CO8SFMA : Recherche opérationnelle

Consignes

L'examen suivant comprend quatre exercices qui peuvent être traités indépendamment.

— *Tous les documents sont autorisés.*
— *La calculatrice est autorisée.*
— *Le téléphone est interdit.*
— *Le prêt de matériel est interdit.*
— *Toute communication entre élève est interdite.*

1 Modélisation (8 points)

Exercice 1 (5 points) *Guillaume souhaite faire la meilleure tartiflette possible pour ses trois invités et lui. Pour cela il dispose de :*

— *50 cl de crème fraîche (500 g)*
— *500 g de lardons*
— *600 g de reblochon*
— *Un stock illimité de patates*

Il s'est également renseigné sur les apports de chaque ingrédient :

(pour 100 g)	*crème*	*lardons*	*reblochon*	*patates*
Énergie (Kcal)	*350*	*250*	*330*	*80*
Lipides (g)	*42*	*21*	*28*	*0*
Sel (g)	*0*	*2,4*	*0,8*	*0,2*

Pour des raisons de santé, il ne veut pas dépasser 2000 Kcal par personne soit 8000 *Kcal en tout. De plus, Guillaume aime la tartiflette quand elle est bien faite. Pour cela il doit y avoir au moins 14% de lipides et 1% de sel. Enfin, il aime quand ça cale le ventre et souhaite maximiser le poids total du repas.*

1. Donner une modélisation de ce problème sous forme d'un programme linéaire.
2. Donner une solution réalisable (pas forcément optimale) de ce problème.
3. Mettre le problème sous forme canonique par rapport à cette base.

Exercice 2 (3 points) *Andréa décide de passer au chauffage naturel et cet hiver, elle fera des économies d'énergie. En effet, pour se chauffer dans son lit, elle entreprend de se couvrir de chats. Son lit possède une surface de 17 100 cm^2 (90 cm $\times$ 190 cm).*

Elle a à sa disposition deux types de chats : des chats dits "touffus" avec une surface de 1800 cm^2 (30 cm $\times$ 60 cm) et une puissance calorifique de 50W; et des chats-peau qui ont une surface de 1000 cm^2 (20 cm $\times$ 50 cm) et une puissance de 40W.

Elle possède déjà 1 chat-touffus et un chat-peau. Pour des raisons budgétaires, elle ne peut se permettre d'avoir plus de 12 chats.

Pour cette hiver, elle voudrait savoir combien de chats elle devrait adopter pour avoir un maximum de chaleur dans son lit.

1. Donner une modélisation de ce problème sous forme d'un programme linéaire.

2 Quelques résolutions (12 points)

Exercice 3 (4 points) Résoudre graphiquement le problème suivant :

$$\max z = 4x + 5y \quad \text{sous contraintes} \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & + & y & \leq & 12 \\ 10x & + & 18y & \leq & 171 \\ x & & & \in & \mathbb{N}^* \\ & & y & \in & \mathbb{N}^* \end{array} \right.$$

— Tracer la région réalisable.
— Tracer une ligne d'isovaleur que vous choisissez et celle correspondant à la valeur maximale.
— Donner la solution du problème.

Exercice 4 (8 points) Soit le problème suivant :

$$\max Z = x_1+x_2+x_3+x_4 \quad \text{sous contraintes} \begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 & \geq & 2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \\ 5x_1 + x_3 + 4x_4 & \leq & 7x_2 \\ 3.5x_1 + 2.5x_3 + 3.3x_3 + 0.8x_4 & \leq & 8000 \\ x_1 & \leq & 500 \\ x_2 & \leq & 500 \\ x_3 & \leq & 600 \\ \forall i \in [\![1;4]\!] \quad x_i & \geq & 0 \end{cases}$$

1. Mettre ce problème sous forme standard.
2. Voyez-vous une base réalisable de ce problème ?
   — Si oui, écrire le problème sous forme canonique par rapport à cette base puis le premier tableau du simplexe.
   — Si non, ajouter des variables auxiliaires puis écrire le premier tableau du simplexe de la première phase de ce problème.
3. Après avoir mis ce problème sous forme de tableau et fait quelques itérations, nous trouvons le tableau suivant :

	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	
x_5	0	6	−15	0	10	1	2	0	0	0	0	0
x_3	0	5	−7	1	4	0	1	0	0	0	0	0
x_7	0	−13	25.6	0	−12.4	0	−3.3	1	0	0	0	8000
x_8	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	500
x_9	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	500
x_{10}	0	−5	7	0	−4	0	−1	0	0	0	1	600
Z	1	4	−8	0	3	0	1	0	0	0	0	0

   Quelle est la valeur de l'objectif ? Quelle est la solution de base correspondante ?
4. A partir du tableau de la question précédente, calculer la dernière ligne du tableau de l'itération suivante. Le critère d'arrêt est-il vérifié ?
   — Si oui, donner la solution du problème.
   — Si non, donner la valeur de x_3 dans la solution de base correspondante et dire quelle variable doit entrer à la prochaine étape.
5. Après quelques itérations supplémentaires nous obtenons le tableau suivant :

	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	
x_5	$e1$	−6.5	0	0	0	1	−0.5	0	0	−2.5	2.5	250
x_3	r	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	600
x_7	$e3$	2.5	0	0	0	0	−0.2	1	0	−3.9	−3.1	4190
x_8	$e4$	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	500
x_4	p	1.25	0	0	1	0	0.25	0	0	1.75	−0.25	725
x_2	l	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	500
Z	1	0.25	0	0	0	0	0.25	0	0	2.75	0.75	1825

   Quelle est la base et la solution de base correspondant à ce tableau ? Déterminer une solution optimale du problème.

Question bonus (2 points) : En utilisant les parties 1 et 2, répondre aux questions que se posent Guillaume et Andréa.