Problèmes d’optimisation linéaire

Introduction à la recherche opérationnelle

4 février 2020

Un éleveur de vache laitière veut prévoir sa période hivernale.
Il dispose d'une quantité de fourrage qu'il a lui-même produit qui correspond à 60 kg par bête et par jour. Il pense que cela ne va pas suffire et il a les moyens d'acheter jusqu'à 4 kilos par bête et par jour de céréales complémentaires.
Cependant, les normes que chaque bete absorbe moins de 150mg par jour de pesticide.
Le taux de pesticide est de 30mg par kilo de céréales et 1mg par kg de fourrage.

Question :

Sachant que les vaches produisent en moyenne 3 fois plus de lait pour 1kg de céréales que pour 1kg de fourrage, comment cet éleveur doit-il nourrir ses animaux pour maximiser sa production de lait ?

Pour modéliser un problème, il va falloir :

1. Choisir des variables adaptées.
2. Exprimer la fonction à optimiser (appelée fonction objectif) en fonction de ces variables.
3. Exprimer les contraintes sur ces variables.

Vocabulaire

Définition :

On appelle **variable de décision** toute quantité utile à la résolution du problème et dont le modèle doit déterminer la valeur.

Sur l'exemple

Vocabulaire

Définition :

On appelle **fonction objectif** l'expression qui modélise la quantité à optimiser en fonction des variables du problème.

Sur l'exemple

Vocabulaire

Définition :

On appelle **contraintes du problème** toutes les relations limitant le choix de valeurs possibles pour les variables.

Sur l'exemple

Attention

Il arrive souvent que des contraintes « cachées » ne soient pas explicites dans les problèmes.

Sur l'exemple

Formalisation du problème

Problème condensé

Définition :

On appelle **problème d'optimisation linéaire**, un problème dont l'objectif est

- maximiser une fonction linéaire,
- sous contrainte : un ensemble d'équations ou d'inéquations linéaires.

Formalisation du problème

Forme matricielle.

$$\max z = {}^t\mathbf{c}\mathbf{x}$$

$$\text{sous contraintes} \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{Ax} & \leq & \mathbf{b} \\ \mathbf{x} & \geq & \mathbf{0} \end{array} \right.$$

avec **A** : matrice $(m \times n)$, **c** : vecteur $(n \times 1)$, **b** : vecteur $(m \times 1)$, **x** : vecteur $(n \times 1)$ si on a n variables et m contraintes.

Attention !

- Toutes les variables sont positives (ce qui est toujours le cas)
- Toutes les contraintes sont des inégalités du type $\leq$(on peut toujours)

Sur l'exemple

Problème sous forme matricielle

Représentation des contraintes

Définitions :

- On appelle **solution réalisable** un ensemble de valeurs des variables de décision qui satisfont toutes les contraintes.
- On appelle **région réalisable** l'ensemble des solutions réalisables.

Sur l'exemple

Représentation des contraintes

Détermination graphique d'un demi-plan

La droite D d'équation $ax + by + c = 0$ partage le plan en deux demi-plans fermés

- P_+ d'équation $ax + by + c \geq 0$
- P_- d'équation $ax + by + c \leq 0$
- P_+ contient le vecteur normal $\vec{n} = (a; b)$ de D issu d'un point de D
- P_- correspond évidemment à l'autre demi-plan.

Représentation des contraintes

Cas discret

Si on avait eu comme contraintes supplémentaire *x* et *y* entiers :

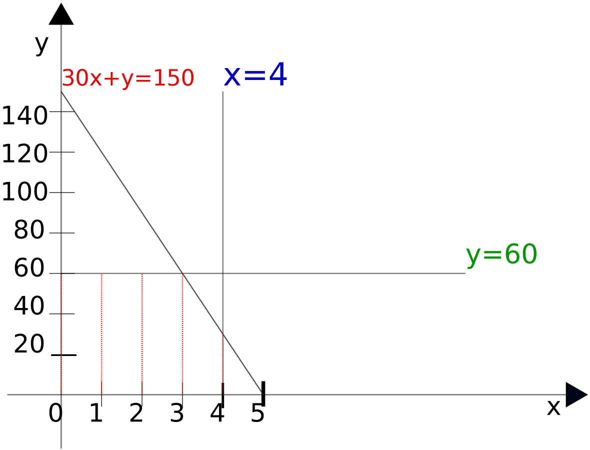

FIGURE – Région réalisable discrète

Représentation de l'objectif

Définition :

On appelle **lignes d'isovaleur de la fonction objectif** les droites parallèles D_k d'équations $z = k$ dont les points donnent une même valeur k à la fonction objectif z.

Représentation de l'objectif

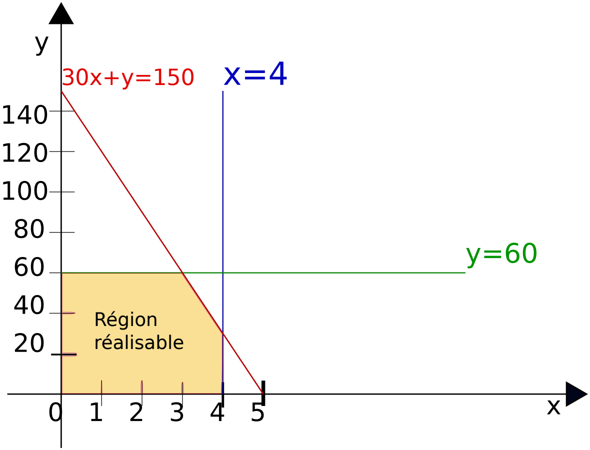

FIGURE – Lignes d'isovaleur de l'objectif $z = 3x + y$

Cas particulier : quand l'objectif est contraint

Changeons l'expression de la fonction objectif dans notre problème :

$$\max z = 30x + y$$

$$\text{sous contraintes} \left\{ \begin{array}{ccccc} x & & & \leq & 4 \\ 30x & + & y & \leq & 150 \\ & & y & \leq & 60 \\ x & & & \geq & 0 \\ & & y & \geq & 0 \end{array} \right.$$

Cas particulier : quand l'objectif est contraint

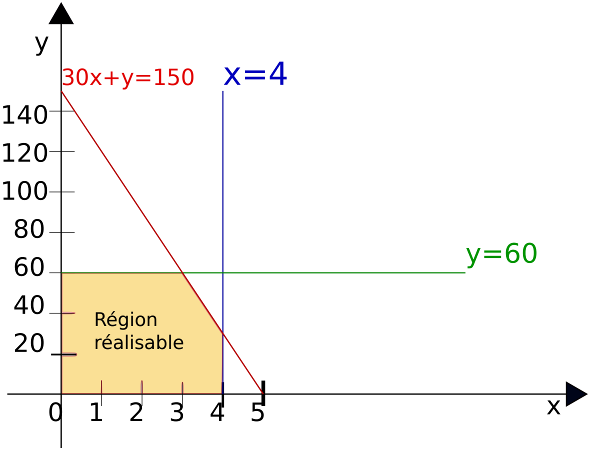

FIGURE – Tout un segment solution si $z = 30x + y$.

Un problème non-borné

On considère le problème d'optimisation linéaire suivant :

$$\max z = x + y$$

$$\text{sous contraintes} \begin{cases} -2x & + & y & \leq & 3 \\ x & - & 2y & \leq & 2 \\ x & & & \geq & 0 \\ & & y & \geq & 0 \end{cases}$$

Un problème non-borné

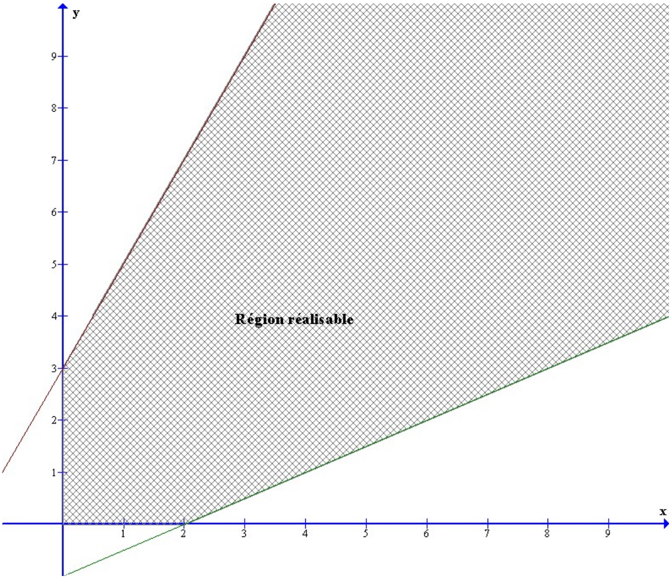

FIGURE – Exemple de problème non borné

Existence de solution

Problèmes sans solutions :

- Problème non borné
- Problème avec des contraites incompatibles.

Dans tous les autres cas, il existe une solution réelle.
Exemple de contraintes incompatibles :

$$\max z = 3x + y$$

$$\text{sous contraintes} \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & & & \leq & 4 \\ 30x & + & y & \leq & 150 \\ & & y & \leq & 60 \\ x & & & \geq & 6 \\ & & y & \geq & 0 \end{array} \right.$$

Résolution algorithmique

Méthode algorithmique :

1. Se placer sur un sommet S_0 de la région réalisable et calculer la valeur Z_{S_0} de l'objectif correspondant.
2. Déterminer un sommet voisin de S_0 : S_1.
3. Calculer Z_{S_1}. Si $Z_{S_1} > Z_{S_0}$. Poser $S_0 := S_1$ et retourner en 2.
4. Sinon, déterminer l'autre sommet voisin de S_0 : S_2
5. Calculer Z_{S_2}. Si $Z_{S_2} > Z_{S_0}$. Poser $S_0 := S_2$ et retourner en 2.
6. Sinon S_0 est la solution optimale (les sommets adjacents donnent des valeurs de la fonction objectif inférieures ou égales à la solution courante).

L'algorithme peut être simplifier en ne testant qu'un seul voisin (l'autre correspondant au sommet précédent).

Résolution algorithmique

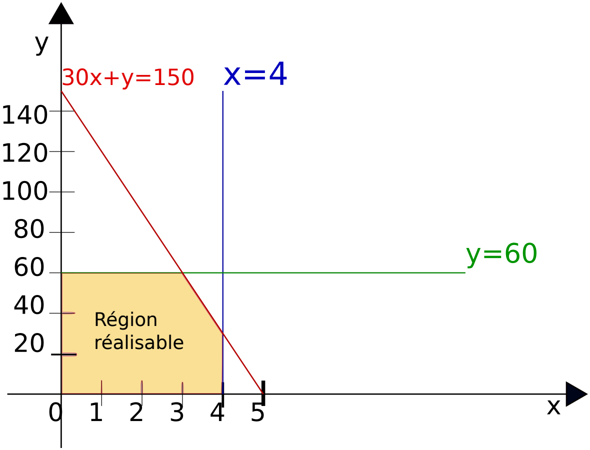

FIGURE – Suivi de l'algorithme

Rappel :

- Les solutions potentielles du problème se trouvent sur la frontière de la région réalisable.
- Elles correspondent à des cas d'égalité sur certaines des contraintes.

Première étape : transformer toutes les inégalités en égalités.

Pour cela, on va utiliser des *variables d'écart*.

Définition :

On appelle **variable d'écart** la quantité **positive** qui permet de transformer une contrainte d'inégalité en contrainte d'égalité.

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i$$

devient, après ajout de la variable d'écart e_i

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + e_i = b_i$$

Remarque :

$$(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n) \leq b_i$$

$$\iff e_i := b_i - (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n) \geq 0$$

On rajoute donc la condition $e_i \geq 0$ à l'ensemble des containtes.

Problème d'optimisation linéaire sous forme standard

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

sous contraintes

$$\left\{\begin{array}{lr}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} & = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + \quad x_{n+2} & = b_2 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \ddots & \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + \qquad x_{n+m} & = b_m \\
x_1, \ldots, x_n & \geq 0 \\
x_{n+1}, \ldots, x_{n+m} & \geq 0
\end{array}\right.$$

L'exemple sous forme standard

Écriture matricielle du cas général :

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

sous forme développée :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Remarque :

A est toujours de rang m !

Les contraintes sous forme standard

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + \quad x_{n+2} & = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \ddots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + \qquad x_{n+m} & = b_m \end{cases}$$

- m équations
- $n + m$ inconnues

$\Rightarrow$ une infinité de solutions.

Pour calculer une solution particulière :

1. sélectionner m colonnes de A pour obtenir une sous matrice B inversible (A de rang m)
2. donner les valeurs correspondant à l'unique solution du système tronqué aux variables sélectionnées
3. donner la valeur 0 aux n variables non sélectionnées

Sur l'exemple

Définitions :

On dit que $(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m})$ est une **base** si la sous-matrice construite sur les colonnes $(i_1, i_2, \ldots, i_m)$ est inversible.
On dit alors que les m variables $(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m})$ sont les **variables de base** et que les n variables restantes sont les **variables hors base**.

Remarque :

- Concrètement, on peut exprimer chacune des variables de base en fonction des variables hors-bases.

Définition :

Lorsqu'un problème écrit sous forme standard vérifie en plus les deux propriétés suivantes :

1. Les coefficients de la fonction objectif associés aux variables de base sont nuls,
2. La matrice associée aux variables de base est la matrice identité (à une permutation près),

on dit qu'il est écrit sous **forme canonique par rapport à la base** B correspondante.

Définition :

On appelle **solution de base** une solution du système $Ax = b$ s'il existe une base telle que les n variables hors bases sont nulles et les m variables de base forment une solution du système $Bx^* = b$ où les x^* est le vecteur $m \times 1$ contenant les variables de base.
On appelle **solution de base réalisable** une solution de base dont toutes les composantes sont positives ou nulles.

Sur l'exemple

Astuce :

Si les b_i sont positifs ou nuls, une solution de base réalisable évidente :

- les variables initiales $= 0$ (hors base)

Par construction la matrice correspondant aux variables d'écart est la matrice identité dont la solution est $\forall i \in [1, m], e_i = b_i \geq 0$.

Attention

L'hypothèse $B \geq 0$ est importante. Les coefficients b_i peuvent être négatifs, typiquement lorsqu'on transforme une inégalité du type $\geq$ en $\leq$ en multipliant par -1.

En pratique

Les variables d'écart forment une base réalisable évidente si

- que des contraintes du type $\leq$
- pas de “au moins” dans l'énoncé.

Interprétation graphique

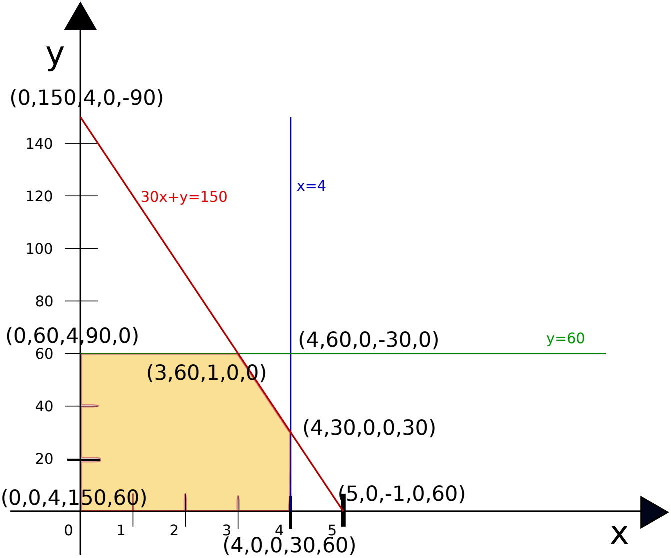

FIGURE – Bases et sommets

Points	solution de base	variable hors base	variables de base	réali-sable ?
$(0,0)$	$(0,0,4,150,60)$	(x_1,x_2)	(x_3,x_4,x_5)	Oui
$(0,60)$	$(0,60,4,90,0)$	(x_1,x_5)	(x_2,x_3,x_4)	Oui
$(0,150)$	$(0,150,4,0,-90)$	(x_1,x_4)	(x_2,x_3,x_5)	Non
$(4,0)$	$(4,0,0,30,60)$	(x_2,x_3)	(x_1,x_4,x_5)	Oui
$(5,0)$	$(5,0,-1,0,60)$	(x_2,x_4)	(x_1,x_3,x_5)	Non
$(3,60)$	$(3,60,1,0,0)$	(x_4,x_5)	(x_1,x_2,x_3)	Oui
$(4,60)$	$(4,60,0,-30,0)$	(x_3,x_5)	(x_1,x_2,x_4)	Non
$(4,30)$	$(4,30,0,0,30)$	(x_3,x_4)	(x_1,x_2,x_5)	Oui

TABLE – Solutions de base

Propositions

- Les solutions de base correspondent à des points d'intersection de contraintes mises à l'égalité.
- Une solution de base réalisable correspond à un sommet de la région réalisable.

Remarque :

À deux sommets adjacents du polygone correspondent deux solutions de base réalisables qui ne diffèrent que d'une variable hors base et une seule.

Définition :

On appelle **solutions de base réalisables adjacentes** deux solutions de bases réalisables qui ont les mêmes variables hors base sauf une (et par conséquent les mêmes variables de base sauf une).

Rappel : algorithme de résolution en dimension 2

1. Se placer sur un sommet S_0 de la région réalisable et calculer la valeur Z_{S_0} de l'objectif correspondant.
2. Déterminer un sommet voisin de S_0 : S_1.
3. Calculer Z_{S_1}. Si $Z_{S_1} > Z_{S_0}$. Poser $S_0 := S_1$ et retourner en 2.
4. Sinon, déterminer l'autre sommet voisin de S_0 : S_2
5. Calculer Z_{S_2}. Si $Z_{S_2} > Z_{S_0}$. Poser $S_0 := S_2$ et retourner en 2.
6. Sinon S_0 est la solution optimale (les sommets adjacents donnent des valeurs de la fonction objectif inférieures ou égales à la solution courante).

Cas général

- la méthode graphique n'est pas possible en grandes dimensions

Comment passer d'une solution de base réalisable à une solution de base réalisable adjacente ?

- en « échangeant » de manière judicieuse une variable de base et une variable hors base.

Résolution cas général

1. Trouver un sommet de départ (c.à.d une solution de base réalisable de départ)
2. Choix de la variable entrant dans la nouvelle base.
3. Choix de la variable sortant de l'ancienne base.
4. Reformulation du problème en fonction de la nouvelle base.
5. Test d'arrêt : si le test est positif, on a la solution optimale, si le test est négatif, on reprend à l'étape 2.

Les étapes 2, 3 et 4 permettent de passer d'une solution réalisable à une solution réalisable adjacente.

Point de départ

- **cas de deux variables :** une solution de base réalisable est un sommet de la région réalisable.
- **cas des grandes dimensions :** pas de dessin possible.
- **cas $B \geq 0$:** une solution de base $(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}) = (0, \ldots, 0, b_1, \ldots, b_m)$ est réalisable et donne $z = 0$.
- **cas général :** il existe des techniques (basées sur l'algorithme du simplexe) qui permettent d'initialiser le simplexe en fournissant une solution de base réalisable de départ.

Sur l'exemple :

Rappel

Problème sous forme canonique : la fonction objectif ne fait intervenir que les variables hors base

$$\max z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$$

- La variable entrante va passer de nulle à strictement positive.
- Le but est d'augmenter la variable objectif.

Proposition :

La variable hors base qui va entrer dans la nouvelle base est celle dont le coefficient est le plus élevé.

Proposition :

La variable qui sort de la base est la première à s'annuler quand la variable entrante augmente.

Un critère simple

La contrainte de la ligne r est de la forme suivante :

$a_{r,s}x_s + x_{i_r} = b_r$

1. Si $a_{r,s} = 0$, x_s n'intervient pas.
2. Si $a_{r,s} < 0$, x_{i_r} ne s'annulera jamais car $b_r \geq 0$.
3. Si tous les $a_{r,s}$.sont ≤ 0, il s'agit d'un problème non borné
4. Si $a_{r,s} > 0$, $\frac{x_{i_r}}{a_{r,s}} = \frac{b_r}{a_{r,s}} - x_s$: x_{i_r} s'annule pour $x_s = \frac{b_r}{a_{r,s}}$.

On en déduit le critère suivant pour déterminer la variable sortante :

Proposition :

Soit s l'indice de la variable entrante.
Si il existe un indice r pour lequel le $min \left\{ \frac{b_k}{a_{k,s}}, a_{k,s} > 0 \right\}$ est atteint, alors x_{i_r} est la variable sortante.
Sinon, le problème est non borné. Il faut donc le reformuler.

Mettre le problème **sous forme canonique par rapport à la nouvelle base** choisie.

- exprimer les nouvelles variables de base en fonction des nouvelles variables hors base
- exprimer la fonction objectif en fonction des nouvelles variables hors base

Pivot de Gauss

1. Multiplier une ligne par une constante non nulle
2. Ajouter à une ligne un multiple d'une autre ligne.

Dans la pratique

1. Identifier la ligne (unique) contenant simultanément la variable entrante et la variable sortante (ligne pivot).
2. Faire apparaître un 1 devant la variable entrante dans la ligne pivot.
3. Éliminer la variable entrante de toutes les autres lignes en utilisant la ligne pivot.

Si le changement de base s'est bien déroulé :

- Les variables de base forment une sous matrice identité à une permutation près.
- L'objectif est exprimé en fonction des variables hors base seulement.
- Le problème est sous forme canonique par rapport à la nouvelle base.

Si la nouvelle base a été bien choisie

La valeur de la fonction objectif doit avoir augmenté.

- Pour savoir si une base donnée est optimale, il faut vérifier que toute base adjacente est moins bonne que la base courante.
- Pour augmenter la valeur de la fonction objectif il faut faire entrer dans la nouvelle base une variable hors base dont le coefficient est positif.

Proposition :

Si dans l'expression de la fonction objectif $z = c_0 + c_{i_1}x_{i_1} + c_{i_2}x_{i_2} + \cdots + c_{i_n}x_{i_n}$ exprimée en fonction des variables hors base, tous les coefficients des variables hors base sont négatifs ou nuls, alors la solution de base réalisable courante est la solution optimale. L'algorithme du simplexe est alors terminé.

Remarque :

Il n'est pas nécessaire de remettre les variables à droite de l'égalité dans la fonction objectif. En effet, dans un système où toutes les variables sont du même côté, il suffit de regarder :

1. pour le critère d'arrêt : si tous les coefficients sont positifs, on s'arrête.
2. pour le choix de la variable entrante : on cherche le plus petit coefficient et non le plus grand comme décrit dans la méthode puisque les variables sont de l'autre côté de l'égalité.

Récapitulatif

Travail préliminaire

1. Mise sous forme canonique du problème.
2. Ajout des variables d'écart.
3. Choix de la base réalisable de départ.

Une fois toutes ces étapes réalisées, on peut démarrer l'algorithme du simplexe pour un problème de maximisation :

$$\max z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$$

$$\text{sous contraintes } \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

L'algorithme

tant que il existe s tel que $c_s > 0$ **faire**

choisir une variable x_s telle que $c_s > 0$ (x_s entre dans la base)

si tous les $a_{i,s} \leq 0$: **STOP** (problème non borné)

sinon

début

soit r tel que

$$\frac{b_r}{a_{r,s}} = \min\left\{\frac{b_i}{a_{i,s}}, a_{i,s} > 0, i = 1, \ldots, m\right\}$$

pivoter(r,s)

fin

fin tant que

La fonction **pivoter(r,s)**

début
diviser la ligne r par $a_{r,s}$.
retrancher à la ligne de la fonction objectif c_s fois la ligne r ;

  pour $k = 1, \ldots, m$, $k \neq r$ **faire**
    retrancher à la ligne k $a_{k,s}$ fois la nouvelle ligne r ;

  fin pour

fin