Cours de Chaînes de Markov 2ème année

Coralie Eyraud-Dubois

11 février 2021

1 Exemples de problèmes à traiter

1.1 Maladie

1.2 La marche de l'homme saoul

1.3 Joueur

2 Définitions :

Définition 1 *On appelle chaîne de Markov sur E une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans un ensemble E telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

$$\forall (i, j_n, j_{n-1}, \dots, j_0) \in E^{n+2}$$

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i \,|\, X_n = j_n, X_{n-1} = j_{n-1}, \dots, X_0 = j_0) = \mathbb{P}((X_{n+1} = i \,|\, X_n = j_n)$$

Cette propriété est appelée propriété de Markov.

Définition 2 *E est appelé* l'espace d'états *de la chaîne. Dans ce cours, E sera toujours un espace fini.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{P}_n$ la loi de X_n c'est-à-dire l'ensemble des probabilités $\mathbb{P}(X_n = i)$ pour $i \in E$ inscrites en colonnes : si on note $E = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$

$$\mathbb{P}_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = i_1) \\ \mathbb{P}(X_n = i_2) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(X_n = i_k) \end{pmatrix}$$

Définition 3 *Avec cette notation, on appelle $\mathbb{P}_0$ la* loi initiale *de la chaîne.*

$$\mathbb{P}_0 = (\mathbb{P}(X_0 = j))_{j\in E}$$

S'il existe $j \in E$ tel que $\mathbb{P}(X_0 = j) = 1$, on dit que la chaîne commence en j et on note alors la loi de toute la chaîne avec l'exposant j : $\mathbb{P}^j$.

Définition 4 *Une chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite* homogène *si les probabilités de transition d'un état à un autre ne dépend pas du temps :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\, \forall (i,j) \in E^2,\, \mathbb{P}(X_{n+1} = i \,|\, X_n = j) = \mathbb{P}((X_1 = i \,|\, X_0 = j)$$

3 Matrice de transition

Définition 5 *On appelle* matrice de transition *de la chaîne de Markov homogène à espace d'états fini* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *l'ensemble des probabilités de transition, c'est-à-dire la matrice :*

$$T = (\mathbb{P}(X_{n+1} = i \,|\, X_n = j))_{(i,j)\in E^2}$$

Remarque : Comme la chaîne est homogène, cette matrice ne dépend pas du n choisit.

Proposition 1 *Soit* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une chaîne de Markov homogène de matrice de transition* T. *Si on note, pour tout* n *dans* $\mathbb{N}$, $\mathbb{P}_n = (\mathbb{P}(X_n = i))_{i\in E}$ *la loi de* X_n *alors :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\, \mathbb{P}_{n+1} = TP_n$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\, \mathbb{P}_n = T^n P_0$$

Démonstration : ■

Proposition 2 *Chaque colonne de la matrice de transition est une loi de probabilité. On dit que c'est une matrice* stochastique *:*

— $\forall (i,j) \in E^2, 0 \leq t_{i,j} \leq 1$
— $\forall j \in E,\, \sum_{i\in E} t_{i,j} = 1$

Démonstration : ■

Proposition 3 *Le produit de deux matrices stochastiques est une matrice stochastique.*

Démonstration : ■

Théorème 1 *Les matrices stochastiques ont 1 comme valeur propre.*

Démonstration : ■

Théorème 2 *Si* T *est une matrice stochastique, il existe une loi de probabilité* Π_0 *tel que* $\Pi_0 = T\Pi_0$. *Si* T *est la matrice de transition d'une chaîne de Markov homogène, une telle loi de probabilité est appelée* loi stationnaire *ou* loi invariante *de la chaîne.*

Remarque : Ce vecteur Π_0 est un vecteur propre de T associé à la valeur propre 1.

Définition 6 *Une chaîne de Markov homogène* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de matrice de transition* T *est dite en* régime stationnaire *si sa loi initiale* P_0 *est égale à sa loi stationnaire* Π_0.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n = \Pi_0$.

4 Propriété de Markov générale

Théorème 3 (Propriété de Markov) *Soient* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une chaîne de Markov homogène,* B *un évènement de la chaîne,* $k \in \mathbb{N}$ *et* C *un évènement sur les* $(X_0, X_1, \ldots, X_{k-1})$ *alors :*

$$\mathbb{P}((X_{k+n})_{n\in\mathbb{N}} \in B \,/\, X_k = i \text{ et } (X_0, X_1, \ldots, X_{k-1}) \in C) = \mathbb{P}((X_n)_{n\in\mathbb{N}} \in B \,/\, X_0 = i)$$

5 Représentation

Pour bien comprendre ce qu'est une chaîne de Markov, il est bon d'en avoir une représentation visuelle.

5.1 Graphe d'une chaîne de Markov

Une chaîne de Markov homogène est une suite infinie de variables aléatoires. Cependant, si l'espace d'états est fini, un ensemble fini de données suffit à la caractériser.

Dans ce cours, une chaîne de Markov est essentiellement : l'espace d'états E, les transitions (la matrice de transition), la loi initiale. Si on représente les états avec les transitions, on obtient un graphe :

Définition 7 *On appelle* graphe de la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *le graphe orienté dont les sommets sont les états de la chaîne ie les éléments de E et dont les arêtes de i vers j sont présentes s'il est possible de passer de i à j :* $\mathbb{P}(X_{n+1} = j \,|\, X_n = i) > 0$.

5.2 Classification des états d'une chaîne de Markov

Définition 8 *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov de matrice de transition $T = (t_{i,j})_{(i,j)\in E^2}$ Soit $(i,j) \in E^2$, on dit que i est un* descendant *de j ou que j est un* antécédent *de i s'il existe un n tel que le coefficient en position (i,j) de T^n est strictement positif :*

$$\exists n \in \mathbb{N},\, t_{i,j}^{(n)} > 0$$

c'est-à-dire s'il existe un chemin dans le graphe de la chaîne qui va de j vers i.

On note cela $j \to i$.

Définition 9 *On dit que i et j* communiquent*, noté $i \leftrightarrow j$, si i est à la fois un antécédent et un descendant de $j \to i$ et j : $i \to j$.*

Proposition 4 *La relation de communication est une relation d'équivalence sur l'ensemble des états de la chaîne.*

Démonstration : ■

Définition 10 *On appelle classe d'équivalence de i, noté $\mathcal{C}_i$, l'ensemble des états de la chaîne qui communiquent avec i.*

On peut définir un ordre sur l'ensemble des classes : la descendance. On dit qu'une classe $\mathcal{D}$ est plus grande qu'une classe $\mathcal{C}$ si les états de $\mathcal{C}$ sont des descendants des états de $\mathcal{D}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{D} > \mathcal{C} \quad &\Leftrightarrow \quad \forall i \in \mathcal{D},\, \forall j \in \mathcal{C},\, i \to j \\ &\Leftrightarrow \quad \exists i \in \mathcal{D},\, \exists j \in \mathcal{C},\, i \to j \end{aligned}$$

Définition 11 *On dit qu'une classe est* finale *si elle n'a pas de descendant, s'il n'existe pas de classe "plus petite". Une classe qui n'est pas finale est dite* de passage.

Définition 12 *Une chaîne de Markov qui ne possède qu'une classe d'équivalence est dite irréductible.*

6 Étude des chaînes de Markov irréductibles

6.1 Théorèmes de convergence

Théorème 4 *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène à nombre fini d'état. Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est irréductible, alors elle possède une unique loi stationnaire Π_0. De plus tous les coefficients de Π_0 sont strictement positifs.*

Si, de plus, sa matrice de transition T est strictement positive, alors

$$\forall i \in E,\ \mathbb{P}(X_n = i) \longrightarrow_{n\to+\infty} \Pi_0(i)$$

$$\mathbb{P}_n \longrightarrow_{n\to+\infty} \Pi_0$$

On dit que la chaîne de Markov converge vers sa loi limite indépendamment de sa loi initiale.

Démonstration : ■

Contre-exemple : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène à nombre fini d'état de matrice de transition $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et de loi initiale $\mathbb{P}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

La chaîne possède effectivement une unique loi stationnaire : $\Pi_0 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$ mais pour tout n, $\mathbb{P}_{2n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\mathbb{P}_{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donc $\mathbb{P}_n$ ne converge pas quand n tend vers l'infini.

6.2 Ergodicité

Définition 13 *On dit qu'une matrice stochastique est* ergodique *s'il existe m tel que tous les coefficients de T^m sont strictement positifs : $T^m > 0$.*

On dit qu'une chaîne de Markov est ergodique *si sa matrice de transition l'est.*

Sur le graphe d'une chaîne cela signifie qu'il existe un nombre de pas qui permet d'aller de n'importe quel sommet à n'importe quel autre.

Remarque : Si une chaîne de Markov est ergodique, elle est irréductible. Elle a donc une seule loi stationnaire Π_0.

Théorème 5 *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène à nombre fini d'état. Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ergodique, alors elle converge vers sa loi limite indépendamment de sa loi initiale :*

$$\forall i \in E,\ \mathbb{P}(X_n = i) \longrightarrow_{n\to+\infty} \Pi_0(i)$$

$$\mathbb{P}_n \longrightarrow_{n\to+\infty} \Pi_0$$

Démonstration : ■

6.3 Critère d'ergodicité

Définition 14 *La* période d'un état i *est le pgcd des longueurs des circuits*[1] *passant par* i.

Proposition 5 *Dans une classe d'équivalence, tous les états ont la même période.*

Démonstration : ■

Définition 15 *La* période d'une classe $\mathcal{F}$ *est la période des états qui la compose. Une classe d'une chaîne de Markov de période 1 est dite* apériodique.

Remarque : On ne parle en général de période d'une classe que si elle est finale.

Définition 16 *Si* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une chaîne de Markov irréductible, tous ses états ont la même période. On l'appelle* période de la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Théorème 6 *Une chaîne de Markov est ergodique si et seulement si elle est irréductible et apériodique.*

Critère simple : S'il existe un circuit qui passe par tous les sommets alors la chaîne est irréductible. Si de plus, il existe une boucle sur un sommet, alors elle est apériodique donc ergodique.

Remarque : Si la chaîne de Markov est irréductible mais pas apériodique, l'évolution de la chaîne de Markov dépend de l'état initial.

7 Les chaînes de Markov non irréductibles

7.1 Réduction aux classes finales

Proposition 6 *Soit* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une chaîne de Markov homogène et* $\mathcal{F} \subset E$ *une classe finale de la chaîne. Alors la suite* $(\mathbb{P}(X_n \in \mathcal{F}))_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante et bornée par 1. Donc cette suite converge.*

Démonstration : ■

Théorème 7 (Les classes de passages se vident) *Soit* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une chaîne de Markov homogène à nombre fini d'états et soit* $\mathcal{P}$ *l'ensemble des états qui appartiennent à une classe de passage. Alors* $\mathbb{P}(X_n \in \mathcal{P}) \longrightarrow_{n\to+\infty} 0$

Démonstration : ■

Définition 17 (Réduction à une classe finale) *Soit* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une chaîne de Markov homogène à nombre fini d'états et* $\mathcal{F}$ *une de ses classes finales. Soit* T *la matrice de transition de la chaîne.*

Notons $T_{\mathcal{F}} = (t_{e,f})_{(e,f)\in\mathcal{F}^2}$ *la restriction de* T *aux lignes et aux colonnes des états de* $\mathcal{F}$.

Toute chaîne de Markov $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *à valeurs dans* $\mathcal{F}$ *de matrice de transition* $T_{\mathcal{F}}$ *est une chaîne de Markov irréductible que l'on appelle* réduction *de la chaîne* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *à* $\mathcal{F}$.

1. Un circuit est un chemin qui commence et fini au même endroit.

Proposition 7 *Toute réduction* $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de la chaîne* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *à* $\mathcal{F}$ *vérifie*

$$\forall(e,f)\in\mathcal{F}^2,\ \forall n\in\mathbb{N},\ \mathbb{P}^f(X_n=e)=\mathbb{P}^f(Y_n=e)$$

Démonstration : ■

7.2 Lois stationnaires dans le cas général

Proposition 8 (Les lois stationnaires ne chargent que les états finaux) *Soit* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une chaîne de Markov. Soient* Π *une loi stationnaire de* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* x *une état de passage, alors* $\Pi(x)=0$. [2]

Démonstration : ■

Proposition 9 *Une chaîne de Markov sur un espace d'état fini qui ne possède qu'une classe finale a une seule loi stationnaire.*

Démonstration : ■

Théorème 8 *Une chaîne de Markov* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sur un espace d'états fini qui possède* $k>1$ *classes finales* $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, ..., $\mathcal{F}_k$ *a une infinité de lois stationnaires.*

Notons Π_1,Π_2, ...Π_k *les lois stationnaires de la chaîne* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *réduite aux classes finales* $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, ..., $\mathcal{F}_k$.

Pour tout i *de* 1 *à* k, *notons* $\widetilde{\Pi}_i$ *la loi sur* E *qui vaut :*

$$\begin{array}{rcll}\widetilde{\Pi}_i(e) & = & \Pi_i(e) & \textit{si } e\in\mathcal{F}_i \\ & = & 0 & \textit{sinon.}\end{array}$$

Chaque $\widetilde{\Pi}_i$ *est une loi stationnaire de la chaîne et pour toute famille* $(p_1,p_2,\ldots,p_k)\in\mathbb{R}_+^k$ *telle que* $\sum_{i=1}^k p_i=1$ *la loi* $\sum_{i=1}^k p_i\widetilde{\Pi}_i$ *est une loi stationnaire de la chaîne.*

Remarque : En fait, toutes les lois stationnaires de la chaîne sont de cette forme.

7.3 Comportement asymptotique dans le cas général

Proposition 10 *Si une chaîne possède une seule classe finale donc une seule loi stationnaire notée* Π_0 *et que cette classe finale est apériodique alors* $\mathbb{P}_n \longrightarrow_{n\to+\infty}\Pi_0$ *:*

$$\forall k\in E,\ \mathbb{P}(X_n=k)\longrightarrow_{n\to+\infty}\Pi_0(k)$$

Proposition 11 *Si une chaîne de Markov homogène* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *a plusieurs classes finales* $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, ..., $\mathcal{F}_k$. *Pour chaque classe finale* $\mathcal{F}_i$, *notons* $\widetilde{\Pi}_i$ *la loi stationnaire de la chaîne qui est nulle sur tous les états sauf ceux de* $\mathcal{F}_i$. *Alors il existe* $(c_1,\ldots,c_k)\in[0;1]^k$ *tel que* $\sum_{i=1}^k c_i=1$ *et pour tout* i *:*

$$\mathbb{P}(X_n\in\mathcal{F}_i)\longrightarrow_{n\to+\infty}c_i$$

De plus, pour tout i *tel que* $\mathcal{F}_i$ *est une classe apériodique, on a :*

$$\forall x\in\mathcal{F}_i,\mathbb{P}(X_n=x)\longrightarrow_{n\to+\infty}c_i\widetilde{\Pi}_i(x)$$

2. $\Pi(x)$ désigne le coefficient de Π qui correspond à l'état x.

Remarques :

— $c_i = \mathbb{P}(\exists n \in \mathbb{N}, X_n \in \mathcal{F}_i)$ est la probabilité d'atteindre $\mathcal{F}$ un jour.

— Dans le cas général les $c_1, \ldots, c_k$ dépendent fortement de la loi initiale. La section suivante permet de les calculer.

8 Étude de la phase de transition

Pour bien comprendre cette partie, il faut avoir en tête chaque élément d'une chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$: n est le temps qui passe (nombre de semaine, de pas ou de jeu...) et X_n l'endroit (aléatoire) où se trouve la chaîne après n pas.

On s'intéresse maintenant au temps que l'on met à atteindre une zone. Ce temps est une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{N}$.

8.1 Propriété de Markov forte

Définition 18 *Soit A une partie des états de la chaîne. On appelle* temps d'atteinte de A *la variable aléatoire*

$$t(A) = \min\{n \in \mathbb{N} \,/\, X_n \in A\}$$

Ces temps d'atteintes sont très intéressant car on peut définir la chaîne à partir du temps d'atteinte, et elle se comporte exactement comme notre chaîne initiale (avec une loi initiale différente). C'est l'objet du théorème suivant :

Théorème 9 (Propriété de Markov forte) *Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène, B un évènement de la chaîne, A un sous-ensemble de son espace d'état et T le temps d'atteinte de A de la chaîne alors :*

$$\mathbb{P}((X_{T+n})_{n\in\mathbb{N}} \in B \,/\, T < +\infty \text{ et } X_T = i) = \mathbb{P}((X_n)_{n\in\mathbb{N}} \in B \,/\, X_0 = i)$$

8.2 Calcul d'espérance de temps d'atteinte

Soient j un état et A une partie des états de la chaîne de Markov telle que le temps $t(A)$ d'atteinte de A partant de j soit fini : $\mathbb{P}^j(t(A) < +\infty) = 1$.

Cela signifie qu'on est sûr, partant de j d'arriver un jour dans l'ensemble A, $t(A)$ représente alors le nombre de pas qu'il faut pour atteindre l'ensemble d'états A.

Définition 19 *On note $\mathbb{E}^j(t(A))$ l'espérance de la variable aléatoire $t(A)$ si la chaîne part de j, c'est-à-dire si $P(X_0 = j) = 1$.*

Proposition 12 *Si $j \in A$ alors $\mathbb{E}^j(t(A)) = 0$.*

Si $j \notin A$, $\mathbb{E}^j(t(A)) = 1 + \sum_{i\in E} t_{ij}\mathbb{E}^i(t(A)) = 1 + \sum_{i\in V(j)} t_{ij}\mathbb{E}^i(t(A))$ avec t_{ij} le coefficient de la matrice de transition de la chaîne en position ij et $V(j)$ le voisinage de j c'est-à-dire l'ensemble des états i tels que $t_{ij} > 0$.

Rappel : t_{ij} est la probabilité d'aller en i si on est en j.

Démonstration : ■

Pour calculer l'espérance $\mathbb{E}^j(t(A))$ on peut donc utiliser cette formule pour chacun des j qui ne sont pas dans A. Cela nous donne autant d'équations linéaires que d'inconnues. On peut donc en déduire $\mathbb{E}^j(t(A))$.

Cela peut aussi s'écrire de manière matricielle : Dans la formule $\mathbb{E}^j(t(A)) = 1+\sum_{i\in\bar{A}} t_{ij}\mathbb{E}^i(t(A))$ la somme de produit fait penser au produit d'une partie de la matrice T avec un vecteur rassemblant toutes les espérances partant des divers points. Ce qui nous donne l'équation matricielle :

$$\mathbb{E}_A = \mathbf{1}_{1,m} + \mathbb{E}_A T_{\bar{A}}$$

ou

$$\mathbb{E}_A(I_m - T_{\bar{A}}) = \mathbf{1}_{1,m}$$

avec $\mathbb{E}_A = \left(\mathbb{E}^j(t(A))\right)_{j\in\bar{A}}$, $m = \text{Card}\bar{A}$, $T_{\bar{A}} = (t_{ij})_{(i,j)\in\bar{A}^2}$ et $\mathbf{1}_{1,m} = (1, 1, \ldots, 1)$ est un vecteur de 1 ligne et m colonne.

8.3 Calcul de la loi de $X_{t(A)}$

Maintenant qu'on a bien compris que $t(A)$ est une variable aléatoire qui représente le temps que l'on met à atteindre A. Lorsque $t(A) < +\infty$, on va pouvoir étudier la variable $X_{t(A)}$ qui est l'endroit où se trouve la chaîne au temps $t(A)$ c'est-à-dire l'endroit par où la chaîne entre dans A.

Dans cette section, comme dans la précédente, nous allons considérer qu'on est sûr d'arriver un jour en A, c'est-à,dire que A est toujours pris de telle sorte que $\mathbb{P}(t(A) < +\infty) = 0$.

$X_{t(A)}$ est donc une variable aléatoire à valeur dans A.

Théorème 10 *Soit $A \subset E$, $X_{t(A)}$ est une variable aléatoire à valeurs dans A. Si on est sûr que $t(A) \geq 1$ (par exemple si on commence en dehors de A). Et pour $i \in A$ et $j \in E$. On a :*

$$\mathbb{P}(X_{t(A)} = i \,|\, X_1 = j) = \mathbb{P}(X_{t(A)} = i \,|\, X_0 = j)$$

Démonstration : ■

L'objet de la proposition suivante est de déterminer la loi de $X_{t(A)}$ lorsque $\mathbb{P}(t(A) < \infty) = 1$.

Proposition 13 *Soit $A \subset E$ qui contient au moins un élément de chaque classe finale. $X_{t(A)}$ est une variable aléatoire à valeurs dans A. Notons $L = \left(\mathbb{P}(X_{t(A)} = i \,|\, X_0 = j)\right)_{i\in A, j\in\bar{A}}$. Alors*

$$L(I_m - T_{\bar{A}}) = (t_{ij})_{i\in A, j\in\bar{A}}$$

avec $\bar{A} = E \setminus A$, $m = Card(\bar{A})$ et $T_{\bar{A}} = (t_{ij})_{(i,j)\in\bar{A}^2}$.

Remarque : Les coefficients de L sont les seuls à calculer. En effet :
- Si $i \in \bar{A}$, pour tout $j \in E$, $\mathbb{P}(X_{t(A)} = i \,|\, X_0 = j) = 0$.
- Soit $i \in A$. Si $j \in A$, alors $t(A) = 0$ et

$$\mathbb{P}(X_{t(A)} = i \,|\, X_0 = j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

— D'après la formule des probabilités totale appliqué à l'ensemble complet d'événement $(X_0 = j)_{j \in E}$:

$$\mathbb{P}(X_{t(A)} = i) = \sum_{j \in E} \mathbb{P}(X_{t(A)} = i \,|\, X_0 = j)\mathbb{P}(X_0 = j)$$

Démonstration de la proposition 13 : ■

Nous allons surtout utiliser cette proposition avec pour A l'ensemble des classes finales. Cela nous permet alors de déterminer quelle proportition arrive dans chaque classe finale comme nous allons le voir sur les exemples.

8.4 Retour aux chaînes de Markov non-irréductible

Dans cette partie, on va étudier une chaîne de Markov qui possède k classes finales : $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, ..., $\mathcal{F}_k$.

On va noter $\mathcal{F} = \cup_{i=1}^{k} \mathcal{F}_i$ l'ensemble des états finaux de la chaîne de Markov et $t(\mathcal{F})$ le temps d'atteinte de $\mathcal{F}$. $t(\mathcal{F})$ est un temps d'arrêt.

On sait que $X_{t(\mathcal{F})}$ est un des états finaux donc

$$\sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(X_{t(\mathcal{F})} \in \mathcal{F}_i) = 1$$

On peut donc réécrire la proposition 11 plus précisément de la manière suivante :

Proposition 14 *Pour toute classe finale $\mathcal{F}_i$:*

$$\mathbb{P}(X_n \in \mathcal{F}_i) \longrightarrow_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_{t(\mathcal{F})} \in \mathcal{F}_i)$$

En particulier, si $\mathcal{F}_i$ est une classe apériodique, pour tout état x de $\mathcal{F}_i$:

$$\mathbb{P}(X_n = x) \longrightarrow_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_{t(\mathcal{F})} \in \mathcal{F}_i)\Pi_{\mathcal{F}_i}(x)$$

avec $\Pi_{\mathcal{F}_i}$ la loi stationnaire de la chaîne restreinte à la classe $\mathcal{F}_i$.

Calcul de ces probabilités

Si on note $L_{\mathcal{F}_i} = \left(\mathbb{P}(X_{t(\mathcal{F})} \in \mathcal{F}_i \,|\, X_0 = j)\right)_{j \in \overline{\mathcal{F}}}$ où $\overline{\mathcal{F}}$ représente l'ensemble des états de passage, alors $L_{\mathcal{F}_i}(I_{\mathrm{Card}(\overline{\mathcal{F}})} - T_{\overline{\mathcal{F}}}) = \left(\sum_{k \in \mathcal{F}_i} t_{kj}\right)_{j \in \overline{\mathcal{F}}}$. Pour trouver ces probas, il y a donc à inverser une matrice $(I_{\mathrm{Card}(\overline{\mathcal{F}})} - T_{\overline{\mathcal{F}}})$ i.e. résoudre un système de m équations à m inconnus où m est le nombre d'état de passage de la chaîne.