Problèmes d’optimisation linéaire

Introduction à la recherche opérationnelle

7 février 2020

Un éleveur de vache laitière veut prévoir sa période hivernale.
Il dispose d'une quantité de fourrage qu'il a lui-même produit qui correspond à 60 kg par bête et par jour. Il pense que cela ne va pas suffire et il a les moyens d'acheter jusqu'à 4 kg par bête et par jour de céréales complémentaires.
Cependant, les normes imposent que chaque bête absorbe moins de 150 mg par jour de pesticide.
Le taux de pesticide est de 30 mg par kg de céréales et 1 mg par kg de fourrage.

Un éleveur de vache laitière veut prévoir sa période hivernale.
Il dispose d'une quantité de fourrage qu'il a lui-même produit qui correspond à 60 kg par bête et par jour. Il pense que cela ne va pas suffire et il a les moyens d'acheter jusqu'à 4 kg par bête et par jour de céréales complémentaires.
Cependant, les normes imposent que chaque bête absorbe moins de 150 mg par jour de pesticide.
Le taux de pesticide est de 30 mg par kg de céréales et 1 mg par kg de fourrage.

Question :

Sachant que les vaches produisent en moyenne 3 fois plus de lait pour 1kg de céréales que pour 1kg de fourrage, comment cet éleveur doit-il nourrir ses animaux pour maximiser sa production de lait ?

Pour modéliser ce problème, il va falloir :

1. Choisir des variables adaptées.
2. Exprimer la fonction à optimiser (appelée fonction objectif) en fonction de ces variables.
3. Exprimer les contraintes sur ces variables.

Pour modéliser ce problème, il va falloir :

1. Choisir des variables adaptées.
2. Exprimer la fonction à optimiser (appelée fonction objectif) en fonction de ces variables.
3. Exprimer les contraintes sur ces variables.

Remarque : Il faudra toujours suivre ce schéma pour bien modéliser un problème d'optimisation linéaire.

Vocabulaire

Définition :

On appelle **variable de décision** toute quantité utile à la résolution du problème et dont le modèle doit déterminer la valeur.

Vocabulaire

Définition :

On appelle **variable de décision** toute quantité utile à la résolution du problème et dont le modèle doit déterminer la valeur.

Sur l'exemple

Ici, c'est le poids de céréales et de fourrage que l'on cherche à déterminer.

- $x :=$ poids quotidien en kg de céréales dans l'alimentation d'une vache.
- $y :=$ poids quotidien en kg de fourrage dans l'alimentation d'une vache.

Vocabulaire

Définition :

On appelle **fonction objectif** l'expression qui modélise la quantité à optimiser en fonction des variables du problème.

Vocabulaire

Définition :

On appelle **fonction objectif** l'expression qui modélise la quantité à optimiser en fonction des variables du problème.

Sur l'exemple

Ici, on souhaite maximiser la production de lait.

$$\max z = 3x + y$$

Vocabulaire

Définition :

On appelle **contraintes du problème** toutes les relations limitant le choix de valeurs possibles pour les variables.

Vocabulaire

Définition :

On appelle **contraintes du problème** toutes les relations limitant le choix de valeurs possibles pour les variables.

Sur l'exemple

Ici, les contraintes spécifiées par le texte sont :

Vocabulaire

Définition :

On appelle **contraintes du problème** toutes les relations limitant le choix de valeurs possibles pour les variables.

Sur l'exemple

Ici, les contraintes spécifiées par le texte sont :

- de stock : $y \leq 60$

Vocabulaire

Définition :

On appelle **contraintes du problème** toutes les relations limitant le choix de valeurs possibles pour les variables.

Sur l'exemple

Ici, les contraintes spécifiées par le texte sont :

- de stock : $y \leq 60$
- écologique : $30x + y \leq 150$

Vocabulaire

Définition :

On appelle **contraintes du problème** toutes les relations limitant le choix de valeurs possibles pour les variables.

Sur l'exemple

Ici, les contraintes spécifiées par le texte sont :

- de stock : $y \leq 60$
- écologique : $30x + y \leq 150$
- financière : $2x \leq 8$ soit $x \leq 4$

Vocabulaire

Définition :

On appelle **contraintes du problème** toutes les relations limitant le choix de valeurs possibles pour les variables.

Sur l'exemple

Ici, les contraintes spécifiées par le texte sont :

- de stock : $y \leq 60$
- écologique : $30x + y \leq 150$
- financière : $2x \leq 8$ soit $x \leq 4$

Attention

Il arrive souvent que des contraintes « cachées » ne soient pas explicites dans les problèmes.

Vocabulaire

Définition :

On appelle **contraintes du problème** toutes les relations limitant le choix de valeurs possibles pour les variables.

Sur l'exemple

Ici, les contraintes spécifiées par le texte sont :

- de stock : $y \leq 60$
- écologique : $30x + y \leq 150$
- financière : $2x \leq 8$ soit $x \leq 4$

Attention

Il arrive souvent que des contraintes « cachées » ne soient pas explicites dans les problèmes.

Sur l'exemple

Ici par exemple : $x \geq 0$ et $y \geq 0$

Formalisation du problème

Problème condensé

$$\max z = 3x + y$$

$$\text{sous contraintes} \begin{cases} x & & & \leq & 4 \\ 30x & + & y & \leq & 150 \\ & & y & \leq & 60 \\ x & & & \geq & 0 \\ & & y & \geq & 0 \end{cases}$$

Formalisation du problème

Problème condensé

$$\max z = 3x + y$$

$$\text{sous contraintes} \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & & & \leq & 4 \\ 30x & + & y & \leq & 150 \\ & & y & \leq & 60 \\ x & & & \geq & 0 \\ & & y & \geq & 0 \end{array} \right.$$

Définition :

On appelle **problème d'optimisation linéaire**, un problème dont l'objectif est

- maximiser une fonction linéaire,
- sous contrainte : un ensemble d'équations ou d'inéquations linéaires.

Formalisation du problème

Problème condensé

$$\max z = 3x + y$$

$$\text{sous contraintes} \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & & & \leq & 4 \\ 30x & + & y & \leq & 150 \\ & & y & \leq & 60 \\ x & & & \geq & 0 \\ & & y & \geq & 0 \end{array} \right.$$

Définition :

On appelle **problème d'optimisation linéaire**, un problème dont l'objectif est

- maximiser une fonction linéaire,
- sous contrainte : un ensemble d'équations ou d'inéquations linéaires.

Formalisation du problème

Forme matricielle.

$$\max z = {}^t\mathbf{c}\mathbf{x}$$

$$\text{sous contraintes} \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbf{Ax} & \leq & \mathbf{b} \\ \mathbf{x} & \geq & \mathbf{0} \end{array} \right.$$

avec **A** : matrice $(m \times n)$, **c** : vecteur $(n \times 1)$, **b** : vecteur $(m \times 1)$, **x** : vecteur $(n \times 1)$ si on a n variables et m contraintes.

Formalisation du problème

Forme matricielle.

$$\max z = {}^t\mathbf{c}\mathbf{x}$$

$$\text{sous contraintes} \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbf{Ax} & \leq & \mathbf{b} \\ \mathbf{x} & \geq & \mathbf{0} \end{array} \right.$$

avec **A** : matrice $(m \times n)$, **c** : vecteur $(n \times 1)$, **b** : vecteur $(m \times 1)$, **x** : vecteur $(n \times 1)$ si on a n variables et m contraintes.

Attention !

- Toutes les variables sont positives (ce qui est toujours le cas)
- Toutes les contraintes sont des inégalités du type $\leq$(on peut toujours)

Sur l'exemple

Problème sous forme matricielle

$$\max z = {}^t\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\text{sous contraintes} \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 30 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \leq & \begin{pmatrix} 4 \\ 150 \\ 60 \end{pmatrix} \\ x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \end{cases}$$

Représentation des contraintes

Définitions :

- On appelle **solution réalisable** un ensemble de valeurs des variables de décision qui satisfont toutes les contraintes.
- On appelle **région réalisable** l'ensemble des solutions réalisables.

Représentation des contraintes

Définitions :

- On appelle **solution réalisable** un ensemble de valeurs des variables de décision qui satisfont toutes les contraintes.
- On appelle **région réalisable** l'ensemble des solutions réalisables.

Sur l'exemple

Ici, elle est définie par l'intersection des cinq demi-plans fermés correspondant aux contraintes du problème :

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & & & \leq & 4 \\ 30x & + & y & \leq & 150 \\ & & y & \leq & 60 \\ x & & & \geq & 0 \\ & & y & \geq & 0 \end{array}\right.$$

Représentation des contraintes

Détermination graphique d'un demi-plan

La droite D d'équation $ax + by + c = 0$ partage le plan en deux demi-plans fermés

- P_+ d'équation $ax + by + c \geq 0$
- P_- d'équation $ax + by + c \leq 0$
- P_+ contient le vecteur normal $\vec{n} = (a; b)$ de D issu d'un point de D
- P_- correspond évidemment à l'autre demi-plan.

Représentation des contraintes

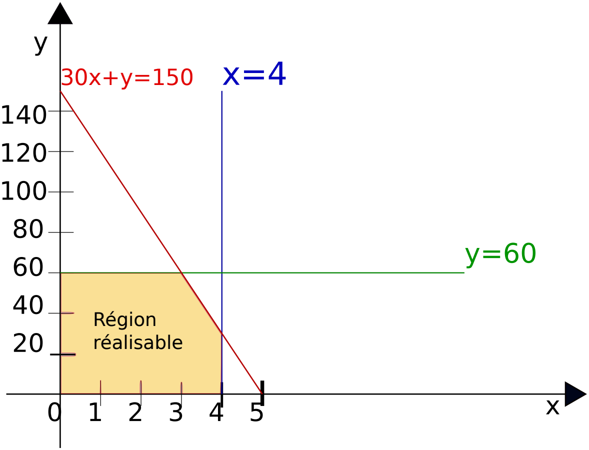

FIGURE – Région réalisable

Cas discret

Si on avait eu comme contraintes supplémentaire x et y entiers :

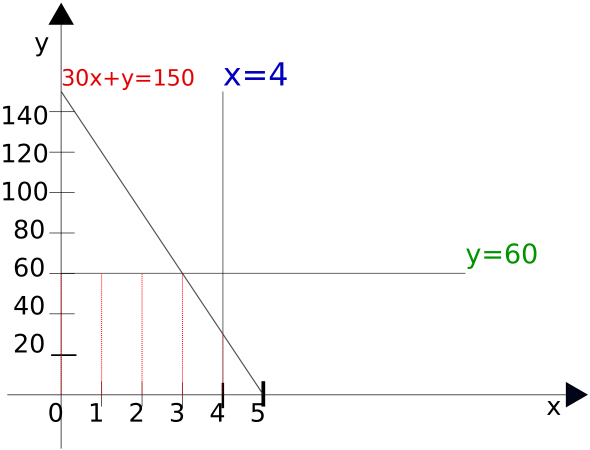

FIGURE – Région réalisable discrète

Représentation de l'objectif

Définition :

On appelle **lignes d'isovaleur de la fonction objectif** les droites parallèles D_k d'équations $z = k$ dont les points donnent une même valeur k à la fonction objectif z.

Représentation de l'objectif

Définition :

On appelle **lignes d'isovaleur de la fonction objectif** les droites parallèles D_k d'équations $z = k$ dont les points donnent une même valeur k à la fonction objectif z.

Ici, ce sont les droites D_k d'équations $3x + y = k$.

Représentation de l'objectif

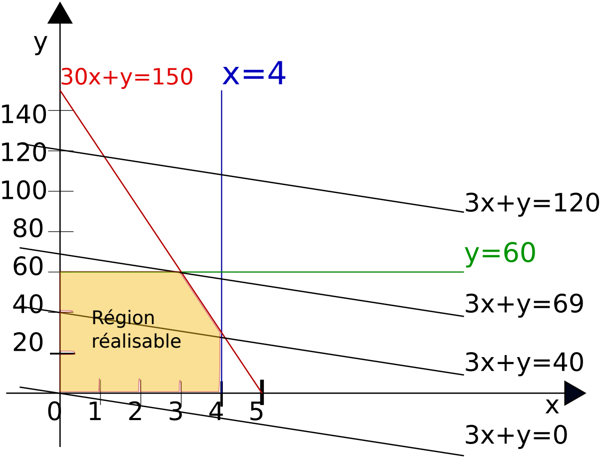

FIGURE – Lignes d'isovaleur de l'objectif $z = 3x + y$

Cas particulier : quand l'objectif est contraint

Changeons l'expression de la fonction objectif dans notre problème :

$$\max z = 30x + y$$

$$\text{sous contraintes} \begin{cases} x & & & \leq & 4 \\ 30x & + & y & \leq & 150 \\ & & y & \leq & 60 \\ x & & & \geq & 0 \\ & & y & \geq & 0 \end{cases}$$

Cas particulier : quand l'objectif est contraint

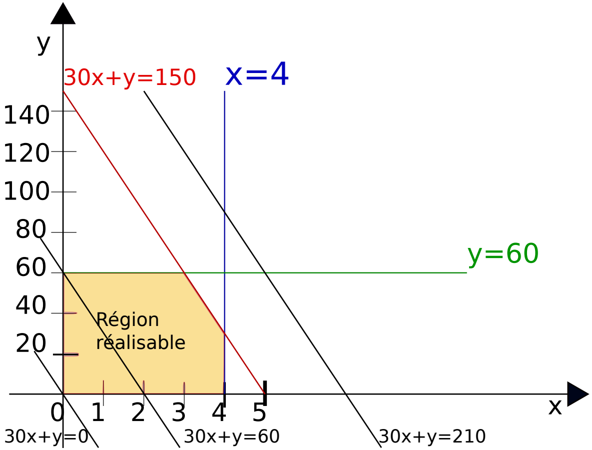

FIGURE – Tout un segment solution si $z = 30x + y$.

Un problème non-borné

On considère le problème d'optimisation linéaire suivant :

$$\max z = x + y$$

$$\text{sous contraintes} \left\{ \begin{array}{rcrcl} -2x & + & y & \leq & 3 \\ x & - & 2y & \leq & 2 \\ x & & & \geq & 0 \\ & & y & \geq & 0 \end{array} \right.$$

Un problème non-borné

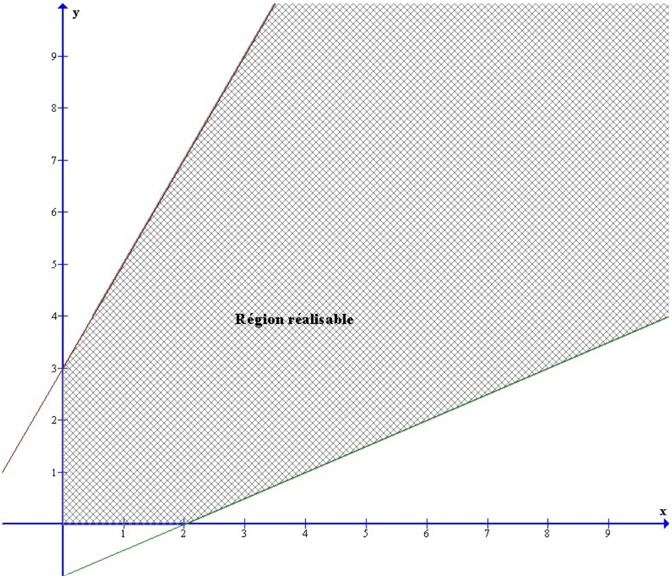

FIGURE – Exemple de problème non borné

Existence de solution

Problèmes sans solutions :

- Problème non borné
- Problème avec des contraites incompatibles.

Dans tous les autres cas, il existe une solution réelle.

Existence de solution

Problèmes sans solutions :

- Problème non borné
- Problème avec des contraites incompatibles.

Dans tous les autres cas, il existe une solution réelle.
Exemple de contraintes incompatibles :

$$\max z = 3x + y$$

$$\text{sous contraintes} \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & & & \leq & 4 \\ 30x & + & y & \leq & 150 \\ & & y & \leq & 60 \\ x & & & \geq & 6 \\ & & y & \geq & 0 \end{array} \right.$$

Résolution algorithmique

Méthode algorithmique :

1. Se placer sur un sommet S_0 de la région réalisable et calculer la valeur Z_{S_0} de l'objectif correspondant.
2. Déterminer un sommet voisin de S_0 : S_1.
3. Calculer Z_{S_1}. Si $Z_{S_1} > Z_{S_0}$. Poser $S_0 := S_1$ et retourner en 2.
4. Sinon, déterminer l'autre sommet voisin de S_0 : S_2
5. Calculer Z_{S_2}. Si $Z_{S_2} > Z_{S_0}$. Poser $S_0 := S_2$ et retourner en 2.
6. Sinon S_0 est la solution optimale (les sommets adjacents donnent des valeurs de la fonction objectif inférieures ou égales à la solution courante).

Résolution algorithmique

Méthode algorithmique :

1. Se placer sur un sommet S_0 de la région réalisable et calculer la valeur Z_{S_0} de l'objectif correspondant.
2. Déterminer un sommet voisin de S_0 : S_1.
3. Calculer Z_{S_1}. Si $Z_{S_1} > Z_{S_0}$. Poser $S_0 := S_1$ et retourner en 2.
4. Sinon, déterminer l'autre sommet voisin de S_0 : S_2
5. Calculer Z_{S_2}. Si $Z_{S_2} > Z_{S_0}$. Poser $S_0 := S_2$ et retourner en 2.
6. Sinon S_0 est la solution optimale (les sommets adjacents donnent des valeurs de la fonction objectif inférieures ou égales à la solution courante).

L'algorithme peut être simplifier en ne testant qu'un seul voisin (l'autre correspondant au sommet précédent).

Résolution algorithmique de l'exemple

Ici,

1. On part du sommet $(0,0)$ qui donne $z = 0$.
2. On teste un sommet voisin $(0,60)$ pour lequel $z = 60$. On le sélectionne.
3. On passe au sommet voisin $(3,60)$ pour lequel $z = 69$. On le sélectionne.
4. Le sommet suivant $(4,30)$ donne $z = 42$ ce qui est moins bon.
5. Le sommet $(3,60)$ correspond donc à la solution optimale.

Résolution algorithmique

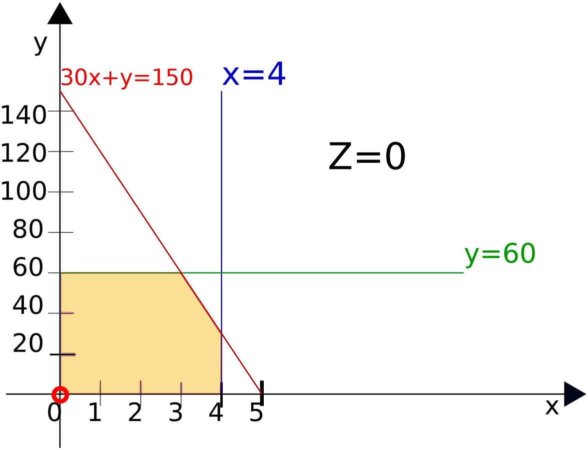

FIGURE – Suivi de l'algorithme

Résolution algorithmique

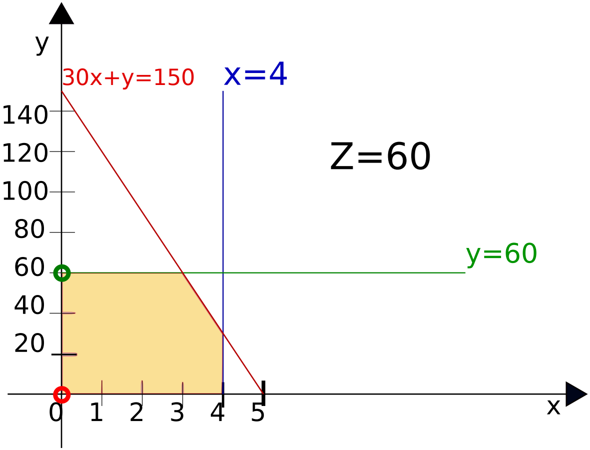

FIGURE – Suivi de l'algorithme

Résolution algorithmique

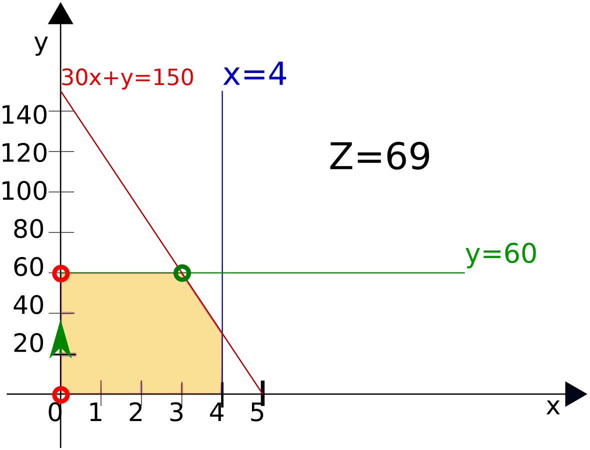

FIGURE – Suivi de l'algorithme

Résolution algorithmique

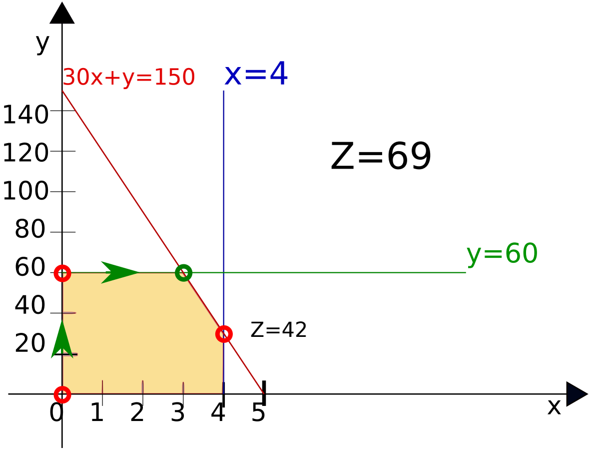

FIGURE – Suivi de l'algorithme

Rappel :

- Les solutions potentielles du problème se trouvent sur la frontière de la région réalisable.
- Elles correspondent à des cas d'égalité sur certaines des contraintes.

Première étape : transformer toutes les inégalités en égalités.

Pour cela, on va utiliser des *variables d'écart*.

Définition :

On appelle **variable d'écart** la quantité **positive** qui permet de transformer une contrainte d'inégalité en contrainte d'égalité.

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i$$

devient, après ajout de la variable d'écart e_i

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + e_i = b_i$$

Définition :

On appelle **variable d'écart** la quantité **positive** qui permet de transformer une contrainte d'inégalité en contrainte d'égalité.

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i$$

devient, après ajout de la variable d'écart e_i

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + e_i = b_i$$

Remarque :

$$(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n) \leq b_i$$

$$\iff e_i := b_i - (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n) \geq 0$$

On rajoute donc la condition $e_i \geq 0$ à l'ensemble des containtes.

Problème d'optimisation linéaire sous forme standard

$$\max z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$$

sous contraintes

$$\left\{ \begin{array}{llllllll} a_{11}x_1 & + a_{12}x_2 & + \ldots & + a_{1n}x_n & + x_{n+1} & & & = b_1 \\ a_{21}x_1 & + a_{22}x_2 & + \ldots & + a_{2n}x_n & + & x_{n+2} & & = b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + a_{m2}x_2 & + \ldots & + a_{mn}x_n & + & & x_{n+m} & = b_m \\ & & & & & & x_1, \ldots, x_n & \geq 0 \\ & & & & & & x_{n+1}, \ldots, x_{n+m} & \geq 0 \end{array} \right.$$

L'exemple sous forme standard

$$\max z = 3x_1 + x_2$$

$$\text{sous contraintes} \begin{cases} x_1 + x_3 = 4 \\ 30x_1 + x_2 + x_4 = 150 \\ x_2 + x_5 = 60 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

Écriture matricielle du cas général :

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

sous forme développée :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Écriture matricielle du cas général :

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

sous forme développée :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Remarque :

A est toujours de rang m !

L'écriture matricielle de l'exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 30 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 150 \\ 60 \end{pmatrix}$$

Les contraintes sous forme standard

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} & = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + \quad x_{n+2} & = b_2 \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \ddots & \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + \quad x_{n+m} & = b_m
\end{cases}
$$

Les contraintes sous forme standard

$$\left\{\begin{array}{llllll}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n+x_{n+1} & & & =b_1 \\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n+ & x_{n+2} & & =b_2 \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots & & \ddots & \vdots \\
a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n+ & & x_{n+m} & =b_m
\end{array}\right.$$

- m équations
- $n+m$ inconnues

Les contraintes sous forme standard

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + \quad x_{n+2} & = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \ddots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + \qquad x_{n+m} & = b_m \end{cases}$$

- m équations
- $n + m$ inconnues

$\Rightarrow$ une infinité de solutions.

Pour calculer une solution particulière :

1. sélectionner m colonnes de A pour obtenir une sous matrice B inversible (A de rang m)
2. donner les valeurs correspondant à l'unique solution du système tronqué aux variables sélectionnées
3. donner la valeur 0 aux n variables non sélectionnées

Sur l'exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 30 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 150 \\ 60 \end{pmatrix}$$

Sur l'exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 30 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 150 \\ 60 \end{pmatrix}$$

1. x_3, x_4 et x_5 donnent la sous-matrice identité I_3 inversible

Sur l'exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 30 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 150 \\ 60 \end{pmatrix}$$

1. x_3, x_4 et x_5 donnent la sous-matrice identité I_3 inversible
2. $(x_3, x_4, x_5) = (4, 150, 60)$

Sur l'exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 30 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 150 \\ 60 \end{pmatrix}$$

1. x_3, x_4 et x_5 donnent la sous-matrice identité I_3 inversible
2. $(x_3, x_4, x_5) = (4, 150, 60)$
3. $X = (0, 0, 4, 150, 60)$ est une solution de $AX = B$

Définitions :

On dit que $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m})$ est une **base** si la sous-matrice construite sur les colonnes $(i_1, i_2, \dots, i_m)$ est inversible.
On dit alors que les m variables $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m})$ sont les **variables de base** et que les n variables restantes sont les **variables hors base.**

Définitions :

On dit que $(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m})$ est une **base** si la sous-matrice construite sur les colonnes $(i_1, i_2, \ldots, i_m)$ est inversible.
On dit alors que les m variables $(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m})$ sont les **variables de base** et que les n variables restantes sont les **variables hors base**.

Remarque :

- Concrètement, on peut exprimer chacune des variables de base en fonction des variables hors-bases.

Sur l'exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 30 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 150 \\ 60 \end{pmatrix}$$

La sous matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible.

- $\{x_3, x_4, x_5\}$ est une base.
- x_3, x_4 et x_5 sont les variables de base
- x_1, x_2 sont les variables hors-base

Sur l'exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 30 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 150 \\ 60 \end{pmatrix}$$

La sous matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible.

- $\{x_3, x_4, x_5\}$ est une base.
- $\begin{cases} x_3 = 4 - x_1 \\ x_4 = 150 - x_2 - 30x_1 \\ x_5 = 60 - x_2 \end{cases}$

Sur l'exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 30 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 150 \\ 60 \end{pmatrix}$$

- $\{x_2, x_4, x_5\}$

Sur l'exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 30 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 150 \\ 60 \end{pmatrix}$$

La sous matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

- $\{x_2, x_4, x_5\}$ ne forme pas une base.
- On ne peut pas exprimer chacune des variables $\{x_2, x_4, x_5\}$ en fonction de $\{x_1, x_3\}$

Sur l'exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 30 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 150 \\ 60 \end{pmatrix}$$

- $\{x_2, x_3, x_5\}$

Sur l'exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 30 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 150 \\ 60 \end{pmatrix}$$

La sous matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible.

- $\{x_2, x_3, x_5\}$ forme une base.
- $\begin{cases} x_3 = 4 - x_1 \\ x_2 = 150 - x_4 - 30x_1 \\ x_5 = -90 + x_4 + 30x_1 \end{cases}$

Sur l'exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 30 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 150 \\ 60 \end{pmatrix}$$

- $\{x_1, x_2, x_3\}$

Sur l'exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 30 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 150 \\ 60 \end{pmatrix}$$

La sous matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 30 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible.

- $\{x_1, x_2, x_3\}$ forme une base.
- $\begin{cases} x_3 = 1 + \frac{x_4}{30} - \frac{x_5}{30} \\ x_1 = 3 - \frac{x_4}{30} + \frac{x_5}{30} \\ x_2 = 60 - x_5 \end{cases}$

Définition :

Lorsqu'un problème écrit sous forme standard vérifie en plus les deux propriétés suivantes :

1. Les coefficients de la fonction objectif associés aux variables de base sont nuls,
2. La matrice associée aux variables de base est la matrice identité (à une permutation près),

on dit qu'il est écrit sous **forme canonique par rapport à la base** B correspondante.

Exemple sous forme canonique

$$z = 3x_1 + x_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 30 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 150 \\ 60 \end{pmatrix}$$

Exemple sous forme canonique par rapport à la base $\{x_3, x_4, x_5\}$

$$z = 3x_1 + x_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 30 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 150 \\ 60 \end{pmatrix}$$

Définition :

On appelle **solution de base** une solution du système $Ax = b$ s'il existe une base telle que les n variables hors bases sont nulles et les m variables de base forment une solution du système $Bx^* = b$ où les x^* est le vecteur $m \times 1$ contenant les variables de base.

Définition :

On appelle **solution de base** une solution du système $Ax = b$ s'il existe une base telle que les n variables hors bases sont nulles et les m variables de base forment une solution du système $Bx^* = b$

Sur l'exemple

- $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 4, 150, 60)$ est une solution de base $\{x_3, x_4, x_5\}$
- $(0, 150, 4, 0, -90)$ est une solution de base $\{x_2, x_3, x_5\}$
- $(3, 60, 1, 0, 0)$ est une solution de base $\{x_1, x_2, x_3\}$

Définition :

On appelle **solution de base** une solution du système $Ax = b$ s'il existe une base telle que les n variables hors bases sont nulles et les m variables de base forment une solution du système $Bx^* = b$

Sur l'exemple

- $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 4, 150, 60)$ est une solution de base $\{x_3, x_4, x_5\}$
- $(0, 150, 4, 0, -90)$ est une solution de base $\{x_2, x_3, x_5\}$
- $(3, 60, 1, 0, 0)$ est une solution de base $\{x_1, x_2, x_3\}$

Définition :

On appelle **solution de base réalisable** une solution de base dont toutes les composantes sont positives ou nulles.

Définition :

On appelle **solution de base** une solution du système $Ax = b$ s'il existe une base telle que les n variables hors bases sont nulles et les m variables de base forment une solution du système $Bx^* = b$

Sur l'exemple

- $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 4, 150, 60)$ est une solution de base $\{x_3, x_4, x_5\}$ réalisable
- $(0, 150, 4, 0, -90)$ est une solution de base $\{x_2, x_3, x_5\}$ qui n'est pas réalisable $(x_5 = -90 < 0)$
- $(3, 60, 1, 0, 0)$ est une solution de base $\{x_1, x_2, x_3\}$ réalisable

Définition :

On appelle **solution de base réalisable** une solution de base dont toutes les composantes sont positives ou nulles.

Astuce :

Si les b_i sont positifs ou nuls, une solution de base réalisable évidente :

- les variables initiales $= 0$ (hors base)
- les variables d'écart égales aux b_i (dans la base)

Astuce :

Si les b_i sont positifs ou nuls, une solution de base réalisable évidente :

- les variables initiales $= 0$ (hors base)
- les variables d'écart égales aux b_i (dans la base)

Par construction la matrice correspondant aux variables d'écart est la matrice identité dont la solution est $\forall i \in [1, m], e_i = b_i \geq 0$.

Astuce :

Si les b_i sont positifs ou nuls, une solution de base réalisable évidente :

- les variables initiales $= 0$ (hors base)
- les variables d'écart égales aux b_i (dans la base)

Par construction la matrice correspondant aux variables d'écart est la matrice identité dont la solution est $\forall i \in [1, m]\,, e_i = b_i \geq 0$.

C'est le cas de la solution de base $\{x_3, x_4, x_5\}$.

Attention

L'hypothèse $B \geq 0$ est importante. Les coefficients b_i peuvent être négatifs, typiquement lorsqu'on transforme une inégalité du type $\geq$ en $\leq$ en multipliant par -1.

Attention

L'hypothèse $B \geq 0$ est importante. Les coefficients b_i peuvent être négatifs, typiquement lorsqu'on transforme une inégalité du type $\geq$ en $\leq$ en multipliant par -1.

En pratique

Les variables d'écart forment une base réalisable évidente si

- que des contraintes du type $\leq$
- pas de “au moins” dans l'énoncé.

Interprétation graphique

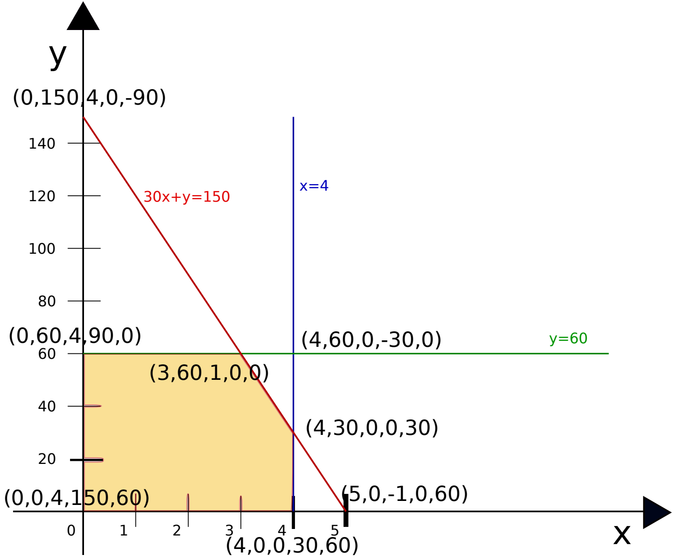

FIGURE – Bases et sommets

Points	solution de base	variable hors base	variables de base	réalisable ?
$(0, 0)$	$(0, 0, 4, 150, 60)$	(x_1, x_2)	(x_3, x_4, x_5)	Oui
$(0, 60)$	$(0, 60, 4, 90, 0)$	(x_1, x_5)	(x_2, x_3, x_4)	Oui
$(0, 150)$	$(0, 150, 4, 0, -90)$	(x_1, x_4)	(x_2, x_3, x_5)	Non
$(4, 0)$	$(4, 0, 0, 30, 60)$	(x_2, x_3)	(x_1, x_4, x_5)	Oui
$(5, 0)$	$(5, 0, -1, 0, 60)$	(x_2, x_4)	(x_1, x_3, x_5)	Non
$(3, 60)$	$(3, 60, 1, 0, 0)$	(x_4, x_5)	(x_1, x_2, x_3)	Oui
$(4, 60)$	$(4, 60, 0, -30, 0)$	(x_3, x_5)	(x_1, x_2, x_4)	Non
$(4, 30)$	$(4, 30, 0, 0, 30)$	(x_3, x_4)	(x_1, x_2, x_5)	Oui

TABLE – Solutions de base

Propositions

- Les solutions de base correspondent à des points d'intersection de contraintes mises à l'égalité.
- Une solution de base réalisable correspond à un sommet de la région réalisable.

Propositions

- Les solutions de base correspondent à des points d'intersection de contraintes mises à l'égalité.
- Une solution de base réalisable correspond à un sommet de la région réalisable.

Remarque :

À deux sommets adjacents du polygone correspondent deux solutions de base réalisables qui ne diffèrent que d'une variable hors base et une seule.

Propositions

- Les solutions de base correspondent à des points d'intersection de contraintes mises à l'égalité.
- Une solution de base réalisable correspond à un sommet de la région réalisable.

Remarque :

À deux sommets adjacents du polygone correspondent deux solutions de base réalisables qui ne diffèrent que d'une variable hors base et une seule.

Définition :

On appelle **solutions de base réalisables adjacentes** deux solutions de bases réalisables qui ont les mêmes variables hors base sauf une (et par conséquent les mêmes variables de base sauf une).

Rappel : algorithme de résolution en dimension 2

1. Se placer sur un sommet S_0 de la région réalisable et calculer la valeur Z_{S_0} de l'objectif correspondant.
2. Déterminer un sommet voisin de S_0 : S_1.
3. Calculer Z_{S_1}. Si $Z_{S_1} > Z_{S_0}$. Poser $S_0 := S_1$ et retourner en 2.
4. Sinon, déterminer l'autre sommet voisin de S_0 : S_2
5. Calculer Z_{S_2}. Si $Z_{S_2} > Z_{S_0}$. Poser $S_0 := S_2$ et retourner en 2.
6. Sinon S_0 est la solution optimale (les sommets adjacents donnent des valeurs de la fonction objectif inférieures ou égales à la solution courante).

Cas général

- la méthode graphique n'est pas possible en grandes dimensions

Comment passer d'une solution de base réalisable à une solution de base réalisable adjacente ?

Cas général

- la méthode graphique n'est pas possible en grandes dimensions

Comment passer d'une solution de base réalisable à une solution de base réalisable adjacente ?

- en « échangeant » de manière judicieuse une variable de base et une variable hors base.

Résolution cas général

1. Trouver un sommet de départ (c.à.d une solution de base réalisable de départ)

Résolution cas général

1. Trouver un sommet de départ (c.à.d une solution de base réalisable de départ)
2. Choix de la variable entrant dans la nouvelle base.

Résolution cas général

1. Trouver un sommet de départ (c.à.d une solution de base réalisable de départ)
2. Choix de la variable entrant dans la nouvelle base.
3. Choix de la variable sortant de l'ancienne base.

Résolution cas général

1. Trouver un sommet de départ (c.à.d une solution de base réalisable de départ)
2. Choix de la variable entrant dans la nouvelle base.
3. Choix de la variable sortant de l'ancienne base.
4. Reformulation du problème en fonction de la nouvelle base.

Résolution cas général

1. Trouver un sommet de départ (c.à.d une solution de base réalisable de départ)
2. Choix de la variable entrant dans la nouvelle base.
3. Choix de la variable sortant de l'ancienne base.
4. Reformulation du problème en fonction de la nouvelle base.

Les étapes 2, 3 et 4 permettent de passer d'une solution réalisable à une solution réalisable adjacente.

Résolution cas général

1. Trouver un sommet de départ (c.à.d une solution de base réalisable de départ)
2. Choix de la variable entrant dans la nouvelle base.
3. Choix de la variable sortant de l'ancienne base.
4. Reformulation du problème en fonction de la nouvelle base.
5. Test d'arrêt : si le test est positif, on a la solution optimale, si le test est négatif, on reprend à l'étape 2.

Les étapes 2, 3 et 4 permettent de passer d'une solution réalisable à une solution réalisable adjacente.

Point de départ

- **cas de deux variables :** une solution de base réalisable est un sommet de la région réalisable.

Point de départ

- **cas de deux variables :** une solution de base réalisable est un sommet de la région réalisable.
- **cas des grandes dimensions :** pas de dessin possible.

Point de départ

- **cas de deux variables :** une solution de base réalisable est un sommet de la région réalisable.
- **cas des grandes dimensions :** pas de dessin possible.
- **cas** $B \geq 0$ **:** une solution de base $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) = (0, \dots, 0, b_1, \dots, b_m)$ est réalisable et donne $z = 0$.

Point de départ

- **cas de deux variables :** une solution de base réalisable est un sommet de la région réalisable.
- **cas des grandes dimensions :** pas de dessin possible.
- **cas $B \geq 0$:** une solution de base $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) = (0, \dots, 0, b_1, \dots, b_m)$ est réalisable et donne $z = 0$.
- **cas général :** il existe des techniques (basées sur l'algorithme du simplexe) qui permettent d'initialiser le simplexe en fournissant une solution de base réalisable de départ.

Point de départ

- **cas de deux variables :** une solution de base réalisable est un sommet de la région réalisable.
- **cas des grandes dimensions :** pas de dessin possible.
- **cas $B \geq 0$:** une solution de base $(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}) = (0, \ldots, 0, b_1, \ldots, b_m)$ est réalisable et donne $z = 0$.
- **cas général :** il existe des techniques (basées sur l'algorithme du simplexe) qui permettent d'initialiser le simplexe en fournissant une solution de base réalisable de départ.

Point de départ

- **cas de deux variables :** une solution de base réalisable est un sommet de la région réalisable.
- **cas des grandes dimensions :** pas de dessin possible.
- **cas $B \geq 0$:** une solution de base $(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}) = (0, \ldots, 0, b_1, \ldots, b_m)$ est réalisable et donne $z = 0$.
- **cas général :** il existe des techniques (basées sur l'algorithme du simplexe) qui permettent d'initialiser le simplexe en fournissant une solution de base réalisable de départ.

Sur l'exemple :

Cas $B \geq 0$, on choisit comme solution de base réalisable de départ $(0, 0, 4, 150, 60)$.

Rappel

Problème sous forme canonique : la fonction objectif ne fait intervenir que les variables hors base

$$\max z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$$

Rappel

Problème sous forme canonique : la fonction objectif ne fait intervenir que les variables hors base

$$\max z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$$

- La variable entrante va passer de nulle à strictement positive.
- Le but est d'augmenter la variable objectif.

Rappel

Problème sous forme canonique : la fonction objectif ne fait intervenir que les variables hors base

$$\max z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$$

- La variable entrante va passer de nulle à strictement positive.
- Le but est d'augmenter la variable objectif.

Proposition :

La variable hors base qui va entrer dans la nouvelle base est celle dont le coefficient est le plus élevé.

Sur l'exemple

- solution de base courante : $(0, 0, 4, 150, 60)$.

Sur l'exemple

- solution de base courante : $(0, 0, 4, 150, 60)$.
- variables hors base : (x_1, x_2)

Sur l'exemple

- solution de base courante : $(0, 0, 4, 150, 60)$.
- variables hors base : (x_1, x_2)
- la fonction objectif : $z = 3x_1 + x_2$

Sur l'exemple

- solution de base courante : $(0, 0, 4, 150, 60)$.
- variables hors base : (x_1, x_2)
- la fonction objectif : $z = 3x_1 + x_2$
- La valeur courante de la fonction objectif : 0

Sur l'exemple

- solution de base courante : $(0, 0, 4, 150, 60)$.
- variables hors base : (x_1, x_2)
- la fonction objectif : $z = 3x_1 + x_2$
- La valeur courante de la fonction objectif : 0
- Le coefficient de x_1 est le plus fort

Sur l'exemple

- solution de base courante : $(0, 0, 4, 150, 60)$.
- variables hors base : (x_1, x_2)
- la fonction objectif : $z = 3x_1 + x_2$
- La valeur courante de la fonction objectif : 0
- Le coefficient de x_1 est le plus fort
- On choisit x_1 comme variable entrante pour la nouvelle base.

Sur l'exemple

- Contraintes sur x_1 : $\begin{cases} x_1 + x_3 = 4 \\ 30x_1 + x_2 + x_4 = 150 \end{cases}$

Sur l'exemple

- Contraintes sur x_1 : $\begin{cases} x_1 + x_3 = 4 \\ 30x_1 + x_2 + x_4 = 150 \end{cases}$
- x_2 est hors base (donc nulle) : $\begin{cases} x_3 = 4 - x_1 \\ x_4 = 150 - 30x_1 \end{cases}$

Sur l'exemple

- Contraintes sur x_1 : $\begin{cases} x_1 + x_3 = 4 \\ 30x_1 + x_2 + x_4 = 150 \end{cases}$
- x_2 est hors base (donc nulle) : $\begin{cases} x_3 = 4 - x_1 \\ x_4 = 150 - 30x_1 \end{cases}$
- Positivité des variables : $\begin{cases} x_3 = 4 - x_1 \geq 0 \\ x_4 = 150 - 30x_1 \geq 0 \end{cases}$

  ou encore $\begin{cases} x_1 \leq 4 \\ x_1 \leq \frac{150}{30} = 5 \end{cases}$

Sur l'exemple

- Contraintes sur x_1 : $\begin{cases} x_1 + x_3 = 4 \\ 30x_1 + x_2 + x_4 = 150 \end{cases}$
- x_2 est hors base (donc nulle) : $\begin{cases} x_3 = 4 - x_1 \\ x_4 = 150 - 30x_1 \end{cases}$
- Positivité des variables : $\begin{cases} x_3 = 4 - x_1 \geq 0 \\ x_4 = 150 - 30x_1 \geq 0 \end{cases}$

  ou encore $\begin{cases} x_1 \leq 4 \\ x_1 \leq \frac{150}{30} = 5 \end{cases}$
- On prend $x_1 = 4$

Sur l'exemple

- Contraintes sur x_1 : $\begin{cases} x_1 + x_3 = 4 \\ 30x_1 + x_2 + x_4 = 150 \end{cases}$
- x_2 est hors base (donc nulle) : $\begin{cases} x_3 = 4 - x_1 \\ x_4 = 150 - 30x_1 \end{cases}$
- Positivité des variables : $\begin{cases} x_3 = 4 - x_1 \geq 0 \\ x_4 = 150 - 30x_1 \geq 0 \end{cases}$

  ou encore $\begin{cases} x_1 \leq 4 \\ x_1 \leq \frac{150}{30} = 5 \end{cases}$
- On prend $x_1 = 4$

$\Rightarrow$ $x_3 = 0$ devient hors-base

Sur l'exemple

- Contraintes sur x_1 : $\begin{cases} x_1 + x_3 = 4 \\ 30x_1 + x_2 + x_4 = 150 \end{cases}$
- x_2 est hors base (donc nulle) : $\begin{cases} x_3 = 4 - x_1 \\ x_4 = 150 - 30x_1 \end{cases}$
- Positivité des variables : $\begin{cases} x_3 = 4 - x_1 \geq 0 \\ x_4 = 150 - 30x_1 \geq 0 \end{cases}$

  ou encore $\begin{cases} x_1 \leq 4 \\ x_1 \leq \frac{150}{30} = 5 \end{cases}$
- On prend $x_1 = 4$

$\Rightarrow$ $x_3 = 0$ devient hors-base

- Nouvelle solution de base réalisable : $(4, 0, 0, 30, 60)$

Proposition :

La variable qui sort de la base est la première à s'annuler quand la variable entrante augmente.

Proposition :

La variable qui sort de la base est la première à s'annuler quand la variable entrante augmente.

Un critère simple

La contrainte de la ligne r est de la forme suivante :
$a_{r,s}x_s + x_{i_r} = b_r$

1. Si $a_{r,s} = 0$, x_s n'intervient pas.
2. Si $a_{r,s} < 0$, x_{i_r} ne s'annulera jamais car $b_r \geq 0$.
3. Si tous les $a_{r,s}$.sont ≤ 0, il s'agit d'un problème non borné
4. Si $a_{r,s} > 0$, $\frac{x_{i_r}}{a_{r,s}} = \frac{b_r}{a_{r,s}} - x_s$: x_{i_r} s'annule pour $x_s = \frac{b_r}{a_{r,s}}$.

Sur l'exemple :

- x_1 rentre et $\begin{cases} x_1 + x_3 = 4 \\ 30x_1 + x_2 + x_4 = 150 \\ x_2 + x_5 = 60 \end{cases}$

Sur l'exemple :

- x_1 rentre et $\begin{cases} x_1 + x_3 = 4 \\ 30x_1 + x_2 + x_4 = 150 \\ x_2 + x_5 = 60 \end{cases}$
- $a_{11} = 1$, $a_{12} = 30$ et $a_{13} = 0$ donc il faut prendre en compte les 2 premières lignes.

Sur l'exemple :

- x_1 rentre et $\begin{cases} x_1 + x_3 = 4 \\ 30x_1 + x_2 + x_4 = 150 \\ x_2 + x_5 = 60 \end{cases}$
- $a_{11} = 1$, $a_{12} = 30$ et $a_{13} = 0$ donc il faut prendre en compte les 2 premières lignes.
- $b_1/a_{11} = 4$ et $b_2/a_{12} = 5$ donc c'est la variable associé à la première ligne qui sort : x_3.

On en déduit le critère suivant pour déterminer la variable sortante :

Proposition :

Soit s l'indice de la variable entrante.
Si il existe un indice r pour lequel le $min \left\{ \frac{b_k}{a_{k,s}}, a_{k,s} > 0 \right\}$ est atteint, alors x_{i_r} est la variable sortante.
Sinon, le problème est non borné. Il faut donc le reformuler.

Mettre le problème **sous forme canonique par rapport à la nouvelle base** choisie.

- exprimer les nouvelles variables de base en fonction des nouvelles variables hors base
- exprimer la fonction objectif en fonction des nouvelles variables hors base

Mettre le problème **sous forme canonique par rapport à la nouvelle base** choisie.

- exprimer les nouvelles variables de base en fonction des nouvelles variables hors base
- exprimer la fonction objectif en fonction des nouvelles variables hors base

Pivot de Gauss

1. Multiplier une ligne par une constante non nulle
2. Ajouter à une ligne un multiple d'une autre ligne.

Dans la pratique

1. Identifier la ligne (unique) contenant simultanément la variable entrante et la variable sortante (ligne pivot).

Sur notre exemple

Dans la pratique

1. Identifier la ligne (unique) contenant simultanément la variable entrante et la variable sortante (ligne pivot).

Sur notre exemple

- Ici la ligne (1).

Dans la pratique

1. Identifier la ligne (unique) contenant simultanément la variable entrante et la variable sortante (ligne pivot).
2. Faire apparaître un 1 devant la variable entrante dans la ligne pivot.

Sur notre exemple

- Ici la ligne (1).

Dans la pratique

1. Identifier la ligne (unique) contenant simultanément la variable entrante et la variable sortante (ligne pivot).
2. Faire apparaître un 1 devant la variable entrante dans la ligne pivot.

Sur notre exemple

- Ici la ligne (1).
- Déjà fait

Dans la pratique

1. Identifier la ligne (unique) contenant simultanément la variable entrante et la variable sortante (ligne pivot).
2. Faire apparaître un 1 devant la variable entrante dans la ligne pivot.
3. Éliminer la variable entrante de toutes les autres lignes en utilisant la ligne pivot.

Sur notre exemple

- Ici la ligne (1).
- Déjà fait

Sur l'exemple

$$\begin{cases} z \quad -3x_1 \quad -x_2 & = 0 \quad (0) \\ x_1 + x_3 & = 4 \quad (1) \\ 30x_1 + x_2 + x_4 & = 150 \quad (2) \\ x_2 + x_5 & = 60 \quad (3) \end{cases}$$

- x_1 entre et x_3 sort.
- La ligne qui permet d'éliminer x_1 des autres lignes est la (1).
- Il y a déjà un 1 devant x_1

Sur l'exemple

$$\begin{cases} z & -3x_1 & -x_2 & & & & = & 0 & (0) \\ & x_1 & & +x_3 & & & = & 4 & (1) \\ & 30x_1 & +x_2 & & +x_4 & & = & 150 & (2) \\ & & x_2 & & & +x_5 & = & 60 & (3) \end{cases}$$

On élimine x_1 de z

$$(0') \leftarrow (0) + 3 \times (1)$$

ce qui donne :

$$z + 3x_3 - x_2 = 12.$$

Sur l'exemple

$$\left\{\begin{array}{lllllllll} z & & -x_2 & +3x_3 & & & = & 12 & (0') \\ & x_1 & & +x_3 & & & = & 4 & (1) \\ & 30x_1 & +x_2 & & +x_4 & & = & 150 & (2) \\ & & x_2 & & & +x_5 & = & 60 & (3) \end{array}\right.$$

On élimine x_1 de l'équation (2)

$$(2') \leftarrow (2) - 30 \times (1)$$

ce qui donne

$$x_2 - 30x_3 + x_4 = 30$$

Sur l'exemple

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrcrr} z & & -x_2 & +3x_3 & & & = & 12 & (0') \\ & x_1 & & +x_3 & & & = & 4 & (1) \\ & 30x_1 & +x_2 & & +x_4 & & = & 150 & (2) \\ & & x_2 & & & +x_5 & = & 60 & (3) \end{array}\right.$$

Pour la dernière équation

il n'y a rien à faire car x_1 n'apparaît pas.

Nouveau système

$$
\begin{cases}
z \quad -x_2 + 3x_3 = 12 & (0') \\
x_1 + x_3 = 4 & (1') \\
x_2 - 30x_3 + x_4 = 30 & (2') \\
x_2 + x_5 = 60 & (3')
\end{cases}
$$

Nouveau système

$$\begin{cases} z & & -x_2 & +3x_3 & & & = & 12 & (0') \\ & x_1 & & +x_3 & & & = & 4 & (1') \\ & & x_2 & -30x_3 & +x_4 & & = & 30 & (2') \\ & & x_2 & & & +x_5 & = & 60 & (3') \end{cases}$$

Si le changement de base s'est bien déroulé :

- Les variables de base forment une sous matrice identité à une permutation près.

Nouveau système

$$\begin{cases} z \quad -x_2 + 3x_3 = 12 & (0') \\ x_1 \quad + x_3 = 4 & (1') \\ x_2 - 30x_3 + x_4 = 30 & (2') \\ x_2 + x_5 = 60 & (3') \end{cases}$$

Si le changement de base s'est bien déroulé :

- Les variables de base forment une sous matrice identité à une permutation près.
- L'objectif est exprimé en fonction des variables hors base seulement.

Nouveau système

$$
\left\{
\begin{array}{lllllllll}
z & & -x_2 & +3x_3 & & & = & 12 & (0') \\
 & x_1 & & +x_3 & & & = & 4 & (1') \\
 & & x_2 & -30x_3 & +x_4 & & = & 30 & (2') \\
 & & x_2 & & & +x_5 & = & 60 & (3')
\end{array}
\right.
$$

Si le changement de base s'est bien déroulé :

- Les variables de base forment une sous matrice identité à une permutation près.
- L'objectif est exprimé en fonction des variables hors base seulement.
- Le problème est sous forme canonique par rapport à la nouvelle base.

Nouveau système

$$\begin{cases} z & & -x_2 & +3x_3 & & & = & 12 & (0') \\ & x_1 & & +x_3 & & & = & 4 & (1') \\ & & x_2 & -30x_3 & +x_4 & & = & 30 & (2') \\ & & x_2 & & & +x_5 & = & 60 & (3') \end{cases}$$

C'est bien le cas ici avec les variables de base (x_1, x_4, x_5).

Nouveau système

$$\left\{\begin{array}{cccccccc} z & & -x_2 & +3x_3 & & & = & 12 & (0') \\ & x_1 & & +x_3 & & & = & 4 & (1') \\ & & x_2 & -30x_3 & +x_4 & & = & 30 & (2') \\ & & x_2 & & & +x_5 & = & 60 & (3') \end{array}\right.$$

Si la nouvelle base a été bien choisie

La valeur de la fonction objectif doit avoir augmenté.

Nouveau système

$$\begin{cases} z & & -x_2 & +3x_3 & & & = & 12 & (0') \\ & x_1 & & +x_3 & & & = & 4 & (1') \\ & & x_2 & -30x_3 & +x_4 & & = & 30 & (2') \\ & & x_2 & & & +x_5 & = & 60 & (3') \end{cases}$$

C'est bien le cas ici : $z = 12$ (car $x_2 = x_3 = 0$ sont hors base).

- Pour savoir si une base donnée est optimale, il faut vérifier que toute base adjacente est moins bonne que la base courante.

- Pour savoir si une base donnée est optimale, il faut vérifier que toute base adjacente est moins bonne que la base courante.
- Pour augmenter la valeur de la fonction objectif il faut faire entrer dans la nouvelle base une variable hors base dont le coefficient est positif.

- Pour savoir si une base donnée est optimale, il faut vérifier que toute base adjacente est moins bonne que la base courante.
- Pour augmenter la valeur de la fonction objectif il faut faire entrer dans la nouvelle base une variable hors base dont le coefficient est positif.

Proposition :

Si dans l'expression de la fonction objectif $z = c_0 + c_{i_1} x_{i_1} + c_{i_2} x_{i_2} + \cdots + c_{i_n} x_{i_n}$ exprimée en fonction des variables hors base, tous les coefficients des variables hors base sont négatifs ou nuls, alors la solution de base réalisable courante est la solution optimale. L'algorithme du simplexe est alors terminé.

Remarque :

Il n'est pas nécessaire de remettre les variables à droite de l'égalité dans la fonction objectif. En effet, dans un système où toutes les variables sont du même côté, il suffit de regarder :

Remarque :

Il n’est pas nécessaire de remettre les variables à droite de l’égalité dans la fonction objectif. En effet, dans un système où toutes les variables sont du même côté, il suffit de regarder :

1. pour le critère d’arrêt : si tous les coefficients sont positifs, on s’arrête.

Remarque :

Il n'est pas nécessaire de remettre les variables à droite de l'égalité dans la fonction objectif. En effet, dans un système où toutes les variables sont du même côté, il suffit de regarder :

1. pour le critère d'arrêt : si tous les coefficients sont positifs, on s'arrête.
2. pour le choix de la variable entrante : on cherche le plus petit coefficient et non le plus grand comme décrit dans la méthode puisque les variables sont de l'autre côté de l'égalité.

Faisons tourner notre algorithme sur notre exemple jusqu'à vérifier le critère d'arrêt.

Fonction objectif obtenue

$$z \quad -x_2 \quad +3x_3 \qquad = \quad 12 \qquad (0')$$

Faisons tourner notre algorithme sur notre exemple jusqu'à vérifier le critère d'arrêt.

Fonction objectif obtenue

$$z \quad -x_2 \quad +3x_3 \quad = \quad 12 \qquad (0')$$

- Critère d'arrêt non respecté

Faisons tourner notre algorithme sur notre exemple jusqu'à vérifier le critère d'arrêt.

Fonction objectif obtenue

$$z \quad -x_2 \quad +3x_3 \quad = \quad 12 \qquad (0')$$

- Critère d'arrêt non respecté

$\Rightarrow$ une autre itération du simplexe.

Faisons tourner notre algorithme sur notre exemple jusqu'à vérifier le critère d'arrêt.

Fonction objectif obtenue

$$z \quad -x_2 \quad +3x_3 \quad = \quad 12 \qquad (0')$$

- Critère d'arrêt non respecté

$\Rightarrow$ une autre itération du simplexe.

- x_2 entre dans la base.

Les contraintes faisant intervenir x_2

$x_3 = 0$ car hors base.

$$\begin{cases} x_4 = 30 - x_2 \geq 0 \\ x_5 = 60 - x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Les contraintes faisant intervenir x_2

$x_3 = 0$ car hors base.

$$\begin{cases} x_4 = 30 - x_2 \geq 0 \\ x_5 = 60 - x_2 \geq 0 \end{cases}$$

- La première variable à s'annuler est x_4 pour $x_2 = 30$.

$\Rightarrow$ C'est donc x_4 qui va sortir de la base.

On part de

$$\begin{cases} z & & -x_2 & +3x_3 & & & = & 12 & (0) \\ & x_1 & & +x_3 & & & = & 4 & (1) \\ & & x_2 & -30x_3 & +x_4 & & = & 30 & (2) \\ & & x_2 & & & +x_5 & = & 60 & (3) \end{cases}$$

On part de

$$\left\{\begin{array}{llllllcll} z & & -x_2 & +3x_3 & & & = & 12 & (0) \\ & x_1 & & +x_3 & & & = & 4 & (1) \\ & & x_2 & -30x_3 & +x_4 & & = & 30 & (2) \\ & & x_2 & & & +x_5 & = & 60 & (3) \end{array}\right.$$

- La ligne (2) permet d'échanger les rôles de x_2 et x_4

On part de

$$\left\{\begin{array}{llllllll} z & & -x_2 & +3x_3 & & & = 12 & (0) \\ & x_1 & & +x_3 & & & = 4 & (1) \\ & & x_2 & -30x_3 & +x_4 & & = 30 & (2) \\ & & x_2 & & & +x_5 & = 60 & (3) \end{array}\right.$$

- La ligne (2) permet d'échanger les rôles de x_2 et x_4
- $(0') \leftarrow (0) + (2)$

On part de

$$\left\{\begin{array}{llllllll} z & & -x_2 & +3x_3 & & & = & 12 & (0) \\ & x_1 & & +x_3 & & & = & 4 & (1) \\ & & x_2 & -30x_3 & +x_4 & & = & 30 & (2) \\ & & x_2 & & & +x_5 & = & 60 & (3) \end{array}\right.$$

- La ligne (2) permet d'échanger les rôles de x_2 et x_4
- $(0') \leftarrow (0) + (2)$
- $(3') \leftarrow (3) - (2)$

Nouveau système :

$$\begin{cases} z & & & -27x_3 & +x_4 & & = & 42 & (0') \\ & x_1 & & +x_3 & & & = & 4 & (1') \\ & & x_2 & -30x_3 & +x_4 & & = & 30 & (2') \\ & & & 30x_3 & -x_4 & +x_5 & = & 30 & (3') \end{cases}$$

Nouveau système :

$$\left\{\begin{array}{llllllll} z & & & -27x_3 & +x_4 & & = & 42 \quad (0') \\ & x_1 & & +x_3 & & & = & 4 \quad (1') \\ & & x_2 & -30x_3 & +x_4 & & = & 30 \quad (2') \\ & & & 30x_3 & -x_4 & +x_5 & = & 30 \quad (3') \end{array}\right.$$

- Le critère d'arrêt ne s'applique pas

Nouveau système :

$$
\left\{
\begin{array}{lllllcrl}
z & & & -27x_3 & +x_4 & & = & 42 & (0') \\
 & x_1 & & +x_3 & & & = & 4 & (1') \\
 & & x_2 & -30x_3 & +x_4 & & = & 30 & (2') \\
 & & & 30x_3 & -x_4 & +x_5 & = & 30 & (3')
\end{array}
\right.
$$

- Le critère d'arrêt ne s'applique pas

$\Rightarrow$ x_3 entre dans la base

Les contraintes faisant intervenir x_3

$x_4 = 0$ car hors base.

$$\begin{cases} x_1 = 4 - x_3 \geq 0 & (1') \\ x_2 = 30 + 30x_3 \geq 0 & (2') \\ x_5 = 30 - 30x_3 \geq 0 & (3') \end{cases}$$

Les contraintes faisant intervenir x_3

$x_4 = 0$ car hors base.

$$\begin{cases} x_1 = 4 - x_3 \geq 0 & (1') \\ x_2 = 30 + 30x_3 \geq 0 & (2') \\ x_5 = 30 - 30x_3 \geq 0 & (3') \end{cases}$$

- x_5 va sortir de la base

Les contraintes faisant intervenir x_3

$x_4 = 0$ car hors base.

$$\begin{cases} x_1 = 4 - x_3 \geq 0 & (1') \\ x_2 = 30 + 30x_3 \geq 0 & (2') \\ x_5 = 30 - 30x_3 \geq 0 & (3') \end{cases}$$

- x_5 va sortir de la base
- l'équation $(3')$ va nous servir à éliminer x_3 de notre système.

Les contraintes faisant intervenir x_3

$x_4 = 0$ car hors base.

$$\begin{cases} x_1 = 4 - x_3 \geq 0 & (1') \\ x_2 = 30 + 30x_3 \geq 0 & (2') \\ x_5 = 30 - 30x_3 \geq 0 & (3') \end{cases}$$

- x_5 va sortir de la base
- l'équation $(3')$ va nous servir à éliminer x_3 de notre système.
- $(3'') \leftarrow \frac{1}{30}(3')$ pour faire apparaître un 1 devant la variable de base x_3.

Système

$$
\left\{
\begin{array}{ccccccccc}
z & & & -27x_3 & +x_4 & & = & 42 & (0') \\
 & x_1 & & +x_3 & & & = & 4 & (1') \\
 & & x_2 & -30x_3 & +x_4 & & = & 30 & (2') \\
 & & & x_3 & -\frac{x_4}{30} & +\frac{x_5}{30} & = & 1 & (3'')
\end{array}
\right.
$$

On supprime x_3 des autres lignes.

Système

$$\begin{cases} z & & & -27x_3 & +x_4 & & = & 42 & (0') \\ & x_1 & & +x_3 & & & = & 4 & (1') \\ & & x_2 & -30x_3 & +x_4 & & = & 30 & (2') \\ & & & x_3 & -\frac{x_4}{30} & +\frac{x_5}{30} & = & 1 & (3'') \end{cases}$$

On supprime x_3 des autres lignes.

- $(0'') \leftarrow (0') + 27\,(3'')$

Système

$$\begin{cases} z & & & -27x_3 & +x_4 & & = & 42 & (0') \\ & x_1 & & +x_3 & & & = & 4 & (1') \\ & & x_2 & -30x_3 & +x_4 & & = & 30 & (2') \\ & & & x_3 & -\frac{x_4}{30} & +\frac{x_5}{30} & = & 1 & (3'') \end{cases}$$

On supprime x_3 des autres lignes.

- $(0'') \leftarrow (0') + 27\,(3'')$
- $(1'') \leftarrow (1') - (3'')$

Système

$$
\left\{
\begin{array}{cccccccc}
z & & & -27x_3 & +x_4 & & = & 42 & (0') \\
 & x_1 & & +x_3 & & & = & 4 & (1') \\
 & & x_2 & -30x_3 & +x_4 & & = & 30 & (2') \\
 & & & x_3 & -\frac{x_4}{30} & +\frac{x_5}{30} & = & 1 & (3'')
\end{array}
\right.
$$

On supprime x_3 des autres lignes.

- $(0'') \leftarrow (0') + 27\,(3'')$
- $(1'') \leftarrow (1') - (3'')$
- $(2'') \leftarrow (2') + 30\,(3'')$

Nouveau système

$$
\begin{cases}
z & & & & +\dfrac{3x_4}{30} & +\dfrac{27x_5}{30} & = & 69 & (0'') \\
 & x_1 & & & -\dfrac{x_4}{30} & +\dfrac{x_5}{30} & = & 3 & (1'') \\
 & & x_2 & & & +x_5 & = & 60 & (2'') \\
 & & & x_3 & -\dfrac{x_4}{30} & +\dfrac{x_5}{30} & = & 1 & (3'')
\end{cases}
$$

Nouveau système

$$\begin{cases} z & & & +\frac{3x_4}{30} & +\frac{27x_5}{30} & = & 69 & (0'') \\ & x_1 & & -\frac{x_4}{30} & +\frac{x_5}{30} & = & 3 & (1'') \\ & & x_2 & & +x_5 & = & 60 & (2'') \\ & & & x_3 -\frac{x_4}{30} & +\frac{x_5}{30} & = & 1 & (3'') \end{cases}$$

- Le critère d'arrêt s'applique

Nouveau système

$$\begin{cases} z & & & & +\frac{3x_4}{30} & +\frac{27x_5}{30} & = & 69 & (0'') \\ & x_1 & & & -\frac{x_4}{30} & +\frac{x_5}{30} & = & 3 & (1'') \\ & & x_2 & & & +x_5 & = & 60 & (2'') \\ & & & x_3 & -\frac{x_4}{30} & +\frac{x_5}{30} & = & 1 & (3'') \end{cases}$$

- Le critère d'arrêt s'applique
- Les variables hors base sont x_4 et x_5. Leur valeur est donc nulle.

Nouveau système

$$\begin{cases} z & & & & +\frac{3x_4}{30} & +\frac{27x_5}{30} & = & 69 & (0'') \\ & x_1 & & & -\frac{x_4}{30} & +\frac{x_5}{30} & = & 3 & (1'') \\ & & x_2 & & & +x_5 & = & 60 & (2'') \\ & & & x_3 & -\frac{x_4}{30} & +\frac{x_5}{30} & = & 1 & (3'') \end{cases}$$

- Le critère d'arrêt s'applique
- Les variables hors base sont x_4 et x_5. Leur valeur est donc nulle.
- $x_1 = 3$, $x_2 = 60$ et $x_3 = 1$.
- La solution optimale est donc $(3, 60, 1, 0, 0)$

Nouveau système

$$
\left\{
\begin{array}{lllllll}
z & & & +\frac{3x_4}{30} & +\frac{27x_5}{30} & = & 69 \quad (0'') \\
& x_1 & & -\frac{x_4}{30} & +\frac{x_5}{30} & = & 3 \quad (1'') \\
& & x_2 & & +x_5 & = & 60 \quad (2'') \\
& & & x_3 \ -\frac{x_4}{30} & +\frac{x_5}{30} & = & 1 \quad (3'')
\end{array}
\right.
$$

- Le critère d'arrêt s'applique
- Les variables hors base sont x_4 et x_5. Leur valeur est donc nulle.
- $x_1 = 3$, $x_2 = 60$ et $x_3 = 1$.
- La solution optimale est donc $(3, 60, 1, 0, 0)$
- la valeur de l'objectif correspondante est $z_{opt} = 69$.

Récapitulatif

Travail préliminaire

1. Mise sous forme canonique du problème.
2. Ajout des variables d'écart.
3. Choix de la base réalisable de départ.

Une fois toutes ces étapes réalisées, on peut démarrer l'algorithme du simplexe pour un problème de maximisation :

$$\max z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$$

$$\text{sous contraintes } \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

L'algorithme

tant que il existe s tel que $c_s > 0$ **faire**

choisir une variable x_s telle que $c_s > 0$ (x_s entre dans la base)

si tous les $a_{i,s} \leq 0$: **STOP** (problème non borné)

sinon

début

soit r tel que

$$\frac{b_r}{a_{r,s}} = \min \left\{ \frac{b_i}{a_{i,s}}, a_{i,s} > 0, i = 1, \ldots, m \right\}$$

pivoter(r,s)

fin

fin tant que

La fonction **pivoter(r,s)**

début
diviser la ligne r par $a_{r,s}$.
retrancher à la ligne de la fonction objectif c_s fois la ligne r ;
  pour $k = 1, \ldots, m$, $k \neq r$ **faire**
    retrancher à la ligne k $a_{k,s}$ fois la nouvelle ligne r ;
  fin pour
fin