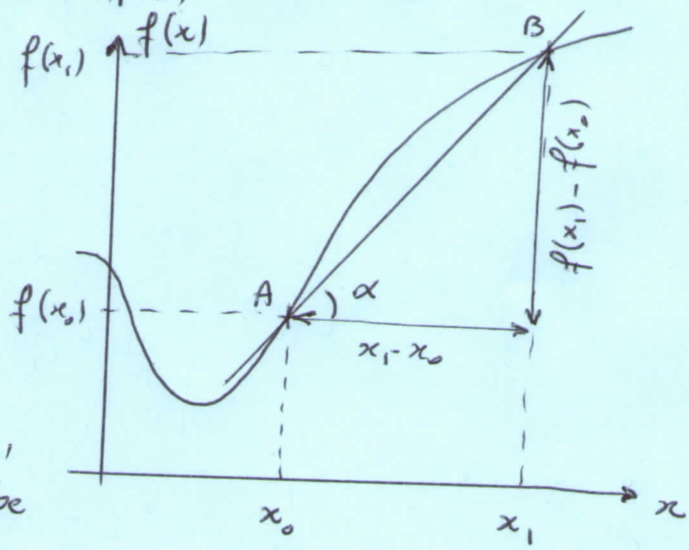
Soutien en mathématique - | Fiche sur la dérivation.

① Définition

Soient f une fonction continue sur $[a,b]$ et x_0 un point de $]a,b[$.
f est dérivable en x_0 si et seulement si le rapport $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite lorsque x tend vers x_0. Cette limite est la dérivée de f en x_0, noté $f'(x_0)$ (notation de Newton) ou $\frac{df}{dx}(x_0)$ (notation de Leibnitz)

② Interprétation

* Soit C_f la représentation graphique de f. Soient A et B les points de coordonnées respectives $(x_0, f(x_0))$ et $(x_1, f(x_1))$. A et B sont donc deux points de C_f.



Le rapport $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ est égal à la tangente de l'angle α qui est aussi la pente ou coefficient directeur de la droite (AB)

Quand x_1 tend vers x_0, B tend vers A, (AB) tend vers la tangente à la courbe C_f en A et la dérivée de f en x_0 est donc le coefficient directeur de la droite tangente à C_f en x_0 : T_{x_0}
T_{x_0} a pour équation : $y = f'(x_0)x + c$

* si f est une fonction du temps qui donne la position d'un mobile, alors f' est sa vitesse et f'', dérivée de f', est son accélération.

Dans la suite, nous considérons trois fonctions dérivables f, g et h, et (α, β) une paire de réels quelconques.
Quand une fonction dépend de plusieurs variables x_i, on appelle dérivée partielle de f par rapport à x_k, k donné, la dérivée de f en considérant les autres variables comme constantes et on la note : $\frac{\partial f}{\partial x_k}$

③ Dérivées usuelles

la dérivée d'une constante est nulle

$(x^n)' = n x^{n-1}$ $\qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}$

$(\cos x)' = -\sin x$ $\qquad (\sin x)' = \cos x$ $\qquad (\operatorname{tg} x)' = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$ $\qquad (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$ $\qquad (\operatorname{th} x)' = 1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$

$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

④ Dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient

* Somme. la dérivation est linéaire $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$

  Exemple : $(2\ln x + \sin x)' = 2\frac{1}{x} + \cos x$

  Exercice ; dériver $3x^9 - \operatorname{tg} x$

* produit : $(fg)' = f'g + g'f$

  Exemple : $(x^2 \operatorname{tg} x)' = 2x \operatorname{tg} x + \frac{x^2}{\cos^2 x} = \frac{2x \sin x \cos x + x^2}{\cos^2 x} = \frac{x \sin 2x + x^2}{\cos^2 x}$

  $= x \frac{\sin 2x + x}{\cos^2 x}$

  Exercice : dériver $\cos x \ln x$

* Quotient : $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$

  Exemple : $\left(-\frac{10x^4}{\operatorname{tg} x}\right)' = -\frac{40x^3 \operatorname{tg} x - 10(1+\operatorname{tg}^2 x)x^4}{\operatorname{tg}^2 x} = 10x^3\left(\frac{-4}{\operatorname{tg} x} + \frac{x}{\operatorname{tg}^2 x} + x\right)$

  Exercice ; dériver $\frac{\sin x}{\cos x}$

Exercice : soit $f(\nu, m, \alpha, k_1, k_2) = \frac{\sin(k_1 \nu + \alpha)(1-m^2)}{\sin(k_2 \nu + \beta)}$

calculer $\frac{\partial f}{\partial \nu}$, $\frac{\partial f}{\partial m}$, $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$

⑤ Dérivée d'une fonction composée

* Composée de deux fonctions $(f \circ g)' = f' \circ g \cdot g'$

  Exemple : $(\ln(e^x))'$ $\qquad$ on pose $g(x) = e^x$ $\quad f(x) = \ln x$

  avec $g'(x) = e^x$ $\quad f'(x) = \frac{1}{x}$

  d'où $(\ln(e^x))' = \frac{1}{e^x} e^x = 1$

  vérification : $\ln(e^x) = x \Rightarrow \ln(e^x)' = 1$.

Exercices : dériver $\mathrm{tg}\left(\frac{1}{e^x}\right)$, $2\,\mathrm{arctg}\, e^x$, $\sin(4x^2+1)$

* Composée de trois fonctions : $(f\circ g\circ h)' = f'\circ g\circ h \times g'\circ h \times h'$

Exemple : $\ln\left(\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right)'$ on pose $h(x) = \frac{x}{2} \Rightarrow h'(x) = \frac{1}{2}$

$g(x) = \mathrm{tg}\,x \Rightarrow g'(x) = 1+\mathrm{tg}^2 x$

$f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

et donc :

$$\ln\left(\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{\mathrm{tg}\,x/2}\times\left[1+\mathrm{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)\right]\times\frac{1}{2} = \frac{1+\mathrm{tg}^2 x/2}{2\,\mathrm{tg}\,x/2} = \frac{1+(\sin^2 x/2)/\cos^2(x/2)}{2\,\frac{\sin x/2}{\cos x/2}}$$

$$= \frac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos x/2\,\sin x/2} = \frac{1}{\sin x}$$

Exercices : dériver $2\,\mathrm{arctg}\left(\mathrm{th}\frac{x}{2}\right)$, $\ln\left(\cos(x^2+7)\right)$

5 Dérivée d'une fonction inverse

supposons que la fonction f soit inversible : $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$

On a alors : $f^{-1}(y)' = \dfrac{1}{f'(x)}$

Exemple : $(\arcsin x)'$ on pose $\sin x = y \Leftrightarrow \arcsin y = x$

Par suite : $(\arcsin y)' = \dfrac{1}{(\sin x)'} = \dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

soit : $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Exercices : dériver $\arccos x$, $\mathrm{arctg}\,x$, $\mathrm{argsh}\,x$