II. Systèmes Linéaires

II.1. Définition.

Un **système linéaire** de **m** équations à **n** inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est un ensemble d'équations de la forme :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

où les a_{ij} et b_j sont des scalaires donnés. Si les b_j sont tous nuls, on parle d'un système **homogène**, et $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$ est automatiquement solution.

Forme matricielle de (1) :

$$AX = b,\ ou\ A = [a_{ij}],\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}\ et\ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \tag{2}$$

II.2. Procédé d'élimination de GAUSS.

Nous le présentons sur plusieurs exemples différents.

Exemple 1:

$$\begin{array}{rccccccc} \textit{pivot 1}\ (1x_1) \longrightarrow & x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & \boxed{-x_1} & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ \textit{à éliminer} \longrightarrow & & & 10x_2 & + & 25x_3 & = & 90 \\ & \boxed{20x_1} & + & 10x_2 & & & = & 80 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \textit{Matrice}\ [\ A \mid b\ ] \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 10 & 25 & 90 \\ 20 & 10 & 0 & 80 \end{array}\right] \end{array} \tag{3}$$

<u>$1^{ère}$ *étape :*</u> *Elimination de x_1.*

A l'aide de la $1^{ère}$ équation et du terme pivot x_1, on va éliminer x_1 dans les autres équations. Pour cela, on ajoute L_1 ($1^{ère}$ ligne) à la $2^{ème}$, on ajoute $(-20L_1)$ à la $4^{ème}$, on ne s'occupe pas de la $3^{ème}$ puisque x_1 n'y figure pas. Cela conduit à :

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & 10x_2 & + & 25x_3 & = & 90 \\ & & 30x_2 & - & 20x_3 & = & 80 \end{array}$$

<u>$2^{ème}$ *étape :*</u> *Elimination de x_2.*

La $1^{ère}$ équation, qui a servi d'équation pivot, reste telle quelle. La $2^{ème}$ ne contenant pas x_2, on change l'ordre des équations de manière à avoir un pivot non nul. On obtient ainsi les équations réordonnées :

$$\begin{array}{rcrcrcl} & & x_1 & - & x_2 & + & x_3 = 0 \\ \textit{pivot 10 (}10x_2\textit{)} & \longrightarrow & & & \boxed{10x_2} & + & 25x_3 = 90 \\ \textit{à éliminer} & \longrightarrow & & & \boxed{30x_2} & - & 20x_3 = 80 \\ & & & & & & 0 = 0 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 25 & 90 \\ 0 & 30 & -20 & 80 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad (4)$$

A l'aide de la $2^{\text{ème}}$ équation et du terme pivot $10x_2$, éliminer x_2 dans les autres équations (1 seule à traiter ici) ; pour cela : on ajoute $(-3L_2)$ à la $3^{\text{ème}}$ équation. Cela donne :

$$\begin{array}{rcr} x_1 - x_2 + x_3 & = & 0 \\ 10x_2 + 25x_3 & = & 90 \\ -95x_3 & = & -190 \\ 0 & = & 0 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 25 & 90 \\ 0 & 0 & -95 & -190 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad (5)$$

(Attention à ne pas oublier de transformer les scalaires b_j de droite dans ces opérations successives !)

<u>$3^{\text{ème}}$ *étape :*</u> *Résolution en remontant dans les équations.*

De la $3^{\text{ème}}$ équation de (5) on tire directement $x_3 = 2$; avec cette information, de la $2^{\text{ème}}$ équation on tire $x_2 = 4$; connaissant x_3 et x_2, de la $1^{\text{ère}}$ équation on tire $x_1 = 2$.

<u>*Résumé :*</u> *(3) était un système de 4 équations à 3 inconnues ; on en a tiré une solution unique* $(x_1 = 2, x_2 = 4, x_3 = 2)$

Cet exemple illustre **les diverses opérations dans une élimination de GAUSS :**
- Multiplier une équation par un terme non nul
- Ajouter (ou soustraire) le multiple d'une équation à une autre
- Echanger l'ordre de deux équations.

Les opérations correspondantes sur la "matrice augmentée" $[A\vdots b]$ sont : multiplier une ligne par un terme non nul ; ajouter (ou soustraire) le multiple d'une ligne à une autre ; échanger deux lignes.

Définitions:
Le système linéaire (1) est dit **sur-déterminé** s'il y a plus d'équations que d'inconnues ($m > n$), **déterminé** si $m = n$, et **sous-déterminé** s'il y a moins d'équations que d'inconnues ($m < n$).

Le système linéaire (1) est dit **compatible** (ou consistant) s'il a une solution au moins, **incompatible** (ou inconsistant) s'il n'a aucune solution.

Exemple 2 (Système linéaire à une infinité de solutions)**:**

Matrice $[\ A \vdots b\ ]$

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} \textit{pivot} \longrightarrow & & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & - & 5x_4 & = & 8 \\ \textit{à éliminer} \longrightarrow & & \boxed{\begin{array}{c} 0,6x_1 \\ 1,2x_1 \end{array}} & \begin{array}{c} + \\ - \end{array} & \begin{array}{c} 1,5x_2 \\ 0,3x_2 \end{array} & \begin{array}{c} + \\ - \end{array} & \begin{array}{c} 1,5x_3 \\ 0,3x_3 \end{array} & \begin{array}{c} - \\ + \end{array} & \begin{array}{c} 5,4x_4 \\ 2,4x_4 \end{array} & \begin{array}{c} = \\ = \end{array} & \begin{array}{c} 2,7 \\ 2,1 \end{array} \end{array} \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 2 & -5 & 8 \\ 0,6 & 1,5 & 1,5 & -5,4 & 2,7 \\ 1,2 & -0,3 & -0,3 & 2,4 & 2,1 \end{array}\right] (6)$$

<u>$1^{\text{ère}}$ *étape :*</u> *Elimination de x_1 dans la $2^{\text{ème}}$ et $3^{\text{ème}}$ équation.*

On ajoute $(-0,2L_1)$ à la $2^{\text{ème}}$ équation, on ajoute $(-0,4L_1)$ à la $3^{\text{ème}}$. Cela conduit à :

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} & & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & - & 5x_4 & = & 8 \\ \textit{pivot} \longrightarrow & & & & 1,1x_2 & + & 1,1x_3 & - & 4,4x_4 & = & 1,1 \\ \textit{à éliminer} \longrightarrow & & & & \boxed{-1,1x_2} & - & 1,1x_3 & + & 4,4x_4 & = & -1,1 \end{array} \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 2 & -5 & 8 \\ 0 & 1,1 & 1,1 & -4,4 & 1,1 \\ 0 & -1,1 & -1,1 & 4,4 & -1,1 \end{array}\right]$$

$2^{\text{ème}}$ étape : Elimination de x_2 dans la $3^{\text{ème}}$ équation.

Pour cela : ajouter L_2 à L_3 ($3^{\text{ème}}$ équation) ; cela donne :

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & - & 5x_4 & = & 8 \\ & & 1,1x_2 & + & 1,1x_3 & - & 4,4x_4 & = & 1,1 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 2 & -5 & 8 \\ 0 & 1,1 & 1,1 & -4,4 & 1,1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$3^{\text{ème}}$ étape : Résolution en remontant dans les équations.

*De la $2^{\text{ème}}$ équation on tire $x_2 = 1 - x_3 + 4x_4$; de ceci et de la $1^{\text{ère}}$ équation, on tire $x_1 = 2 - x_4$. Les valeurs de x_3 et x_4 **peuvent-être choisies comme on veut ;** une fois ce choix fait, on a x_1 et x_2. Les solutions du système proposé sont donc : $(2 - x_4, 1 - x_3 - 4x_4, x_3, x_4)$ x_3 et x_4 quelconques.*

On a traité ici un système sous-déterminé : (6) comportait 3 équations à 4 inconnues.

Exemple 3 (Système linéaire à une et une seule solution)**:**

$$\begin{array}{r} \textit{pivot} \longrightarrow \\ \textit{à éliminer} \longrightarrow \end{array} \begin{array}{rcrcrcl} -x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ \boxed{3x_1} & - & x_2 & + & x_3 & = & 6 \\ \boxed{-x_1} & + & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \textit{Matrice } [\, A \,\vdots\, b \,] \\ \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 6 \\ -1 & 3 & 4 & 4 \end{array}\right] \end{array} \qquad (7)$$

$1^{\text{ère}}$ étape : Elimination de x_1 dans la $2^{\text{ème}}$ et $3^{\text{ème}}$ équation.

ajouter $(3L_1)$ à L_2, faire $L_3 - L_1$. Cela donne :

$$\begin{array}{rcrcrcl} -x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ & \textit{pivot} \longrightarrow & 2x_2 & + & 7x_3 & = & 12 \\ & \textit{à éliminer} \longrightarrow & \boxed{2x_2} & + & 2x_3 & = & 2 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 7 & 12 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

$2^{\text{ème}}$ étape : Elimination de x_2 dans la $3^{\text{ème}}$ équation.

Pour cela : ajouter $-L_2$ à L_3 ; cela donne :

$$\begin{array}{rcrcrcl} -x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ & & 2x_2 & + & 7x_3 & = & 12 \\ & & & & -5x_3 & = & -10 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \end{array}\right]$$

$3^{\text{ème}}$ étape : Résolution en remontant dans les équations.

De la dernière on tire $x_3 = 2$, puis de la $2^{\text{ème}}$ $x_2 = -1$, enfin de la $1^{\text{ère}}$ $x_1 = 1$.

On a traité dans cet exemple un système déterminé : ((7) comportait 3 équations à 3 inconnues). En définitive, ce système linéaire (7) possède une seule solution $(x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2)$.

Exemple 4 (Système linéaire sans solution)**:**

$$\begin{array}{rcccccccc} \textit{pivot} \longrightarrow & \boxed{3x_1} & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ \textit{à éliminer} \longrightarrow & \boxed{2x_1} & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & \boxed{6x_1} & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 6 \end{array} \qquad \textit{Matrice } [\,A \mid b\,] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 4 & 6 \end{array}\right] \tag{8}$$

<u>$1^{ère}$ *étape :*</u> *Elimination de x_1 dans la $2^{ème}$ et $3^{ème}$ équation.*
Pour cela, on ajoute $-\frac{2}{3}L_1$ à L_2, on ajoute $-2L_1$ à L_3 ; cela conduit à :

$$\begin{array}{rcccccc} 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ \textit{pivot} \longrightarrow & & -\frac{1}{3}x_2 & + & \frac{1}{3}x_3 & = & -2 \\ \textit{à éliminer} \longrightarrow & & \boxed{-2x_2} & + & 2x_3 & = & 0 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

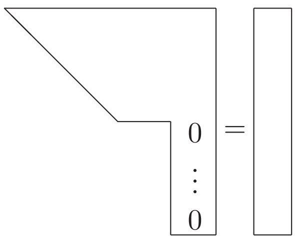
<u>$2^{ème}$ *étape :*</u> *Elimination de x_2 dans la $3^{ème}$ équation.*
Pour cela, on ajoute $-6L_2$ à L_3 ; cela donne :

$$\begin{array}{rcccccc} 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ & & -\frac{1}{3}x_2 & + & \frac{1}{3}x_3 & = & -2 \\ & & & & 0 & = & 12 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{array}\right]$$

<u>$3^{ème}$ *étape :*</u> *Fin de la résolution.*
En raison de la $3^{ème}$ équation qui est impossible, le système (8) traité (3 équations, 3 inconnues) n'a pas de solution.

A l'aide des opérations élémentaires du procédé d'élimination de Gauss, on peut toujours arriver à mettre un système linéaire sous une **forme dite échelonnée**, c'est-à-dire comme ceci :

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots\ldots\ldots\ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \nearrow & & c_{22}x_2 & + & \ldots\ldots\ldots\ldots & + & c_{2n}x_n & = & b_2^* \\ \neq 0 & & \nearrow & & & \vdots & & & \\ & & \neq 0 & & k_{rr}x_r & + & k_{rn}x_n & = & \hat{b}_r \\ & & & & \nearrow & & 0 & = & \hat{b}_{r+1} \\ & & & & \neq 0 & & \vdots & & \\ & & & & & & 0 & = & \hat{b}_m \end{array} \quad \begin{array}{l} \updownarrow r \\ \\ \updownarrow m \geq r \end{array}$$



(9)

avec $a_{11} \neq 0$, $c_{22} \neq 0$, $\ldots$, $k_{rr} \neq 0$.

En clair : les lignes de A commencent par un nombre strictement croissant de zéros à mesure que l'indice des lignes augmente.

Il y a 3 cas de figure concernant le schéma général(9) :

- Si $r < m$ et que l'un des $\widehat{b}_j$, $r+1 \leq j \leq m$, n'est pas nul : le système est incompatible, (9) n'a aucune solution. C'était le cas dans l'exemple 4, avec $r = 2 < m = 3$ et $\widehat{b}_{r+1} = \widehat{b}_3 = 12$

$$\begin{array}{ccc} * & * & * \\ & * & * \\ & & 0 \end{array} = \begin{array}{c} * \\ * \\ 12 \end{array}$$

- Si $r = n$ et si les $\widehat{b}_{r+1}, \ldots, \widehat{b}_m$ sont nuls (s'ils sont présents) : le système a alors une et une seule solution. Il suffit de remonter à partir de la $r = n^{ème}$ équation de (9). C'était le cas dans l'exemple 1, avec $r = n = 3$ et $m = 4$

$$\begin{array}{ccc} * & * & * \\ & * & * \\ & & * \\ & & 0 \end{array} = \begin{array}{c} * \\ * \\ * \\ 0 \end{array}$$

- Si $r < n$ et si les $\widehat{b}_{r+1}, \ldots, \widehat{b}_m$ sont nuls (s'ils sont présents) : le système a alors une infinité de solutions. On choisit en effet $x_{r+1}, \ldots, x_n$ comme on veut ; ensuite la $(r-1)^{ème}$ équation conduit à x_{r-1} en fonction de $x_r, x_{r+1}, \ldots, x_n$; puis on continue en remontant dans les équations. C'était le cas dans l'exemple 2 avec $r = 2$, $n = 4$ et $m = 3$.

$$\begin{array}{cccc} * & * & * & * \\ & * & * & * \\ & & & 0 \end{array} = \begin{array}{c} * \\ * \\ 0 \end{array}$$

II.3. Rang d'une matrice.

Définitions:
Le **rang** d'une matrice $A = [a_{ij}]$ est le nombre maximal de vecteurs lignes de A qui sont linéairement indépendants. On note **rgA** cet entier.

Noter que rgA n'est nul que si A est la matrice nulle.

Exemple:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ -6 & 42 & 24 & 54 \\ 21 & -21 & 0 & -15 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R}) \tag{10}$$

est de rang 2 car :
- Les 3 vecteurs lignes sont linéairement dépendants,

$$6L_1 - \frac{1}{2}L_2 - L_3 = 0;$$

- Les 2 premiers vecteurs lignes sont linéairement indépendants (ils ne sont pas colinéaires).

Propriétés (essentielle)**:**
Le rang de A est aussi le nombre maximal de vecteurs colonnes de A qui sont linéairement indépendants. Ainsi :

$$\boxed{\mathbf{rg(A^T) = rgA}}$$

Exemple:
Reprenons la matrice A de (10) : puisque son rang est 2, il y a au moins 2 vecteurs colonnes linéairement indépendants ; et chaque fois qu'on prend 3 vecteurs colonnes, on est sûr qu'ils sont linéairement dépendants. Avouez que ça ne saute pas aux yeux !

.

Retenir que pour $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\;\;)$, $rgA \leq m$ et $rgA \leq n$.

Note: Dans un système linéaire $AX = b$, avec $m \leq n$ (moins d'équations que d'inconnues, ce qui est le cas usuel), il est fréquent qu'on ait $rgA = m$ (i.e. A est de "rang maximal").

Exemple:
Dans une matrice rectangulaire ($m \neq n$), soit les vecteurs lignes soit les vecteurs colonnes sont (toujours) linéairement dépendants.

II.4. Solutions de systèmes linéaires : existence de solutions, unicité.

Théorème:

– Existence. Le système linéaire

$$AX = b, A \in \mathcal{M}_{m,n}(\;\;) \; et \; b \in \;\;^{m} \tag{11}$$

a des solutions si et seulement si la matrice A et la matrice "augmentée" $\hat{A} = [A \vdots b] \in \mathcal{M}_{m,n+1}(\;\;)$ **ont le même rang**.

– Unicité. Le système linéaire (11) a une et une seule solution si et seulement si $\mathbf{rgA} = \mathbf{rg\hat{A}} = \mathbf{n}$.

– Infinité de solutions. Si $rgA = rg\hat{A} < n$, le système linéaire(11) a une infinité de solutions.

Cas particulier :

$$AX = b \; avec \; A \in \mathcal{M}_{n}(\;\;) \; et \; b \in \;\;^{n} \tag{12}$$

(A matrice **carrée**, il y a **autant d'équations que d'inconnues**).

Alors :

$$\begin{pmatrix} rgA = n \\ \text{(rang maximal donc)} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} A \text{ est inversible} \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas, (12) a une et une seule solution, qui est $X = A^{-1}b$.

II.5. Trace d'une matrice carrée.

Si $A \in \mathcal{M}_{n}(\;\;)$, on appelle **trace** de A la somme des éléments diagonaux de A,

$$A = [a_{ij}], \; trA = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}.$$

Propriétés :

. $tr(AB) = trA + trB$; $tr(cA) = ctrA$; $tr(A^T) = trA$.

. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\;\;)$, $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\;\;)$, de sorte qu'on peut effectuer les deux produits AB et BA ; ainsi $AB \in \mathcal{M}_{m}(\;\;)$ et $BA \in \mathcal{M}_{n}(\;\;)$ (elles peuvent donc être de tailles très différentes). Alors

$$\boxed{tr(AB) = tr(BA)}$$

Ceci est un résultat très utile ... Attention, il est faux de dire que $tr(AB) = (trA)(trB)$.