Calcul matriciel

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, m, n, p, q, r sont des entiers naturels.

On note $\delta_{i,j} = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j \end{cases}$ (symbole de Kronecker)

I. Opérations sur les matrices

1°) Matrice

Déf : On appelle matrice de type (n, p) (pour n lignes et p colonnes) à coefficients dans $\mathbb{K}$ tout famille $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ d'éléments de $\mathbb{K}$.

Une telle matrice est généralement représentée sous la forme d'un tableau à n lignes et p colonnes :

$$A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}.$$

$a_{i,j}$ est appelé coefficient d'indice (i, j) de la matrice A, il est positionné à la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne de A. On note $M_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de type (n, p) à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Convention :

Le 1$^{\text{er}}$ indice est l'indice de ligne (souvent noté i).
Le 2$^{\text{nd}}$ indice est l'indice de colonne (souvent noté j).

Cas particuliers :

Pour $n = p = 1$: les matrices de $M_{1,1}(\mathbb{K})$ sont appelées matrices (uni-) coefficient.

Elles sont de la forme (x).

Il est usuel d'identifier ces matrices avec l'élément x de $\mathbb{K}$ qui leur correspond.

Pour n quelconque et $p = 1$: les matrices de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ sont appelées matrices (uni-) colonnes.

Elles sont de la forme : $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

Il est usuel d'identifier cette matrice colonne avec le n uplet $(a_1, \ldots, a_n)$.

Pour $n = 1$ et p quelconque : les matrices de $M_{1,p}(\mathbb{K})$ sont appelées matrices (uni-) lignes.

Elles sont de la forme : $(a_1 \ \cdots \ a_p)$.

Déf : Soit $A = (a_{i,j}) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ (présentation de l'abus de notation correspondant).

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}.$$

Pour $1 \leq j \leq p$, la matrice $C_j = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$ est appelée $j^{\text{ème}}$ colonne de A.

Pour $1 \leq i \leq n$, la matrice $L_i = \begin{pmatrix} a_{i,1} & \ldots & a_{i,p} \end{pmatrix}$ est appelée $i^{\text{ème}}$ ligne de A.

2°) Matrice carrée

Déf : Les matrices de type (n, n) sont appelées matrices carrées d'ordre n.

On note $M_n(\mathbb{K})$, au lieu de $M_{n,n}(\mathbb{K})$, l'ensemble de ces matrices.

Déf : Soit $A=(a_{i,j})\in M_n(\mathbb{K})$. Les coefficients d'indice (i,i) de A sont appelées coefficients diagonaux de A. La famille $\left(a_{1,1},a_{2,2},\dots,a_{n,n}\right)=(a_{i,i})_{1\le i\le n}$ est appelée diagonale de la matrice A.

Déf : Une matrice $A\in M_n(\mathbb{K})$ est dite diagonale ssi tous ses coefficients hors de la diagonale sont nuls. On note $D_n(\mathbb{K})$ l'ensemble de ces matrices.

Déf : On note $\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ la matrice diagonale dont la diagonale est $(\lambda_1,...,\lambda_n)$ i.e. $\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$.

Déf : Une matrice $A\in M_n(\mathbb{K})$ est dite triangulaire supérieure (resp. inférieure) ssi tous les coefficients en dessous (resp. au dessus) de la diagonale sont nuls.
On note $T_n^+(\mathbb{K})$ (resp. $T_n^-(\mathbb{K})$) l'ensemble de ces matrices.

Prop : $D_n(\mathbb{K})=T_n^+(\mathbb{K})\cap T_n^-(\mathbb{K})$.

3°) Espace vectoriel $(M_{n,p}(\mathbb{K}),+,.)$.

Déf : Soit $A=(a_{i,j})\in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B=(b_{i,j})\in M_{n,p}(\mathbb{K})$.
On définit la matrice $A+B\in M_{n,p}(\mathbb{K})$ par $A+B=(a_{i,j}+b_{i,j})_{1\le i\le n,1\le j\le p}$.

Ainsi $\begin{pmatrix}a_{1,1} & \dots & a_{1,p}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_{1,1} & \dots & b_{1,p}\\ \vdots & & \vdots\\ b_{n,1} & \dots & b_{n,p}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{1,1}+b_{1,1} & \dots & a_{1,p}+b_{1,p}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n,1}+b_{n,1} & \dots & a_{n,p}+b_{n,p}\end{pmatrix}$.

Déf : Soit $A=(a_{i,j})\in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda\in\mathbb{K}$.
On définit la matrice $\lambda.A\in M_{n,p}(\mathbb{K})$ par $\lambda.A=(\lambda a_{i,j})_{1\le i\le n,1\le j\le p}$.

Ainsi $\lambda.\begin{pmatrix}a_{1,1} & \dots & a_{1,p}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda a_{1,1} & \dots & \lambda a_{1,p}\\ \vdots & & \vdots\\ \lambda a_{n,1} & \dots & \lambda a_{n,p}\end{pmatrix}$.

Théorème : $(M_{n,p}(\mathbb{K}),+,.)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel d'élément nul $O=O_{n,p}$.

Déf : Soit $1\le k\le n$ et $1\le \ell\le p$. On appelle matrice élémentaire d'indice (k,ℓ) de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ la matrice $E_{k,\ell}$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui d'indice (k,ℓ) qui est égal à 1. Ainsi

$$E_{k,\ell}=\begin{pmatrix}0 & & 0\\ & 1 & \\ 0 & & 0\end{pmatrix}\in M_{n,p}(\mathbb{K}).$$

Théorème :
La famille $\mathcal{B}=(E_{k,\ell})_{1\le k\le n,1\le \ell\le p}$ forme une base de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ appelée base canonique.

Cor : $\dim M_{n,p}(\mathbb{K})=np$ et en particulier
$\dim M_n(\mathbb{K})=n^2$, $\dim M_{n,1}(\mathbb{K})=n$ et $\dim M_{1,p}(\mathbb{K})=p$.

Prop : $D_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{K})$ de dimension n.

Prop : $T_n^+(\mathbb{K})$ et $T_n^-(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $M_n(\mathbb{K})$ de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

4°) Produit matriciel

Déf : Soit $A=(a_{i,j})\in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B=(b_{j,k})\in M_{p,q}(\mathbb{K})$. On définit la matrice $C=A\times B=(c_{i,k})\in M_{n,q}(\mathbb{K})$ par : $\forall 1\le i\le n,\forall 1\le k\le q$, $c_{i,k}=\sum_{j=1}^{p}a_{i,j}b_{j,k}$.

5°) Propriétés du produit matriciel

Prop : Soit $A\in M_{n,p}(\mathbb{K}),B\in M_{p,q}(\mathbb{K}),C\in M_{q,r}(\mathbb{K})$.
On a $(AB)C=A(BC)$.

Prop : $\forall A\in M_{n,p}(\mathbb{K})$, $AI_p=A$ et $I_nA=A$

Prop : $\forall A,B\in M_{n,p}(\mathbb{K})$, $\forall C\in M_{p,q}(\mathbb{K})$ $(A+B)C=AC+BC$.
$\forall A\in M_{n,p}(\mathbb{K})$, $\forall B,C\in M_{p,q}(\mathbb{K})$, $A(B+C)=AB+AC$.

Prop : $\forall A\in M_{n,p}(\mathbb{K})$, $\forall B\in M_{p,q}(\mathbb{K})$, $\forall\lambda\in\mathbb{K}$, $(\lambda.A)B=\lambda.AB=A(\lambda.B)$.

6°) L'anneau $(M_n(\mathbb{K}),+,\times)$.

a) présentation

Théorème :

$(M_n(\mathbb{K}),+,\times)$ est un anneau, généralement non commutatif, d'élément nul $O=O_n$ et d'élément unité $I=I_n$. De plus, $\forall\lambda\in\mathbb{K},\forall A,B\in M_n(\mathbb{K})$: $(\lambda.A)B=\lambda.(AB)=A(\lambda.B)$.

Déf : On dit que deux matrices A et B de $M_n(\mathbb{K})$ commutent ssi $AB=BA$.

Déf : Soit $A\in M_n(\mathbb{K})$. On note $A^0=I_n,A^1=A,A^2=A\times A,\dots,A^m=A\times A\times\dots\times A$ (m termes)

Théorème :
Si A et B commutent alors pour tout $m\in\mathbb{N}$:
$(AB)^m=A^mB^m$, $(A+B)^m=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}A^kB^{m-k}$ et $A^m-B^m=(A-B)\sum_{k=0}^{m-1}A^kB^{m-1-k}$.

Déf : Soit $A\in M_n(\mathbb{K})$.
On dit que A est idempotente ssi $A^2=A$.
On dit que A est une matrice nilpotente ssi $\exists m\in\mathbb{N},A^m=0$.

b) matrices inversibles

Déf : Une matrice $A\in M_n(\mathbb{K})$ est dite inversible ssi $\exists B\in M_n(\mathbb{K}),AB=BA=I_n$. On note alors $B=A^{-1}$.

Prop : Soit $A,B\in M_n(\mathbb{K})$
Si A et B sont inversibles alors AB l'est aussi et $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.
Si A est inversible alors A^{-1} l'est aussi et $(A^{-1})^{-1}=A$.

Déf : On note $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{K})$.

Prop : $(GL_n(\mathbb{K}),\times)$ est un groupe appelé groupe linéaire d'ordre n.

Théorème d'inversibilité :
Soit $A\in M_n(\mathbb{K})$. On a équivalence entre
(i) A est inversible
(ii) A est inversible à droite i.e. $\exists B\in M_n(\mathbb{K}),AB=I_n$
(iii) A est inversible à gauche i.e. $\exists C\in M_n(\mathbb{K}),CA=I_n$.
De plus si tel est le cas $A^{-1}=B=C$.

c) matrices diagonales

Prop : $D_n(\mathbb{K})$ est un sous-anneau commutatif de $M_n(\mathbb{K})$.

Prop : Soit $A=\begin{pmatrix}a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n\end{pmatrix}\in D_n(\mathbb{K})$. On a équivalence entre :
(i) A est inversible

(ii) $\forall 1 \le i \le n, a_i \ne 0$.

De plus si tel est le cas : $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1/a_n \end{pmatrix}$.

d) matrices triangulaires

Prop : $T_n^+(\mathbb{K})$ est un sous-anneau de $M_n(\mathbb{K})$.

Prop : Soit $A \in T_n^+(\mathbb{K})$. On a équivalence entre :

(i) A est inversible

(ii) Les coefficients diagonaux de A sont tous non nuls.

De plus, si tel est le cas, $A^{-1} \in T_n^+(\mathbb{K})$.

7°) Transposition

a) définition

Déf : Soit $A = (a_{i,j}) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle matrice transposée de A la matrice ${}^tA = (a'_{j,i}) \in M_{p,n}(\mathbb{K})$ définie par $\forall 1 \le i \le n, \forall 1 \le j \le p, a'_{j,i} = a_{i,j}$.

Ainsi le coefficient d'indice (j,i) de ${}^tA$ est égal au coefficient d'indice (i,j) de A.

Concrètement : Pour $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}, {}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1p} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$.

Prop : $\forall A \in M_{n,p}(\mathbb{K}), {}^t({}^tA) = A$.

$\forall A, B \in M_{n,p}(\mathbb{K}), \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, {}^t(\lambda A + \mu B) = \lambda\, {}^tA + \mu\, {}^tB$.

Prop : $\forall A \in M_{n,p}(\mathbb{K}), \forall B \in M_{p,q}(\mathbb{K}), {}^t(AB) = {}^tB\, {}^tA$.

Prop : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.

Si A est inversible alors ${}^tA$ l'est aussi et ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$.

b) matrices symétriques et antisymétriques

Déf : On dit que $A \in M_n(\mathbb{K})$ est symétrique (resp. antisymétrique) ssi ${}^tA = A$ (resp. ${}^tA = -A$).

On note $S_n(\mathbb{K})$ (resp. $A_n(\mathbb{K})$) l'ensemble de ces matrices.

Prop : Les matrices de $S_n(\mathbb{K})$ sont de la forme : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ a_{1n} & ... & a_{n-1,n} & a_{n,n} \end{pmatrix}$.

Par suite $S_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$ de $M_n(\mathbb{K})$.

Prop : Les matrices de $A_n(\mathbb{K})$ sont de la forme : $A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ -a_{1n} & \dots & -a_{n-1,n} & 0 \end{pmatrix}$.

Théorème :

$S_n(\mathbb{K})$ et $A_n(\mathbb{K})$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $M_n(\mathbb{K})$.

Prop : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ inversible.

Si $A \in S_n(\mathbb{K})$ alors $A^{-1} \in S_n(\mathbb{K})$.

Si $A \in A_n(\mathbb{K})$ alors $A^{-1} \in A_n(\mathbb{K})$.