La méthode du simplexe en tableau et en deux phases

Introduction à la recherche opérationnelle

25 février 2020

Le principe du simplexe sous forme de tableau est de ne plus écrire les variables du problème pour obtenir une forme plus synthétique et effectuer les opérations de changement de base seulement sur les coefficients.
Regardons tout d'abord la forme générale d'un tableau.

L'écriture sous forme de tableau nécessite d'avoir toutes les variables du même côté des égalités, ce qui donne :

Problème sous la forme canonique par rapport à la base réalisable de départ

$$z - c_1 x_1 - c_2 x_2 - \cdots - c_n x_n = 0$$

sous contraintes :

$$\left\{\begin{array}{lllll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} & & & & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + & x_{n+2} & & & = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + & & & x_{n+m} & = b_m \end{array}\right.$$

Le tableau correspondant :

	z	x_1	x_2	$\dots$	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	$\dots$	x_{n+m}	0
x_{n+1}	0	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1n}	1	0	$\dots$	0	b_1
x_{n+2}	0	a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2n}	0	1	$\dots$	0	b_2
	$\vdots$		$\vdots$				$\vdots$			$\vdots$
x_{n+m}	0	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mn}	0	0	$\dots$	1	b_m
z	1	$-c_1$	$-c_2$	$\dots$	$-c_n$	0	0	0	0	0

Le tableau correspondant :

	z	x_1	x_2	$\dots$	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	$\dots$	x_{n+m}	0
x_{n+1}	0	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1n}	1	0	$\dots$	0	b_1
x_{n+2}	0	a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2n}	0	1	$\dots$	0	b_2
	$\vdots$		$\vdots$				$\vdots$			$\vdots$
x_{n+m}	0	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mn}	0	0	$\dots$	1	b_m
z	1	$-c_1$	$-c_2$	$\dots$	$-c_n$	0	0	0	0	0

Le tableau correspondant :

	z	x_1	x_2	$\dots$	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	$\dots$	x_{n+m}	0
x_{n+1}	0	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1n}	1	0	$\dots$	0	b_1
x_{n+2}	0	a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2n}	0	1	$\dots$	0	b_2
	$\vdots$		$\vdots$				$\vdots$			$\vdots$
x_{n+m}	0	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mn}	0	0	$\dots$	1	b_m
z	1	$-c_1$	$-c_2$	$\dots$	$-c_n$	0	0	0	0	0

Le tableau correspondant :

	z	x_1	x_2	$\ldots$	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	$\ldots$	x_{n+m}	0
x_{n+1}	0	a_{11}	a_{12}	$\ldots$	a_{1n}	1	0	$\ldots$	0	b_1
x_{n+2}	0	a_{21}	a_{22}	$\ldots$	a_{2n}	0	1	$\ldots$	0	b_2
	$\vdots$		$\vdots$				$\vdots$			$\vdots$
x_{n+m}	0	a_{m1}	a_{m2}	$\ldots$	a_{mn}	0	0	$\ldots$	1	b_m
z	1	$-c_1$	$-c_2$	$\ldots$	$-c_n$	0	0	0	0	0

Le tableau correspondant :

$$
\begin{array}{c|c|cccccccc|c}
 & z & x_1 & x_2 & \dots & x_n & x_{n+1} & x_{n+2} & \dots & x_{n+m} & 0 \\
\hline
x_{n+1} & 0 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 & b_1 \\
x_{n+2} & 0 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 & b_2 \\
 & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & & \vdots \\
x_{n+m} & 0 & a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & 0 & 0 & \dots & 1 & b_m \\
\hline
z & 1 & -c_1 & -c_2 & \dots & -c_n & 0 & 0 & 0 & 0 & \color{red}{0} \\
\hline
\end{array}
$$

Le premier tableau du simplexe sur notre exemple

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	1	0	1	0	0	4
x_4	0	30	1	0	1	0	150
x_5	0	0	1	0	0	1	60
z	1	-3	-1	0	0	0	0

Choix de la variable entrante.

Comme les coefficients sont du côté gauche de l'égalité, la variable entrante est celle dont le coefficient est le plus petit (le plus négatif). Si tous les coefficients sont positifs, le simplexe est terminé et la solution courante est optimale.

Choix de la variable entrante.

Comme les coefficients sont du côté gauche de l'égalité, la variable entrante est celle dont le coefficient est le plus petit (le plus négatif). Si tous les coefficients sont positifs, le simplexe est terminé et la solution courante est optimale.

Choix de la variable sortante.

- Soit s l'indice de la variable entrante.
- Si il existe un indice r pour lequel le $min\left\{\frac{b_k}{a_{k,s}}, a_{k,s} > 0\right\}$ est atteint, alors x_r est la variable sortante.
- Sinon, le problème est non borné donc à reformuler.

Notation pour x_2 entre dans la base et x_{n+2} sort

$$
\begin{array}{c|c|cccccccc|c}
 & & & \downarrow & & & & & & & \\
 & z & x_1 & x_2 & \dots & x_n & x_{n+1} & x_{n+2} & \dots & x_{n+m} & 0 \\
\hline
x_{n+1} & 0 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 & b_1 \\
\leftarrow x_{n+2} & 0 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 & b_2 \\
 & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & & \vdots \\
x_{n+m} & 0 & a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & 0 & 0 & \dots & 1 & b_m \\
\hline
z & 1 & -c_1 & -c_2 & \dots & -c_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

Le premier tableau du simplexe sur notre exemple

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	1	0	1	0	0	4
x_4	0	30	1	0	1	0	150
x_5	0	0	1	0	0	1	60
z	1	-3	-1	0	0	0	0

Le premier tableau du simplexe sur notre exemple

	z	$\downarrow$ x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	**1**	0	1	0	0	4
x_4	0	**30**	1	0	1	0	150
x_5	0	**0**	1	0	0	1	60
z	1	-3	-1	0	0	0	0

- La variable entrante est x_1 avec le coefficient -3.

Le premier tableau du simplexe sur notre exemple

		z	$\downarrow$ x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
$\leftarrow$	x_3	0	**1**	0	1	0	0	4
	x_4	0	30	1	0	1	0	150
	x_5	0	0	1	0	0	1	60
	z	1	-3	-1	0	0	0	0

- La variable entrante est x_1 avec le coefficient -3.
- $min\left\{\frac{4}{1}, \frac{150}{30}\right\} = 4$ est atteint par la variable x_3.

Le premier tableau du simplexe sur notre exemple

		z	$\downarrow$ x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
$\leftarrow$	x_3	0	**1**	0	1	0	0	4
	x_4	0	30	1	0	1	0	150
	x_5	0	0	1	0	0	1	60
	z	1	-3	-1	0	0	0	0

- La variable entrante est x_1 avec le coefficient -3.
- $min\left\{\frac{4}{1}, \frac{150}{30}\right\} = 4$ est atteint par la variable x_3.
- On effectue le changement de base à partir de pivot trouvé.

Dans le tableau du simplexe

- Les coefficients $a_{k,s}$ correspondent à la colonne de la variable entrante selectionnée x_s.
- On cherche l'indice r de la ligne où le $min\left\{\frac{b_k}{a_{k,s}}, a_{k,s} > 0\right\}$ se produit.
- La variable x_r sort alors de la base.

Dans le tableau du simplexe

- Les coefficients $a_{k,s}$ correspondent à la colonne de la variable entrante selectionnée x_s.
- On cherche l'indice r de la ligne où le $min\left\{\frac{b_k}{a_{k,s}}, a_{k,s} > 0\right\}$ se produit.
- La variable x_r sort alors de la base.

Définition:

Le coefficient $a_{r,s}$ qui se trouve à l'intersection de la colonne correspondant à la variable entrante x_s et de la ligne correspondant à la variable sortante x_r est appelé **pivot**.

Changement de base.

- mettre un 1 à la place du pivot $a_{r,s}$
- mettre des 0 sur les autres coefficients $\{a_{k,s}, k \neq r\}$
- mettre un 0 dans l'expression de z sur le coefficient c_s.

Changement de base.

- mettre un 1 à la place du pivot $a_{r,s}$
- mettre des 0 sur les autres coefficients $\{a_{k,s}, k \neq r\}$
- mettre un 0 dans l'expression de z sur le coefficient c_s.

En pratique :

- on multiplie la ligne r par $\frac{1}{a_{r,s}}$.
- on effectue les opérations $(k') \leftarrow (k) - a_{k,s}\,(r)$ sur les lignes $k \neq r$ du tableau

Le deuxième tableau du simplexe sur notre exemple

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	0	1	0	1	0	0	4
x_4	0	0	1	-30	1	0	30
x_5	0	0	1	0	0	1	60
z	1	0	-1	3	0	0	12

Le deuxième tableau du simplexe sur notre exemple

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	0	1	0	1	0	0	4
x_4	0	0	1	-30	1	0	30
x_5	0	0	1	0	0	1	60
z	1	0	-1	3	0	0	12

Remarque:

On lit la nouvelle base $\{x_1, x_4, x_5\}$ sur la première colonne du tableau.

Le deuxième tableau du simplexe sur notre exemple

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	0	1	0	1	0	0	4
x_4	0	0	1	-30	1	0	30
x_5	0	0	1	0	0	1	60
z	1	0	-1	3	0	0	12

Remarque:

On lit la nouvelle base $\{x_1, x_4, x_5\}$ sur la première colonne du tableau et la nouvelle valeur de l'objectif en bas à droite.

Critère d'arrêt.

On réitère ces étapes jusqu'à ce que le critère d'arrêt soit vérifié, c'est à dire jusqu'à ce que les coefficients de la ligne de z dans le tableau soient tous positifs.

Le deuxième tableau du simplexe sur notre exemple

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	0	1	0	1	0	0	4
x_4	0	0	1	-30	1	0	30
x_5	0	0	1	0	0	1	60
z	1	0	-1	3	0	0	12

Le deuxième tableau du simplexe sur notre exemple

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	0	1	0	1	0	0	4
x_4	0	0	1	-30	1	0	30
x_5	0	0	1	0	0	1	60
z	1	0	-1	3	0	0	12

- Les coefficients de la dernière ligne ne sont pas tous positifs,
- Le critère d'arrêt ne s'applique pas et on fait un nouvelle itération du simplexe. C'est x_2 qui va entrer et x_4 qui va sortir.

Le deuxième tableau du simplexe sur notre exemple

		z	x_1	$\downarrow$ x_2	x_3	x_4	x_5	
	x_1	0	1	0	1	0	0	4
$\leftarrow$	x_4	0	0	**1**	-30	1	0	30
	x_5	0	0	1	0	0	1	60
	z	1	0	-1	3	0	0	12

Le troisième tableau du simplexe sur notre exemple

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	0	1	0	1	0	0	4
x_2	0	0	1	-30	1	0	30
x_5	0	0	0	30	-1	1	30
z	1	0	0	-27	1	0	42

Le troisième tableau du simplexe sur notre exemple

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	0	1	0	1	0	0	4
x_2	0	0	1	-30	1	0	30
x_5	0	0	0	30	-1	1	30
z	1	0	0	-27	1	0	42

- Le critère d'arrêt ne s'applique toujours pas.

Le troisième tableau du simplexe sur notre exemple

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	0	1	0	1	0	0	4
x_2	0	0	1	-30	1	0	30
x_5	0	0	0	30	-1	1	30
z	1	0	0	-27	1	0	42

- Le critère d'arrêt ne s'applique toujours pas.
- x_3 entre en base

Le troisième tableau du simplexe sur notre exemple

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	0	1	0	1	0	0	4
x_2	0	0	1	-30	1	0	30
x_5	0	0	0	30	-1	1	30
z	1	0	0	-27	1	0	42

- Le critère d'arrêt ne s'applique toujours pas.
- x_3 entre en base
- x_5 sort

Le troisième tableau du simplexe sur notre exemple

	z	x_1	x_2	$\downarrow$ x_3	x_4	x_5	
x_1	0	1	0	1	0	0	4
x_2	0	0	1	-30	1	0	30
$\leftarrow$ x_5	0	0	0	30	-1	1	30
z	1	0	0	-27	1	0	42

Le quatrième tableau du simplexe sur notre exemple

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	0	1	0	0	$\frac{1}{30}$	$-\frac{1}{30}$	3
x_2	0	0	1	0	0	1	60
x_3	0	0	0	1	$\frac{1}{30}$	$\frac{-1}{30}$	1
z	1	0	0	0	$\frac{3}{30}$	$\frac{27}{30}$	69

Le quatrième tableau du simplexe sur notre exemple

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	0	1	0	0	$\frac{1}{30}$	$-\frac{1}{30}$	3
x_2	0	0	1	0	0	1	60
x_3	0	0	0	1	$\frac{1}{30}$	$\frac{-1}{30}$	1
z	1	0	0	0	$\frac{3}{30}$	$\frac{27}{30}$	69

- Les coefficients de la dernière ligne sont positifs.

Le quatrième tableau du simplexe sur notre exemple

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	0	1	0	0	$\frac{1}{30}$	$-\frac{1}{30}$	3
x_2	0	0	1	0	0	1	60
x_3	0	0	0	1	$\frac{1}{30}$	$\frac{-1}{30}$	1
z	1	0	0	0	$\frac{3}{30}$	$\frac{27}{30}$	69

- Les coefficients de la dernière ligne sont positifs.
- Le critère d'arrêt s'applique : la solution courante est optimale.

Le quatrième tableau du simplexe sur notre exemple

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	0	1	0	0	$\frac{1}{30}$	$-\frac{1}{30}$	3
x_2	0	0	1	0	0	1	60
x_3	0	0	0	1	$\frac{1}{30}$	$\frac{-1}{30}$	1
z	1	0	0	0	$\frac{3}{30}$	$\frac{27}{30}$	69

- Les coefficients de la dernière ligne sont positifs.
- Le critère d'arrêt s'applique : la solution courante est optimale.
- La base optimale est $\{x_1, x_2, x_3\}$, la solution correspondante est $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (3, 60, 1, 0, 0)$

Le quatrième tableau du simplexe sur notre exemple

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	0	1	0	0	$\frac{1}{30}$	$-\frac{1}{30}$	3
x_2	0	0	1	0	0	1	60
x_3	0	0	0	1	$\frac{1}{30}$	$\frac{-1}{30}$	1
z	1	0	0	0	$\frac{3}{30}$	$\frac{27}{30}$	69

- Les coefficients de la dernière ligne sont positifs.
- Le critère d'arrêt s'applique : la solution courante est optimale.
- La base optimale est $\{x_1, x_2, x_3\}$, la solution correspondante est $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (3, 60, 1, 0, 0)$
- La valeur optimale de l'objectif est 69.
  1. x_1 := Nombre de kg de céréales par jour $= 3$,
  2. x_2 := Nombre de kg de fourrage par jour $= 60$.

Pour initialiser la méthode du simplexe

Nous avons besoin d'une base réalisable.

Pour initialiser la méthode du simplexe

Nous avons besoin d'une base réalisable. Si $B \geq 0$

- l'ensemble des variables d'écart en donne une.
- le problème est sous forme canonique par rapport à cette base.

Pour initialiser la méthode du simplexe

Nous avons besoin d'une base réalisable. Si $B \geq 0$

- l'ensemble des variables d'écart en donne une.
- le problème est sous forme canonique par rapport à cette base.

L'idée

- Se ramener à ce cas
- Rendre le second membre positif
- Faire en sorte qu'il y ait une sous matrice identité évidente.

Pour initialiser la méthode du simplexe

Nous avons besoin d'une base réalisable. Si $B \geq 0$

- l'ensemble des variables d'écart en donne une.
- le problème est sous forme canonique par rapport à cette base.

L'idée

- Se ramener à ce cas
- Rendre le second membre positif
- Faire en sorte qu'il y ait une sous matrice identité évidente.

$\Rightarrow$ Un nouveau problème d'optimisation linéaire dont la solution donne une base réalisable du problème initial, s'il en existe une.

Résolution en deux phases.

Résolution en deux phases.

- La première phase permet de trouver une base réalisable.

Résolution en deux phases.

- La première phase permet de trouver une base réalisable.
- La deuxième phase résout le problème.

Un nouvel exemple

$$\max z = 3x + y$$

$$\text{sous contraintes} \begin{cases} x & & \leq & 4 \\ x & & \geq & 2 \\ & y & \leq & 4 \\ & y & \geq & 2 \end{cases}$$

Préparation

Écrire le problème sous forme standard

On écrit le problème sous forme standard en ajoutant les variables d'écart.

Préparation

Écrire le problème sous forme standard

On écrit le problème sous forme standard en ajoutant les variables d'écart.

Sur l'exemple

$$\max z = 3x + y$$

$$\text{sous contraintes} \left\{ \begin{array}{rrcr} x & & \leq & 4 \\ -x & & \leq & -2 \\ & y & \leq & 4 \\ & -y & \leq & -2 \end{array} \right.$$

Préparation

Écrire le problème sous forme standard

On écrit le problème sous forme standard en ajoutant les variables d'écart.

Sur l'exemple

$$\max z = 3x + y$$

$$\text{sous contraintes} \begin{cases} x + e_1 = 4 \\ -x + e_2 = -2 \\ y + e_3 = 4 \\ -y + e_4 = -2 \end{cases}$$

Préparation

Préparation

Rendre le second membre positif

On rend le second membre positif en multipliant par -1 les équations pour lesquelles le second membre est négatif.
Pour $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, si $b_i < 0$, on remplace l'équation

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + x_{n+i} = b_i$$

par l'équation

$$-a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \cdots - a_{in}x_n - x_{n+i} = -b_i$$

Sur l'exemple

$$\max z = 3x + y$$

$$\text{sous contraintes}\left\{\begin{array}{cccccccc} x & & +e_1 & & & & = & 4 \\ x & & & -e_2 & & & = & 2 \\ & y & & & +e_3 & & = & 4 \\ & y & & & & -e_4 & = & 2 \\ x, & y, & e_1, & e_2, & e_3, & e_4 & \geq & 0 \end{array}\right.$$

Ajouter les variables auxiliaires

Faire apparaitre une sous matrice identité.
Pour $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, si b_i est le $j$ième coefficient de b négatif, on remplace l'équation

$$-a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \cdots - a_{in}x_n - x_{n+i} = -b_i$$

par l'équation

$$-a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \cdots - a_{in}x_n - x_{n+i} + a_j = -b_i$$

Sur l'exemple

$$\left\{\begin{array}{lllllllllll} x & & +e_1 & & & & & & & = & 4 \\ x & & & -e_2 & & & +a_1 & & & = & 2 \\ & y & & & +e_3 & & & & & = & 4 \\ & y & & & & -e_4 & & +a_2 & & = & 2 \\ x, & y, & e_1, & e_2, & e_3, & e_4, & a_1, & a_2 & & \geq & 0 \end{array}\right.$$

Sur l'exemple

$$\left\{\begin{array}{cccccccccc} x & +e_1 & & & & & & & = & 4 \\ x & & -e_2 & & & +a_1 & & & = & 2 \\ & y & & +e_3 & & & & & = & 4 \\ & y & & & -e_4 & & & +a_2 & = & 2 \\ x, & y, & e_1, & e_2, & e_3, & e_4, & a_1, & a_2 & \geq & 0 \end{array}\right.$$

Une solution de ce système donne une solution réalisable du système précédent si $a_1 = a_2 = 0$

Définir une nouvelle fonction objectif

On introduit une nouvelle fonction objectif $\max w = -\sum_{i=1}^{k} a_i$.

Définir une nouvelle fonction objectif

On introduit une nouvelle fonction objectif
$\max w = -\sum_{i=1}^{k} a_i$.

Un problème auxilaire

- non équivalent au problème initial
- qui possède une base réalisable de départ évidente
- dont une solution donnera une base réalisable du problème initial, si $\max w = 0$.

Sur l'exemple

$$\max w = -a_1 - a_2$$

$$\text{sous contraintes} \begin{cases} x & +e_1 & & & & & = 4 \\ x & & -e_2 & & & +a_1 & = 2 \\ & y & & +e_3 & & & = 4 \\ & y & & & -e_4 & +a_2 & = 2 \end{cases}$$

Résoudre le problème auxiliaire

On résoud le problème auxiliaire : grâce à la méthode du simplexe en tableau.

Résoudre le problème auxiliaire

On résoud le problème auxiliaire : grâce à la méthode du simplexe en tableau.

Sur l'exemple

- La base réalisable de départ est : (e_1, a_1, e_3, a_2).
- Les variables hors base sont (x, y, e_2, e_4).
- Écrire w en fonction des variables hors base.

Résoudre le problème auxiliaire

On résoud le problème auxiliaire : grâce à la méthode du simplexe en tableau.

Sur l'exemple

- La base réalisable de départ est : (e_1, a_1, e_3, a_2).
- Les variables hors base sont (x, y, e_2, e_4).
- Écrire w en fonction des variables hors base.

  Contraintes : $\begin{cases} -a_1 = x - e_2 - 2 \\ -a_2 = y - e_4 - 2 \end{cases}$

$\Rightarrow$ $w = x + y - e_2 - e_4 - 4$

$$w - x - y + e_2 + e_4 = -4.$$

Premier tableau du simplexe

	w	z	x	y	e_1	e_2	e_3	e_4	a_1	a_2	
e_1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	4
a_1	0	0	1	0	0	-1	0	0	1	0	2
e_3	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	4
a_2	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	1	2
z	0	1	-3	-1	0	0	0	0			0
w	1	0	-1	-1	0	1	0	1	0	0	-4

Premier tableau du simplexe

	w	z	$\downarrow$ x	y	e_1	e_2	e_3	e_4	a_1	a_2	
e_1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	4
a_1	0	0	1	0	0	-1	0	0	1	0	2
e_3	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	4
a_2	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	1	2
z	0	1	-3	-1	0	0	0	0			0
w	1	0	-1	-1	0	1	0	1	0	0	-4

Premier tableau du simplexe

		w	z	$\downarrow$ x	y	e_1	e_2	e_3	e_4	a_1	a_2	
	e_1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	4
$\leftarrow$	a_1	0	0	1	0	0	-1	0	0	1	0	2
	e_3	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	4
	a_2	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	1	2
	z	0	1	-3	-1	0	0	0	0			0
	w	1	0	-1	-1	0	1	0	1	0	0	-4

Deuxième tableau du simplexe

	w	z	x	y	e_1	e_2	e_3	e_4	a_1	a_2	
e_1	0	0	0	0	1	1	0	0	-1	0	2
x	0	0	1	0	0	-1	0	0	1	0	2
e_3	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	4
a_2	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	1	2
z	0	1	0	-1	0	-3	0	0			6
w	1	0	0	-1	0	0	0	1	1	0	-2

Deuxième tableau du simplexe

	w	z	x	$\downarrow$ y	e_1	e_2	e_3	e_4	a_1	a_2	
e_1	0	0	0	0	1	1	0	0	-1	0	2
x	0	0	1	0	0	-1	0	0	1	0	2
e_3	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	4
a_2	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	1	2
z	0	1	0	-1	0	-3	0	0			6
w	1	0	0	-1	0	0	0	1	1	0	-2

Deuxième tableau du simplexe

	w	z	x	$\downarrow$ y	e_1	e_2	e_3	e_4	a_1	a_2	
e_1	0	0	0	0	1	1	0	0	-1	0	2
x	0	0	1	0	0	-1	0	0	1	0	2
e_3	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	4
$\leftarrow$ a_2	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	1	2
z	0	1	0	-1	0	-3	0	0			6
w	1	0	0	-1	0	0	0	1	1	0	-2

Troisième tableau du simplexe

	w	z	x	y	e_1	e_2	e_3	e_4	a_1	a_2	
e_1	0	0	0	0	1	1	0	0	-1	0	2
x	0	0	1	0	0	-1	0	0	1	0	2
e_3	0	0	0	0	0	0	1	1	0	-1	2
y	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	1	2
z	0	1	0	0	0	-3	0	-1			8
w	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0

Troisième tableau du simplexe

	w	z	x	y	e_1	e_2	e_3	e_4	a_1	a_2	
e_1	0	0	0	0	1	1	0	0	-1	0	2
x	0	0	1	0	0	-1	0	0	1	0	2
e_3	0	0	0	0	0	0	1	1	0	-1	2
y	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	1	2
z	0	1	0	0	0	-3	0	-1			8
w	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0

Le test d'arrêt est satisfait et le simplexe donne $\max w = 0$.

Comme $\max w = 0$

- Le problème initial admet une base réalisable.
- On peut lire la base réalisable de départ pour le problème initial sur le dernier tableau du problème auxiliaire.

Sur l'exemple

- Il s'agit de la base (e_1, x, e_3, y).
- Les variables hors base sont (e_2, e_4, a_1, a_2).
- Les variables auxiliaires sont bien hors base comme on le souhaitait.

Résoudre le problème initial

On résoud le problème initiale précédent grâce à la méthode du simplexe en tableau en partant de la base réalisable trouvée à l'étape précédente.

Résoudre le problème initial

On résoud le problème initiale précédent grâce à la méthode du simplexe en tableau en partant de la base réalisable trouvée à l'étape précédente.

Sur l'exemple

- La base réalisable de départ est (e_1, x, e_3, y).
- Les variables hors base sont (e_2, e_4).
- On n'a plus besoin des variables auxiliaires.
- z est écrit en fonction des variables hors base.

Premier tableau du simplexe

	z	x	y	e_1	e_2	e_3	e_4	
e_1	0	0	0	1	1	0	0	2
x	0	1	0	0	-1	0	0	2
e_3	0	0	0	0	0	1	1	2
y	0	0	1	0	0	0	-1	2
z	1	0	0	0	-3	0	-1	8

Premier tableau du simplexe

	z	x	y	e_1	e_2 $\downarrow$	e_3	e_4	
e_1	0	0	0	1	1	0	0	2
x	0	1	0	0	-1	0	0	2
e_3	0	0	0	0	0	1	1	2
y	0	0	1	0	0	0	-1	2
z	1	0	0	0	-3	0	-1	8

Premier tableau du simplexe

						$\downarrow$			
		z	x	y	e_1	e_2	e_3	e_4	
$\leftarrow$	e_1	0	0	0	1	1	0	0	2
	x	0	1	0	0	-1	0	0	2
	e_3	0	0	0	0	0	1	1	2
	y	0	0	1	0	0	0	-1	2
	z	1	0	0	0	-3	0	-1	8

Deuxième tableau du simplexe

	z	x	y	e_1	e_2	e_3	e_4	
e_2	0	0	0	1	1	0	0	2
x	0	1	0	1	0	0	0	4
e_3	0	0	0	0	0	1	1	2
y	0	0	1	0	0	0	-1	2
z	1	0	0	3	0	0	-1	14

Deuxième tableau du simplexe

	z	x	y	e_1	e_2	e_3	$\downarrow$ e_4	
e_2	0	0	0	1	1	0	0	2
x	0	1	0	1	0	0	0	4
e_3	0	0	0	0	0	1	1	2
y	0	0	1	0	0	0	-1	2
z	1	0	0	3	0	0	-1	14

Deuxième tableau du simplexe

		z	x	y	e_1	e_2	e_3	$\downarrow$ e_4	
	e_2	0	0	0	1	1	0	0	2
	x	0	1	0	1	0	0	0	4
$\leftarrow$	e_3	0	0	0	0	0	1	1	2
	y	0	0	1	0	0	0	-1	2
	z	1	0	0	3	0	0	-1	14

Troisième tableau du simplexe

	z	x	y	e_1	e_2	e_3	e_4	
e_2	0	0	0	1	1	0	0	2
x	0	1	0	1	0	0	0	4
e_4	0	0	0	0	0	1	1	2
y	0	0	1	0	0	1	0	4
z	1	0	0	3	0	1	0	16

Troisième tableau du simplexe

	z	x	y	e_1	e_2	e_3	e_4	
e_2	0	0	0	1	1	0	0	2
x	0	1	0	1	0	0	0	4
e_4	0	0	0	0	0	1	1	2
y	0	0	1	0	0	1	0	4
z	1	0	0	3	0	1	0	16

Le test d'arrêt est satisfait et le simplexe donne $\max z = 16$ pour $x = 4$ et $y = 4$.

Un problème

Pour les vacances, un étudiant veut partir en voiture. Il veut faire un tronçon d'autoroute de 300 km en utilisant le moins d'essence possible. Il utilise son régulateur de vitesse en trois vitesses : 90 km/h, 110 km/h ou 130 km/h, pour lesquelles il connaît bien la consommation de sa voiture :

- À130 km/h, sa voiture consomme 8 L/100 km.
- À110 km/h, sa voiture consomme 6 L/100 km.
- À 90 km/h, sa voiture consomme 5 L/100 km.

Comme il est parti un peu plus tard que prévu, il veut parcourir ce tronçon d'autoroute en moins de 3h pour être à l'heure pour prendre les clefs de son cabanon.

Modélisation

x_1 : temps en heure passé à 130km/h

x_2 : temps en heure passé à 110km/h

x_3 : temps en heure passé à 900km/h

Problème sous forme canonique

$$\max z = -10,4x_1 - 6,6x_2 - 4,5x_3$$

$$\text{sous contraintes} \left\{ \begin{array}{rrrcr} x_1 & + \quad x_2 & + \quad x_3 & \leq & 3 \\ 130x_1 & +110x_2 & +90x_3 & = & 300 \\ x_1 & & & \geq & 0 \\ & x_2 & & \geq & 0 \\ & & x_3 & \geq & 0 \end{array} \right.$$

Problème sous forme standard

$$\max z = -10,4x_1 - 6,6x_2 - 4,5x_3$$

$$\text{sous contraintes} \left\{ \begin{array}{rcrcrrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & +x_4 & = & 3 \\ 130x_1 & & +110x_2 & & +90x_3 & & = & 300 \\ x_1 & & & & & & \geq & 0 \\ & & x_2 & & & & \geq & 0 \\ & & & & x_3 & & \geq & 0 \\ & & & & & x_4 & \geq & 0 \end{array} \right.$$

Problème sous forme standard

$$\max z = -10,4x_1 - 6,6x_2 - 4,5x_3$$

$$\text{sous contraintes} \left\{ \begin{array}{rrrrcr} x_1 & + \quad x_2 & + \quad x_3 & +x_4 & = & 3 \\ 13x_1 & +11x_2 & +9x_3 & & = & 30 \\ x_1 & & & & \geq & 0 \\ & x_2 & & & \geq & 0 \\ & & x_3 & & \geq & 0 \\ & & & x_4 & \geq & 0 \end{array} \right.$$

Problème sous forme standard après ajout d'une variable auxilliaire

$$\max z = -10,4x_1 - 6,6x_2 - 4,5x_3$$

$$\text{sous contraintes} \left\{ \begin{array}{rrrrrcl} x_1 & + \; x_2 & + \; x_3 & +x_4 & & = & 3 \\ 13x_1 & +11x_2 & +9x_3 & & +a & = & 30 \\ x_1 & & & & & \geq & 0 \\ & x_2 & & & & \geq & 0 \\ & & x_3 & & & \geq & 0 \\ & & & x_4 & & \geq & 0 \\ & & & & a & \geq & 0 \end{array} \right.$$

$$\max w = -a = -30 + 13x_1 + 11x_2 + 9x_3$$

Premier tableau du simplexe première phase

	x_1	x_2	x_3	x_4	a	
x_4	1	1	1	1	0	3
a	13	11	9	0	1	30
z	$10,4$	$6,6$	$4,5$	0		0
w	-13	-11	-9	0	0	-30

Premier tableau du simplexe première phase

	$\downarrow$ x_1	x_2	x_3	x_4	a	
x_4	1	1	1	1	0	3
a	13	11	9	0	1	30
z	$10,4$	$6,6$	$4,5$	0		0
w	-13	-11	-9	0	0	-30

Premier tableau du simplexe première phase

		$\downarrow$ x_1	x_2	x_3	x_4	a	
	x_4	1	1	1	1	0	3
$\leftarrow$	a	13	11	9	0	1	30
	z	10,4	6,6	4,5	0		0
	w	-13	-11	-9	0	0	-30

Deuxième tableau du simplexe

	x_1	x_2	x_3	x_4	a	
x_4	0	$\frac{2}{13}$	$\frac{4}{13}$	1	$-\frac{1}{13}$	$\frac{9}{13}$
x_1	1	$\frac{11}{13}$	$\frac{9}{13}$	0	$\frac{1}{13}$	$\frac{30}{13}$
z	0	$-2,2$	$-2,7$	0		-24
w	0	0	0	0	1	0

Deuxième tableau du simplexe

	x_1	x_2	$\downarrow$ x_3	x_4	a	
x_4	0	$\frac{2}{13}$	$\frac{4}{13}$	1	$-\frac{1}{13}$	$\frac{9}{13}$
x_1	1	$\frac{11}{13}$	$\frac{9}{13}$	0	$\frac{1}{13}$	$\frac{30}{13}$
z	0	$-2,2$	$-2,7$	0		-24
w	0	0	0	0	1	0

Deuxième tableau du simplexe

		x_1	x_2	$\downarrow$ x_3	x_4	a	
$\leftarrow$	x_4	0	$\frac{2}{13}$	$\frac{4}{13}$	1	$-\frac{1}{13}$	$\frac{9}{13}$
	x_1	1	$\frac{11}{13}$	$\frac{9}{13}$	0	$\frac{1}{13}$	$\frac{30}{13}$
	z	0	$-2,2$	$-2,7$	0		-24
	w	0	0	0	0	1	0

Troisième tableau du simplexe deuxième phase

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	0	$0,5$	1	$\frac{13}{4}$	$\frac{9}{4}$
x_1	1	$0,5$	0	$-\frac{9}{4}$	$0,75$
z	0	$-0,85$	0	$\frac{35,1}{4}$	$-\frac{71,7}{4}$

Troisième tableau du simplexe deuxième phase

	x_1	$\downarrow$ x_2	x_3	x_4	
x_3	0	$0,5$	1	$\frac{13}{4}$	$\frac{9}{4}$
x_1	1	$0,5$	0	$-\frac{9}{4}$	$0,75$
z	0	$-0,85$	0	$\frac{35,1}{4}$	$-\frac{71,7}{4}$

Troisième tableau du simplexe deuxième phase

		$\downarrow$			
	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	0	$0,5$	1	$\frac{13}{4}$	$\frac{9}{4}$
$\leftarrow$ x_1	1	$0,5$	0	$-\frac{9}{4}$	$0,75$
z	0	$-0,85$	0	$\frac{35,1}{4}$	$-\frac{71,7}{4}$

Quatrième tableau du simplexe deuxième phase

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	-1	0	1	$5,5$	$1,5$
x_2	2	1	0	$-4,5$	$1,5$
z	$1,7$	0	0	$4,95$	$-16,65$

Solution

Pour utiliser le moins d’essence possible, l’étudiant doit roule 1h30 à 110km/h et 1h30 à 90km/h ce qui lui fera consommer 16,65L d’essence.