Exemples du cours de Chaînes de Markov

Coralie Eyraud-Dubois

3 mars 2021

1 Maladie

On considère l'évolution d'une maladie type rhume chez Jeanne. On considère un modèle très simple : si Jeanne est malade, elle a 80% de chances de guérir en une semaine et si elle est saine, elle a une chance sur 20 de tomber malade dans la semaine. Elle commence en bonne santé.

Chaine de Markov :

Soit X_n = l'état de santé de Jeanne à la n^{i} semaine.

La propriété de Markov est supposée mais pas évidente.

c-ex : faux pour la varicelle. Le passé compte tjs.

Espace d'état : $E = \{\text{malade}, \text{bonne santé}\}$

Loi initiale : $P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(X_0 = m) \\ P(X_0 = s) \end{pmatrix}$

Lois suivantes : $P_1 = \begin{pmatrix} P(X_1 = m) \\ P(X_{\cancel{2}} = s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/20 \\ 19/20 \end{pmatrix}$

Formule des proba totale : $P(X_1 = m) = P(X_1 = m / X_0 = s)\, P(X_0 = s)$
$+ P(X_1 = m / X_0 = m)\, P(X_0 = m)$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 23/400 \\ 377/400 \end{pmatrix}$$

$$P(X_2 = m) = P(X_2 = m / X_1 = s)\, P(X_1 = s) + P(X_2 = m / X_1 = m)\, P(X_1 = m)$$
$$= \frac{1}{20} \times \frac{19}{20} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{20}$$
$$= \frac{}{400}$$

Homogène ?

Ici signifierai la m̄ proba de tomber malade en été et en hiver / tout au long de la vie.

Matrice de transition :

$$T = \begin{array}{cc} \begin{matrix} m & s \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}05 \\ 0{,}8 & 0{,}95 \end{pmatrix} & \begin{matrix} m \\ s \end{matrix} \end{array}$$

$\Sigma = 1$

Loi stationnaire :

Graphe de la chaîne :

Classification des états :

Périodicité :

2 La marche de l'Homme saoul

Domi sort d'un bar et décide de rentrer chez à son appartement plus loin dans la ruelle. On considère que la ruelle fait 5 pas de large et qu'à chaque pas, Domi a autant de chance de faire un pas vers la gauche ou vers la droite. 2 options :

2a : Un peu bu mais pas trop : Domi s'appuie sur un mur dès que possible

2b : Vraiment trop bu : Domi rebondi sur les murs.

Chaine de Markov :

Soit X_n = position de Domi dans la ruelle au n-ième pas.
La propriété de Markov vient de l'indépendance de la direction des pas successifs.

Espace d'état : $E = \{MG, G, M, D, MD\}$

Loi initiale : Je propose $P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ie $P(X_0 = M) = 1$

Lois suivantes :

Homogène ? Ca signifie sa façon de marcher tout du long.
Pas de dégrisement.

Matrice de transition :

2a :

$$T = \begin{array}{c c} \begin{array}{ccccc} MG & G & M & D & MD \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} MG \\ G \\ M \\ D \\ MD \end{array} \end{array}$$

2b :

$$T = \begin{array}{c c} \begin{array}{ccccc} MG & G & M & D & MD \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} MG \\ G \\ M \\ D \\ MD \end{array} \end{array}$$

Loi stationnaire :

Graphe de la chaîne :

Classification des états :

Périodicité :

3 Casino

Jean arrive dans un casino avec 15 €. Il peut parier ce qu'il veut. À chaque jeu, il a une chance sur 2 de perdre sa mise et une chance sur deux de la doubler. Il sortira du casino s'il a 16 € en poche.

Il imagine 2 stratégies différentes :

3a : Jean parie toujours 1 €.

3b : Jean parie toujours ce qui lui manque pour atteindre 16 €.

Chaine de Markov :

Soit X_n = l'argent dont dispose Jean après le $n^{ième}$ jeu.

Ici la propriété de Markov vient de l'indépendance des résultats des jeux

Espace d'état :

3a : $E = [\![0, 16]\!]$

3b : $E = \{16, 15, 14, 12, 8, 0\}$

Loi initiale :

3b : $P_0 = \begin{pmatrix} P(X_0 = 16) \\ P(X_0 = 15) \\ \vdots \\ P(X_0 = 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

3a : $P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Lois suivantes :

Homogène ? Oui dans la modélisation standard.

Matrice de transition :

3a :

$$T = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & \cdots & 14 & 15 & 16 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 13 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & & & & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & & & & 0 \\ \vdots & 0 & 1/2 & & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & & 1/2 & 0 & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$3b : T = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccccc} 16 & 15 & 14 & 12 & 8 & 0 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 16 \\ 15 \\ 14 \\ 12 \\ 8 \\ 0 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Loi stationnaire :

Graphe de la chaîne :

Classification des états :

Périodicité :