Ecole Nationale Supérieure de Cognitique Deuxième année

Version 4

Modélisation mathématique : Exercices de systèmes dynamiques tirés des partiels TD n°2

Exercice 1:

On se propose d'étudier le système dynamique défini par :
$u_{n+3} = 4 u_{n+2} - 5 u_{n+1} + 2 u_n$ pour tout n entier.
avec u_0, u_1 et u_2 donnés tels que : $3u_1 - 2u_0$ différent de u_2

1) Exprimer u_n en fonction de n et des trois premiers termes u_0, u_1 et u_2.
2) Calculer la somme des n premiers termes en fonction de n et des trois premiers termes de l'orbite.

Exercice 2:

Soit le système dynamique défini par $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = x^2 - 6x + 9$

1) Chercher l'orbite 2-périodique de ce système.
2) Est-elle stable ?
3) Tracer la représentation graphique de f en plaçant les points fixes de f et l'orbite périodique.
4) Illustrer graphiquement sur un exemple le résultat obtenu à la question 2.
5) Calculer l'orbite issue de $u_0 = 2$. Quelle est sa particularité ?
6) Existe-t-il un autre point ayant la même propriété ?

Exercice 3:

On se propose d'étudier le système dynamique défini par :
$u_{n+3} = 5 u_{n+2} - 7 u_{n+1} + 3 u_n$ pour tout n
avec u_0, u_1 et u_2 entiers donnés tels que : $4u_1 - 3u_0$ différent de u_2

1) Grâce à la suite auxiliaire définie par $v_n = u_{n+2} - 4 u_{n+1} + 3 u_n$, exprimer u_n en fonction de n et des trois premiers termes u_0, u_1 et u_2.
2) Démontrer que la somme des n premiers termes est divisible par n^2 lorsque :
$u_2 = 5 u_0$ et $u_1 = 3 u_0$.

Exercice 4:

Etude de la famille de suites définie par $u_{n+2} = 5 u_{n+1} - 4 u_n - 3$

Exprimer u_n en fonction de u_0, u_1 et n.
Calcul u_7 de deux façons.
Quelle est la limite de la suite $(u_n)_N$ en l'infini ?

Exercice 5:

Quelle est la nature du système dynamique défini par : $n.w_n = (n+1).w_{n-1} + 1$ et $w_0 = 1$?

Exercice 6:

Soit le système dynamique défini par : $V_{n+3} - 6\, V_{n+2} + 12\, V_{n+1} - 8\, V_n = 0$ et $V_0 = V_1 = V_2 = 1$.

1) Exprimer le terme général du SD en fonction de n.
2) En déduire que V_{2239} est divisible par 7.

Problème : Carottes, lapins, renards et chasseurs … dans cet ordre.

Sur une île isolée et tempérée vivent paisiblement des paysans qui cultivent des carottes, seule source de revenu. Un jour d'été, un professeur (de l'ENSC) en vacances laisse échapper un couple de lapins qui se reproduit au point que les dégâts sur les cultures deviennent préoccupants.
Pour lutter contre ce fléau, le conseil de l'île décide de lâcher des renards.

Sachant que : La population des lapins double tous les jours à 3h
Chaque renard mange un lapin à 15h
La population des renards gagne 10% tous les jours à 17h
Les renards sont lâchés le jour 0 à 18h
La population des lapins à 23h le jour 0 est de 2048 individus

On notera : l_n le nombre de lapins le jour n au lever du soleil
L_n le nombre de lapins le jour n au coucher du soleil
r_n le nombre de renards le jour n au coucher du soleil

1) Combien faut-il de renards pour que les lapins aient disparu le $10^{\text{ième}}$ jour au coucher du soleil en sachant qu'on peut en croiser le matin du même jour ?
   a. Exprimer Ln en fonction de L_0, r_0 et n
   b. En déduire la réponse.

2) Combien de temps faut-il à 1844 renards pour supprimer tous les lapins ?

3) Les élus écologistes du conseil se mêlent de l'affaire pour affirmer qu'il est inadmissible de supprimer totalement les pauvres lapins. Combien peut-on lâcher de renards au plus pour que les deux espèces cohabitent durablement ?