Modélisation

Exercice 1 (Interrogation) Lors d'un cours en amphithéâtre, le professeur interroge un élève toutes les 10 min environ choisi pour son attitude.

Parmi ces élèves, il distingue les élèves bruyants (par exemple ceux qui bavardent) et les élèves passifs (par exemple ceux qui dorment ou qui utilisent leur portable)

Pierre fait partie des élèves qui assistent à ce cours. D'après ce qu'il a pu observer :

— Lorsqu'il est attentif, il a 50% de chances de le rester sur la période suivante. 30% de chances de se faire absorber par une conversation avec ses voisins et devenir bruyant et 20% de décrocher et s'assoupir. Étant attentif, il ne risque pas de se faire interroger.

— Si Pierre est passif, la probabilité qu'il le reste sur la période suivante est de 60%. Il a 30% de chances de se ressaisir et redevenir attentif et 10% de chances de se faire interroger au prochain coup.

— Si Pierre est en train de discuter, il a 20% de chances de poursuivre sa discussion pendant la prochaine période et 40% de chances de se faire interroger comme de redevenir attentif.

— Enfin, si Pierre est interrogé, 9 fois sur 10 il se reprend et redevienne attentif. Toutefois, selon sa réponse à l'interrogation, il pourra se refaire interroger pendant la prochaine période avec une probabilité de 10%.

On considère que Pierre commence le cours en étant attentif.

1. Modéliser ce problème à l'aide d'une chaîne de Markov. Quelle hypothèse faut-il faire pour que ce problème puisse être modélisé par une chaîne de Markov ?
2. Tracer le graphe de cette chaîne et donner la matrice de transition de la chaîne.
3. Quelle est la loi de l'attitude de Pierre au bout d'1 heure ?
4. Au total, quelle proportion du cours Paul suit-il attentivement ?
5. Supposons qu'un cours dure 2h. Quelle est la probabilité que Paul soit interrogé durant le cours ?

Exercice 2 (Notes de cours) Les notes de cours seront-elles autorisées à l'examen ? La réponse est transmise à travers n intermédiaires. On suppose que chaque étudiant transmet le message de façon correcte avec une probabilité p telle que $0 < p < 1$ ou le déforme en son contraire avec probabilité $1 - p$. Les intermédiaires sont indépendants.

1. Modéliser cette situation par une chaîne de Markov a deux états et calculer la probabilité que l'information transmise par le n-ième intermédiaire soit conforme à l'information initiale.
2. Que se passe-t-il quand $n \to +\infty$?

Exercice 3 (Machines en panne) Une unité de production comprend deux machines automatiques fonctionnant indépendamment l'une de l'autre. Chaque machine a la fiabilité p au cours d'une journée, ce qui signifie que sa probabilité de tomber en panne pendant cette période est égale à $1-p$. Dans ce cas, elle sera réparée pendant la nuit et se retrouvera en état de marche le lendemain. Une seule machine peut être réparée à la fois : si les deux machines tombent en panne le même jour, alors la deuxième ne sera réparée que la nuit d'après.

1. Dessiner le graphes de transition correspondant à ce problème.
2. Ecrire la matrice de transition de ce problème.
3. Après une longue période, quelle est le nombre moyen de journées où une seule machine est en panne, et de journées où les deux machines sont en panne simultanément ?

Exercice 4 Classifier les états des chaines de Markov définies par les matrices de transition suivantes :

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0.8 \\ 0 & 0.4 & 0.2 \end{pmatrix}, T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9 \\ 0.9 & 0.9 & 1 & 0 \end{pmatrix}, T_3 = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0.9 \\ 0.2 & 0.3 & 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5 On considère une chaîne de Markov à trois états dont la matrice de transition est donnée par :

$$T = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{2} & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{3}{10} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que la chaîne est irréductible.
2. Calculer la loi invariante.
3. Vérifier que 0, 1 et $\frac{1}{2}$ sont des valeurs propres de la matrice de transition et déterminer les vecteurs propres associés.
4. Sachant que la matrice P donnée par $P = \dfrac{1}{25}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 12 \\ 1 & -3 & 9 \end{pmatrix}$ admet pour inverse la matrice $P^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -6 & 4 \\ 6 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ en déduire une preuve que la chaîne admet comme loi limite la loi invariante.