МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Московский Авиационный Институт
(Национальный Исследовательский Университет)

Институт №8 "Информационные технологий и прикладная математика"
Кафедра 806 "Вычислительная математика и программирование"

Лабораторная работа №4
по курсу "Теоретическая механика и основы компьютерного моделирования"
3 семестр

Студент: Леухин М. В.
Группа: М8О-206Б-20
Преподаватель: Сухов Е. А.
Подпись: _______________

Москва, 2021

Содержание

1 Теоретическая часть

Поля трубка кольцевой формы радиуса R может вращаться вокруг вертикальной оси Oz. Момент инерции трубки относительно оси Oz равен J_z. Внутри трубки без трения движется материальная точка массы m. На трубку действует момент внешних сил относительно оси Oz, равный $M_{Oz} = -c\varphi$ (φ — угол поворота трубки вокруг оси Oz, c — постоянная).

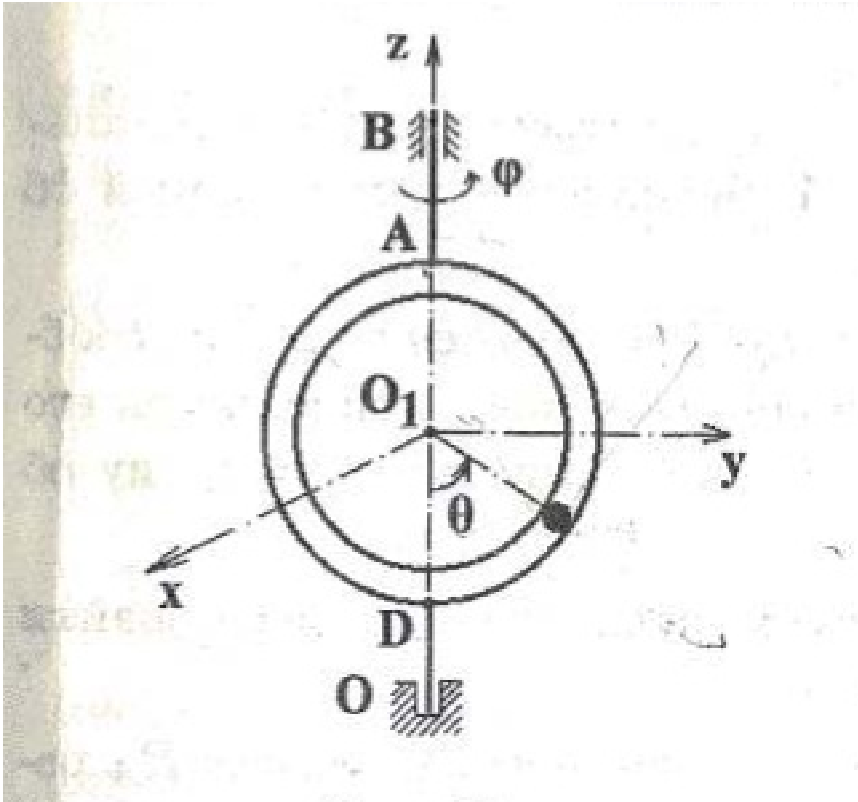


Рис. 11

Необходимо найти точки равновесия а также определить их тип.

В данной системе имеем две обобщённые координаты: это углы φ и θ. Определим, какие потенциальные силы действуют на систему. На кольцевую трубку относительно оси Oz действует сила, момент которой равен $-c\varphi$, а значит потенциальная энергия будет $\Pi_1 = \frac{c\varphi^2}{2}$. На точку материальную точку дейсвтует сила тяжести. Возьмём за нулевой уровень нижнее положение точки, тогда потенциальная энергия равна $\Pi_2 = -mgR\cos\theta - mgR$. Исходя из этого, получаем $\Pi = \frac{c\varphi^2}{2} - mgR\cos\theta - mgR$. В точках равновесия системы функция потенциальной энергии имеет локальный экстремум. Найдём их:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = c\varphi = 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \theta} = mgR\sin\theta = 0 \end{cases}$$

[H] Исходя из этого получаем, что система имеет 2 точки равновесия: $\varphi = 0, \theta = 0$ и $\varphi = 0, \theta = \pi$. Опрдеелим тип этих точек:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = c$$
$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2} = mgR\cos\theta$$
$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi \partial \theta} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta \partial \varphi} = 0$$
$$F(\varphi, \theta) = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2}\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi \partial \theta}\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta \partial \varphi} =$$
$$F(0,0) = cmgR > 0; F(0,\pi) = -cmgR < 0$$

Точка $(0,0)$ — точка устойчивого равновесия, точка $(0,\pi)$ — неустойчивого.

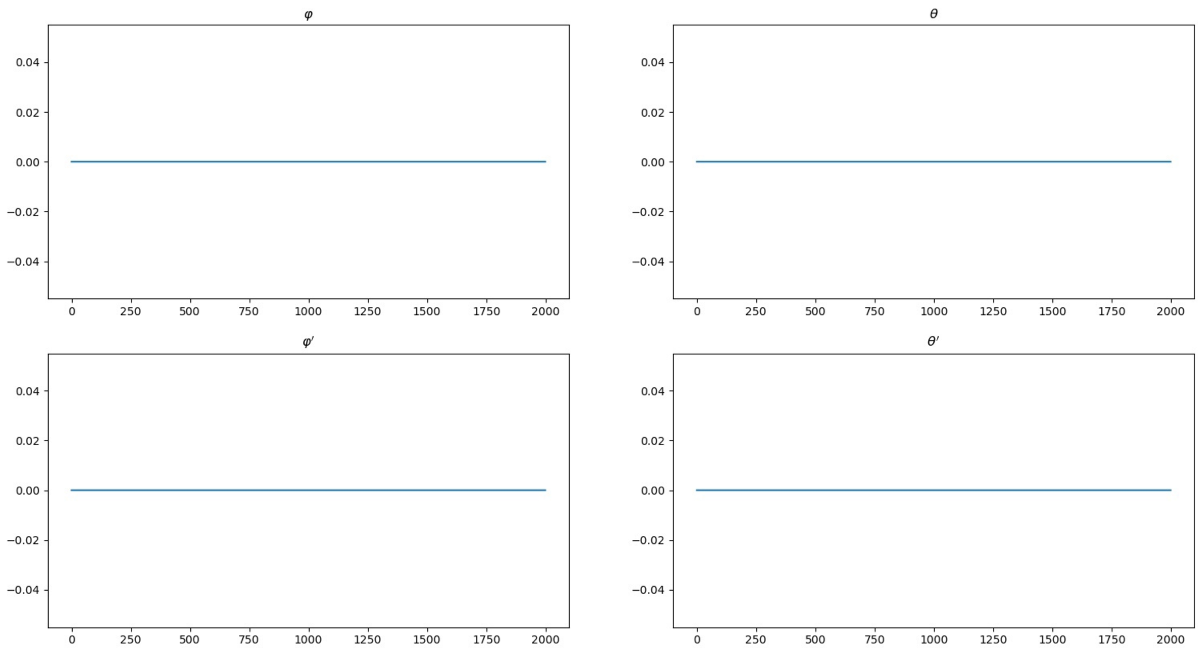
2 Листинг программы

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint

def odesys(y, t, g, m, J, R, c):
    dy = np.zeros(4)
    dy[0] = y[2]
    dy[1] = y[3]

    a11 = J + m * R ** 2 * np.sin(y[1]) ** 2
    a12 = 0
    a21 = 0
    a22 = R

    b1 = -c * y[0] - m * R ** 2 * y[2] * y[3] * np.sin(2 * y[1])
    b2 = -g * np.sin(2 * y[1]) + R * y[2] ** 2 * np.sin(y[1]) * np.cos(y[1])

    dy[2] = (b1 * a22 - b2 * a12) / (a11 * a22 - a12 * a21)
    dy[3] = (b2 * a11 - b1 * a21) / (a11 * a22 - a12 * a21)
    return dy

tn = np.linspace(0, 10, 2000)
xn = np.zeros_like(tn)
yn = np.zeros_like(tn)
zn = np.zeros_like(tn)

g = 9.81
m = 1
J = 0.5
R = 0.5
c = 2

phi0 = 0
theta0 = np.pi
dphi0 = 0
dtheta0 = 0
y0 = [phi0, theta0, dphi0, dtheta0]

Y = odeint(odesys, y0, tn, (g, m, J, R, c))

```

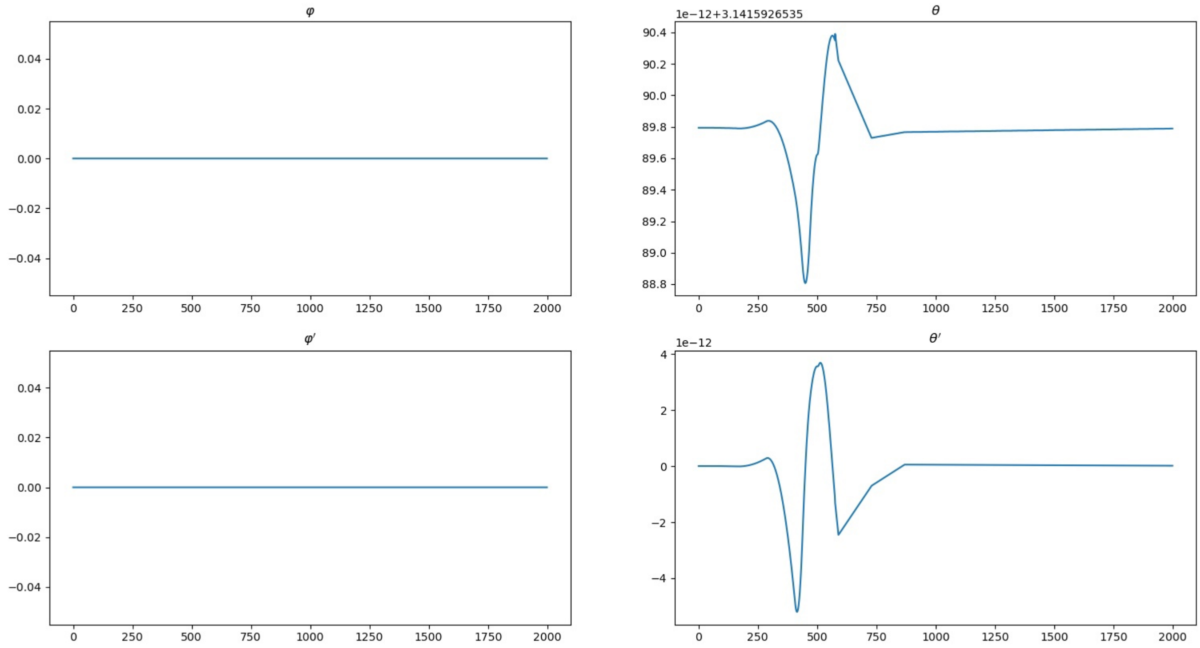
```
phi = Y[:, 0]
theta = Y[:, 1]

fig = plt.figure()

ax1 = fig.add_subplot(2, 2, 1)
ax1.plot(Y[:, 0])
ax1.set_title("$\\varphi$")

ax2 = fig.add_subplot(2, 2, 2)
ax2.plot(Y[:, 1])
ax2.set_title("$\\theta$")

ax3 = fig.add_subplot(2, 2, 3)
ax3.plot(Y[:, 2])
ax3.set_title("$\\varphi'$")

ax4 = fig.add_subplot(2, 2, 4)
ax4.plot(Y[:, 3])
ax4.set_title("$\\theta'$")

plt.show()
```

3 Результат работы программы

В точке $(0, 0)$ система покоится:



А для точки $(0, \pi)$ имеем:


φ
θ
1e−12+3.1415926535
φ′
θ′
1e−12