Exercice 1 On lance indéfiniment un dé à 4 faces (un tétraèdre régulier) non pipé pour définir le processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec pour X_j le maximum des j premiers lancers du dé.

1. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov.
2. Donner la matrice de transition de la chaîne et une représentation graphique de celle-ci.
3. Déterminer le statut (de passage ou final) des états de la chaîne.
4. Montrer que la chaîne possède comme loi limite son unique loi invariante.

Exercice 2 On considère une chaîne de Markov à 8 états dont la matrice de transition est donnée par :

$$T = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0,5 & 0,3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0,5 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0,5 & 0,3 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,2 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,7 & 0,5 \end{pmatrix}$$

1. Donner une représentation graphique de celle-ci.
2. Donner les classes de la chaîne.
3. Déterminer le statut (de passage ou final) des états de la chaîne.
4. Déterminer toutes les probabilités stationnaires de la chaîne.

Exercice 3 On considère une chaîne de Markov à 4 états dont la matrice de transition est donnée par :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Donner les classes de la chaîne.
2. Déterminer toutes les probabilités stationnaires de la chaîne.
3. Déterminer le comportement asymptotique de la chaîne.

Exercice 4 On considère une chaîne de Markov homogène $(X_n)_{n\geq 0}$ prenant ses valeurs dans l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, telle que $\mathbb{P}\{X_0 = 1\} = 1$ et dont la matrice de transition est

$$S = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0,2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,3 & 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0,7 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,3 & 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0,3 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,4 & 0 & 0 & 0,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,7 & 0,4 & 0 & 0,3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer α. Tracer le graphe $\mathcal{G}$ associé à cette chaîne de Markov. Déterminer les classes d'équivalence de $\mathcal{G}$ et préciser quelles sont les classes finales et les classes de passage.
2. Pour $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, montrer que la suite $(\mathbb{P}\{X_n = k\})_{n \geq 0}$ a une limite et la déterminer.
3. Dans cette question, on considère une chaîne de Markov homogène $(Y_n)_{n \geq 0}$ prenant ses valeurs dans l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, telle que $\mathbb{P}\{Y_0 = 1\} = 1$ et dont la matrice de transition T se déduit formellement de S en supprimant les deux dernières lignes et les deux dernières colonnes,Pour $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, montrer que la suite $(\mathbb{P}\{Y_n = k\})_{n \geq 0}$ a une limite et la déterminer.

Exercice 5 Une étude anthropologique est menée sur une sympathique tribu de mi-humain (pour anthropo) mi-farfadets -non pipés- Chaque jour, 30% de cette population mange des "klagouts" (petite châtaigne typique des forêts farfadiques), 30% avalent des "glutz" (fleur rare, qu'on considèrera à une température $T = 297°$K constante) et le reste boivent du "Pitagru" (liqueur d'origine méta-naturelle)

Après une ingestion (par n'importe quelle modalité...) de 3 klagouts d'affilé, le farfadet meurt. La prise de glutz allonge l'effet des klagouts dans le sens où il ne brise pas la séquence menant à la mort. La seule solution pour briser cette chaîne est de se saouler avec du Pitagru, mais attention aux gueules de bois !

1. Montrer qu'on peut modéliser la vie d'un individu par une chaine de Markov.
2. Tracer le graphe de la chaine et donner sa matrice de transition.
3. Quelle est la proportion de cette population qui est encore vivante à 10 jours ?
4. Déterminer l'espérance (en nombre de jour) de survie d'un individu de cette tribu.

Exercice 6 (Un jeu de tennis) On considère un jeu classique du tennis (pas un jeu décisif) de Daniel contre Olivier. C'est à Olivier de servir. Il gagne chaque point avec probabilité p. Modéliser par une chaîne de Markov et donner la probabilité pour Olivier de gagner le jeu.

Indications pour l'exercice 1 :

Q1 Pour la question 1, il faut prouver que la propriété de Markov est vérifiée avec des calculs de probabilités conditionnelles.

Q1 Exprimer X_{n+1} en fonction de X_n et du résultat du $n+1$ième lancé de dé.

Q1 Dans une probabilité conditionnelle, si on conditionne par "$X_j = e$" alors on peut remplacer tous les X_j par des e.

Q1 Si on conditionne par "$X_j = e$" mais qu'il n'y a que des variables indépendantes de X_j dans la probabilité, on peut enlever la condition $X_j = e$".

Q4 Dans cette question, on demande une démonstration sur la base de calcul matriciel. Vous n'avez pas encore les théorèmes pour l'affirmer.

Indications pour l'exercice 3 :

Q3 Le comportement asymptotique signifie le comportement de la suite des lois $\mathbb{P}_n$ pour les n grands.

Q3 Si vous ne voyez pas comment partir, donner un nom à la loi initiale et calculer les lois $\mathbb{P}_1$, $\mathbb{P}_2$... jusqu'à ce que vous arriviez à dire ce qui se passe.

Correction exercice 1 : Notons $(Y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ la suite des résultats du dé. On sait alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \max\{Y_j, , j \in [\![1; n]\!]\}$

1. Soit $(i_1, \ldots, i_{n+1}) \in \{1, 2, 3, 4\}^{n+1}$, on veut montrer que

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} \,|\, X_n = i_n, \ldots, X_1 = i_1) = \mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} \,|\, X_n = i_n)$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} \,|\, X_n = i_n, \ldots, X_1 = i_1) &= \mathbb{P}(\max_{j\in[\![1;n+1]\!]}\{Y_j\} = i_{n+1} \,|\, X_n = i_n, \ldots, X_1 = i_1)\\ &= \mathbb{P}(\max\{X_n; Y_{n+1}\} = i_{n+1} \,|\, X_n = i_n, \ldots, X_1 = i_1)\\ &= \mathbb{P}(\max\{i_n; Y_{n+1}\} = i_{n+1} \,|\, X_n = i_n, \ldots, X_1 = i_1)\\ &= \mathbb{P}(\max\{i_n; Y_{n+1}\} = i_{n+1})\end{aligned}$$

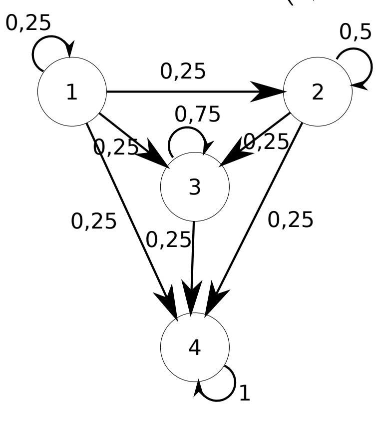
   par indépendance de Y_{n+1} et des X_k pour $k \leq n$
   De même, on montre que

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} \,|\, X_n = i_n) = \mathbb{P}(\max\{i_n; Y_{n+1}\} = i_{n+1})$$

   donc on a bien :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} \,|\, X_n = i_n, \ldots, X_1 = i_1) = \mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} \,|\, X_n = i_n)$$

2. La matrice de transition de la chaîne est : $T = \begin{pmatrix} 0,25 & 0 & 0 & 0\\ 0,25 & 0,5 & 0 & 0\\ 0,25 & 0,25 & 0,75 & 0\\ 0,25 & 0,25 & 0,25 & 1\end{pmatrix}$

   Le graphe de la chaîne est : 

3. Cette chaîne a comme seul classe finale la classe $\{4\}$ donc un seul état final 4. Les états 1, 2 et 3 sont de passage.
4. Les probabilités stationnaires d'une chaîne ne charge que les états finaux, donc cette chaîne a une unique probabilité stationnaire $\Pi_0 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

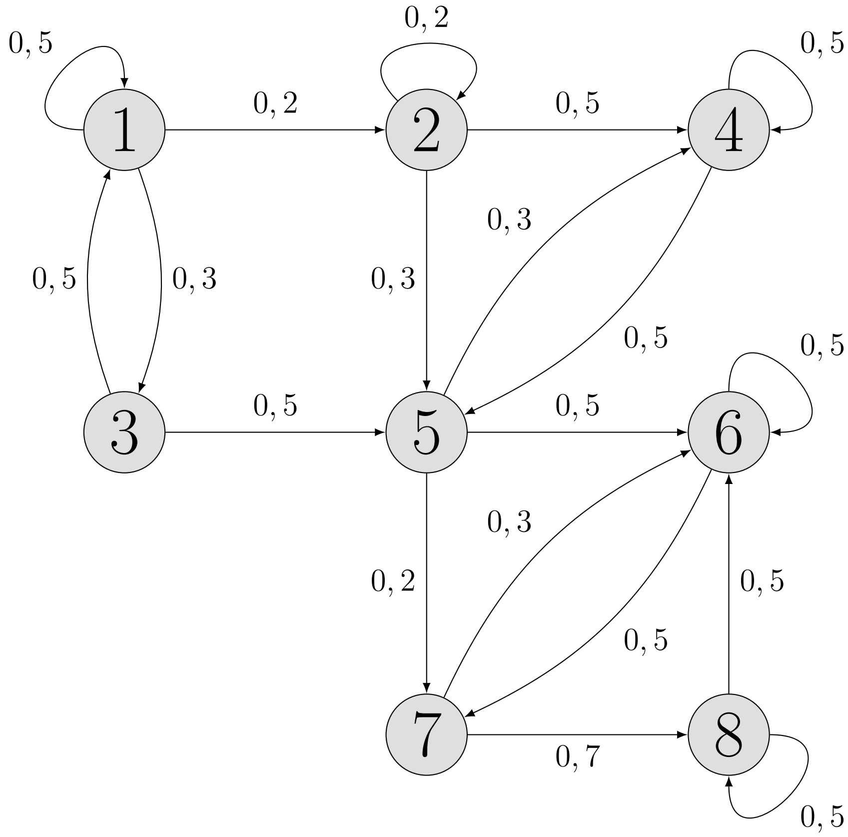
Soit $\mathbb{P}_n$ la matrice colonne de la loi de X_n. On sait que $\mathbb{P}_n = T^n\mathbb{P}_0$ or T est diagonalisable puisqu'elle a 4 valeurs propres distinctes $(0,25; 0,5; 0,75; 1)$ Ainsi, il existe une matrice inversible P telle que $T = P\begin{pmatrix} 0,25 & & & \\ & 0,5 & & \\ & & 0,75 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$

Donc $T^n = P\begin{pmatrix} 0,25^n & & & \\ & 0,5^n & & \\ & & 0,75^n & \\ & & & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$ et T^n converge vers $P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$

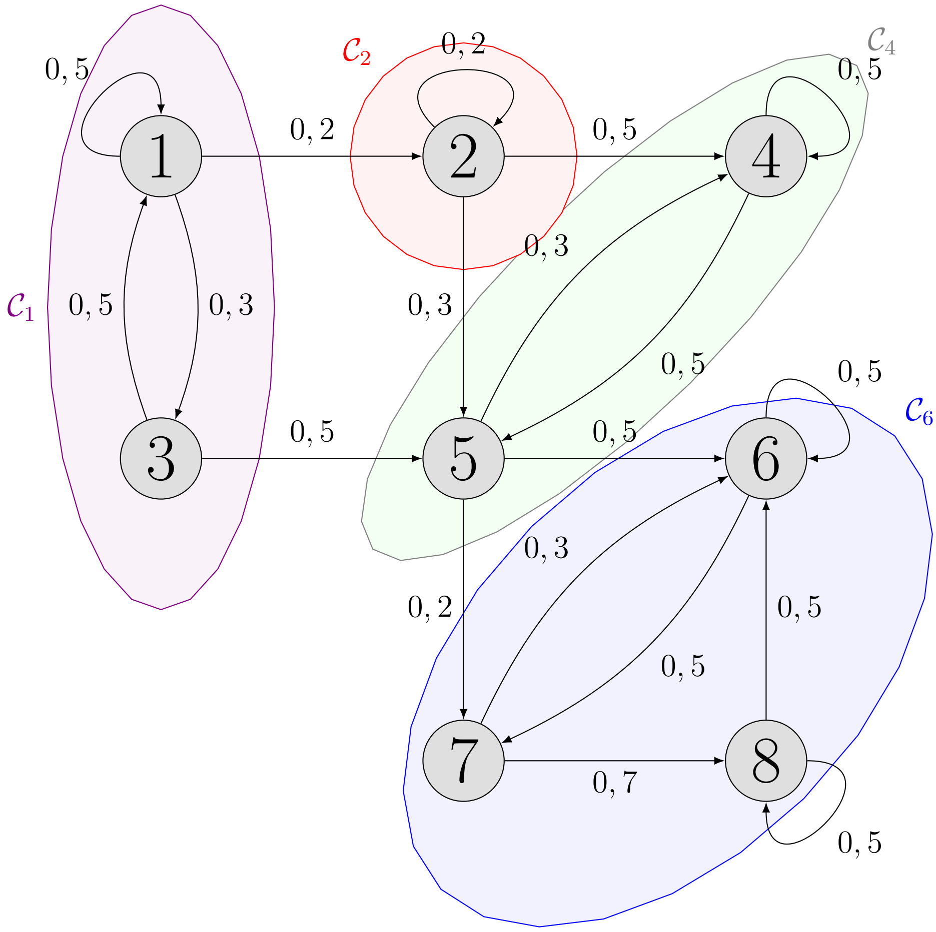
Ainsi $\mathbb{P}_n$ converge vers une probabilité limite $\mathbb{P}_{lim}$.

On sait que $\mathbb{P}_{n+1}$ converge aussi vers $\mathbb{P}_{lim}$ et que $\mathbb{P}_{n+1} = T\mathbb{P}_n$ donc en passant à la limite dans cette dernière équation, $\mathbb{P}_{lim} = T\mathbb{P}_{lim}$. Donc $\mathbb{P}_{lim}$ est l'unique probabilité stationnaire de la chaîne $\mathbb{P}_{lim} = \Pi_0$.

Correction exercice 2 :



1.
2. Les classes de la chaîne sont : $\mathcal{C}_1 = \{1,3\}$, $\mathcal{C}_2 = \{2\}$, $\mathcal{C}_4 = \{4,5\}$ et $\mathcal{C}_6 = \{6,7,8\}$.



3. Parmi ces 4 classes, l'ordre est le suivant : $\mathcal{C}_1 > \mathcal{C}_2 > \mathcal{C}_4 > \mathcal{C}_6$. Donc les états finaux sont ceux de $\mathcal{C}_6$ c'est-à-dire 6,7 et 8. Les autres sont de passage.
4. D'après le cours, dans une loi stationnaire, les états de passage sont de probabilité nulle. Nous allons donc chercher la loi stationnaire de la chaîne restreinte à la classe $\mathcal{C}_6$.

   Soit $T_{\mathcal{C}_6} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,5 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,7 & 0,5 \end{pmatrix}$ la matrice de la chaîne restreinte à la classe $\mathcal{C}_6$.

   On cherche $\Pi_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ tel que $T_{\mathcal{C}_6}\Pi_0 = \Pi_0$ et $a+b+c=1$ et $(a,b,c) \in [0;1]^3$.on veut donc résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rrrl} 0,5a & +0,3b & +0,5c & = a \\ 0,5a & & & = b \\ & 0,7b & +0,5c & = c \\ a & +b & +c & = 1 \end{array}\right.$$

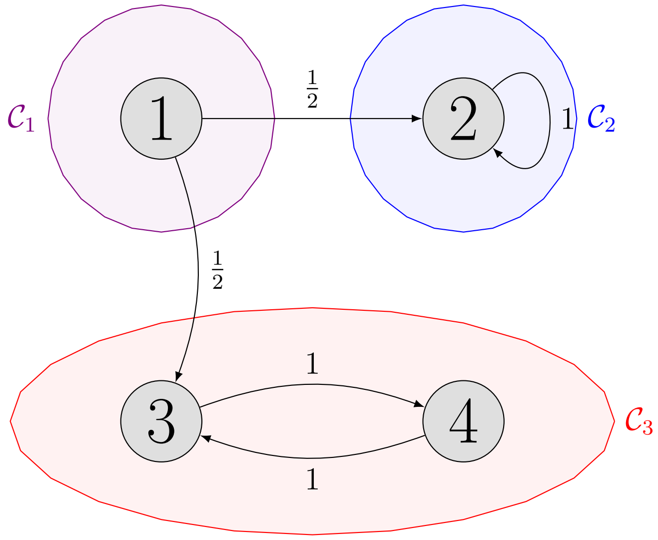
$$\Leftrightarrow \begin{cases} b + 0,3b + 0,7b = & 2b \\ a = & 2b \\ c = & 1,4b \\ 2b + b + 1,4b = & 1 \end{cases}$$

Donc :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = & \dfrac{5}{11} \\ b = & \dfrac{5}{22} \\ c = & \dfrac{7}{22} \end{cases}$$

Ainsi, la loi stationnaire de la chaîne complète est donc $\Pi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{5}{11} \\ \frac{5}{22} \\ \frac{7}{22} \end{pmatrix}$.

Correction exercice 3 :



1. Les classes de la chaîne sont $\mathcal{C}_1 = \{1\}$, $\mathcal{C}_2 = \{2\}$ et $\mathcal{C}_3 = \{3,4\}$ avec $\mathcal{C}_1 > \mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_1 > \mathcal{C}_3$.

2. On cherche $\Pi = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ tel que $a+b+c+d=1$, $(a,b,c,d) \in [0,1]^4$ et $M\Pi = \Pi$.

   C'est-à-dire :

$$\begin{cases} 0 &= a \\ \frac{1}{2}a + b &= b \\ \frac{1}{2}a + d &= b \\ c &= d \\ a+b+c+d &= 1 \\ (a,b,c,d) &\in [0,1]^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= 0 \\ c &= d \\ b &= 1-2d \\ d &\in [0, \frac{1}{2}] \end{cases}$$

   Donc les lois stationnaires de la chaîne sont les lois de la forme $\Pi_d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1-2d \\ d \\ d \end{pmatrix}$ avec $d \in [0, \frac{1}{2}]$.

   On peut aussi répondre à cette question en utiliser le théorème 8 du cours :

   Les classes finales sont $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$, les lois stationnaires des chaînes restreintes à ces classes finales sont respectivement : $\Pi_2 = (1)$ et $\Pi_3 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$.Donc, d'après le théorème 8, les lois stationnaires sont de la forme : $a\tilde{\Pi}_2 + b\tilde{\Pi}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0,5b \\ 0,5b \end{pmatrix}$ avec $(a,b) \in [0,1]^2$ et $a+b=1$

3. Notons la loi initiale $\mathbb{P}_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ d_0 \end{pmatrix}$ alors $\mathbb{P}_1 = M\mathbb{P}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}a_0 + b_0 \\ \frac{1}{2}a_0 + d_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$, $\mathbb{P}_2 = M\mathbb{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}a_0 + b_0 \\ c_0 \\ \frac{1}{2}a_0 + d_0 \end{pmatrix}$, $\mathbb{P}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}a_0 + b_0 \\ \frac{1}{2}a_0 + d_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \mathbb{P}_1$. Donc pour tous les nombres paires $2k$, $k \geq 1$, $\mathbb{P}_{2k} = \mathbb{P}_2$ et pour tous les nombres impaires $2k+1$, $\mathbb{P}_{2k+1} = \mathbb{P}_1$.

   Démontrons cela par récurrence sur k : $\mathcal{P}_k$="$\mathbb{P}_{2k+1} = \mathbb{P}_1$"

   Initialisation : Si $k=0$ on a bien $\mathbb{P}_{2\times 0+1} = \mathbb{P}_1$"

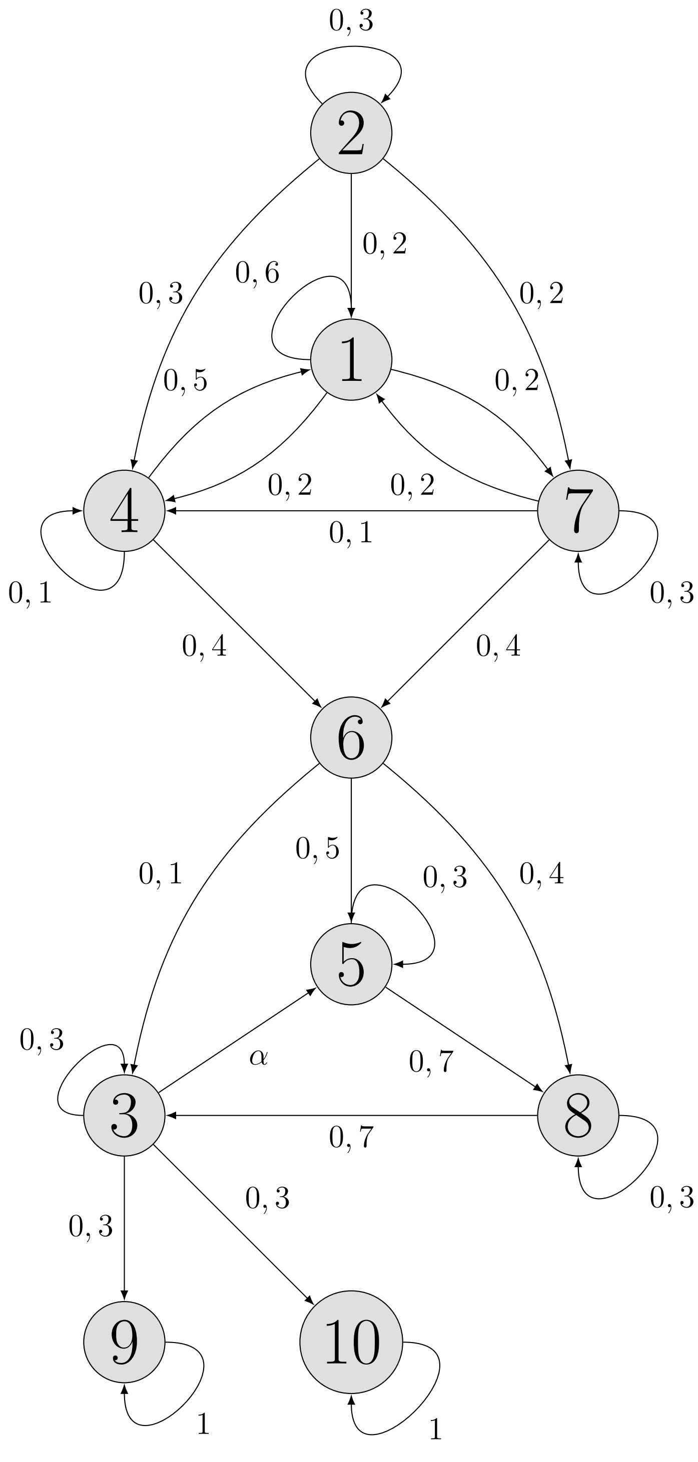
   Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$ supposons $\mathcal{P}_k$ alors $\mathbb{P}_{2(k+1)+1} = \mathbb{P}_{2k+3} = M^2\mathbb{P}_{2k+1} = M^2\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_3 = \mathbb{P}_1$.

   Conclusion : On a prouvé que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}_{2k+1} = \mathbb{P}_1$

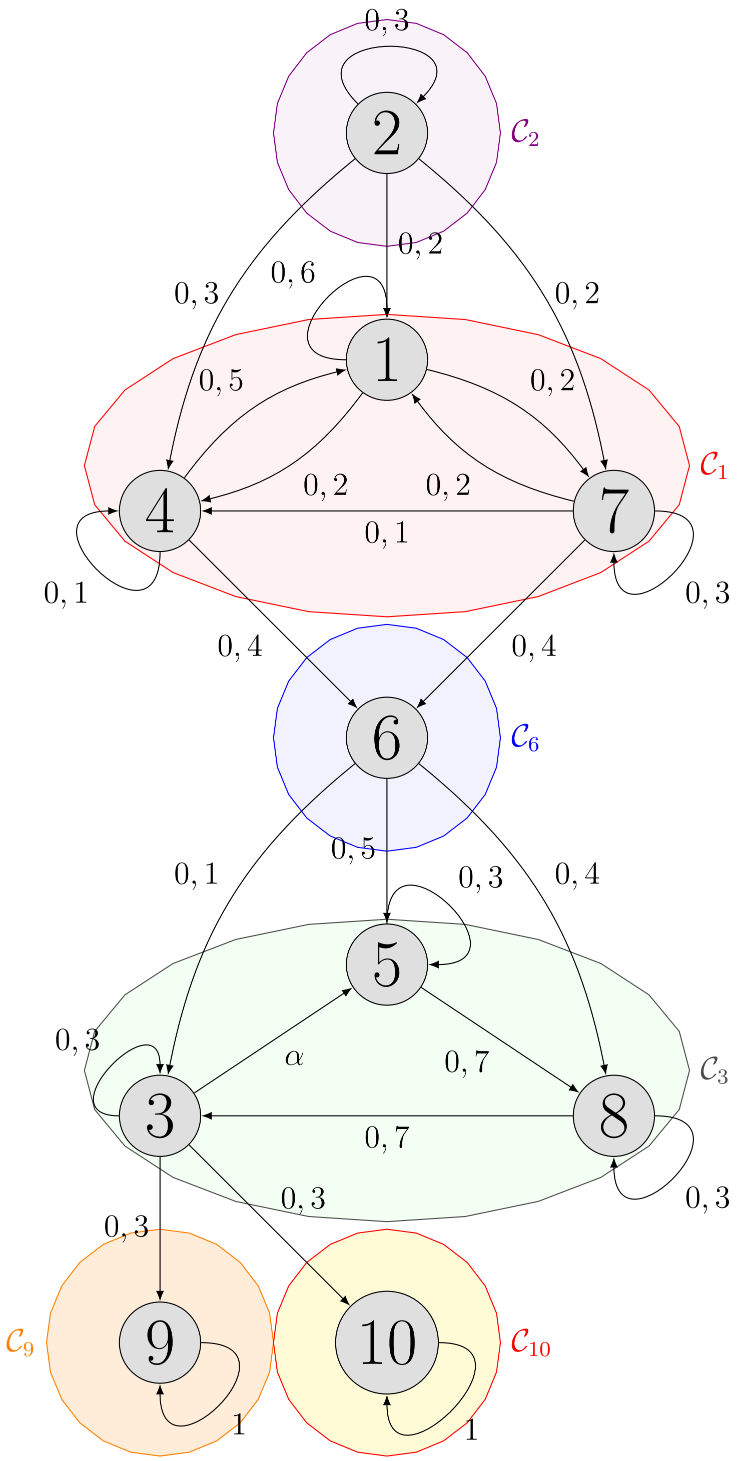
En multipliant ce résultat par M, nous obtenons la propriété pour les nombres paires : $\mathbb{P}_{2k+2} = \mathbb{P}_2$ pour $k \in \mathbb{N}$.

Donc la chaîne oscille entre 2 situations différentes.

Correction exercice 4 :



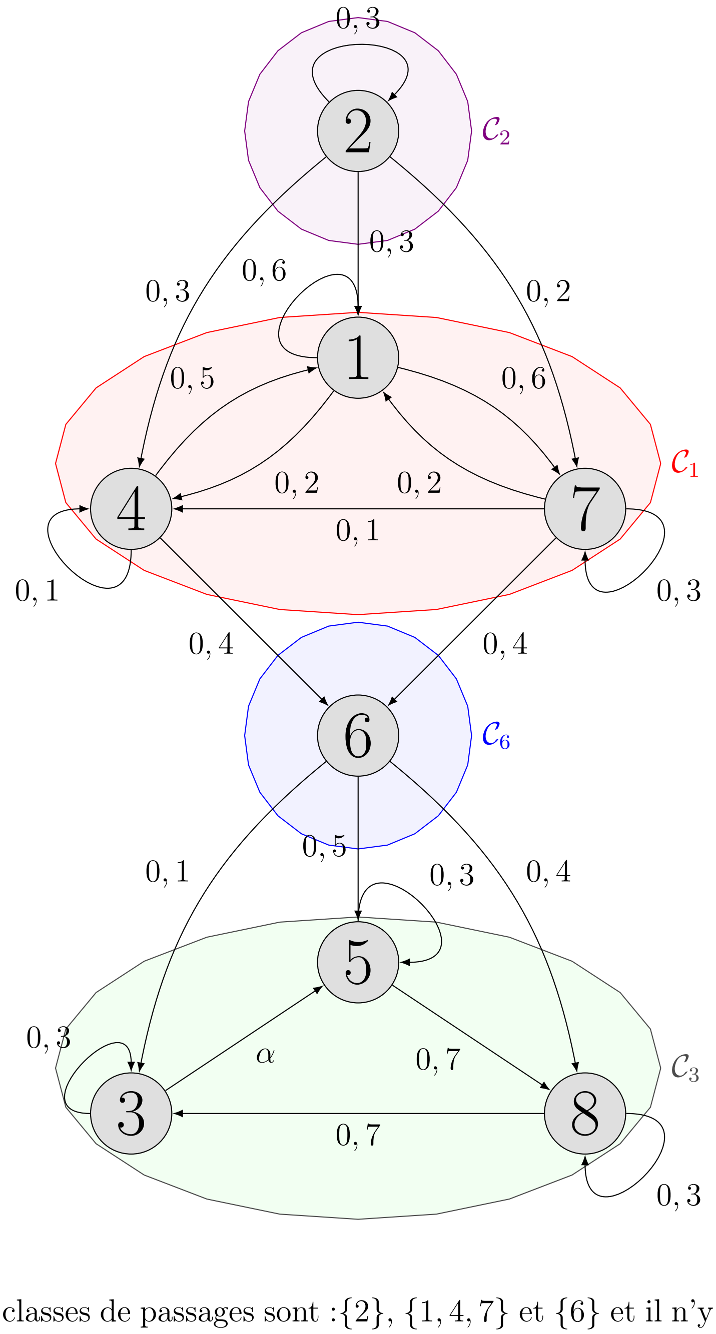
1. $\alpha = 0,1$ et les classes de passages sont : $\{2\}$, $\{1,4,7\}$, $\{3,5,8\}$ et $\{6\}$, les classes finales sont : $\{9\}$ et $\{10\}$.



2. Pour les états transitoires, c'est-à-dire $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $\mathbb{P}(X_n = k)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.
   Pour les états 8 et 9, on a $\forall n$ $\mathbb{P}(X_n = 9) = \mathbb{P}(X_n = 10)$ (cela se démontre par

récurrence) et on sait que $\mathbb{P}(X_n = 9) + \mathbb{P}(X_n = 10)$ converge vers 1 lorsque n tend vers l'infini. Donc $\mathbb{P}(X_n = 9) \rightarrow_{n\rightarrow\infty} 1/2$ et $\mathbb{P}(X_n = 10) \rightarrow_{n\rightarrow\infty} 1/2$.

3. La chaîne de Markov $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a le même graphe que la chaîne $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sans les deux classes finales.

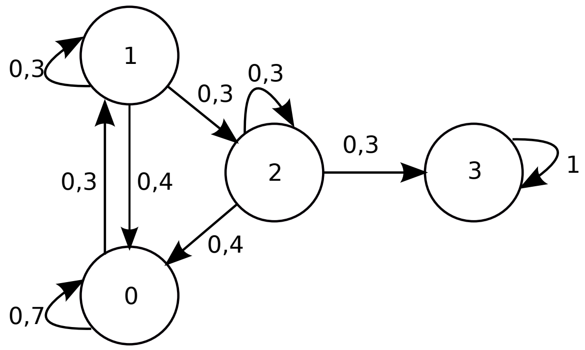


Maintenant les classes de passages sont :$\{2\}$, $\{1, 4, 7\}$ et $\{6\}$ et il n'y a qu'une classe finale :$\{3, 5, 8\}$ On a donc pour $k \in \{1, 2, 4, 6, 7\}$ $\mathbb{P}(Yn = k) \rightarrow_{n\rightarrow\infty} 0$. Et la loi limite pour les états $\{3, 5, 8\}$ est la loi stationnaire d'une chaîne de markov défini à partir de la matrice T en ne gardant que les lignes et les colonnes 3, 5 et 8 car cette chaîne de Markov est ergodique. Après calcul (ou par symétrie), cette loi invariante est $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Donc, pour $k \in \{3,5,8\}$, $\mathbb{P}(Yn = k) \to_{n\to\infty} \dfrac{1}{3}$ et pour $k \in \{1,2,4,6,7\}$ $\mathbb{P}(Yn = k) \to_{n\to\infty} 0$.

Correction exercice 5 :

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit X_n le nombre de klagouts ingéré par un farfadet depuis sa dernière cuite. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov car la connaissance du nombre de kaglouts ingérés depuis la dernière cuite suffit comme information sur le passé pour savoir l'effet qu'aura ses prochains repas. On suppose de plus que ces farfadet n'ont aucune mémoire et ne choisisse donc pas leur prochain repas en fonction de ceux pris avant. On considère aussi qu'à la naissance, le petit farfadet n'a mangé aucun klagouts.



2. Alors, le graphe de la chaîne est : et la matrice de transition de la chaîne est $T = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,4 & 0,4 & 0 \\ 0,3 & 0,3 & 0 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0,3 & 0 \\ 0 & 0 & 0,3 & 1 \end{pmatrix}$ et la probabilité initiale est $\mathbb{P}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

3. La proportion de la population encore vivante à 10 jours vaut $P(X_{10} \in \{0,1,2\}) = 1 - P(X_{10} = 3)$ Hors, si on note $\mathbb{P}_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \end{pmatrix}$, on sait que $\mathbb{P}_n = T^n \mathbb{P}_0$.

Donc, après calcul $\mathbb{P}_{10} \approx \begin{pmatrix} 0,45 \\ 0,21 \\ 0,09 \\ 0,25 \end{pmatrix}$. Donc la proportion des farfadets encore vivants à 10 jours est d'environ 75%.

4. On cherche ici l'espérance du temps d'atteinte de 3 partant de 0. Notons $t(3)$ le temps d'atteinte de 3 et E_i l'espérance du temps d'atteinte de 3 partant de l'état i. D'après le cours, on a l'égalité matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} E_0 & E_1 & E_2 \end{pmatrix} \left(I_3 - \begin{pmatrix} 0,7 & 0,4 & 0,4 \\ 0,3 & 0,3 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0,3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit le système :

$$\begin{cases} 0,3E_0 & -0,3E_1 & & = & 1 \\ -0,4E_0 & +0,7E_1 & -0,3E_2 & = & 1 \\ -0,4E_0 & & +0,7E_2 & = & 1 \end{cases}$$

Ce qui équivaut à :

$$\begin{cases} E_1 & = & E_0 - \frac{10}{3} \\ 1 & = & -0,4E_0 + 0,7(E_0 - \frac{10}{3}) - 0,3(\frac{10}{7} + \frac{4}{7}E_0) \\ E_2 & = & \frac{10}{7} + \frac{4}{7}E_0 \end{cases}$$

On obtient donc $(0,7 - 0,4 - \frac{1,2}{7})E_0 = \frac{7}{3} + \frac{3}{7} + 1$ donc $E_0 = \frac{790}{27} \approx 29,26$.
Ces farfadets vivent en moyenne un peu plus de 29 jours.

Version non matricielle : D'après le graphe, partant de 2, au pas suivant, on a une probabilité de 0,3 d'être en 3 ou en 2 et 0,4 d'être en 0. Donc :

$$E_2 = 1 + 0,4E_0 + 0,3E_2 + 0,3E_3$$

Partant de 3, on atteint 3 en 0 pas, donc $E_3 = 0$ et

$$0,7E_2 = 1 + 0,4E_0$$

Partant de 1, au pas suivant, on a une probabilité de 0,3 d'être en 1 ou en 2 et 0,4 d'être en 0. Donc :

$$E_1 = 1 + 0,4E_0 + 0,3E_1 + 0,3E_2$$

$$0,7E_1 = 1 + 0,4E_0 + 0,3E_2$$

Partant de 0, au pas suivant, on a une probabilité de 0,3 d'être en 1 0,7 d'être en 0. Donc :

$$E_1 = 1 + 0,7E_0 + 0,3E_1$$

$$0,3E_1 = 1 + 0,3E_1$$

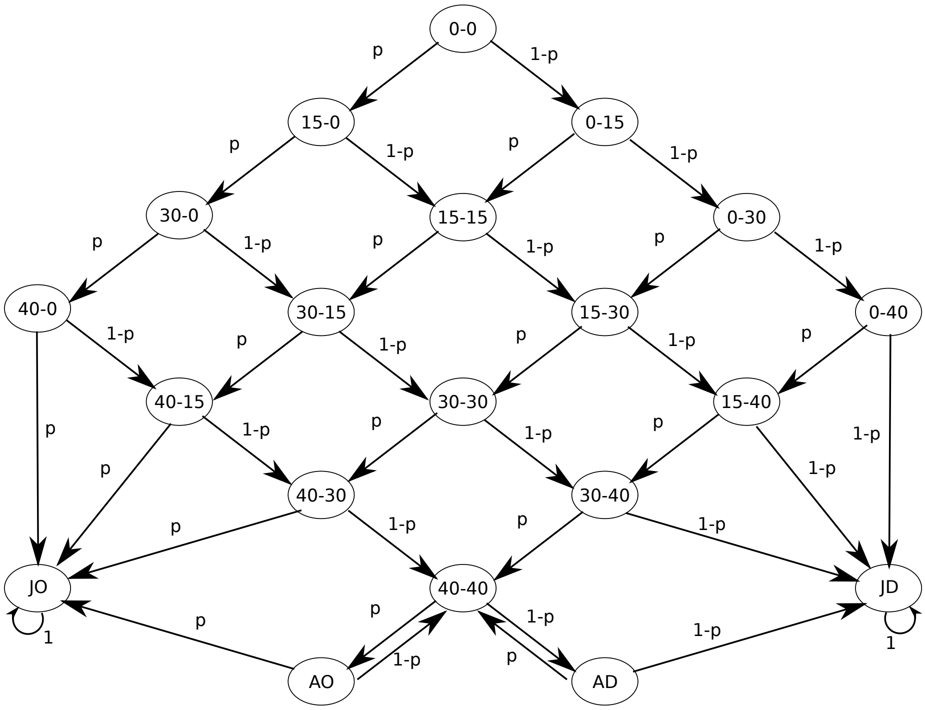
Nous obtenons donc le système :

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} -0,4E_0 & & +0,7E_2 & = & 1 \\ -0,4E_0 & +0,7E_1 & -0,3E_2 & = & 1 \\ 0,3E_0 & -0,3E_1 & & = & 1 \end{array}\right.$$

Correction exercice 6 : Soit X_n la variable aléatoire associé au score du jeu étudié après n balles échangées. L'ensemble des états est donc l'ensemble des doubles chiffres de type $30 - 40$ où le premier représente le score d'Olivier et le deuxième le score de Daniel plus

AO : Avantage Olivier
AD : Avantage Daniel
JO : Jeu Olivier
JD : Jeu Daniel

Voici le graphe de la chaîne :



On veut calculer la probabilité qu'Olivier gagne le jeu. C'est à dire : $\mathbb{P}(\exists n \in \mathbb{N},\, X_n = JO) = \mathbb{P}(\cup_{n=1}^{\infty} "X_n = JO")$. On va décomposer cette probabilité en fonction du nombre de balles échangée avant qu'Olivier gagne. $\mathbb{P}(\exists n \in \mathbb{N},\, X_n = JO) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = JO \text{ et } X_{n-1} \neq JO)$

On ne peut pas gagner en moins de 3 balles : $\mathbb{P}(X_3 = JO) = 0$

Pour gagner en 4 balles, il faut toutes les gagner :$\mathbb{P}(X_4 = JO) = p^4$

Pour gagner en 5 ou 6 balles, il faut en gagner 4 dont la dernière : $\mathbb{P}(X_5 = JO \cap X_4 \neq JO) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} p^4(1-p)$ $\mathbb{P}(X_5 = JO \cap X_4 \neq JO) = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} p^4(1-p)^2$

Et si personne n'a gagné en 6 balles, c'est qu'on est à égalité 40−40 : $\mathbb{P}(X_6 = 40-40) = \binom{6}{3} p^3(1-p)^3$

Partant que 40−40, on ne peut pas gagner en 1 balle, et en 2 balles, on a une probabilité qu'Olivier gagne de p^2, une probabilité de revenir à l'égalité de $2p(1-p)$ et que Daniel gagne de $(1-p)^2$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_{k+2} = JO \,|\, X_k = 40-40) = p^2$ et $\mathbb{P}(X_{k+2} = 40-40 \,|\, X_k = 40-40) = 2p(1-p)$.

Ainsi, la probabilité qu'Olivier gagne en exactement n balles avec $n \geq 7$ est nulle si n est impair et, si n est pair, vaut
$\mathbb{P}(X_n = JO \text{ et } X_{n-1} \neq JO) = \mathbb{P}(X_6 = 40-40)\mathbb{P}(X_{n-2} = 40-40 \,|\, X_6 = 40-40)\mathbb{P}(X_n = JO \,|\, X_{n-2} = 40-40)$

$\mathbb{P}(X_{n-2} = 40-40 \,|\, X_6 = 40-40) = \left(\prod_{k=1}^{\frac{n-8}{2}} \mathbb{P}(X_{6+2k} = 40-40 \,|\, X_{4+2k} = 40-40)\right) = (2p(1-p))^{\frac{n-8}{2}}$.

En rassemblant tous les morceaux :

$\mathbb{P}(\exists n \in \mathbb{N},\, X_n = JO) = p^4 + 4p^4(1-p) + 10p^4(1-p)^2 + 20p^3(1-p)^3 \sum_{k=0}^{\infty} (2p(1-p))^k p^2 = p^4 + 4p^4(1-p) + 10p^4(1-p)^2 + \frac{20p^5(1-p)^3}{1-2p(1-p)}$