_u)|}$$

$$C_0 \cdot a^n = 0.98 \cdot (2.56)^2 = 6.41$$

$$u(0+) = C_0 \cdot a^n \cdot e_0 = 6.41 \cdot e_0$$

*2ème solution

$$\omega_i = \omega_u / 10 = 2 \text{ rad/s}$$

$$\omega_f = \omega_u \cdot 10 = 200 \text{ rad/s}$$

$$\phi'_m = 52^\circ$$

$$n=4$$

$$\phi_m = 13^\circ$$

$$a=1,58$$

$$\omega_b = 15,9 \text{ rad/s}$$

$$\omega_h = 25,14 \text{ rad/s}$$

$$C_0 = 1$$

$$C_0 = \frac{1}{(\sqrt{a})^n |G(j\omega_u)|}$$

$$C_0 \cdot a^n = 1 \cdot (1,58)^4 = 6,23$$

$$u(0+) = C_0 \cdot a^n \cdot e_0 = 6,23 \cdot e_0$$

*3ème solution

Diminuer ω_u ou Marge de phase $M\phi$ ou on écarte les actions I et F pour apporter moins de déphasage à ω_u .

On réduit la Marge de phase souhaitée $M\phi = 50^\circ$

$$\omega_i = \omega_u / 10 = 2 \text{ rad/s}$$

$$\omega_f = \omega_u \cdot 10 = 200 \text{ rad/s}$$

$$\phi'_m = \text{Arg}[C(j\omega_u)G(j\omega_u)] - (\text{Arg}[G(j\omega_u)] - 6^\circ - 6^\circ) = -180 + M\phi - (\text{Arg}[G(j\omega_u)] - 6^\circ - 6^\circ) = -130^\circ - (-160^\circ - 6^\circ - 6^\circ) = 42^\circ$$

$$\phi'_m = 42^\circ$$

$$n=2$$

$$\phi_m = 21^\circ$$

$$a = 2,11$$

$$\omega_b = 20 / \sqrt{2,11} = 13,76 \text{ rad/s}$$

$$\omega_h = 20 \cdot \sqrt{2,11} = 29,05 \text{ rad/s}$$

$$C_0 = 1,19$$

$$C_0 \cdot a^n = 1,19 \cdot (2,11)^2 = 5,3$$

$$u(0+) = C_0 \cdot a^n \cdot e_0 = 5,3 \cdot e_0$$

dépasse encore un peu pour $e_0 = 2V$; refaire avec $M\phi = 45^\circ$ ou plus petite.

-On conserve le premier régulateur :

On a :

$$C(p) = 0,87 \frac{1 + \frac{p}{2}}{\frac{p}{2}} \frac{1 + \frac{p}{6,90}}{1 + \frac{p}{58,82}} \frac{1}{1 + \frac{p}{200}}$$

le pic de commande avec le régulateur obtenu

D'où : $u(0+) = C_0 \cdot a \cdot e_0$, e_0 état l'amplitude de l'échelon de consigne

$$u(0+) = 0,87 \cdot 8,43 \cdot e_0 = 7,3 \cdot e_0$$

Il faut $u(0+) < U_{\max}$

Si $U_{\max} = 10V$ et si $e_0 = 1V_{\max}$, alors la commande ne sature pas.

Donc on peut rendre plus performante la commande :

Action intégrale plus rapide, mais apportera plus de déphasage à ω_u

Action de filtrage plus tôt, mais apportera plus de déphasage à ω_u

1^{er} dépassement plus faible, donc meilleur degré de stabilité, donc Marge de phase plus grande

Temps de réponse plus faible, donc ω_u plus grande, mais $\text{Arg}[G(j\omega_u)]$ plus grand

Tous ces points conduiront à une avance de phase plus grande

Exemple :

$$\omega_i = \omega_u / 5 = 4 \text{ rad/s (doublée, mais déphasage apporté à } \omega_u \text{ sera de } -11,3^\circ$$

$$\omega_f = \omega_u \cdot 10 = 200 \text{ rad/s}$$

$$\phi'_m = \text{Arg}[C(j\omega_u)G(j\omega_u)] - (\text{Arg}[G(j\omega_u)] - 11,3^\circ - 5,7^\circ) = -180^\circ + M\phi - (\text{Arg}[G(j\omega_u)] - 11,3^\circ - 5,7^\circ) = -120^\circ - (-160^\circ - 11,3^\circ - 5,7^\circ) = 57,3^\circ$$

$$\phi'_m = 57,3^\circ$$

$$n=1$$

$$\phi_m = 57,3^\circ$$

$$a=11,6$$

$$\text{sqrt}(a)=3,41$$

$$\omega_b = 20/(3,41) = 5,86 \text{ rad/s}$$

$$\omega_h = 20 \cdot (3,41) = 68,2 \text{ rad/s}$$

$$C_0 = 0,74$$

$$C_0 = \frac{1}{(\sqrt{a})^n |G(j\omega_u)|}$$

$$C_0 \cdot a^n = 0,74 \cdot (11,6)^1 = 8,58$$

$$u(0+) = C_0 \cdot a^n \cdot e_0 = 8,58 \cdot e_0$$

Amélioration du pic de commande :

Il faut diminuer $C_0 \cdot a$

* 1^{ère} solution :

$$C(p) = C_0 \frac{1 + \frac{p}{\omega_i}}{\frac{p}{\omega_i}} \left(\frac{1 + \frac{p}{\omega_b}}{1 + \frac{p}{\omega_h}} \right)^n \frac{1}{1 + \frac{p}{\omega_f}}$$

$$\omega_i = \omega_u / 5 = 4 \text{ rad/s}$$

$$\omega_f = \omega_u \cdot 10 = 200 \text{ rad/s}$$

$$\phi'_m = 57,3^\circ$$

$$n=2$$

$$\phi_m = 28,65^\circ$$

$$a=2,84$$

$$\text{sqrt}(a)=1,68$$

$$\omega_b = 11,90 \text{ rad/s}$$

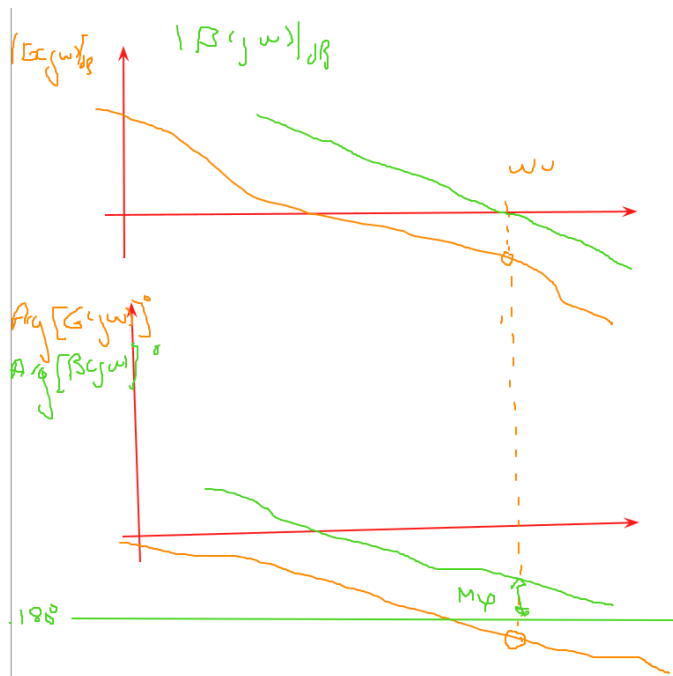
$$\omega_h = 33,6 \text{ rad/s}$$

$$C_0 = 1/((1,68^2) \cdot 10^{(-8/20)}) = 0,88$$

$$C_0 = \frac{1}{(\sqrt{a})^n |G(j\omega_u)|}$$

$$C_0 \cdot a^n = 0,88 \cdot (2,84)^2 = 7,09$$

$$u(0+) = C_0 \cdot a^n \cdot e_0 = 7,09 \cdot e_0$$



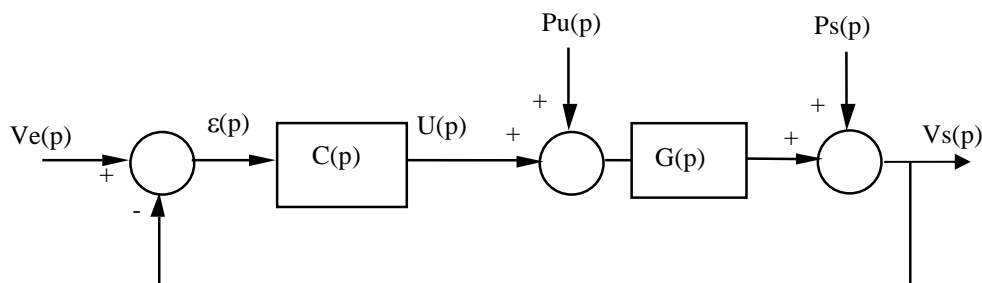
- Exercice 3

L'objectif de ce travail est d'effectuer la commande en position d'un des moteurs à courant continu d'un système à retour haptique. L'asservissement de position est défini par le schéma fonctionnel suivant, où $G(p)$ est le modèle du procédé (ensemble hâcheur + moteur + charge + capteur de position) et $C(p)$ un correcteur cascade. $G(p)$ est défini par la fonction de transfert suivante :

$$G(p) = \frac{4}{p(1 + \frac{p}{10})(1 + 10^{-2} p)}$$

1ère Partie -

Le schéma de commande est le suivant :



Le cahier des charges impose les performances suivantes :

- en régulation,
 - . un rejet des perturbations avec un temps de réponse à +/- 5%, t_r , de 0,4s
 - . un rejet des perturbations de sortie $p_s(t)$
 - . un rejet des perturbations de commande $p_u(t)$
- en asservissement,
 - . un premier dépassement de l'ordre de 20%
 - . une précision statique parfaite.

1.1 - Etude du rejet des perturbations de sortie ($V_e(p)=0$)

Décrire, sans calcul, l'évolution de la sortie lorsqu'une perturbation de sortie de type échelon se produit ($p_s(t)$ = échelon d'amplitude p_{s0}). Pour cela :

- . Donner la fonction de transfert $V_s(p)/P_s(p)$.
- . Déterminer le régime permanent de $v_s(t)$.
- . Conclure sur le rejet des perturbations de sortie.

1.2 - Etude du rejet des perturbations de commande ($V_e(p)=0$)

Décrire, sans calcul, l'évolution de la sortie lorsqu'une perturbation de commande de type échelon se produit ($p_u(t) = \text{échelon d'amplitude } p_{u0}$). Pour cela :

- . Donner la fonction de transfert $V_s(p)/P_u(p)$.
- . Déterminer le régime permanent de $v_s(t)$.
- . Conclure sur le rejet des perturbations de commande.

1.3 - Etude de la précision

Déterminer sans calcul, en fonction de C_0 , le gain statique de $C(p)$:

- . la valeur de l'erreur statique ($v_e(t) = \text{échelon d'amplitude } v_{e0}$).
- . les expressions de l'écart de traînage et du retard ($v_e(t) = \text{rampe de pente } v_{e0}$).

1.4 - Etude de la correction

- . Déterminer ω_u .
- . Tracer les diagrammes asymptotiques de Bode de $G(j\omega)$.
- . Tracer le diagramme asymptotique du lieu de Nichols de $G(j\omega)$.
- . Déterminer $|G(j\omega_u)|_{dB}$ et $\text{Arg}[G(j\omega_u)]^\circ$, le module et l'argument de $G(j\omega)$ à ω_u .
- . Compte-tenu des réponses aux questions 1.1, 1.2 et 1.3, donner la structure du correcteur minimal nécessaire
- . Déterminer le régulateur $C(p)$.

1.5 - Etude de la sensibilité de l'entrée

L'entrée du procédé est limitée à $\pm 10V$. Il faut s'assurer que la commande ne sature pas. Pour cela :

- . Etablir la fonction de sensibilité relative à l'entrée $U(p)/V_e(p)$.
- . Vérifier si la commande sature dans le cas d'un échelon de consigne de 0,1V (petits déplacements).
- . Vérifier si la commande sature dans le cas d'un échelon de consigne de 1V (grands déplacements).

1.6 - Conclusion

- . Conclure sur la loi de commande précédente.
- . Proposer d'éventuelles modifications ou améliorations de la loi de commande et de $C(p)$.

2ème Partie -

On souhaite maintenant obtenir un temps de réponse à $\pm 5\%$, t_{r2} , deux fois plus petit, de 0,2s.

2.1 - Etude de la correction

- . Déterminer ω_{u2} .
- . Déterminer $|G(j\omega_{u2})|_{dB}$ et $\text{Arg}[G(j\omega_{u2})]^\circ$, le module et l'argument de $G(j\omega)$ à ω_{u2} .
- . Donner la structure du correcteur le plus optimal nécessaire.
- . Déterminer le régulateur $C_2(p)$.

2.2 - Etude de la sensibilité de l'entrée

- . Vérifier si la commande sature dans le cas d'un échelon de consigne de 0,1V (petits déplacements).
- . Vérifier si la commande sature dans le cas d'un échelon de consigne de 1V (grands déplacements).

2.3 - Conclusion

- . Conclure sur la loi de commande précédente.

$$G(j\omega) = \frac{4}{j\omega(1 + j\frac{\omega}{10})(1 + j\frac{\omega}{100})}$$

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20.\log[4] - 20.\log[\omega] - 10.\log\left[1 + \left(\frac{\omega}{10}\right)^2\right] - 10.\log\left[1 + \left(\frac{\omega}{100}\right)^2\right]$$

$$Arg[G(j\omega)]^\circ = -90 - \text{artcg}\left[\frac{\omega}{10}\right] - \text{artcg}\left[\frac{\omega}{100}\right]$$

A $\omega_u = 7,5 \text{ rad/s}$

$$|G(j\omega_u)|_{dB} = -7,42 \text{ dB} \text{ ou } |G(j\omega_u)| = 0,43$$

$$Arg[G(j\omega_u)]^\circ = -131^\circ$$

On veut $\omega_u = 7,5 \text{ rad/s}$

et marge de phase de 45° , donc Arg de la boucle ouverte à ω_u de -135°

minimal : PI et marge de phase de $45^\circ > \text{PI}$ suffit