CC81IART - Intelligence Artificielle

Cours 02 : la logique, les logiques, la programmation logique

Pierre-Alexandre FAVIER

Ecole Nationale Supérieure de Cognitique

IPB
E N S C
BORDEAUX

Plan

1. Introduction

Plan

1. Introduction
2. La logique aristotélique

Plan

1. Introduction
2. La logique aristotélique
3. La logique des propositions

Plan

Plan

Etymologie

$\lambda o \gamma o \sigma$: la parole, la raison

- parole : loghorée, logotype, syllogisme...

Etymologie

$\lambda o \gamma o \sigma$: la parole, la raison

- parole : loghorée, logotype, syllogisme…
- raison : analogie, logiciel, psychologie, étymologie…

Etymologie

$\lambda o \gamma o \sigma$: la parole, la raison

- parole : loghorée, logotype, syllogisme…
- raison : analogie, logiciel, psychologie, étymologie…
- corpus : mythologie, œnologie, généalogie…

Etymologie

$\lambda o \gamma o \sigma$: la parole, la raison

- parole : loghorée, logotype, syllogisme…
- raison : analogie, logiciel, psychologie, étymologie…
- corpus : mythologie, œnologie, généalogie…
- "abus" : scientologie, sofrologie…

Propos

- assurer la cohérence du discours / de la pensée

Propos

- assurer la cohérence du discours / de la pensée
- validité du raisonnement (pas de contradiction)

Propos

- assurer la cohérence du discours / de la pensée
- validité du raisonnement (pas de contradiction)
- vérité du propos (découverte d'énoncés vrais)

Propos

- assurer la cohérence du discours / de la pensée
- validité du raisonnement (pas de contradiction)
- vérité du propos (découverte d'énoncés vrais)

$\Rightarrow$ recherche de la vérité

La vérité

- Cherchez l'intrus : qu'est-ce qui est vrai ?
  - mon amour des fraises
  - mon pantalon
  - ma rencontre avec Batman

La vérité

- Cherchez l'intrus : qu'est-ce qui est vrai ?
  - mon amour des fraises
  - mon pantalon
  - ma rencontre avec Batman
- vérité *formelle* (correction de l'énoncé)

La vérité

- Cherchez l'intrus : qu'est-ce qui est vrai ?
  - mon amour des fraises
  - mon pantalon
  - ma rencontre avec Batman
- vérité *formelle* (correction de l'énoncé)
- vérité *matérielle* (adéquation de l'énoncé)

La vérité

- Cherchez l'intrus : qu'est-ce qui est vrai ?
  - mon amour des fraises
  - mon pantalon
  - ma rencontre avec Batman
- vérité *formelle* (correction de l'énoncé)
- vérité *matérielle* (adéquation de l'énoncé)

Les deux formes étaient confondues dans l'antiquité (un énoncé correct révélait une proposition adéquate)

La vérité

- Cherchez l'intrus : qu'est-ce qui est vrai ?
  - mon amour des fraises
  - mon pantalon
  - ma rencontre avec Batman
- vérité *formelle* (correction de l'énoncé)
- vérité *matérielle* (adéquation de l'énoncé)

Les deux formes étaient confondues dans l'antiquité (un énoncé correct révélait une proposition adéquate)
$\Rightarrow$ étude des systèmes formels

Problématique

- Comment définit-on des ensembles de formules ?

Problématique

- Comment définit-on des ensembles de formules ?
- Comment interpréter des formules qui portent sur des formules ?

Problématique

- Comment définit-on des ensembles de formules ?
- Comment interpréter des formules qui portent sur des formules ?
- Comment utiliser un ensemble de formules pour prouver des vérités ?

Problématique

- Comment définit-on des ensembles de formules ?
- Comment interpréter des formules qui portent sur des formules ?
- Comment utiliser un ensemble de formules pour prouver des vérités ?

$\Rightarrow$ on ne traite que de la vérité formelle

Définition d'un système formel

- un *langage*

Définition d'un système formel

- un *langage*
  - un *alphabet*

Définition d'un système formel

- un *langage*
  - un *alphabet*
  - une *syntaxe*

Définition d'un système formel

- un *langage*
    - un *alphabet*
    - une *syntaxe*
- des *axiomes*

Définition d'un système formel

- un *langage*
  - un *alphabet*
  - une *syntaxe*
- des *axiomes*
- des *règles*

Utilisation

- Le respect de la syntaxe garantit la construction des *"expressions bien formées"* : les formules (formellement vraies, qu'elles soient matériellement vraies ou non)

Utilisation

- Le respect de la syntaxe garantit la construction des *"expressions bien formées"* : les formules (formellement vraies, qu'elles soient matériellement vraies ou non)
- L'exploitation des *règles* en combinaison avec les *axiomes* permet d'*inférer* les *vérités* du système formel

Un exemple : l'algèbre de PEANO - 1/2

Le langage :

Un exemple : l'algèbre de PEANO - 1/2

Le langage :

- a est un terme

Un exemple : l'algèbre de PEANO - 1/2

Le langage :

- a est un terme
- si t est un terme, alors $S(t)$ est un terme

Un exemple : l'algèbre de PEANO - 1/2

Le langage :

- a est un terme
- si t est un terme, alors $S(t)$ est un terme

Les axiomes :

Un exemple : l'algèbre de PEANO - 1/2

Le langage :

- a est un terme
- si t est un terme, alors $S(t)$ est un terme

Les axiomes :

- $\forall x \neg (a = S(x))$

Un exemple : l'algèbre de PEANO - 1/2

Le langage :

- a est un terme
- si t est un terme, alors $S(t)$ est un terme

Les axiomes :

- $\forall x \neg(a = S(x))$
- $\forall x \neg(a = x) \Rightarrow \exists y(x = S(y))$

Un exemple : l'algèbre de PEANO - 1/2

Le langage :

- a est un terme
- si t est un terme, alors $S(t)$ est un terme

Les axiomes :

- $\forall x \neg(a = S(x))$
- $\forall x \neg(a = x) \Rightarrow \exists y(x = S(y))$
- $\forall xy(S(x) = S(y)) \Rightarrow x = y$

Un exemple : l'algèbre de PEANO - 2/2

Les règles :

Un exemple : l'algèbre de PEANO - 2/2

Les règles :

modus ponens :

si F
et $F \Rightarrow G$
alors G

Un exemple : l'algèbre de PEANO - 2/2

Les règles :

modus ponens :

si F
et $F \Rightarrow G$
alors G

modus tollens :

si $F \Rightarrow G$
et $\neg G$
alors $\neg F$

Un exemple : l'algèbre de PEANO - 2/2

Les règles :

modus ponens :

si F
et $F \Rightarrow G$
alors G

modus tollens :

si $F \Rightarrow G$
et $\neg G$
alors $\neg F$

universalité :

si $\forall x \; F(x)$
alors $F(t)$ pour tout t

Application : une déduction - 1/2

première prémisse :

Application : une déduction - 1/2

première prémisse :

premier axiome : $\forall x \neg (a = S(x))$

Application : une déduction - 1/2

première prémisse :

premier axiome : $\forall x \neg (a = S(x))$

universalité : si $\forall x \; F(x)$

alors $F(t)$ pour tout t

Application : une déduction - 1/2

première prémisse :

premier axiome : $\forall x \neg (a = S(x))$
universalité : si $\forall x\ F(x)$
alors $F(t)$ pour tout t
conclusion 1 : $\neg (a = S(a))$

Application : une déduction - 1/2

première prémisse :

premier axiome : $\forall x \neg(a = S(x))$
universalité : si $\forall x\ F(x)$
alors $F(t)$ pour tout t
conclusion 1 : $\neg(a = S(a))$

seconde prémisse :

Application : une déduction - 1/2

première prémisse :

premier axiome : $\forall x \neg(a = S(x))$
universalité : si $\forall x\ F(x)$
alors $F(t)$ pour tout t
conclusion 1 : $\neg(a = S(a))$

seconde prémisse :

troisième axiome : $\forall xy(S(x) = S(y)) \Rightarrow x = y$

Application : une déduction - 1/2

première prémisse :

premier axiome : $\forall x \neg(a = S(x))$
universalité : si $\forall x\ F(x)$
alors $F(t)$ pour tout t
conclusion 1 : $\neg(a = S(a))$

seconde prémisse :

troisième axiome : $\forall xy(S(x) = S(y)) \Rightarrow x = y$
universalité : si $\forall x\ F(x)$
alors $F(t)$ pour tout t

Application : une déduction - 1/2

première prémisse :

premier axiome : $\forall x \neg(a = S(x))$
universalité : si $\forall x\ F(x)$
alors $F(t)$ pour tout t
conclusion 1 : $\neg(a = S(a))$

seconde prémisse :

troisième axiome : $\forall xy(S(x) = S(y)) \Rightarrow x = y$
universalité : si $\forall x\ F(x)$
alors $F(t)$ pour tout t
conclusion 2 : $(S(a) = S(S(a))) \Rightarrow (a = S(a))$

Application : une déduction - 2/2

conclusion :

Application : une déduction - 2/2

conclusion :

conclusions 1 & 2 :

$$\neg(a = S(a))$$
$$(S(a) = S(S(a))) \Rightarrow (a = S(a))$$

Application : une déduction - 2/2

conclusion :

conclusions 1 & 2 :

$$\neg(a = S(a))$$
$$(S(a) = S(S(a))) \Rightarrow (a = S(a))$$

modus tollens :

si $F \Rightarrow G$

et $\neg G$

alors $\neg F$

Application : une déduction - 2/2

conclusion :

conclusions 1 & 2 :

$$\neg(a = S(a))$$
$$(S(a) = S(S(a))) \Rightarrow (a = S(a))$$

modus tollens :

si $F \Rightarrow G$
et $\neg G$
alors $\neg F$

CONCLUSION :

$$\neg(S(a) = S(S(a)))$$

Application : les entiers naturels

- a dénote le zéro

Application : les entiers naturels

- a dénote le zéro
- $S(\ldots)$ dénote la relation de successeur

Application : les entiers naturels

- a dénote le zéro
- $S(\ldots)$ dénote la relation de successeur
- interprétation des axiomes :

Application : les entiers naturels

- a dénote le zéro
- $S(\ldots)$ dénote la relation de successeur
- interprétation des axiomes :
  - $\forall x \neg (a = S(x))$

Application : les entiers naturels

- a dénote le zéro
- $S(\ldots)$ dénote la relation de successeur
- interprétation des axiomes :
    - $\forall x \neg (a = S(x))$
    - $\forall x \neg (a = x) \Rightarrow \exists y (x = S(y))$

Application : les entiers naturels

- a dénote le zéro
- $S(\ldots)$ dénote la relation de successeur
- interprétation des axiomes :
  - $\forall x \neg(a = S(x))$
  - $\forall x \neg(a = x) \Rightarrow \exists y(x = S(y))$
  - $\forall xy(S(x) = S(y)) \Rightarrow x = y$

Application : les entiers naturels

- a dénote le zéro
- $S(\ldots)$ dénote la relation de successeur
- interprétation des axiomes :
  - $\forall x \neg(a = S(x))$
  - $\forall x \neg(a = x) \Rightarrow \exists y(x = S(y))$
  - $\forall xy(S(x) = S(y)) \Rightarrow x = y$
- interprétation de notre déduction :

Application : les entiers naturels

- a dénote le zéro
- $S(\ldots)$ dénote la relation de successeur
- interprétation des axiomes :
  - $\forall x \neg(a = S(x))$
  - $\forall x \neg(a = x) \Rightarrow \exists y(x = S(y))$
  - $\forall xy(S(x) = S(y)) \Rightarrow x = y$
- interprétation de notre déduction :
  - $\neg(S(a) = S(S(a)))$

Application : les entiers naturels

- a dénote le zéro
- $S(\ldots)$ dénote la relation de successeur
- interprétation des axiomes :
  - $\forall x \neg (a = S(x))$
  - $\forall x \neg (a = x) \Rightarrow \exists y (x = S(y))$
  - $\forall xy (S(x) = S(y)) \Rightarrow x = y$
- interprétation de notre déduction :
  - $\neg (S(a) = S(S(a)))$
  - $1 \neq 2$

Application : les entiers naturels

- a dénote le zéro
- $S(\ldots)$ dénote la relation de successeur
- interprétation des axiomes :
  - $\forall x \neg(a = S(x))$
  - $\forall x \neg(a = x) \Rightarrow \exists y (x = S(y))$
  - $\forall xy (S(x) = S(y)) \Rightarrow x = y$
- interprétation de notre déduction :
  - $\neg(S(a) = S(S(a)))$
  - $1 \neq 2$
- il existe des expressions bien formées que l'on ne peut pas prouver, par exemple :
  $\forall x \neg(x = S(x))$
  $\Rightarrow$ ce systèle formel n'est pas complet

Caractérisation d'un système fomel

consistance : un énoncé appartenant au langage est vrai ou faux

Caractérisation d'un système fomel

consistance : un énoncé appartenant au langage est vrai ou faux

décidabilité : un énoncé vrai peut être produit en un temps fini

Caractérisation d'un système fomel

consistance : un énoncé appartenant au langage est vrai ou faux

décidabilité : un énoncé vrai peut être produit en un temps fini

complétude : toute vérité du modèle peut être prouvée dans le langage

Caractérisation d'un système fomel

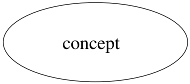
consistance : un énoncé appartenant au langage est vrai ou faux

décidabilité : un énoncé vrai peut être produit en un temps fini

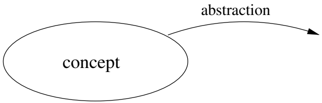
complétude : toute vérité du modèle peut être prouvée dans le langage

adéquation : tout énoncé prouvé dans le langage est valide dans le modèle

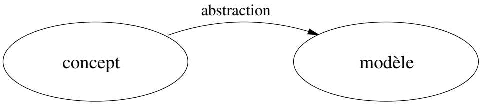
Concept, modèle et axiomatique



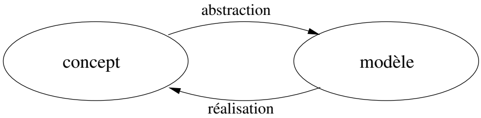
Concept, modèle et axiomatique



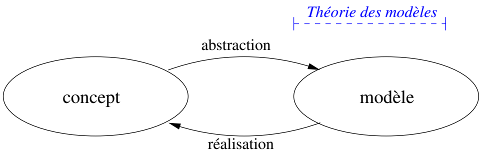
Concept, modèle et axiomatique



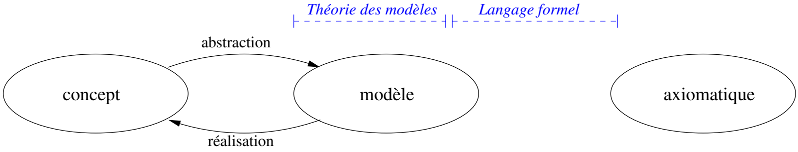
Concept, modèle et axiomatique



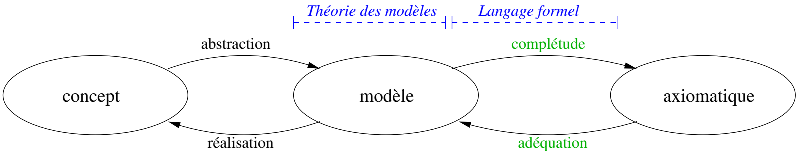
Concept, modèle et axiomatique



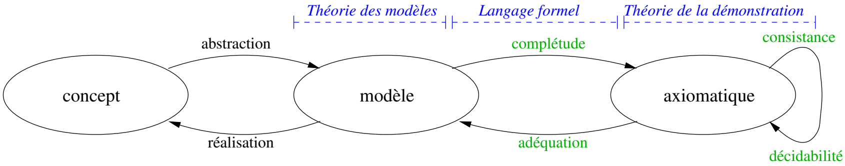
Concept, modèle et axiomatique



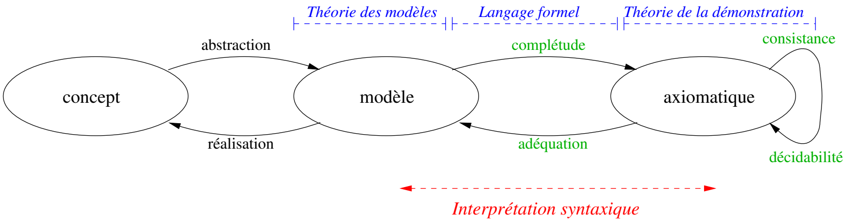
Concept, modèle et axiomatique



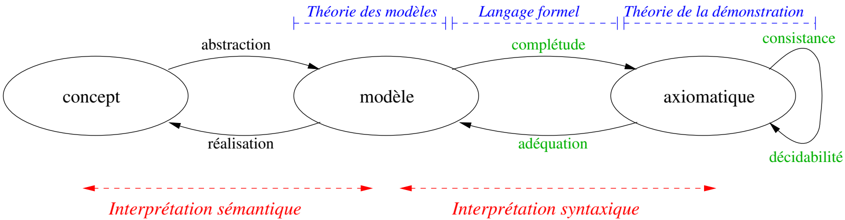
Concept, modèle et axiomatique



Concept, modèle et axiomatique



Concept, modèle et axiomatique



Pourquoi formaliser ?

- on modélise ce qu'est le système (ontologie)

Pourquoi formaliser ?

- on modélise ce qu'est le système (ontologie)
- pour comprendre ou expliquer

Pourquoi formaliser ?

- on modélise ce qu'est le système (ontologie)
- pour comprendre ou expliquer
- ce qu'il fait (fonctionnalité)

Pourquoi formaliser ?

- on modélise ce qu'est le système (ontologie)
- pour comprendre ou expliquer
- ce qu'il fait (fonctionnalité)
- et anticiper ce qu'il va devenir (génétique)

Pourquoi formaliser ?

- on modélise ce qu'est le système (ontologie)
- pour comprendre ou expliquer
- ce qu'il fait (fonctionnalité)
- et anticiper ce qu'il va devenir (génétique)

$\Rightarrow$ le but est de systématiser et donc, potentiellement, d'automatiser le raisonnement

Pourquoi formaliser ?

- on modélise ce qu'est le système (ontologie)
- pour comprendre ou expliquer
- ce qu'il fait (fonctionnalité)
- et anticiper ce qu'il va devenir (génétique)

$\Rightarrow$ le but est de systématiser et donc, potentiellement, d'automatiser le raisonnement

"Nous ne raisonnons que sur des modèles " — PAUL VALÉRY

Pourquoi ne pas formaliser ?

- on propose toujours un modèle du concept abordé

Pourquoi ne pas formaliser ?

- on propose toujours un modèle du concept abordé
- on ne travaille que sur la vérité formelle : le passage de l'interprétation syntaxique à l'interprétation sémantique pose à nouveau le problème vérité formelle / matérielle

Pourquoi ne pas formaliser ?

- on propose toujours un modèle du concept abordé
- on ne travaille que sur la vérité formelle : le passage de l'interprétation syntaxique à l'interprétation sémantique pose à nouveau le problème vérité formelle / matérielle
- on se heurte au problème d'incomplétude

Comment formaliser ?

Le modèle

Comment formaliser ?

Le modèle

- minimaliste

Comment formaliser ?

Le modèle

- minimaliste
- cohérent

Comment formaliser ?

Le modèle

- minimaliste
- cohérent

Le langage :

Comment formaliser ?

Le modèle

- minimaliste
- cohérent

Le langage :

- simple

Comment formaliser ?

Le modèle

- minimaliste
- cohérent

Le langage :

- simple
- sans ambiguïté

Comment formaliser ?

Le modèle

- minimaliste
- cohérent

Le langage :

- simple
- sans ambiguïté
- expressif

Comment formaliser ?

Le modèle

- minimaliste
- cohérent

Le langage :

- simple
- sans ambiguïté
- expressif

Axiomatique :

Comment formaliser ?

Le modèle

- minimaliste
- cohérent

Le langage :

- simple
- sans ambiguïté
- expressif

Axiomatique :

- cohérente

Comment formaliser ?

Le modèle

- minimaliste
- cohérent

Le langage :

- simple
- sans ambiguïté
- expressif

Axiomatique :

- cohérente
- minimale

Comment formaliser ?

Le modèle

- minimaliste
- cohérent

Le langage :

- simple
- sans ambiguïté
- expressif

Axiomatique :

- cohérente
- minimale
- automatisable

Plan

1. Introduction
2. La logique aristotélique
   - Les propositions catégoriques
   - Les syllogisme logiques
3. La logique des propositions
4. La logique des prédicats

L'organon

Catégories : une analyse des éléments les plus simples des propositions

L'organon

Catégories : une analyse des éléments les plus simples des propositions

De l'interprétation : étude de la proposition

L'organon

Catégories : une analyse des éléments les plus simples des propositions

De l'interprétation : étude de la proposition

Premiers Analytiques : les règles et les formes de la démonstration en général

L’organon

Catégories : une analyse des éléments les plus simples des propositions

De l’interprétation : étude de la proposition

Premiers Analytiques : les règles et les formes de la démonstration en général

Seconds Analytiques : la théorie du syllogisme nécessaire

L'organon

Catégories : une analyse des éléments les plus simples des propositions

De l'interprétation : étude de la proposition

Premiers Analytiques : les règles et les formes de la démonstration en général

Seconds Analytiques : la théorie du syllogisme nécessaire

Les Topiques : la dialectique

L'organon

Catégories : une analyse des éléments les plus simples des propositions

De l'interprétation : étude de la proposition

Premiers Analytiques : les règles et les formes de la démonstration en général

Seconds Analytiques : la théorie du syllogisme nécessaire

Les Topiques : la dialectique

Les Réfutations Sophistiques : les principaux sophismes et les moyens de les réfuter

Les propositions catégoriques

sujet copule prédicat

Les propositions catégoriques

sujet copule prédicat

Le sujet : l'objet de la proposition qui tend à le catégoriser

Les propositions catégoriques

sujet copule prédicat

Le sujet : l'objet de la proposition qui tend à le catégoriser

Le prédicat : formule contenant une variable libre, par exemple *"X est sympa"* est un prédicat unaire

Les propositions catégoriques

sujet copule prédicat

Le sujet : l'objet de la proposition qui tend à le catégoriser

Le prédicat : formule contenant une variable libre, par exemple *"X est sympa"* est un prédicat unaire

La copule : introduit un rapport double entre le sujet et le prédicat (rapport *"S est P"*)

Les propositions catégoriques

sujet copule prédicat

Le sujet : l'objet de la proposition qui tend à le catégoriser

Le prédicat : formule contenant une variable libre, par exemple *"X est sympa"* est un prédicat unaire

La copule : introduit un rapport double entre le sujet et le prédicat (rapport *"S est P"*)

- **compréhension :** l'ensemble *S* possède l'attribut *P*

Les propositions catégoriques

sujet copule prédicat

Le sujet : l'objet de la proposition qui tend à le catégoriser

Le prédicat : formule contenant une variable libre, par exemple *"X est sympa"* est un prédicat unaire

La copule : introduit un rapport double entre le sujet et le prédicat (rapport *"S est P"*)

- **compréhension :** l'ensemble *S* possède l'attribut *P*
- **extension :** l'ensemble *S* fait partie de l'ensemble *P*

Exemple de proposition catégorique

Le prof d'info est sympa

Exemple de proposition catégorique

Le prof d'info est sympa

Le sujet : *Le prof d'info*

Exemple de proposition catégorique

Le prof d'info est sympa

Le sujet : *Le prof d'info*

Le prédicat : *"X est sympa"*, prédicat unaire

Exemple de proposition catégorique

Le prof d'info est sympa

Le sujet : *Le prof d'info*

Le prédicat : *"X est sympa"*, prédicat unaire

La copule : *est*

Exemple de proposition catégorique

Le prof d'info est sympa

Le sujet : *Le prof d'info*

Le prédicat : *"X est sympa"*, prédicat unaire

La copule : *est*

compréhension : le prof d'info possède tous les attributs de quelqu'un de sympathique

Exemple de proposition catégorique

Le prof d'info est sympa

Le sujet : *Le prof d'info*

Le prédicat : *"X est sympa"*, prédicat unaire

La copule : *est*

compréhension : le prof d'info possède tous les attributs de quelqu'un de sympathique

extension : parmi les gens sympathiques se trouve le prof d'info

Exemple de proposition catégorique

Le prof d'info est sympa

Le sujet : *Le prof d'info*

Le prédicat : *"X est sympa"*, prédicat unaire

La copule : *est*

- compréhension : le prof d'info possède tous les attributs de quelqu'un de sympathique
- extension : parmi les gens sympathiques se trouve le prof d'info

Cet énoncé (proposition catégorique) est bien formé (vérité formelle), il n'est pas vrai pour autant (vérité matérielle).

Le syllogisme : principe de base

- 2 prémisses et une conclusion
  (attention : prémisses $\neq$ prémices)

Le syllogisme : principe de base

- 2 prémisses et une conclusion
  (attention : prémisses $\neq$ prémices)
- les prémisses sont des propositions catégoriques

Le syllogisme : principe de base

- 2 prémisses et une conclusion
  (attention : prémisses $\neq$ prémices)
- les prémisses sont des propositions catégoriques
- la prémisse majeure met en rapport le terme majeur et le terme moyen

Le syllogisme : principe de base

- 2 prémisses et une conclusion
  (attention : prémisses $\neq$ prémices)
- les prémisses sont des propositions catégoriques
- la prémisse majeure met en rapport le terme majeur et le terme moyen
- la prémisse mineure met en rapport le terme mineur et le terme moyen

Le syllogisme : principe de base

- 2 prémisses et une conclusion
  (attention : prémisses $\neq$ prémices)
- les prémisses sont des propositions catégoriques
- la prémisse majeure met en rapport le terme majeur et le terme moyen
- la prémisse mineure met en rapport le terme mineur et le terme moyen
- la conclusion met en rapport le terme mineur et le terme majeur

Un exemple

- Tous les hommes sont mortels

Un exemple

- Tous les hommes sont mortels
- Tous les grecs sont des hommes

Un exemple

- Tous les hommes sont mortels
- Tous les grecs sont des hommes
- Donc, tous les grecs sont mortels

Un exemple

- Tous les hommes sont mortels
- Tous les grecs sont des hommes
- Donc, tous les grecs sont mortels

Paradoxe : qui peut affirmer que tous les hommes sont mortels ?
Ce raisonnement *a priori* purement déductif s'appuie sur une induction.

Les syllogismes

- le syllogisme logique

Les syllogismes

- le syllogisme logique
- le syllogisme dialectique

Les syllogismes

- le syllogisme logique
- le syllogisme dialectique
- le syllogisme sophistique

Un syllogisme concluant. . .

Une fois encore, un syllogisme bien formé (*concluant*) ne révèle aucune vérité matérielle, seulement une vérité formelle.
$\Rightarrow$ c'est un principe de formalisation du savoir, pas de découverte ($\neq$ théorie des essences, PLATON)

Un syllogisme concluant. . .

Une fois encore, un syllogisme bien formé (*concluant*) ne révèle aucune vérité matérielle, seulement une vérité formelle.
$\Rightarrow$ c'est un principe de formalisation du savoir, pas de découverte ($\neq$ théorie des essences, PLATON)

- Les gros travailleurs sont bien payés

Un syllogisme concluant. . .

Une fois encore, un syllogisme bien formé (*concluant*) ne révèle aucune vérité matérielle, seulement une vérité formelle.
$\Rightarrow$ c'est un principe de formalisation du savoir, pas de découverte ($\neq$ théorie des essences, PLATON)

- Les gros travailleurs sont bien payés
- Les élèves de l'IdC sont de gros travailleurs

Un syllogisme concluant. . .

Une fois encore, un syllogisme bien formé (*concluant*) ne révèle aucune vérité matérielle, seulement une vérité formelle.
$\Rightarrow$ c'est un principe de formalisation du savoir, pas de découverte ($\neq$ théorie des essences, PLATON)

- Les gros travailleurs sont bien payés
- Les élèves de l'IdC sont de gros travailleurs
- Les élèves de l'IdC sont bien payés

Les classes de propositions

- une prémisse n'est pas forcément affirmative (*qualité*)

Les classes de propositions

- une prémisse n'est pas forcément affirmative (*qualité*)
- une prémisse n'est pas forcément universelle (*quantité*)

Les classes de propositions

- une prémisse n'est pas forcément affirmative (*qualité*)
- une prémisse n'est pas forcément universelle (*quantité*)
- le syllogisme logique n'est donc pas toujours une *tautologie* (toujours vrai)
  il existe des syllogismes non valides :

Les classes de propositions

- une prémisse n'est pas forcément affirmative (*qualité*)
- une prémisse n'est pas forcément universelle (*quantité*)
- le syllogisme logique n'est donc pas toujours une *tautologie* (toujours vrai)
  il existe des syllogismes non valides :
  - aucun rocher n'est mortel

Les classes de propositions

- une prémisse n'est pas forcément affirmative (*qualité*)
- une prémisse n'est pas forcément universelle (*quantité*)
- le syllogisme logique n'est donc pas toujours une *tautologie* (toujours vrai)
  il existe des syllogismes non valides :
  - aucun rocher n'est mortel
  - or aucun homme n'est un rocher

Les classes de propositions

- une prémisse n'est pas forcément affirmative (*qualité*)
- une prémisse n'est pas forcément universelle (*quantité*)
- le syllogisme logique n'est donc pas toujours une *tautologie* (toujours vrai)
  il existe des syllogismes non valides :
  - aucun rocher n'est mortel
  - or aucun homme n'est un rocher
  - donc, aucun homme n'est mortel

Les 4 propositions catégoriques

A : l'universelle affirmative *Toute femme est belle*

Les 4 propositions catégoriques

A : l'universelle affirmative *Toute femme est belle*

E : l'universelle négative *Aucune femme n'est belle*

Les 4 propositions catégoriques

- A : l'universelle affirmative *Toute femme est belle*
- E : l'universelle négative *Aucune femme n'est belle*
- I : la particulière affirmative *Quelques femmes sont belles*

Les 4 propositions catégoriques

- A : l'universelle affirmative *Toute femme est belle*
- E : l'universelle négative *Aucune femme n'est belle*
- I : la particulière affirmative *Quelques femmes sont belles*
- O : la particulière négative *Quelques femmes ne sont pas belles*

Les 4 propositions catégoriques

- A : l'universelle affirmative *Toute femme est belle*
- E : l'universelle négative *Aucune femme n'est belle*
- I : la particulière affirmative *Quelques femmes sont belles*
- O : la particulière négative *Quelques femmes ne sont pas belles*

AffIrmo / nEgO $\Rightarrow$ noms des syllogismes logiques concluants (Barbara, Celarent, Darii...)

Les 4 propositions catégoriques

- A : l'universelle affirmative *Toute femme est belle*
- E : l'universelle négative *Aucune femme n'est belle*
- I : la particulière affirmative *Quelques femmes sont belles*
- O : la particulière négative *Quelques femmes ne sont pas belles*

AffIrmo / nEgO ⇒ noms des syllogismes logiques concluants (Barbara, Celarent, Darii. . .)
⇒ étude systématique des 256 syllogismes possibles pour isoler les 19 syllogismes concluants.

Plan

1. Introduction
2. La logique aristotélique
3. La logique des propositions
   - Le domaine
   - Le langage
   - L'axiomatique
4. La logique des prédicats

Concept

- propositions simples en langage naturel

Concept

- propositions simples en langage naturel
- logique d'ordre 0 (pas de variables libres)

Concept

- propositions simples en langage naturel
- logique d'ordre 0 (pas de variables libres)
- calcul propositionnel (déduction et démonstration)

Concept

- propositions simples en langage naturel
- logique d'ordre 0 (pas de variables libres)
- calcul propositionnel (déduction et démonstration)

Exemple :

Concept

- propositions simples en langage naturel
- logique d'ordre 0 (pas de variables libres)
- calcul propositionnel (déduction et démonstration)

Exemple :

- Si le cours est nul, alors les élèves dorment

Concept

- propositions simples en langage naturel
- logique d'ordre 0 (pas de variables libres)
- calcul propositionnel (déduction et démonstration)

Exemple :

- Si le cours est nul, alors les élèves dorment
- Donc, si les élèves écoutent, c'est que le cours est génial

Concept

- propositions simples en langage naturel
- logique d'ordre 0 (pas de variables libres)
- calcul propositionnel (déduction et démonstration)

Exemple :

- Si le cours est nul, alors les élèves dorment
- Donc, si les élèves écoutent, c'est que le cours est génial

Formalisation "intuitive" :

Concept

- propositions simples en langage naturel
- logique d'ordre 0 (pas de variables libres)
- calcul propositionnel (déduction et démonstration)

Exemple :

- Si le cours est nul, alors les élèves dorment
- Donc, si les élèves écoutent, c'est que le cours est génial

Formalisation "intuitive" :

- des attributs bivalents : le cours est soit nul, soit génial, un élève ne somnole pas

Concept

- propositions simples en langage naturel
- logique d'ordre 0 (pas de variables libres)
- calcul propositionnel (déduction et démonstration)

Exemple :

- Si le cours est nul, alors les élèves dorment
- Donc, si les élèves écoutent, c'est que le cours est génial

Formalisation "intuitive" :

- des attributs bivalents : le cours est soit nul, soit génial, un élève ne somnole pas
- des règles : si . . . alors

Concept

- propositions simples en langage naturel
- logique d'ordre 0 (pas de variables libres)
- calcul propositionnel (déduction et démonstration)

Exemple :

- Si le cours est nul, alors les élèves dorment
- Donc, si les élèves écoutent, c'est que le cours est génial

Formalisation "intuitive" :

- des attributs bivalents : le cours est soit nul, soit génial, un élève ne somnole pas
- des règles : si . . . alors
- déduction (donc) par exploitation des règles et des faits

Modèle

- logique bivalente : une proposition est *vraie* ou *fausse*, il fait *jour* ou *nuit*...

Modèle

- logique bivalente : une proposition est *vraie* ou *fausse*, il fait *jour* ou *nuit*. . .
- ls valeurs de vérité des termes constitutifs d'une expression bien formée permettent de déduire la valeur de vérité de cette dernière

Vocabulaire

tautologie : expression toujours vraie (formule analytique)

Vocabulaire

tautologie : expression toujours vraie (formule analytique)

contradicion, ou antilogie : expression toujours fausse (formule analytique)

Vocabulaire

tautologie : expression toujours vraie (formule analytique)

contradicion, ou antilogie : expression toujours fausse (formule analytique)

contingence : toute expression qui n'est ni une tautologie, ni une antilogie (formule synthétique)

Langage – 1/2

Les mots :

Langage – 1/2

Les mots :

- les termes atomiques $(p, q, r \dots)$

Langage – 1/2

Les mots :

- les termes atomiques ($p, q, r \ldots$)
- les opérateurs (nulaires, unaires et binaires)

Langage – 1/2

Les mots :

- les termes atomiques ($p, q, r \dots$)
- les opérateurs (nulaires, unaires et binaires)

$$
\begin{array}{rl}
\neg & \textit{negation} \\
\wedge & \textit{conjonction} \\
\vee & \textit{disjonction} \\
\rightarrow & \textit{implication} \\
\leftrightarrow & \textit{bi-implication} \\
\textit{false} & \textit{contradiction} \\
\textit{true} & \textit{tautologie}
\end{array}
$$

Langage – 2/2

Les expressions bien formées :

Langage – 2/2

Les expressions bien formées :

- *true*

Langage – 2/2

Les expressions bien formées :

- *true*
- *false*

Langage – 2/2

Les expressions bien formées :

- *true*
- *false*
- $(A \wedge B)$
  (si A et B sont des *ebf*)

Langage – 2/2

Les expressions bien formées :

- *true*
- *false*
- $(A \wedge B)$
  (si A et B sont des *ebf*)
- $\ldots$

Les axiomes

- $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

Les axiomes

- $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
- $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

Les axiomes

- $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
- $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
- $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$

Règle

La substitution : la substitution d'une expression bien formée à une expression bien formée préserve la tautologie

Calcul propositionnel

déduction : exploitation des axiomes, des théorèmes et de la règle de substitution pour traiter de nouvelles formules (hypothèses du raisonnement)

Calcul propositionnel

déduction : exploitation des axiomes, des théorèmes et de la règle de substitution pour traiter de nouvelles formules (hypothèses du raisonnement)

démonstration : exploitation des axiomes et de la règle de substitution pour établir de nouveaux théorèmes

Les théorèmes

le tiers exclus	$A \vee \neg A$
non – contradiction	$\neg(A \wedge \neg A)$
double ngation	$\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$
De Morgan	$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$
	$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge B)$
contraposition	$(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$
modus ponens	$((A \rightarrow B) \wedge A) \rightarrow B$
modus tollens	$((A \rightarrow B) \wedge \neg B) \rightarrow \neg A$
modus barbara	$((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)$
distributilit	$(A \wedge (B \vee C)) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
	$(A \vee (B \wedge C)) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

Caractéristiques de ce formalisme

- adéquat

Caractéristiques de ce formalisme

- adéquat
- complet

Caractéristiques de ce formalisme

- adéquat
- complet
- consistant

Caractéristiques de ce formalisme

- adéquat
- complet
- consistant
- décidable

Limites de l'interprétation

- la conjonction grammaticale n'est pas limitée à la notion de conjonction logique :

Limites de l'interprétation

- la conjonction grammaticale n'est pas limitée à la notion de conjonction logique :
  - il tua l'agresseur et le désarma

Limites de l'interprétation

- la conjonction grammaticale n'est pas limitée à la notion de conjonction logique :
    - il tua l'agresseur et le désarma
    - il désarma l'agresseur et le tua

Limites de l'interprétation

- la conjonction grammaticale n'est pas limitée à la notion de conjonction logique :
  - il tua l'agresseur et le désarma
  - il désarma l'agresseur et le tua
- la stricte bivalence de la logique est restrictive

Limites de l'interprétation

- la conjonction grammaticale n'est pas limitée à la notion de conjonction logique :
  - il tua l'agresseur et le désarma
  - il désarma l'agresseur et le tua
- la stricte bivalence de la logique est restrictive
- ...

Limites de l'interprétation

- la conjonction grammaticale n'est pas limitée à la notion de conjonction logique :
  - il tua l'agresseur et le désarma
  - il désarma l'agresseur et le tua
- la stricte bivalence de la logique est restrictive
- ...

Exemple, soit A = *avoir chaud* et B = *boire une bière* :

Limites de l'interprétation

- la conjonction grammaticale n'est pas limitée à la notion de conjonction logique :
  - il tua l'agresseur et le désarma
  - il désarma l'agresseur et le tua
- la stricte bivalence de la logique est restrictive
- ...

Exemple, soit A = *avoir chaud* et B = *boire une bière* :

modus ponens $((A \rightarrow B) \wedge A) \rightarrow B$

Si j'ai chaud je bois une bière, et j'ai chaud, donc je bois une bière.

Limites de l'interprétation

- la conjonction grammaticale n'est pas limitée à la notion de conjonction logique :
  - il tua l'agresseur et le désarma
  - il désarma l'agresseur et le tua
- la stricte bivalence de la logique est restrictive
- ...

Exemple, soit A = *avoir chaud* et B = *boire une bière* :

modus ponens $((A \rightarrow B) \wedge A) \rightarrow B$
Si j'ai chaud je bois une bière, et j'ai chaud, donc je bois une bière.

modus tollens $((A \rightarrow B) \wedge \neg B) \rightarrow \neg A$
Si j'ai chaud je bois une bière, et je ne bois pas une bière, donc je n'ai pas chaud.

Plan

Concept

- propositions complexes issues d'un raisonnement non trivial

Concept

- propositions complexes issues d'un raisonnement non trivial
- logique d'ordre 1 (contient des variables libres)

Concept

- propositions complexes issues d'un raisonnement non trivial
- logique d'ordre 1 (contient des variables libres)
- calcul propositionnel (déduction et démonstration)

Concept

- propositions complexes issues d'un raisonnement non trivial
- logique d'ordre 1 (contient des variables libres)
- calcul propositionnel (déduction et démonstration)

Exemple :

Concept

- propositions complexes issues d'un raisonnement non trivial
- logique d'ordre 1 (contient des variables libres)
- calcul propositionnel (déduction et démonstration)

Exemple :

- Si le cours est nul, alors les élèves dorment

Concept

- propositions complexes issues d'un raisonnement non trivial
- logique d'ordre 1 (contient des variables libres)
- calcul propositionnel (déduction et démonstration)

Exemple :

- Si le cours est nul, alors les élèves dorment
- Donc, si il existe un élève qui écoute, c'est que le cours n'est pas nul

Concept

- propositions complexes issues d'un raisonnement non trivial
- logique d'ordre 1 (contient des variables libres)
- calcul propositionnel (déduction et démonstration)

Exemple :

- Si le cours est nul, alors les élèves dorment
- Donc, si il existe un élève qui écoute, c'est que le cours n'est pas nul

Formalisation "intuitive" :

Concept

- propositions complexes issues d'un raisonnement non trivial
- logique d'ordre 1 (contient des variables libres)
- calcul propositionnel (déduction et démonstration)

Exemple :

- Si le cours est nul, alors les élèves dorment
- Donc, si il existe un élève qui écoute, c'est que le cours n'est pas nul

Formalisation "intuitive" :

- on ajoute des quantificateurs : $\exists$ *élève* $\in$ classe . . .

Concept

- propositions complexes issues d'un raisonnement non trivial
- logique d'ordre 1 (contient des variables libres)
- calcul propositionnel (déduction et démonstration)

Exemple :

- Si le cours est nul, alors les élèves dorment
- Donc, si il existe un élève qui écoute, c'est que le cours n'est pas nul

Formalisation "intuitive" :

- on ajoute des quantificateurs : $\exists$ *élève* $\in$ classe ...
- on ajoute la notion de variable : *dormir(X)* n'a pas la même valeur de vérité *pour tout* X ...

Un exemple

Tout être humain est mortel
Or Socrate est un être humain
Donc, Socrate est mortel

Un exemple

Tout être humain est mortel
Or Socrate est un être humain
Donc, Socrate est mortel
$\Rightarrow$ modélisation en logique propositionnelle impossible !

Un exemple

Tout être humain est mortel
Or Socrate est un être humain
Donc, Socrate est mortel
$\Rightarrow$ modélisation en logique propositionnelle impossible !
$\forall x \in \mathcal{H}, mortel(x)$
$\exists x \in \mathcal{H}, x = socrate$
$mortel(s)$

Notion d'ordre

adrien_dort	ordre 0
dormir(X)	ordre 1
	(vrai pour X $=$ adrien)
activité(X(Y))	ordre 2
	(vrai pour X $=$ dormir et Y $=$ adrien)
$\ldots$	ordre n

Vocabulaire

Sur la base du calcul propositionnel on ajoute :

- des constantes : *a,b,c. . .*

Vocabulaire

Sur la base du calcul propositionnel on ajoute :

- des constantes : $a,b,c\ldots$
- des symboles de fonctions : $f,g\ldots$

Vocabulaire

Sur la base du calcul propositionnel on ajoute :

- des constantes : *a,b,c. . .*
- des symboles de fonctions : *f,g. . .*
- des symboles de prédicats : *p,q. . .*

Vocabulaire

Sur la base du calcul propositionnel on ajoute :

- des constantes : $a,b,c\ldots$
- des symboles de fonctions : $f,g\ldots$
- des symboles de prédicats : $p,q\ldots$
- deux quantificateurs : $\exists$ et $\forall$

Le langage – 1/3

$\mathcal{V}$: ensemble des variables (infini)

Le langage – 1/3

$\mathcal{V}$: ensemble des variables (infini)

$\mathcal{C}$: ensemble des constantes (éventuellement vide)

Le langage – 1/3

$\mathcal{V}$: ensemble des variables (infini)

$\mathcal{C}$: ensemble des constantes (éventuellement vide)

$\mathcal{P}$: ensemble des foncteurs de prédicats

Le langage – 1/3

$\mathcal{V}$: ensemble des variables (infini)

$\mathcal{C}$: ensemble des constantes (éventuellement vide)

$\mathcal{P}$: ensemble des foncteurs de prédicats

$\mathcal{F}$: ensemble des foncteurs de fonctions (éventuellement vide)

Le langage – 1/3

- $\mathcal{V}$: ensemble des variables (infini)
- $\mathcal{C}$: ensemble des constantes (éventuellement vide)
- $\mathcal{P}$: ensemble des foncteurs de prédicats
- $\mathcal{F}$: ensemble des foncteurs de fonctions (éventuellement vide)

Les quantificateurs : $\exists$ et $\forall$

Le langage – 1/3

$\mathcal{V}$: ensemble des variables (infini)

$\mathcal{C}$: ensemble des constantes (éventuellement vide)

$\mathcal{P}$: ensemble des foncteurs de prédicats

$\mathcal{F}$: ensemble des foncteurs de fonctions (éventuellement vide)

Les quantificateurs : $\exists$ et $\forall$

Les connecteurs : $\neg, \wedge, \vee \Rightarrow$

Le langage – 1/3

$\mathcal{V}$: ensemble des variables (infini)

$\mathcal{C}$: ensemble des constantes (éventuellement vide)

$\mathcal{P}$: ensemble des foncteurs de prédicats

$\mathcal{F}$: ensemble des foncteurs de fonctions (éventuellement vide)

Les quantificateurs : $\exists$ et $\forall$

Les connecteurs : $\neg, \wedge, \vee \Rightarrow$

Attention, un connecteur n'est pas un opérateur, par exemple :
$(((\mathit{boire\ et\ respirer}) \Rightarrow \mathit{mort}) \wedge (\mathit{boire} \Rightarrow \mathit{respirer}))$
$\Rightarrow (\mathit{boire} \Rightarrow \mathit{mort})$
L'opérateur *et* dénote ici la simultanéité, le connecteur $\wedge$ la conjonction.

Le langage – 2/3

On notera $\mathcal{T}$ l'ensemble des termes, ainsi définis :

- $x \in \mathcal{V}$ est un terme

Le langage – 2/3

On notera $\mathcal{T}$ l'ensemble des termes, ainsi définis :

- $x \in \mathcal{V}$ est un terme
- $x \in \mathcal{C}$ est un terme

Le langage – 2/3

On notera $\mathcal{T}$ l'ensemble des termes, ainsi définis :

- $x \in \mathcal{V}$ est un terme
- $x \in \mathcal{C}$ est un terme
- si f est une fonction n-aire et $t_1, t_2, \ldots, t_n$ sont des termes, alors $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ est un terme

Le langage – 2/3

On notera $\mathcal{T}$ l'ensemble des termes, ainsi définis :

- $x \in \mathcal{V}$ est un terme
- $x \in \mathcal{C}$ est un terme
- si f est une fonction n-aire et $t_1, t_2, \ldots, t_n$ sont des termes, alors $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ est un terme

On notera $\mathcal{E}$ l'ensemble des énoncés valides du langages (les expressions bien formées).

Le langage – 2/3

Les énoncés valides sont :

- $p(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ si $(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \mathcal{T}^n, p \in \mathcal{P}$

Le langage – 2/3

Les énoncés valides sont :

- $p(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ si $(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \mathcal{T}^n, p \in \mathcal{P}$
  p est n-aire, il s'agit d'une formule atomique (on dit aussi *un atome*)

Le langage – 2/3

Les énoncés valides sont :

- $p(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ si $(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \mathcal{T}^n, p \in \mathcal{P}$
  p est n-aire, il s'agit d'une formule atomique (on dit aussi *un atome*)
  Rappel : c'est une logique d'ordre 1, on peut avoir $p(f(X))$ mais pas $p(q(X))$ (avec $\{p, q\} \in \mathcal{P}$ et $f \in \mathcal{F}$)

Le langage – 2/3

Les énoncés valides sont :

- $p(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ si $(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \mathcal{T}^n, p \in \mathcal{P}$
- $e_1 \wedge e_2$ si $\{e_1, e_2\} \in \mathcal{E}$

Le langage – 2/3

Les énoncés valides sont :

- $p(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ si $(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \mathcal{T}^n, p \in \mathcal{P}$
- $e_1 \wedge e_2$ si $\{e_1, e_2\} \in \mathcal{E}$
- $e_1 \vee e_2$ si $\{e_1, e_2\} \in \mathcal{E}$

Le langage – 2/3

Les énoncés valides sont :

- $p(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ si $(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \mathcal{T}^n, p \in \mathcal{P}$
- $e_1 \wedge e_2$ si $\{e_1, e_2\} \in \mathcal{E}$
- $e_1 \vee e_2$ si $\{e_1, e_2\} \in \mathcal{E}$
- $e_1 \Rightarrow e_2$ si $\{e_1, e_2\} \in \mathcal{E}$

Le langage – 2/3

Les énoncés valides sont :

- $p(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ si $(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \mathcal{T}^n, p \in \mathcal{P}$
- $e_1 \wedge e_2$ si $\{e_1, e_2\} \in \mathcal{E}$
- $e_1 \vee e_2$ si $\{e_1, e_2\} \in \mathcal{E}$
- $e_1 \Rightarrow e_2$ si $\{e_1, e_2\} \in \mathcal{E}$
- $\neg e$ si $e \in \mathcal{E}$

Le langage – 2/3

Les énoncés valides sont :

- $p(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ si $(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \mathcal{T}^n, p \in \mathcal{P}$
- $e_1 \wedge e_2$ si $\{e_1, e_2\} \in \mathcal{E}$
- $e_1 \vee e_2$ si $\{e_1, e_2\} \in \mathcal{E}$
- $e_1 \Rightarrow e_2$ si $\{e_1, e_2\} \in \mathcal{E}$
- $\neg e$ si $e \in \mathcal{E}$
- $\forall x(e)$ si $e \in \mathcal{E}$ et $x \in \mathcal{V}$

Le langage – 2/3

Les énoncés valides sont :

- $p(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ si $(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \mathcal{T}^n, p \in \mathcal{P}$
- $e_1 \wedge e_2$ si $\{e_1, e_2\} \in \mathcal{E}$
- $e_1 \vee e_2$ si $\{e_1, e_2\} \in \mathcal{E}$
- $e_1 \Rightarrow e_2$ si $\{e_1, e_2\} \in \mathcal{E}$
- $\neg e$ si $e \in \mathcal{E}$
- $\forall x(e)$ si $e \in \mathcal{E}$ et $x \in \mathcal{V}$
- $\exists x(e)$ si $e \in \mathcal{E}$ et $x \in \mathcal{V}$

Variables libres et liées

- une variable est dite liée par un quantificateur à une formule si elle apparaît dans cette formule et que cette dernière est précédée d'un quantificateur portant sur cette même variable

Variables libres et liées

- une variable est dite liée par un quantificateur à une formule si elle apparaît dans cette formule et que cette dernière est précédée d'un quantificateur portant sur cette même variable
  Par exemple x est liée dans la formule $\exists x \in Vins, aime(x)$

Variables libres et liées

- une variable est dite liée par un quantificateur à une formule si elle apparaît dans cette formule et que cette dernière est précédée d'un quantificateur portant sur cette même variable
- dans le cas contraire, la variable est dite libre

Variables libres et liées

- une variable est dite liée par un quantificateur à une formule si elle apparaît dans cette formule et que cette dernière est précédée d'un quantificateur portant sur cette même variable
- dans le cas contraire, la variable est dite libre
  Par exemple x est libre dans la formule $aime(X)$

Variables libres et liées

- une variable est dite liée par un quantificateur à une formule si elle apparaît dans cette formule et que cette dernière est précédée d'un quantificateur portant sur cette même variable
- dans le cas contraire, la variable est dite libre
- un *prédicat* contient au moins une variable libre

Variables libres et liées

- une variable est dite liée par un quantificateur à une formule si elle apparaît dans cette formule et que cette dernière est précédée d'un quantificateur portant sur cette même variable
- dans le cas contraire, la variable est dite libre
- un *prédicat* contient au moins une variable libre
  Par exemple, un prédicat valide est :
  $\exists x \in Vins, aime\_avec(x, Y)$

Variables libres et liées

- une variable est dite liée par un quantificateur à une formule si elle apparaît dans cette formule et que cette dernière est précédée d'un quantificateur portant sur cette même variable
- dans le cas contraire, la variable est dite libre
- un *prédicat* contient au moins une variable libre
- dire qu'un prédicat est vrai ou faux n'a aucun sens tant que l'on n'a pas substituer des constantes à toutes les variables libres

Variables libres et liées

- une variable est dite liée par un quantificateur à une formule si elle apparaît dans cette formule et que cette dernière est précédée d'un quantificateur portant sur cette même variable
- dans le cas contraire, la variable est dite libre
- un *prédicat* contient au moins une variable libre
- dire qu'un prédicat est vrai ou faux n'a aucun sens tant que l'on n'a pas substituer des constantes à toutes les variables libres
  On ne peut pas dire que $\exists x \in Vins, aime\_avec(x, Y)$ est vrai ou faux
  Par contre, on peut dire que cette formule est vraie avec $Y = boeuf$ et fausse avec $Y = croissant\_beurre$

Variables libres et liées

- une variable est dite liée par un quantificateur à une formule si elle apparaît dans cette formule et que cette dernière est précédée d'un quantificateur portant sur cette même variable
- dans le cas contraire, la variable est dite libre
- un *prédicat* contient au moins une variable libre
- dire qu'un prédicat est vrai ou faux n'a aucun sens tant que l'on n'a pas substituer des constantes à toutes les variables libres
- une formule dont toutes les variables sont liées est dite close (aucune "liberté" sur les variables)

L'axiomatique

- le calcul des prédicats découle directement du calcul des propositions

L'axiomatique

- le calcul des prédicats découle directement du calcul des propositions
- quelques axiomes supplémentaires sont nécessaires

L’axiomatique

- le calcul des prédicats découle directement du calcul des propositions
- quelques axiomes supplémentaires sont nécessaires
- une seule règle est ajoutés, la généralisation : $A \Rightarrow \forall x(A)$

Caractéristiques de ce formalisme

- adéquat

Caractéristiques de ce formalisme

- adéquat
- complet (prouvé par GÖDEL)

Caractéristiques de ce formalisme

- adéquat
- complet (prouvé par GÖDEL)
- consistant

Caractéristiques de ce formalisme

- adéquat
- complet (prouvé par GÖDEL)
- consistant
- semi-décidable :

Caractéristiques de ce formalisme

- adéquat
- complet (prouvé par GÖDEL)
- consistant
- semi-décidable :
  - pour un énoncé valide la preuve aboutit ("vrai")

Caractéristiques de ce formalisme

- adéquat
- complet (prouvé par GÖDEL)
- consistant
- semi-décidable :
  - pour un énoncé valide la preuve aboutit ("vrai")
  - pour un énoncé non valide soit la preuve aboutit ("faux"), soit elle conduit à une récursion infinie !

CC81IART - Intelligence Artificielle

Cours 02 : la logique, les logiques, la programmation logique

Pierre-Alexandre FAVIER

Ecole Nationale Supérieure de Cognitique