

Vos exercices

Problèmes d'optimisation linéaire

Exercice 1

Le vieux Gildas vend au marché de son village les cèpes et les châtaignes qu'il trouve. Sa retraite étant maigre, il souhaite optimiser son activité champêtre. Sachant qu'il reçoit une commande régulière de Romuald, son ami restaurateur de Sainte Foy la Jolie, il doit au moins ramasser 12 kg de cèpes et 30 kg de châtaignes. De plus, Gildas ne peut stocker que 80 kg de marchandise chez lui.

Le marché a lieu dimanche et nous sommes mercredi, ce qui laisse 3 jours à Gildas pour sa cueillette, à laquelle il consacre 6 heures par jour au plus. Gildas a beau être très doué, il ne trouvera pas plus de 2 kg de cèpes ou 6 kg de châtaignes par heure, sans oublier qu'il ne ramasse pas les 2 en même temps. En effet, "il ne faut pas mélanger les torchons et les serviettes" comme le dit le bon vieux Gildas.

Enfin, il vend son kilogramme de cèpes à 25 € et celui de châtaignes à 8 €. Pour chaque kilo qu'il vend, il offre une poche spéciale qui lui coûte 1€ pour les cèpes et 50 centimes pour les châtaignes.

Sachant qu'il a un budget initial de 500€, quelle somme peut espérer avoir Gildas à la fin du marché ?

Exercice 2

En cette dernière nuit du WEI, le BDE se rend compte que les dégâts ne sont pas suffisants pour récupérer la caution de groupe de tous les participants. Hors il était de leur dessein de renflouer les caisses de la trésorerie avec ces cautions en remboursant les propriétaires tout en gardant le reste pour le bureau. Ils ont donc décidé de passer au plan B : cette nuit ils vont détruire une partie du mobilier et au matin pointer du doigt le taux d'alcoolémie des nombreux couche-tard. Ils ont décidé de se limiter à deux types de mobilier à détruire : chaise et toiture, ce dernier étant pour rejeter principalement la faute sur les Quatorze.

Après estimation, il semblerait que les chaises coûteraient 65 € et les toitures 360 €. Cette année, le WEI compte 180 participants ayant chacun fourni 10 € de caution de groupe. Cette dernière ne sera utilisé que si les dégâts dépassent les 1000 €.

Pour rester réaliste, le BDE a décidé de ne détruire que 2 toitures maximum, et au moins 1 chaise. Autre problème : le BDE n'a que 2 heures et 3 membres encore conscients pour détruire les mobiliers. Ils estiment qu'une personne seule pourrait détruire une chaise en 25 minutes et une toiture en 1 heure 20 minutes. Enfin, ils souhaitent que le nombre de chaises détruites soient au moins le triple du nombre de toitures détruites, simplement pour rajouter une contrainte à l'exercice de Simplex du semestre à venir.

Minimiser le prix des dégâts pour que le BDE garde un maximum d'argent de la caution de groupe.

Exercice 3

Un étudiant prend le train à la fin de ses vacances afin de retourner à ses études. Son trajet doit durer 6h30 (nous ferons l'hypothèse improbable qu'aucun retard ne sera prit par le train), et désire faire passer le temps plus vite en s'occupant. Il dispose pour cela de plusieurs solutions :

- travailler
- écouter de la musique sur son ordinateur, ce qui occupe deux fois mieux que travailler
- regarder des séries sur ce même ordinateur, ce qui occupe deux fois mieux qu'écouter de la musique

Il commence le trajet avec un ordinateur à pleine charge, mais ne pourra pas le recharger dans le train. Regarder une série consomme 30% de batterie par heure, et écouter de la musique consomme 20% de batterie par heure. L'étudiant ne travaille pas sur son ordinateur mais sur papier, travailler ne consomme donc pas de batterie.

L'étudiant désire ne pas passer de temps sans occupation. On considère que l'on ne peut avoir qu'une occupation à la fois (pas de travail en écoutant de la musique par exemple).

Finalement, l'étudiant étant en retard sur plusieurs de ses projets, il décide de travailler au moins 2h pendant le trajet. Comment l'étudiant doit-il répartir le temps passé sur chaque occupation de façon à rendre son voyage le plus agréable possible ?

Exercice 4

Toute ressemblance avec des personnes ou des fait réels est totalement fortuite

L'ENSC organise une conférence de 4 heures ce vendredi et le maître de conférence est réputé particulièrement soporifique. Pour aider à maintenir les 80 auditeurs éveillés, l'administration a prévu d'offrir le café allouant un budget de 80 euros maximum. Afin de convenir à un maximum d'individus, l'administration dispose de 3 types de café : un café biologique et équitable, un café de grande marque et un café de marque distributeur. Chaque café a un prix différent, émet plus ou moins de déchets et, grâce à sa concentration en caféine, permet de tenir plus ou moins longtemps éveillé. En effet, le maître de conférence étant assez susceptible, l'école souhaiterait ne pas le vexer et pour cela l'entièreté des participants doivent rester éveillés pendant les 4h. Etant donné que nous sommes en période de campagnes et qu'il y a eu une soirée avec un after la veille, seul le café fourni lors de la conférence permet de les tenir éveillés. Voici les informations relatives à chaque café :

Type de café	Prix du café	Temps d'éveil	Déchets produits
Café biologique et équitable	1 €	4h	1g
Café de grande marque	3 €	2h	10g
Café de marque distributeur	0.20 €	1h	5g

Le directeur M.LeNoir, le directeur adjoint M.Clavecin et le professeur d'IA M.Sapristi sont habitués au café de grande marque et il serait inadmissible qu'ils n'en aient pas une seule tasse aujourd'hui. De plus, les 10 membres de Terra Terre, pour respecter au mieux leurs valeurs, ne prendront que du café biologique et équitable. La machine à café ne sert pas de demi-café, seulement des cafés entiers et chaque participant peut se réapprovisionner en café si besoin est.

L'école se rend compte que la planète va mal et souhaite donc minimiser les déchets produits tout en respectant le budget et les souhaits de chacun.

Exercice 5

Caoihme est étudiante à l'ENSC et elle est très fatiguée. Elle entre en période d'examens, elle doit donc bien gérer son temps et ses activités afin de bien réussir ses examens tout en maximisant son temps passé à se détendre (et à dormir, elle aime dormir, mais pas plus de 10h par jour).

Dans une journée, elle assiste à 7h de cours, elle a 1h20 de trajet aller-retour pour aller à l'école, et elle doit travailler sur ses projets et réviser pour les examens (au moins 3h par jour). Mais elle a également besoin de manger, et elle met au moins 45 minutes à se préparer à manger. De plus, elle a besoin de se divertir pour se détendre, elle s'accorde donc au moins un épisode de série par jour (soit 45 minutes) et au moins 30 minutes à passer sur les réseaux sociaux.

Par expérience, Caoihme sait que passer du temps sur les réseaux sociaux la détend :

- 2 fois moins que faire la cuisine
- 3 fois moins que regarder des séries
- 5 fois moins que dormir

Cependant, elle sait également que regarder des séries fait diminuer son envie de travailler de 15% par heure, et les réseaux sociaux la font diminuer de 20% par heure. Elle cherche donc à maximiser sa sensation de détente tout en gardant une envie de travailler d'au moins 60% de sa valeur initiale.

Exercice 6

Au sein de l'ENSC, l'association Terra Terre désire démarrer un potager. L'école lui octroie un terrain de 50 m², orienté d'est en ouest, au sud de l'école. Les membres de l'association ont pu récolter plusieurs plantes différentes : des pommes de terre, des courges et des haricots. Afin de nourrir la population affamée de l'école, l'association désire optimiser les calories produites.

En moyenne, un plant de courge produit 2600 Kcal, à condition de lui fournir 100 mL d'eau par jour, et 200 mL de purin. Il couvre 1 m² de terrain. Un plant de pomme de terre quant à lui produit 1500 Kcal en moyenne, à condition de l'arroser d'au minimum 300 mL d'eau par jour, ainsi que 100 mL d'engrais. On peut faire pousser les pommes de terres en densité de 2 par m². Les plants de haricots produisent 1000 Kcal en moyenne, à condition de l'arroser d'au minimum 200 mL d'eau, avec 150 mL de purin. Il est possible de faire pousser 5 plants de haricots par m².

L'eau est stockée dans une cuve, qui se remplit avec la pluie. Au vue de la pluviométrie moyenne, l'association dispose de 20 litres d'eau par jour en moyenne. De plus, le purin d'ortie et de bouillon blanc, préparé avec soin, offre 15 litres d'engrais par jour.

Il est très important de planter au moins 10 pieds de haricots pour fertiliser la terre en azote. De plus, afin de diversifier l'alimentation, il est impératif de planter au moins un pied de courge, et 5 pied de patate (l'association veut faire une soirée frite en cour d'année).

Vous devez déterminer le bon nombre de pieds de chaque plante à produire afin d'optimiser les calories produites. Par chance, le jardin étant une bande de terre qui s'étire d'est en ouest face au sud, vous n'avez pas à tenir compte de l'ombrage des plantes les unes sur les autres.

Défis de modélisation

Problèmes d'optimisation linéaire

Exercice 7

Pour les vacances, un étudiant veut partir en voiture. Il veut faire un tronçon d'autoroute de 300 km en utilisant le moins d'essence possible. Il utilise son régulateur de vitesse en trois vitesses : 90 km/h, 110 km/h ou 130 km/h, pour lesquelles il connaît bien la consommation de sa voiture :

- À 130 km/h, sa voiture consomme 8 L/100 km.
- À 110 km/h, sa voiture consomme 6 L/100 km.
- À 90 km/h, sa voiture consomme 5 L/100 km.

Comme il est parti un peu plus tard que prévu, il veut parcourir ce tronçon d'autoroute en moins de 3h pour être à l'heure pour prendre les clefs de son cabanon.

Exercice 8

Powell et Donovan, deux employés de l'US Robots, sont envoyés sur Mercure pour tester le nouveau robot minier SPD-13, alias Speedy. Mais alors que celui-ci était supposé récolter puis apporter au centre de commande, distant de 20 km, des minerais de sélénium, les problèmes commencent pour nos deux scientifiques : Speedy refuse d'obéir, tournant indéfiniment autour de la mine. Or, le sélénium étant l'unique source d'énergie disponible sur Mercure grâce à laquelle un approvisionnement en oxygène est possible, Powell et Donovan doivent absolument remettre la main sur Speedy. Pour se faire, ils ne disposent que de 4 heures, délai au terme duquel ils mourront asphyxiés.

Afin de rejoindre la mine de sélénium, les deux hommes disposent de combinaisons spécifiques, les protégeant des conditions extrêmes qui règnent sur Mars. La combinaison comporte deux emplacements où peuvent être insérées respectivement et au maximum 2 batteries et 2 réserves d'oxygène. Les scientifiques ont ainsi le choix entre 3 types de batteries et 3 modèles de réserves d'oxygène possibles, qu'ils pourront combiner à leur guise et en nombre voulu dans la limite de l'espace disponible pour chacun des emplacements.

Les propriétés des batteries et des réserves d'oxygène sont résumées dans les tableaux suivant :

	Modèle	Charge (W)	Poids (kg)
Batterie	B1	70	2
	B2	90	4
	B3	110	8

	Modèle	Contenance (L)	Poids (kg)	Consommation énergétique (W/km)
Réserves d'oxygène	R1	5	2	3
	R2	6	3	5
	R3	8	5	4

Néanmoins, avant d'enfiler leur combinaison, Powell et Donovan devront être particulièrement vigilants sur les points suivants :

1. Chaque kilo supplémentaire apporté par la combinaison les ralentira d'en moyenne 0.2 km/h, et ce indifféremment de leurs poids respectifs ;
2. Chaque demi-litre d'oxygène apporté en plus du nécessaire pour aller chercher Speedy leur permettra de gagner 0.3 km/h ;
3. Pour chaque watt n'ayant pas été consommé, ils gagneront 0.1 km/h.

En sachant qu'en temps normal Powell et Donovan consomment 0.5 L d'oxygène par kilomètre parcouru et que leur allure moyenne sans équipement est de 6 km/h, quelle(s) batterie(s) et réserve(s) d'oxygène doivent-ils choisir pour rejoindre Speedy le plus rapidement possible et ainsi minimiser leur chance d'être exposés trop longtemps aux rayonnements thermiques ?

Exercice 9

Trois stations d'essence S1, S2 et S3 ont besoin respectivement d'au moins 450, 300 et 250 tonnes de gasoil par semaine. Elles peuvent se faire livrer à partir de deux raffineries R1 et R2 dont les offres hebdomadaires respectives sont limitées à 550 et 450 tonnes. Une entreprise de transports spécialisés propose ses services de livraison aux trois stations. Les implantations géographiques impliquent différents coûts de livraison exprimés en euros par tonne dans le tableau suivant :

\nearrow	S1	S2	S3
R1	51	62	33
R2	34	55	46

On cherche un plan de livraison qui satisfait les contraintes et minimise le coût total de livraison pour les stations d'essence. Proposer une modélisation du problème qui réponde à cette question.

Exercice 10

Un industriel veut fabriquer deux sortes d'alliages A1 et A2 dont les caractéristiques sont les suivantes :

type	spécifications	prix de vente (euros/tonnes)
A1	pas moins de 30% de zinc pas plus de 40% de fer	680
A2	pas moins de 15% de cuivre pas plus de 60% de fer	570

Il trouve disponibles sur le marché trois sorte d'alliages C1, C2 et C3 dont les compositions, les disponibilités et les prix d'achat sont les suivants :

alliage	fer (en %)	zinc (en %)	cuivre (en %)	disponibilité (en tonnes)	prix d'achat (euros/tonnes)
C1	10	50	40	200	300
C2	30	40	30	250	200
C3	80	10	10	120	100

Quels alliages faut-il acheter et dans quelles porportions les mélanger pour maximiser le profit net ? Proposer une modélisation du problème.