Cours de Chaînes de Markov 2ème année

Coralie Eyraud-Dubois

4 mars 2021

Début du CM 1

1 Exemples de problèmes à traiter

1.1 Maladie

On considère l'évolution d'une maladie type rhume chez Jeanne. On considère un modèle très simple : si Jeanne est malade, elle a 80% de chances de guérir en une semaine et si elle est saine, elle a une chance sur 20 de tomber malade dans la semaine. Elle commence en bonne santé.

1.2 La marche de l'Homme saoul

Domi sort d'un bar et décide de rentrer chez à son appartement plus loin dans la ruelle. On considère que la ruelle fait 5 pas de large et qu'à chaque pas, Domi a autant de chance de faire un pas vers la gauche ou vers la droite. 2 options :

2a : Un peu bu mais pas trop : Domi s'appuie sur un mur dès que possible

2b : Vraiment trop bu : Domi rebondi sur les murs.

1.3 Casino

Jean arrive dans un casino avec 15 €. Il peut parier ce qu'il veut. À chaque jeu, il a une chance sur 2 de perdre sa mise et une chance sur deux de la doubler. Il sortira du casino s'il a 16 € en poche.

Il imagine 2 stratégies différentes :

3a : Jean parie toujours 1 €.

3b : Jean parie toujours ce qui lui manque pour atteindre 16 €.

2 Définitions :

Définition 1 *On appelle chaîne de Markov sur E une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans un ensemble E telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

$$\forall (i, j_n, j_{n-1}, \ldots, j_0) \in E^{n+2}$$

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i \,|\, X_n = j_n, X_{n-1} = j_{n-1}, \ldots, X_0 = j_0) = \mathbb{P}((X_{n+1} = i \,|\, X_n = j_n)$$

Cette propriété est appelée propriété de Markov.

Définition 2 *E est appelé* l'espace d'états *de la chaîne. Dans ce cours, E sera toujours un espace fini.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{P}_n$ la loi de X_n c'est-à-dire l'ensemble des probabilités $\mathbb{P}(X_n = i)$ pour $i \in E$ inscrites en colonnes : si on note $E = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$

$$\mathbb{P}_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = i_1) \\ \mathbb{P}(X_n = i_2) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(X_n = i_k) \end{pmatrix}$$

Définition 3 *Avec cette notation, on appelle $\mathbb{P}_0$ la* loi initiale *de la chaîne.*

$$\mathbb{P}_0 = (\mathbb{P}(X_0 = j))_{j \in E}$$

S'il existe $j \in E$ tel que $\mathbb{P}(X_0 = j) = 1$, on dit que la chaîne commence en j et on note alors la loi de toute la chaîne avec l'exposant j : $\mathbb{P}^j$.

Définition 4 *Une chaîne de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite* homogène *si les probabilités de transition d'un état à un autre ne dépend pas du temps :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\, \forall (i,j) \in E^2,\, \mathbb{P}(X_{n+1} = i \,|\, X_n = j) = \mathbb{P}((X_1 = i \,|\, X_0 = j)$$

3 Matrice de transition

Définition 5 *On appelle* matrice de transition *de la chaîne de Markov homogène à espace d'états fini $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'ensemble des probabilités de transition, c'est-à-dire la matrice :*

$$T = (\mathbb{P}(X_{n+1} = i \,|\, X_n = j))_{(i,j) \in E^2}$$

Remarque : Comme la chaîne est homogène, cette matrice ne dépend pas du n choisit.

Proposition 1 *Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène de matrice de transition T. Si on note, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{P}_n = (\mathbb{P}(X_n = i))_{i \in E}$ la loi de X_n alors :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\, \mathbb{P}_{n+1} = TP_n$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\, \mathbb{P}_n = T^n P_0$$

Démonstration : D'après la formule des probabilités totales appliquée à l'ensemble complet d'évènement $(X_n = j)_{j \in E}$:

$$\begin{aligned} \forall i \in E,\ \mathbb{P}(X_{n+1} = i) &= \sum_{j \in E} \mathbb{P}(X_{n+1} = i \,|\, X_n = j)\mathbb{P}(X_n = j) \\ &= \sum_{j \in E} t_{ij} \mathbb{P}(X_n = j) \\ \Leftrightarrow \mathbb{P}_{n+1} = T\mathbb{P}_n \end{aligned}$$

La suite $(\mathbb{P}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc une suite géométrique de vecteurs. Ainsi, son terme général est de la forme :$P_n = T^n P_0$.

■

Proposition 2 *Chaque colonne de la matrice de transition est une loi de probabilité. On dit que c'est une matrice* stochastique *:*

— $\forall (i,j) \in E^2, 0 \leq t_{i,j} \leq 1$

— $\forall j \in E, \sum_{i \in E} t_{i,j} = 1$

Démonstration :

— Chacun des $t_{i,j} = \mathbb{P}(X_{n+1} = i \,|\, X_n = j)$ est une probabilité donc est compris entre 0 et 1.

— Soit $j \in E$, $\sum_{i \in E} t_{i,j} = \sum_{i \in E} \mathbb{P}(X_{n+1} = i \,|\, X_n = j) = \mathbb{P}(X_{n+1} \in E \,|\, X_n = j) = 1$

■

Proposition 3 *Le produit de deux matrices stochastiques est une matrice stochastique.*

Démonstration : Soit $M = (m_{ij})_{(i,j) \in E^2}$ et $N = (n_{ij})_{(i,j) \in E^2}$ deux matrices stochastiques. Alors $C = (c_{ij})_{(i,j) \in E^2} = MN$ vérifie :

$$\forall (i,j) \in E^2, c_{ij} = \sum_{l \in E} m_{il} n_{lj}$$

Donc, $\forall j \in E$,

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in E} c_{ij} &= \sum_{i \in E} \sum_{l \in E} m_{il} n_{lj} \\
&= \sum_{l \in E} \left(\sum_{i \in E} m_{il} \right) n_{lj} \\
&= \sum_{l \in E} 1 \times n_{lj} \\
&= 1
\end{aligned}$$

M stoch

N stocha

■

somme des lignes de T vaut (1 .... 1)

Théorème 1 *Les matrices stochastiques ont 1 comme valeur propre.*

Démonstration : Soit T une matrice stochastique de taille k, la somme des lignes de $T - I_k$ est nulle donc $\det(T - I_k) = 0$ et 1 est valeur propre de T. ■

Fin du CM 1

donc $\exists \pi \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), T\pi = \pi$

Début du CM 2

Théorème 2 *Si T est une matrice stochastique, il existe une loi de probabilité Π_0 tel que $\Pi_0 = T\Pi_0$. Si T est la matrice de transition d'une chaîne de Markov homogène, une telle loi de probabilité est appelée* loi stationnaire *ou* loi invariante *de la chaîne.*

Remarque : Ce vecteur Π_0 est un vecteur propre de T associé à la valeur propre 1.