CC81IART - Intelligence Artificielle

Cours 02 : la logique, les logiques, la programmation logique

Pierre-Alexandre FAVIER

Ecole Nationale Supérieure de Cognitique

Plan

Etymologie

$\lambda o \gamma o \sigma$: la parole, la raison

- parole : loghorée, logotype, syllogisme. . .
- raison : analogie, logiciel, psychologie, étymologie. . .
- corpus : mythologie, œnologie, généalogie. . .
- "abus" : scientologie, sofrologie. . .

Propos

- assurer la cohérence du discours / de la pensée
- validité du raisonnement (pas de contradiction)
- vérité du propos (découverte d'énoncés vrais)

$\Rightarrow$ recherche de la vérité

La vérité

- Cherchez l'intrus : qu'est-ce qui est vrai ?
  - mon amour des fraises
  - mon pantalon
  - ma rencontre avec Batman
- vérité *formelle* (correction de l'énoncé)
- vérité *matérielle* (adéquation de l'énoncé)

Les deux formes étaient confondues dans l'antiquité (un énoncé correct révélait une proposition adéquate)
$\Rightarrow$ étude des systèmes formels

Problématique

- Comment définit-on des ensembles de formules ?
- Comment interpréter des formules qui portent sur des formules ?
- Comment utiliser un ensemble de formules pour prouver des vérités ?

$\Rightarrow$ on ne traite que de la vérité formelle

Définition d'un système formel

- un *langage*
  - un *alphabet*
  - une *syntaxe*
- des *axiomes*
- des *règles*

Utilisation

- Le respect de la syntaxe garantit la construction des *"expressions bien formées"* : les formules (formellement vraies, qu'elles soient matériellement vraies ou non)
- L'exploitation des *règles* en combinaison avec les *axiomes* permet d'*inférer* les *vérités* du système formel

Un exemple : l'algèbre de PEANO - 1/2

Le langage :

- a est un terme
- si t est un terme, alors $S(t)$ est un terme

Les axiomes :

- $\forall x \neg(a = S(x))$
- $\forall x \neg(a = x) \Rightarrow \exists y(x = S(y))$
- $\forall xy(S(x) = S(y)) \Rightarrow x = y$

Un exemple : l'algèbre de PEANO - 2/2

Les règles :

modus ponens :
si F
et $F \Rightarrow G$
alors G

modus tollens :
si $F \Rightarrow G$
et $\neg G$
alors $\neg F$

universalité :
si $\forall x\ F(x)$
alors $F(t)$ pour tout t

Application : une déduction - 1/2

première prémisse :

premier axiome : $\forall x \neg(a = S(x))$
universalité : si $\forall x\ F(x)$
alors $F(t)$ pour tout t
conclusion 1 : $\neg(a = S(a))$

seconde prémisse :

troisième axiome : $\forall xy(S(x) = S(y)) \Rightarrow x = y$
universalité : si $\forall x\ F(x)$
alors $F(t)$ pour tout t
conclusion 2 : $(S(a) = S(S(a))) \Rightarrow (a = S(a))$

Application : une déduction - 2/2

conclusion :

conclusions 1 & 2 :
$\neg(a = S(a))$
$(S(a) = S(S(a))) \Rightarrow (a = S(a))$

modus tollens :
si $F \Rightarrow G$
et $\neg G$
alors $\neg F$

CONCLUSION :
$\neg(S(a) = S(S(a)))$

Application : les entiers naturels

- a dénote le zéro
- $S(\ldots)$ dénote la relation de successeur
- interprétation des axiomes :
  - $\forall x \neg(a = S(x))$
  - $\forall x \neg(a = x) \Rightarrow \exists y(x = S(y))$
  - $\forall xy(S(x) = S(y)) \Rightarrow x = y$
- interprétation de notre déduction :
  - $\neg(S(a) = S(S(a)))$
  - $1 \neq 2$
- il existe des expressions bien formées que l'on ne peut pas prouver, par exemple :
  $\forall x \neg(x = S(x))$
  $\Rightarrow$ ce systèle formel **n'est pas complet**

Caractérisation d'un système fomel

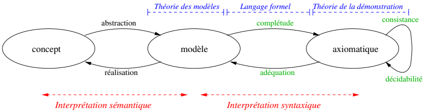
consistance : un énoncé appartenant au langage est vrai **ou** faux

décidabilité : un énoncé vrai peut être produit en un temps fini

complétude : toute vérité du modèle peut être prouvée dans le langage

adéquation : tout énoncé prouvé dans le langage est valide dans le modèle

Concept, modèle et axiomatique



Pourquoi formaliser ?

- on modélise ce qu'est le système (ontologie)
- pour comprendre ou expliquer
- ce qu'il fait (fonctionnalité)
- et anticiper ce qu'il va devenir (génétique)

$\Rightarrow$ le but est de systématiser et donc, potentiellement, d'automatiser le raisonnement
"Nous ne raisonnons que sur des modèles " — PAUL VALÉRY

Pourquoi ne pas formaliser ?

- on propose toujours **un** modèle du concept abordé
- on ne travaille que sur la vérité formelle : le passage de l'interprétation syntaxique à l'interprétation sémantique pose à nouveau le problème vérité formelle / matérielle
- on se heurte au problème d'incomplétude

Comment formaliser ?

Le modèle

- minimaliste
- cohérent

Le langage :

- simple
- sans ambiguïté
- expressif

Axiomatique :

- cohérente
- minimale
- automatisable

L'organon

Catégories : une analyse des éléments les plus simples des propositions

De l'interprétation : étude de la proposition

Premiers Analytiques : les règles et les formes de la démonstration en général

Seconds Analytiques : la théorie du syllogisme nécessaire

Les Topiques : la dialectique

Les Réfutations Sophistiques : les principaux sophismes et les moyens de les réfuter

Les propositions catégoriques

sujet copule prédicat

Le sujet : l'objet de la proposition qui tend à le catégoriser

Le prédicat : formule contenant une variable libre, par exemple *"X est sympa"* est un prédicat unaire

La copule : introduit un rapport double entre le sujet et le prédicat (rapport *"S est P"*)

- **compréhension :** l'ensemble *S* possède l'attribut *P*
- **extension :** l'ensemble *S* fait partie de l'ensemble *P*

Exemple de proposition catégorique

Le prof d'info est sympa

Le sujet : *Le prof d'info*

Le prédicat : *"X est sympa"*, prédicat unaire

La copule : *est*

- **compréhension :** le prof d'info possède tous les attributs de quelqu'un de sympathique
- **extension :** parmi les gens sympathiques se trouve le prof d'info

Cet énoncé (proposition catégorique) est bien formé (vérité formelle), il n'est pas vrai pour autant (vérité matérielle).

Le syllogisme : principe de base

- 2 prémisses et une conclusion (attention : prémisses $\neq$ prémices)
- les prémisses sont des propositions catégoriques
- la prémisse majeure met en rapport le terme majeur et le terme moyen
- la prémisse mineure met en rapport le terme mineur et le terme moyen
- la conclusion met en rapport le terme mineur et le terme majeur

Un exemple

- Tous les hommes sont mortels
- Tous les grecs sont des hommes
- Donc, tous les grecs sont mortels

Paradoxe : qui peut **affirmer** que tous les hommes sont mortels ?
Ce raisonnement *a priori* purement déductif s'appuie sur une induction.

Les syllogismes

- le syllogisme logique
- le syllogisme dialectique
- le syllogisme sophistique

Un syllogisme concluant. . .

Une fois encore, un syllogisme bien formé (*concluant*) ne révèle aucune vérité matérielle, seulement une vérité formelle.
$\Rightarrow$ c'est un principe de formalisation du savoir, pas de découverte ($\neq$ théorie des essences, PLATON)

- Les gros travailleurs sont bien payés
- Les élèves de l'IdC sont de gros travailleurs
- Les élèves de l'IdC sont bien payés

Les classes de propositions

- une prémisse n'est pas forcément affirmative (*qualité*)
- une prémisse n'est pas forcément universelle (*quantité*)
- le syllogisme logique n'est donc pas toujours une *tautologie* (toujours vrai)
  il existe des syllogismes non valides :
  - aucun rocher n'est mortel
  - or aucun homme n'est un rocher
  - donc, aucun homme n'est mortel

Les 4 propositions catégoriques

A : l'universelle affirmative *Toute femme est belle*
E : l'universelle négative *Aucune femme n'est belle*
I : la particulière affirmative *Quelques femmes sont belles*
O : la particulière négative *Quelques femmes ne sont pas belles*

Aff**I**rmo / n**E**g**O** $\Rightarrow$ noms des syllogismes logiques concluants (B**a**rb**a**r**a**, C**e**l**a**r**e**nt, D**a**r**ii**. . .)
$\Rightarrow$ étude systématique des 256 syllogismes possibles pour isoler les 19 syllogismes concluants.

Concept

- propositions simples en langage naturel
- logique d'ordre 0 (pas de variables libres)
- calcul propositionnel (déduction et démonstration)

Exemple :

- Si le cours est nul, alors les élèves dorment
- Donc, si les élèves écoutent, c'est que le cours est génial

Formalisation "intuitive" :

- des attributs bivalents : le cours est soit nul, soit génial, un élève ne somnole pas
- des règles : si . . . alors
- déduction (donc) par exploitation des règles et des faits

Modèle

- logique bivalente : une proposition est *vraie* ou *fausse*, il fait *jour* ou *nuit*. . .
- ls valeurs de vérité des termes constitutifs d'une expression bien formée permettent de déduire la valeur de vérité de cette dernière

Vocabulaire

tautologie : expression toujours vraie (formule analytique)

contradicion, ou antilogie : expression toujours fausse (formule analytique)

contingence : toute expression qui n'est ni une tautologie, ni une antilogie (formule synthétique)

Langage – 1/2

Les mots :

- les termes atomiques ($p, q, r \dots$)
- les opérateurs (nulaires, unaires et binaires)

$\neg$	*negation*
$\wedge$	*conjonction*
$\vee$	*disjonction*
$\rightarrow$	*implication*
$\leftrightarrow$	$bi - implication$
false	*contradiction*
true	*tautologie*

Langage – 2/2

Les expressions bien formées :

- *true*
- *false*
- $(A \wedge B)$
  (si A et B sont des *ebf*)
- . . .

Les axiomes

- $A \to (B \to A)$
- $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
- $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$

Règle

La substitution : la substitution d'une expression bien formée à une expression bien formée préserve la tautologie

Calcul propositionnel

déduction : exploitation des axiomes, des théorèmes et de la règle de substitution pour traiter de nouvelles formules (hypothèses du raisonnement)

démonstration : exploitation des axiomes et de la règle de substitution pour établir de nouveaux théorèmes

Les théorèmes

le tiers exclus	$A \vee \neg A$
non – contradiction	$\neg(A \wedge \neg A)$
double ngation	$\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$
De Morgan	$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$
	$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge B)$
contraposition	$(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$
modus ponens	$((A \to B) \wedge A) \to B$
modus tollens	$((A \to B) \wedge \neg B) \to \neg A$
modus barbara	$((A \to B) \wedge (B \to C)) \to (A \to C)$
distributilit	$(A \wedge (B \vee C)) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
	$(A \vee (B \wedge C)) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

Caractéristiques de ce formalisme

- adéquat
- complet
- consistant
- décidable

Limites de l'interprétation

- la conjonction grammaticale n'est pas limitée à la notion de conjonction logique :
  - il tua l'agresseur et le désarma
  - il désarma l'agresseur et le tua
- la stricte bivalence de la logique est restrictive
- ...

Exemple, soit A = *avoir chaud* et B = *boire une bière* :

modus ponens $((A \to B) \wedge A) \to B$

Si j'ai chaud je bois une bière, et j'ai chaud, donc je bois une bière.

modus tollens $((A \to B) \wedge \neg B) \to \neg A$

Si j'ai chaud je bois une bière, et je ne bois pas une bière, donc je n'ai pas chaud.

Concept

- propositions complexes issues d'un raisonnement non trivial
- logique d'ordre 1 (contient des variables libres)
- calcul propositionnel (déduction et démonstration)

Exemple :

- Si le cours est nul, alors les élèves dorment
- Donc, si il existe un élève qui écoute, c'est que le cours n'est pas nul

Formalisation "intuitive" :

- on ajoute des quantificateurs : $\exists$ *élève* $\in$ classe ...
- on ajoute la notion de variable : *dormir(X)* n'a pas la même valeur de vérité *pour tout X* ...

Un exemple

Tout être humain est mortel
Or Socrate est un être humain
Donc, Socrate est mortel
$\Rightarrow$ modélisation en logique propositionnelle impossible !
$\forall x \in \mathcal{H}, mortel(x)$
$\exists x \in \mathcal{H}, x = socrate$
$mortel(s)$

Notion d'ordre

adrien_dort	ordre 0
dormir(X)	ordre 1
	(vrai pour X = adrien)
activité(X(Y))	ordre 2
	(vrai pour X = dormir et Y = adrien)
...	ordre n

Vocabulaire

Sur la base du calcul propositionnel on ajoute :

- des constantes : *a,b,c...*
- des symboles de fonctions : *f,g...*
- des symboles de prédicats : *p,q...*
- deux quantificateurs : $\exists$ et $\forall$

Le langage – 1/3

- $\mathcal{V}$ **:** ensemble des variables (infini)
- $\mathcal{C}$ **:** ensemble des constantes (éventuellement vide)
- $\mathcal{P}$ **:** ensemble des foncteurs de prédicats
- $\mathcal{F}$ **:** ensemble des foncteurs de fonctions (éventuellement vide)

Les quantificateurs : $\exists$ et $\forall$

Les connecteurs : $\neg, \wedge, \vee \Rightarrow$

Attention, un connecteur n'est pas un opérateur, par exemple :
$(((\textit{boire et respirer}) \Rightarrow \textit{mort}) \wedge (\textit{boire} \Rightarrow \textit{respirer}))$
$\Rightarrow (\textit{boire} \Rightarrow \textit{mort})$
L'opérateur *et* dénote ici la simultanéité, le connecteur $\wedge$ la conjonction.

Le langage – 2/3

On notera $\mathcal{T}$ l'ensemble des termes, ainsi définis :

- $x \in \mathcal{V}$ est un terme
- $x \in \mathcal{C}$ est un terme
- si f est une fonction n-aire et $t_1, t_2, \ldots, t_n$ sont des termes, alors $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ est un terme

On notera $\mathcal{E}$ l'ensemble des énoncés valides du langages (les expressions bien formées).

Le langage – 2/3

Les énoncés valides sont :

- $p(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ si $(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \mathcal{T}^n, p \in \mathcal{P}$
- $e_1 \wedge e_2$ si $\{e_1, e_2\} \in \mathcal{E}$
- $e_1 \vee e_2$ si $\{e_1, e_2\} \in \mathcal{E}$
- $e_1 \Rightarrow e_2$ si $\{e_1, e_2\} \in \mathcal{E}$
- $\neg e$ si $e \in \mathcal{E}$
- $\forall x(e)$ si $e \in \mathcal{E}$ et $x \in \mathcal{V}$
- $\exists x(e)$ si $e \in \mathcal{E}$ et $x \in \mathcal{V}$

Variables libres et liées

- une variable est dite liée par un quantificateur à une formule si elle apparaît dans cette formule et que cette dernière est précédée d'un quantificateur portant sur cette même variable
- dans le cas contraire, la variable est dite libre
- un *prédicat* contient **au moins une** variable libre
- dire qu'un prédicat est vrai ou faux n'a aucun sens tant que l'on n'a pas substituer des constantes à toutes les variables libres
- une formule dont toutes les variables sont liées est dite close (aucune "liberté" sur les variables)

L'axiomatique

- le calcul des prédicats découle directement du calcul des propositions
- quelques axiomes supplémentaires sont nécessaires
- une seule règle est ajoutés, la généralisation : $A \Rightarrow \forall x(A)$

Caractéristiques de ce formalisme

- adéquat
- complet (prouvé par GÖDEL)
- consistant
- semi-décidable :
  - pour un énoncé valide la preuve aboutit ("vrai")
  - pour un énoncé non valide soit la preuve aboutit ("faux"), soit elle conduit à une récursion infinie !

CC81IART - Intelligence Artificielle

Cours 02 : la logique, les logiques, la programmation logique

Pierre-Alexandre FAVIER

Ecole Nationale Supérieure de Cognitique

IPB

E N S C

B O R D E A U X