Exercice 1 (Théorique) Soit T une matrice stochastique de taille 3 et λ une valeur propre de T et X un vecteur propre associé à λ.

1. Montrer que la somme des coefficients de X vaut 0 si $\lambda \neq 1$.
2. Montrer que $|\lambda| \leq 1$.

Exercice 2 Pour chacune des matrices suivantes :

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0,2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, T_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,3 & 0 & 0 & 0,5 \\ 1 & 0 & 0 & 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,4 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Trace le graphe de la chaîne de Markov correspondante.
2. Montre que la chaîne est irréductible.
3. Détermine la périodicité de la chaîne.

Un problème

Exercice 3 (Détermination de la proportion de chacune des classes finales.) Soit la chaîne de Markov qui commence au premier état, c'est-à-dire dont la probabilité initiale est $\mathbb{P}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, dont la matrice de transition est $R = \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0 & 0 \\ 0,4 & 0,7 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,1 & 1 & 0 \\ 0,4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Dessiner le graphe de la chaîne.
2. Déterminer toutes les probabilités invariantes de la chaîne.
3. Soit τ le temps d'atteinte d'un état absorbant. Déterminer la loi de X_τ
4. Calculer l'espérance de τ.

Exercice 4 (Chaînes irréductibles)

1. Soit une chaîne de Markov de matrice de transition $C = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,8 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0,5 \\ 0,2 & 0,2 & 0,5 \end{pmatrix}$
   (a) Montrer que cette chaîne est irréductible et apériodique. Que peut-on en déduire sur son comportement asymptotique ?
   (b) Déterminer toutes ses probabilités invariantes.
2. Déterminer le comportement asymptotique d'une chaîne de Markov de matrice de transition $F = \begin{pmatrix} 0,55 & 0,05 \\ 0,45 & 0,95 \end{pmatrix}$.

Exercice 5 (Chaîne générale) On considère une chaîne de Markov homogène $(X_n)_{n\geq 0}$ prenant ses valeurs dans l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ dont la matrice de transition est

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,4 & 0,7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,05 & 0,6 & 0,8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,05 & 0,2 & 0,2 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0,4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,55 & 0,05 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,45 & 0,95 \end{pmatrix}$$

.

1. Dessiner le graphe de transition de l'évolution de la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$.
2. Déterminer toutes les classes de la chaîne et leur ordre. Quelles sont les classes finales et les classes de passage ?
3. Donner les matrices de cette chaîne réduites à chacune des classes finales.
4. Déduire de l'exercice 4 toutes les probabilités invariantes de la chaîne.
5. Donner la matrice de cette chaîne en assimilant chaque classe finale à un seul état.
6. Déduire de l'exercice 3 le comportement asymptotique de cette chaîne quand elle commence à l'état 1.

Indications pour l'exercice 1 :

Q1 Utiliser la définition de valeur propre/vecteur propre
Q1 Sommer 3 équations
Q2 Inégalité triangulaire
Q2 Les coefficients de T sont positifs
Q2 Que veut dire stochastique ?