III. Déterminants

A toute matrice **carrée** $n \times n$, $A = [a_{ij}]$, on associe un scalaire particulier, appelé **déterminant de A**. Cet objet s'avère être un outil indispensable à l'étude des propriétés des matrices carrées.

Le déterminant de A est noté $d\acute{e}tA$ ou $|A|$ (comme une valeur absolue ou un module). Cette deuxième notation peut être utilisée dans les calculs intermédiaires pour alléger les notations ; dans les autres cas elle est génératrice de confusion, la première notation est préférable.

III.1. Déterminants d'ordre 1 et 2.

Si $A = [a]$, $d\acute{e}tA = a$; si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $d\acute{e}tA = ad - bc$ $\quad \oplus \ \ominus$

Exemple:

$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$; $d\acute{e}tA = 14$, $d\acute{e}t(-A) = 14$ *aussi.*

III.2. Déterminants d'ordre 3.

. Soit $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$. Son déterminant est défini comme suit (c'est une des définitions équivalentes possibles !) :

$$d\acute{e}tA = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Il y a dans ce développement 6 produits de 3 éléments de la matrice A, trois sont comptés avec les signe $+$, et les 3 autres avec les signe $-$.

. Autre expression du déterminant d'ordre 3

$$\begin{aligned} d\acute{e}tA &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= \text{combinaison linéaire de 3 déterminants d'ordre 2,} \end{aligned}$$

dont le calcul est représenté sous la forme suivante :

$$\begin{array}{ccccc} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \\ a_{11}(\ .\ .\ .\ .\ .\ ) & - & a_{12}(\ .\ .\ .\ .\ .\ ) & + & a_{13}(\ .\ .\ .\ .\ .\ ) \end{array} \tag{1}$$

Exemple:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 55$$

III.3. Déterminants d'ordre quelconque.

III.3.1. Développements suivant une ligne ou une colonne.

Soit $A = [a_{ij}]$. On désigne par M_{ij} la matrice carrée de taille $n-1$ obtenue en supprimant de A sa $i^{ème}$ ligne et sa $j^{ème}$ colonne ; le déterminant $|M_{ij}|$ s'appelle le **mineur du coefficient** a_{ij} ; le mineur "signé" $(-1)^{i+j}\,|\mathcal{M}_{ij}| = A_{ij}$ est appelé **le cofacteur de $\mathbf{a_{ij}}$**.

Observer que le coefficient $(-1)^{i+j}$ est ± 1 suivant la parité de la somme $i+j$ des numéros de ligne et colonne de a_{ij}.

Théorème:
détA est égal à la somme des produits obtenus en multipliant les éléments d'une ligne (ou d'une colonne) quelconque par leurs cofacteurs respectifs :

$$\begin{aligned} détA &= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} \\ &= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} \end{aligned} \tag{3}$$

Revoir (1) à la page 23 pour un exemple avec $n = 3$.

Ces relations (3), conjuguées avec les opérations élémentaires sur les lignes (ou colonnes), permettent des simplifications substantielles des calculs.

III.4. Propriétés générales des déterminants (important !).

- Si tous les éléments d'une colonne (ou d'une ligne) sont multipliés par une constante c, le déterminant est multiplié par c.
- Echanger 2 colonnes (ou 2 lignes) change le signe du déterminant.
- Ajouter à une colonne le multiple d'une autre colonne ne change pas la valeur du déterminant (idem pour les lignes).
- Si 2 colonnes (ou 2 lignes) sont les mêmes, la déterminant est nul.

Exemple:
$dét(cA) = c^n détA$ (attention ! c^n et non c ...)

III.5. Règles importantes.

. Si A est triangulaire, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \ldots\ldots\ldots & 0 \\ — & a_{12} & 0 \ldots\ldots 0 \\ —— & \ddots & \\ ——— & & \ddots \\ ———— & & a_{nn} \end{bmatrix}$, $détA = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$.

Un cas particulier est celui des matrices diagonales : *si* $A = diag(c_1, \ldots, c_n)$, $détA = c_1c_2\ldots c_n$. Tout aussi utile est le cas des matrices diagonales par blocs (ou encore triangulaires inférieures ou supérieures par blocs) :

si $A = \begin{bmatrix} \boxed{\ddots} & & & 0 \\ & \boxed{\ddots} & & \\ & & \boxed{\ddots} & \\ 0 & & & \boxed{\ddots} \end{bmatrix}$, $détA =$ produit des déterminants par blocs diagonaux (lesquels sont des matrices carrées de tailles diverses)

Pour les calculs, on a donc intérêt à transformer A, à l'aide d'opérations sur les lignes et colonnes, de manière à la rendre la plus "creuse" possible, c'est-à-dire avec le plus de zéros possibles comme éléments de A.

Exemple:
Calcul du déterminant d'une matrice $(4,4)$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 & 6 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & -1 \\ -3 & 8 & 9 & 1 \end{vmatrix} = \left|\begin{matrix} 2 & 0 & -4 & 6 \\ 0 & 5 & 9 & -12 \\ 0 & 2 & 6 & -1 \\ 0 & 8 & 3 & 10 \end{matrix}\right| \begin{matrix} \\ \textit{ligne 2 - 2}\times\textit{(ligne 1)} \\ \\ \textit{ligne 4 + 1,5}\times\textit{(ligne 1)} \end{matrix}$$

$$= \left|\begin{matrix} 2 & 0 & -4 & 6 \\ 0 & 5 & 9 & -12 \\ 0 & 0 & 2{,}4 & 3{,}8 \\ 0 & 0 & -11{,}4 & 29{,}2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} \\ \\ \textit{ligne 3 -0,4}\times\textit{(ligne 2)} \\ \textit{ligne 4 - 1,6}\times\textit{(ligne 2)} \end{matrix}$$

$$= \left|\begin{matrix} 2 & 0 & -4 & 6 \\ 0 & 5 & 9 & -12 \\ 0 & 0 & 2{,}4 & 3{,}8 \\ 0 & 0 & 0 & 47{,}25 \end{matrix}\right| \begin{matrix} \\ \\ \\ \textit{ligne 4 + 4,75}\times\textit{(ligne 3)} \end{matrix}$$

Le format auquel on est rendu est triangulaire ; en conséquence, le déterminant en question vaut

$$2 \times 5 \times 2,4 \times 47,25 = 1134$$

• $dét(A^T) = détA$

• $\boxed{dét(AB) = dét(BA) = détA.détB}$ (à la différence du calcul sur les traces !)

Ainsi, si A est inversible, $dét(A^{-1}) = \frac{1}{détA}$.

Mais il n'y a pas de règle (simple) concernant $dét(A+B)$!

• Les 3 énoncés suivants (concernant $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) sont équivalents :
(i) A est inversible ;
(ii) le système linéaire $AX = 0$ n'a que la solution nulle $X = 0$;
(iii) $détA \neq 0$.

• **Le rang de A en termes de déterminants.**

Le **rang** de A (=le nombre maximal de vecteurs lignes (ou colonnes) de A qui sont linéairement indépendants) peut être déterminé par calculs de déterminants de sous-matrices de A.

Théorème:
La matrice A, non nulle, est de rang r si et seulement si :
– **Il existe une** sous-matrice (carrée) de A, de taille (r,r), dont le déterminant n'est pas nul ;
– **Toutes** les sous-matrices (carrée) de A, de taille plus grande que (r,r), ont un déterminant qui est nul.

III.6. Inversion d'une matrice.

On appelle **comatrice** de A, ou **matrice des cofacteurs** de A, la matrice $cofA$ dont le terme (i,j) est le cofacteur du terme a_{ij} de A :

$$cofA = [A_{ij}] \ (A_{ij} \ = \ cofacteur\ de\ a_{ij}) \tag{4}$$

$cofA$ est de même format que A.

Propriété (générale) fondamentale :

$$A(cofA)^T = (cofA)^T A = (detA)I_n$$

Lorsque A est inversible, on a :

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{détA}(cofA)^T} \tag{5}$$

(attention à ne pas oublier cette opération de transposition).

Exemple:

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$, *Alors :* $détA = -46$ *et* $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{9}{23} & \frac{11}{46} & \frac{5}{23} \\ \frac{-1}{23} & \frac{-7}{23} & \frac{2}{23} \\ \frac{-2}{23} & \frac{-5}{46} & \frac{4}{23} \end{bmatrix}$.

Exemple:

- $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ *avec* $détA = ad - bc \neq 0$. *Alors :*

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \text{ (suffisamment simple pour être retenu par coeur).}$$

- $A = \begin{bmatrix} \boxed{B} & 0 \\ 0 & \boxed{C} \end{bmatrix}$ *avec B et C inversibles (pas de même taille nécessairement).*

Alors

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \boxed{B^{-1}} & 0 \\ 0 & \boxed{C^{-1}} \end{bmatrix}.$$

Résolution de systèmes linéaires à l'aide de déterminants, autant d'équations linéaires que d'inconnues (systèmes dits de CRAMER).

Théorème:
Le système linéaire (ou d'équations linéaires) $AX = b$, détaillée en

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots\ a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots\ a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \ldots\ a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}\right. \qquad A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

pour lequel $D = détA \neq 0$, **a exactement une solution**, qui est donnée par

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D},\ \ldots,\ x_n = \frac{D_n}{D} \text{ (règle de Cramer)} \tag{6}$$

où D_k est le déterminant d'une matrice modifiée de A en remplaçant la $k^{ème}$ colonne par le vecteur colonne b.

Exemple:
Résoudre par cette méthode (qui n'est pas la meilleure ici !) le système :

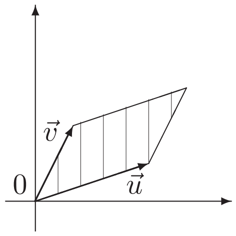
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 5 \\ x & - & 2y & - & 3z & = & -1 \\ 2x & + & y & - & z & = & 3 \end{array}\right.$$

Réponses : $D = 5, D_x = 20, D_y = -10, D_z = 15,$ *d'ou* $x = 4,\ y = -2,\ z = 3.$

III.8. Déterminants et volumes.

La notion de déterminant est intimement liée à la notion **d'aire** (cas où $n = 2$) et de **volume** (cas où $n = 3$).

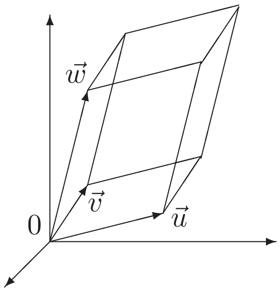
Dans le plan ($n = 2, 2D$) ou dans l'espace ($n = 3, 3D$) repéré par un repère orthonormé $(0;\ \vec{i},\ \vec{j})$ ou $(0;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$, on va considérer les objets suivants :



$P = \{\ x\vec{u} + y\vec{v} \mid 0 \le x \le 1 \text{ et } 0 \le y \le 1\ \}$ est le parallélogramme le côté $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Si $A = [\vec{u}\ \vec{v}] \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (matrice de colonnes $\vec{u}$, $\vec{v}$), alors :

$$\boxed{Aire(P) = |détA|} \text{ (ne pas oublier la valeur absolue !)} \qquad (7)$$

On comprend que $Aire(P) = 0$ lorsque le parallélogramme P est "aplati", i.e. lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires (ou linéairement dépendants).



$P = \{\ x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 \text{ et } 0 \le z \le 1\ \}$ est le parallélépipède de côté $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.
Si $A = [\vec{u}\ \vec{v}\ \vec{w}] \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, alors :

$$\boxed{vol(P) = |détA|} \qquad (8)$$

Si, par exemple, $\vec{w}$ est dans le plan engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ($\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement dépendants), le parallélépipède est "aplati" et son volume est nul.

III.9. Exercices.

Exercice 1:

On considère la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 8 & 9 \end{bmatrix}$.

Calculer $détA$, *la comatrice* $cofA$ *de* A, A^{-1} *à l'aide de* $détA$ *et* $cofA$.

***Rép. 1** :* $détA = -2$;

$$cofA = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix},\ A^{-1} = \frac{1}{détA}(cofA)^T = \begin{bmatrix} 5/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1/2 & 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

Exercice 2: