Pricing & risk-management des options

Mai 2016

Antonin Chaix

Plan

- **Généralités sur les options**
  - Définition
  - Stratégie d'exercice et payoff d'une option
  - Utilisations des options
  - Vocabulaire

- **Premières propriétés**
  - L'hypothèse d'A.O.A.
  - Inégalités et parité call-put
  - Déterminants des prix d'options

Plan (suite)

- **Le pricing des options**
  - Modèle binomial
  - Modèle et formule de Black & Scholes
  - Volatilité historique vs. Volatilité implicite
  - Smile de volatilité
  - Valeur intrinsèque et valeur temps

- **La couverture des options**
  - Les sensibilités (ou « grecques »)
  - La couverture en delta-neutre

- **Options exotiques et méthodes numériques**
  - Quelques exemples d’options exotiques
  - Focus sur la méthode de Monte Carlo

Généralités sur les options

Les options vanilles (ou européennes)

- Un **call** européen est une **option d'achat**

- Son détenteur a la possibilité, mais pas l'obligation, d'**acheter** un actif *S* à une date future (*maturité* ou *échéance*) et à un prix fixé à l'avance (*prix d'exercice* ou *strike*).

- L'actif *S* est appelé **actif sous-jacent**.

- **Exemple** :
  - Call sur action Orange, strike 10 €, maturité 3 mois.
  - NB : cours actuel de Orange : 10.19 €

Les options vanilles

- Un **put** européen est une **option de vente**

- Il est libellé comme le call, mais donne le droit de **vendre** l'actif sous-jacent à un prix donné à l'échéance de l'option.

Stratégie d’exercice

Retour sur l’exemple : je suis détenteur d’un call sur action Orange, strike **10 €**, maturité **3 mois**. Aujourd’hui, l’action Orange vaut **10.19€.**

Stratégie d’exercice à l’échéance (dans 3 mois) ?

- J’exerce mon droit d’achat si le cours de l’action est **supérieur** à 10 €.

- En revendant immédiatement l’action achetée j’empoche la différence entre le cours d’Orange et le prix d’exercice.

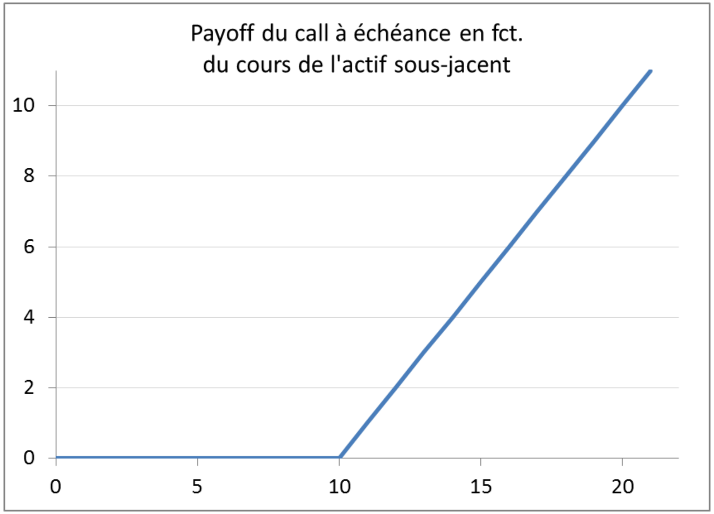
- Je n’exerce pas mon droit d’achat si le cours de l’action est inférieur à 10 €. Mon profit est nul.

Payoff du call

- **Notons :**

  S_T : cours de l'actif S à la maturité T

  K : prix d'exercice



- Le détenteur du call fait à la date T le profit :

  $S_T - K$ si $S_T > K$

  0 si $S_T < K$

  Soit **max** $(S_T - K, 0)$, encore noté $(S_T - K)^+$

- C'est le **payoff** du call

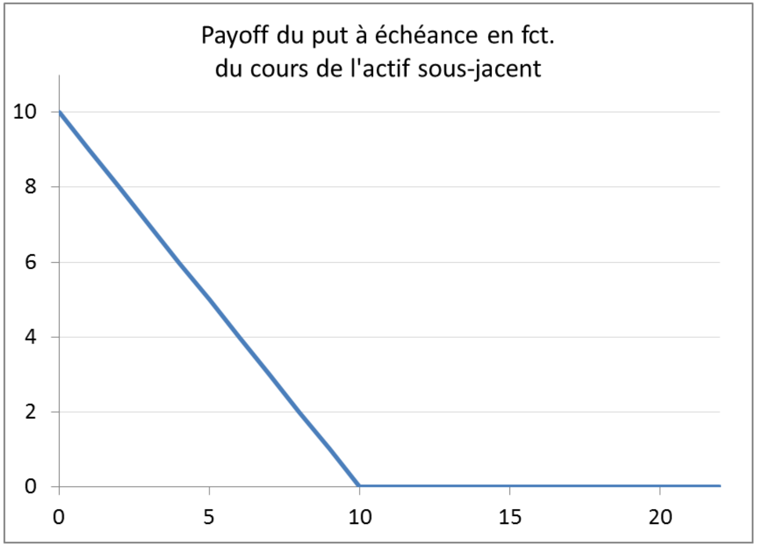
Payoff du put

- Le détenteur du put fait à la date T le profit :

$$\begin{cases} \boldsymbol{K - S_T} & \text{si } \boldsymbol{S_T < K} \\ \boldsymbol{0} & \text{si } \boldsymbol{S_T > K} \end{cases}$$

Soit **max (** $\boldsymbol{K - S_T}$ **, 0)**, encore noté $\boldsymbol{(K - S_T)^+}$

- C'est le **payoff** du put



Physical settlement vs. Cash settlement

- Détenteur d'un call, votre gain à échéance, en *marked-to-market* est :

$$\mathbf{Max\ (S_T - K,\ 0)}$$

- Vous pouvez acheter physiquement l'action au prix d'exercice K, mais rien ne vous oblige à la revendre immédiatement.

- C'est un ***Physical settlement***

- Mais certaines options sont traitées avec ***Cash settlement***

- C-à-d : on encaisse **en cash** le payoff **max (S_T – K, 0)**

Option vs. Forward

- Contrairement à une option, un forward est **un engagement ferme**
- Avec un call j'ai la possibilité d'acheter l'actif au prix convenu (strike). Je ne le fais que si cela est intéressant et je paye une prime pour détenir ce droit
- Si j'achète un forward, je suis tenu quoiqu'il arrive d'acheter l'actif au prix convenu, même si cela m'est défavorable. Je n'ai en revanche aucune prime à payer.

Pourquoi traiter des options ?

- Instrument de couverture et de gestion de bilan

- Instrument spéculatif : *l'effet de levier*

- *Mais aussi* : une façon d'« acheter » ou de « vendre » de la volatilité.

Exemples de couverture avec les options

- **Options de taux : Caps & Floors**
  Se garantir un taux plafond (cap) dans le cas d'un emprunt à taux variable, ou un taux plancher (floor) dans le cas d'un placement à taux variable

- **Options de change**
  Dans le cas d'un contrat passé en USD, se garantir un taux de change EUR/USD plancher (pour se couvrir d'une baisse du dollar), tout en bénéficiant de la hausse éventuelle du dollar

- **Options sur action ou indice**
  L'achat de puts de strike faible permet par exemple de limiter la casse en cas de krach boursier. C'est une forme d'assurance contre la baisse des cours.

Effet de levier des options

- Je souhaite investir 1000 € sur un horizon de 1 an

- Action au cours de **100 €**

- Call 1an ATM sur cette action : **prime = 10 €**

- **Comparer les performances des investissements en actions et en options dans les cas suivants :**
  - Cours action dans 1 an = 80
  - Cours action dans 1 an = 100
  - Cours action dans 1 an = 130

Effet de levier des options

Conclusion :

- En investissant en options, on démultiplie ses gains en cas de hausse du titre, mais on peut tout perdre en cas de baisse !

Prendre position sur la volatilité

- Traiter des options peut aussi permettre de prendre position sur la volatilité de l’actif sous-jacent

- Une option permet en général de prendre position sur le niveau de l’actif sous-jacent (cf. effet de levier).

- Mais dès lors que l’on couvre une option en delta-neutre, ce n’est plus sur l’actif sous-jacent que l’on fait un pari, mais sur l’évolution future de la volatilité.

- Nous étudierons ces aspects un peu plus tard…

A la monnaie, dans et en dehors de la monnaie

- Une option est **dans la monnaie** (*in the money*) si, exercée immédiatement, elle procurerait un gain positif.

- Une option est **en dehors de la monnaie** (*out of the money*) si, exercée immédiatement, elle ne procurerait aucun bénéfice.

- Une option est **à la monnaie** (*at the money*) lorsque son strike est égal au cours actuel du sous-jacent.

A la monnaie, dans et en dehors de la monnaie

- ATM / ITM / OTM dans le cas d’un call et d’un put :

	Dans la monnaie	**A la monnaie**	**Hors la monnaie**
Call	$K < S$	$K = S$	$K > S$
Put	$K > S$	$K = S$	$K < S$

- **Attention :** cette notion peut aussi se définir par rapport au cours forward (à terme) du sous-jacent.

A la monnaie, dans et en dehors de la monnaie

Conséquence : pour un sous-jacent et une maturité donnée,

- une option dans la monnaie sera plus chère qu'une option à la monnaie, qui sera elle même plus chère qu'une option en dehors de la monnaie.

- Autrement dit, plus le strike est élevé :
  - Plus la valeur du call est faible
  - Plus la valeur du put est élevée

Vérifions si tout le monde a compris…

Un call de strike 80€ sur une action dont le cours aujourd'hui est 97€ est...

1. *Dans monnaie*
2. *A la monnaie*
3. *En dehors de la monnaie*

Le CAC40 est actuellement autour de 4200 points. Un put CAC de strike 3200 est :

1. *Dans monnaie*
2. *A la monnaie*
3. *En dehors de la monnaie*

Premières propriétés

L'hypothèse d'A.O.A.

- L'hypothèse d'**A**bsence d'**O**pportunités d'**A**rbitrages (A.O.A) signifie que sur les marchés, on ne peut pas gagner de l'argent à coup sûr sans prendre de risques

- **Un arbitrage** = un portefeuille de valeur nulle aujourd'hui et de valeur future positive et strictement positive avec une proba non nulle. Formellement : $X_0 = 0$, $X_T \geq 0$ et $\mathbf{P}(X_T > 0) > 0$.

- L'hypothèse d'A.O.A implique que de tels portefeuilles n'existent pas sur le marché.

- L'A.O.A. implique que deux portefeuilles de valeurs finales identiques ont la même valeur aujourd'hui.

Calls & puts européens : quelques propriétés

- Prix du call < cours de l'actif sous-jacent : $\mathbf{C_0 \leq S_0}$

Explication : l'achat d'une action sur-couvre le call

- Prix du put < valeur actuel du strike : $\mathbf{P_0 \leq \textit{K}\, e^{-\textit{rT}}}$

Explication : la quantité de cash K est toujours supérieure au payoff du call

- Parité call-put : $\boldsymbol{C_0 - P_0 = S_0 - K\, e^{-rT}}$

Explication : l'achat d'un call et la vente d'un put revient à rentrer dans un forward

Un mot sur le pricing d'un forward…

- Quel est le prix forward d'une chèvre ?

Prix à terme de la chèvre….

Cours spot (comptant)

- Emprunt
- Location du pré
- Vétérinaire
- Assurance

Coût du portage

- Lait

Revenus du portage

Comptant + Portage = Terme

Un exemple plus classique : forward sur action

- Si je suis vendeur du contrat forward, je m'engage à vendre l'action à un prix F à une date T future.

- Comment calculer la juste valeur de F ?

- **Idée (AOA)** : regardons, en tant que vendeur du contrat future, comment couvrir ce contrat.

Forward sur action (suite)

- **En t = 0 :**
  - J'emprunte la somme S_0 (cours de l'action sous-jacente)…
  - Que j'utilise pour acheter l'action au prix S_0
  - Flux net à t = 0 : 0

- **En t = T :**
  - Je livre l'action au prix F
  - Je rembourse mon emprunt : $S_0 e^{rT}$

- **La « juste valeur » de F est donc :** $F = S_0 e^{rT}$

- Notons que si l'action délivre un ou des **dividendes** entre t = 0 et t = T, cela doit être prix en compte dans le calcul du prix F.

Exercice : inégalité de convexité

Convexité des prix par rapport au strike :

- Si C_1, C_3 et C_2 sont respectivement les prix des calls de strikes $K_3 > K_1$ et $K_2 = (K_1+K_3) / 2$, alors :

$$\boldsymbol{C_2 \leq (C_1 + C_3) / 2}$$

Exercices

- Un investisseur achète un call de strike K et vends un put de strike K. Décrivez sa position

- Un call et un put européen sur action de maturité 1 an et de strike 20€ valent tous deux 2€. Le taux d'intérêt sans risque est de 5,50%. Le cours de l'action est de 18.93 €. Y'a-t-il opportunité d'arbitrage? Que se passe-t-il si un dividende de 1 € est attendu dans 6 mois ?

Options : les déterminants du prix

J'ai un call ou un put sur action en portefeuille….

Lister, si possible par ordre d'importance, les facteurs de marché qui vont faire le plus bouger son MtM…

Options : les déterminants du prix

Réponse, par ordre d'importance…

- Le cours de l'actif sous-jacent
- La volatilité
- Le temps restant jusqu'à échéance
- Les taux d'intérêt
- Les dividendes

Options : les déterminants du prix

	CALL	PUT	GRECQUES
Cours ↗			
Volatilité ↗			
Tps jusqu'à mat. ↘			
Taux d'intérêt ↗			
Dividende ↗			

Options : les déterminants du prix

Et voilà le travail…

	CALL	PUT	GRECQUES
Cours ↗	↗	↘	**Delta** (Δ)
Volatilité ↗	↗	↗	**Véga** (V)
Tps jusqu'à mat. ↘	↘	↘	**Théta** (θ)
Taux d'intérêt ↗	↗	↘	**Rho** (ρ)
Dividende ↗	↘	↗	-

Le pricing des options

Le modèle binomial : exemple

Parapluie valant aujourd'hui 100 €

- Il augmentera de 10% demain s'il pleut
- Il baissera de 10% s'il ne pleut pas
- Le taux d'intérêt est nul
- Météo France estime qu'il va pleuvoir demain avec une proba de 90%

- Valeur d'un call sur le parapluie de prix d'exercice 100 € ?

Évaluer les options : le modèle binomial

- Modèle à une période et deux états du monde :

$$\begin{tikzcd} & u\,S \text{ (état « up »)} \\ S \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & d\,S \text{ (état « down »)} \end{tikzcd}$$

- $u > d$

- Le taux d’intérêt est noté r

Évaluer les options : le modèle binomial

- Première propriété (issue de l'A.O.A.) :

$$d < 1 + r < u$$

- Call écrit sur l'actif S :
  - Payoff $C_1^u = \max(uS - K, 0)$ dans l'état « up »
  - Payoff $C_1^d = \max(dS - K, 0)$ dans l'état « down »

- Portefeuille de couverture à la date initiale:

$$V_0 = \alpha\, S + \beta$$

Évaluer les options : le modèle binomial

- Portefeuille de couverture à la date finale :

$$V_1^u = \alpha\, u\, S + \beta\, (1+r) \text{ dans l'état « up »}$$

$$V_1^d = \alpha\, d\, S + \beta\, (1+r) \text{ dans l'état « down »}$$

- On choisit les quantités α et β de telle sorte que le portefeuille « réplique » le payoff du call

$$\alpha\, u\, S + \beta\, (1+r) = C_1^u$$

$$\alpha\, d\, S + \beta\, (1+r) = C_1^d$$

- La solution (α^*, β^*) de cette équation est le portefeuille de couverture

Évaluer les options : le modèle binomial

- Solution :

$$\alpha^* = \frac{C_1^u - C_1^d}{uS - dS} \qquad \text{formellement} \quad \alpha^* = \frac{\Delta C}{\Delta S}$$

$$\beta^* = \frac{C_1^u - \alpha^* uS}{1+r}$$

- Valeur du portefeuille de couverture et donc prix de l'option…

$$C_0 = \frac{1}{1+r}\left(C_1^u \frac{(1+r)-d}{u-d} + C_1^d \frac{u-(1+r)}{u-d} \right)$$

Le modèle binomial (fin)

- Probabilité « risque-neutre » :

  $q = [(1 + r) - d] / (u - d)$ compris entre 0 et 1

  $1 - q = [u - (1 + r)] / (u - d)$ compris entre 0 et 1

- Le prix du call (du put) s'interprète comme l'espérance actualisée de son payoff sous la probabilité « risque-neutre » $(q, 1 - q)$

$$C_0 = E^q [C_1] / (1+r)$$

- Sous la probabilité risque-neutre, tous les actifs du marché (action, option, actif sans risque), ont la même espérance de rentabilité, égale au taux sans risque r

Le modèle binomial : retour à l'exemple

$$\alpha^* = \frac{\Delta C}{\Delta S} = \frac{10-0}{110-90} = 0.5 = 50\%$$

$$\beta^* = \frac{10-0,5\times 110}{1+0} = -45.$$

$$C_0 = V_0 = 0.5\times 100 - 45 = 5$$

Evaluer les options : formule de Black & Scholes

Hypothèse : actif sous-jacent lognormal (rendements gaussiens)

- Dans ce cas on dispose de la formule de Black & Scholes pour évaluer le call (*C*) et le put (*P*) :

$$C = S_0 \mathcal{N}(d_1) - K e^{-rT} \mathcal{N}(d_2)$$

$$P = K e^{-rT} \mathcal{N}(-d_2) - S_0 \mathcal{N}(-d_1)$$

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad \text{et} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

$\mathcal{N}$: fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

$$\mathcal{N}(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} du$$

Evaluer les options : formule de Black & Scholes

- Avec :
  - S_0 : cours actuel de l'actif sous-jacent
  - K : prix d'exercice de l'option
  - T : temps restant jusqu'à la maturité de l'option (années)
  - σ : volatilité (annuelle) de l'actif sous-jacent
  - r : taux d'intérêt continu sans risque

Formule de Black & Scholes avec dividendes

- En supposant un taux continu de dividendes ***d***

$$C = S_0 e^{-dT} \mathcal{N}(d_1) - K e^{-rT} \mathcal{N}(d_2)$$

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{S}{K}\right) + (r - d + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

Evaluer les options : formule de Black & Scholes

- **Mise en pratique :**

  Toujours notre Call sur action Orange, de prix d’exercice 10 €, et de maturité 3 mois.
  - Orange cote 10.19 €
  - On suppose que la volatilité de l’action est de 22%.
  - Le taux sans risque vaut 1.50%

Application de la formule de B&S avec

✓ S_0 = 10.19 €

✓ K = 10.00 €

✓ T = 0,25

✓ σ = 0,22

✓ r = 0,015

Calculer le Prix du call !

Réponse : C = 0,565 €

Quelle valeur de volatilité utiliser ?

- Estimation historique

- Volatilité implicite

Définition de la volatilité implicite

- **Volatilité implicite :** c'est la volatilité qu'il faut rentrer dans la formule de B&S pour obtenir le prix de marché.

- Supposons que le prix de marché du call FT précédent soit 0,61 €

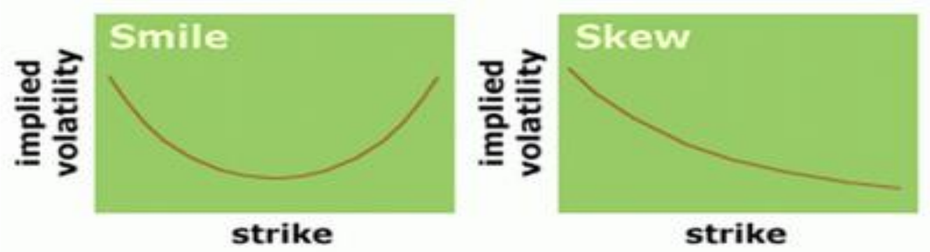
→ Cela correspond à une **volatilité implicite** de 24,29 %

- **Sur le Fx, les options traitent en vol implicite**
  – Ex : 25 delta call 2M sur EUR/CHF cote 9.5% / 10.5%

Smile de volatilité

- Sur les marchés d'options, pour un même actif sous-jacent, et pour une maturité donnée, **la volatilité implicite observée diffère d'un strike à l'autre.** Cela infirme le modèle de Black & Scholes.

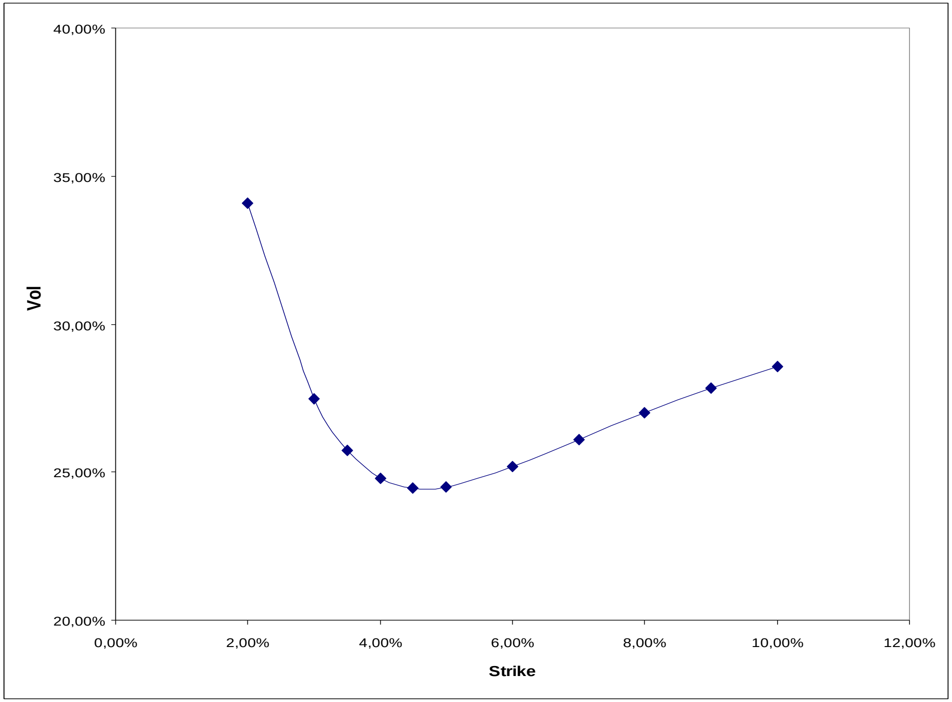
- On parle de ***smile* de volatilité** à cause de la forme en « U » de la vol. implicite en fonction du strike.



- Dans le cas d'une décroissance de la vol. implicite en fonction du strike on parle plus spécifiquement de ***skew* de volatilité**.

Smile de volatilité

- Exemple : smile de volatilité observé sur les caplets EURIBOR (calls sur taux EURIBOR)



Surface de volatilité

- La volatilité implicite observée dépend aussi de la **maturité** de l'option.

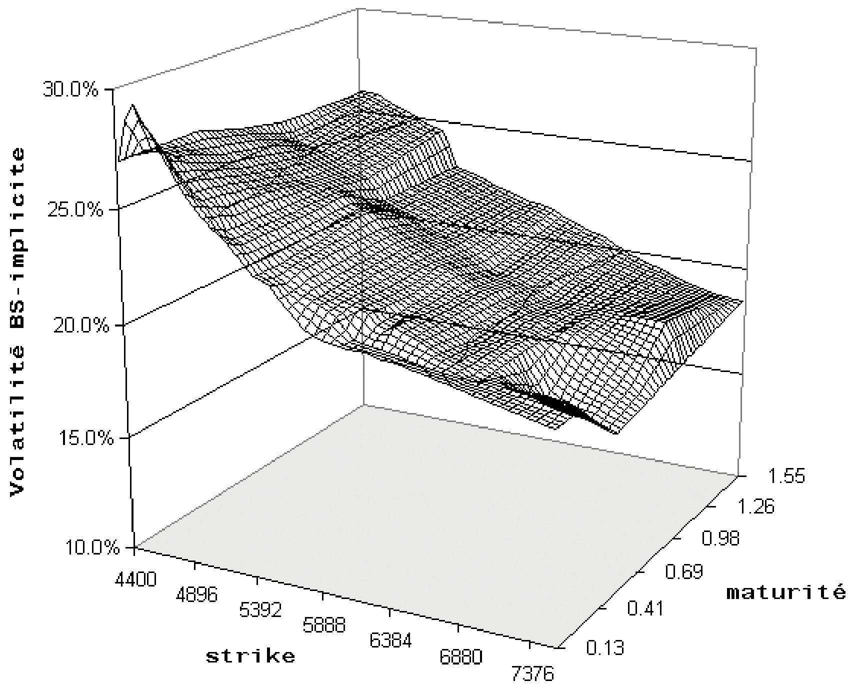
- On parle de ***term structure*** de la volatilité implicite.

- Pour un actif sous-jacent donné, le prix des options peut donc être représenté par une **surface de volatilité** :

Vol. implicite = ***F*** (strike, maturité)

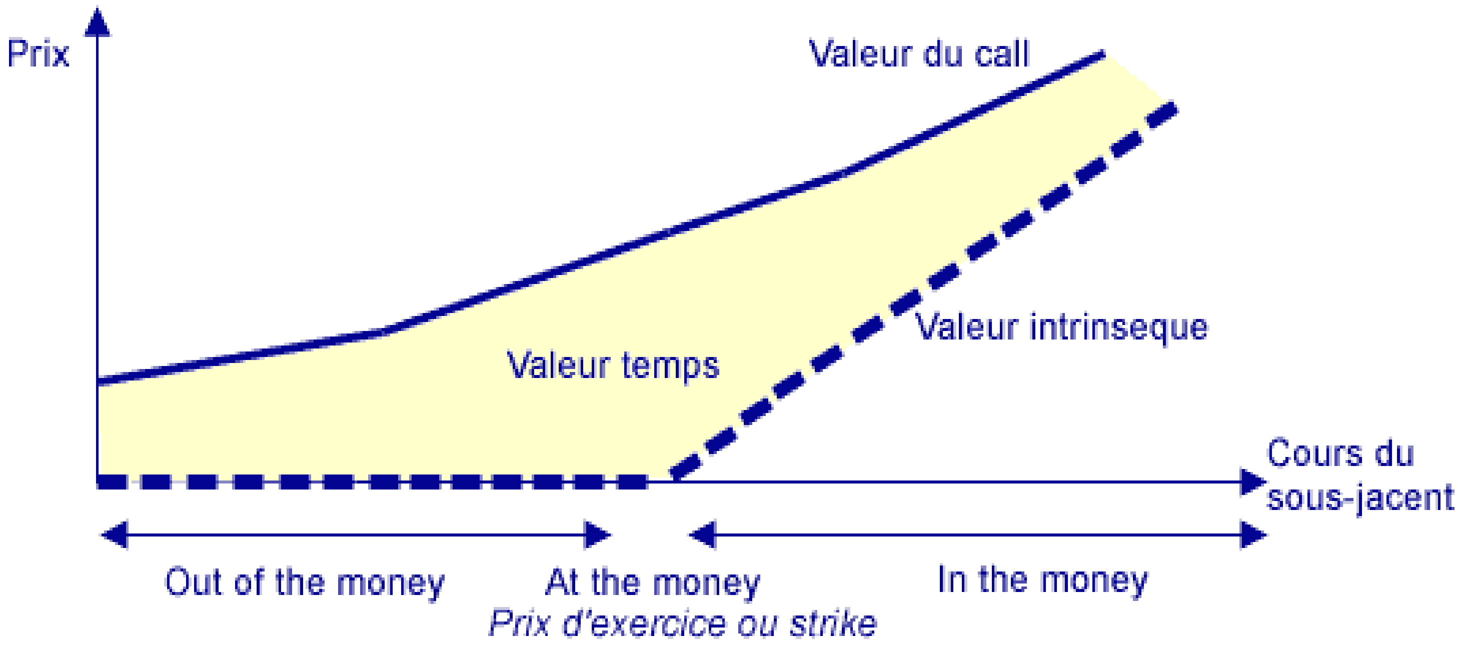
Surface de volatilité

- Surface de volatilité (options sur indice CAC 40)



Prime d'une option : décomposition

- Prime d'un Call = Valeur intrinsèque + Valeur Temps



Valeur intrinsèque

- La valeur intrinsèque d'une option est le gain instantané obtenu si l'option était exercée immédiatement

- La valeur d'une option ne peut donc pas être inférieure à sa valeur intrinsèque

Valeur temps

- La valeur d‘une option ne se réduit pas à sa valeur intrinsèque.

- En effet, la prime d'une option, même en dehors de la monnaie, conserve une valeur appelée valeur temps.

- La valeur temps = l'incertitude quant au potentiel d'évolution de la valeur intrinsèque.

Valeur temps

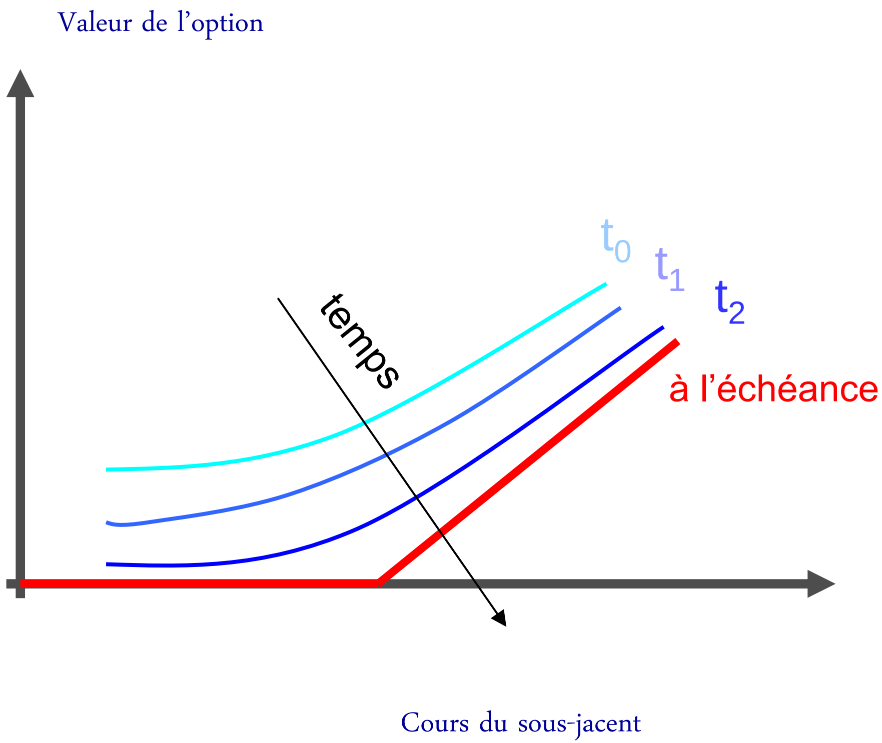
- Cette incertitude diminue à mesure que se rapproche la maturité de l’option.

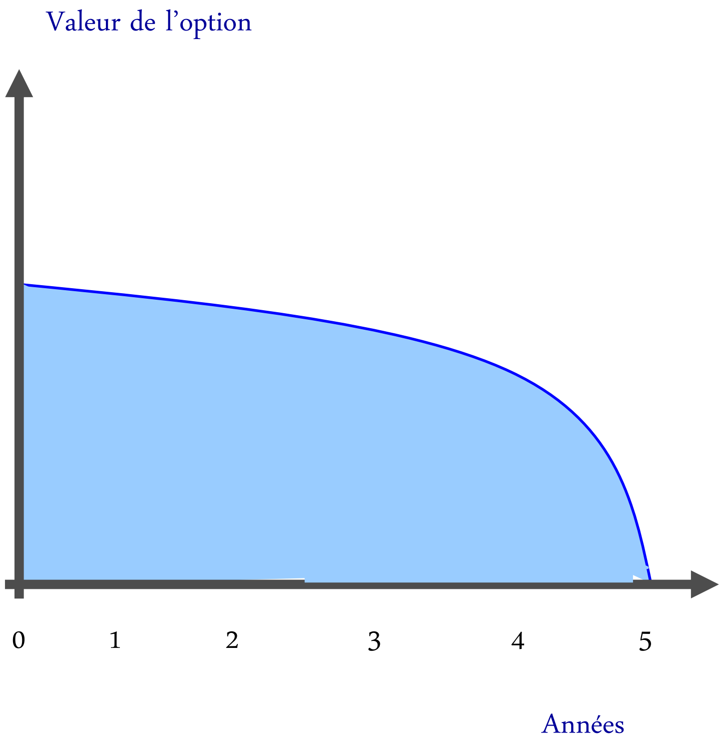
- Les options sont donc d'autant moins chères que leur échéance est proche.

- A l'inverse, quand la maturité est éloignée, la valeur temps et par conséquent la prime est importante.

Effet du temps sur le prix de l'option

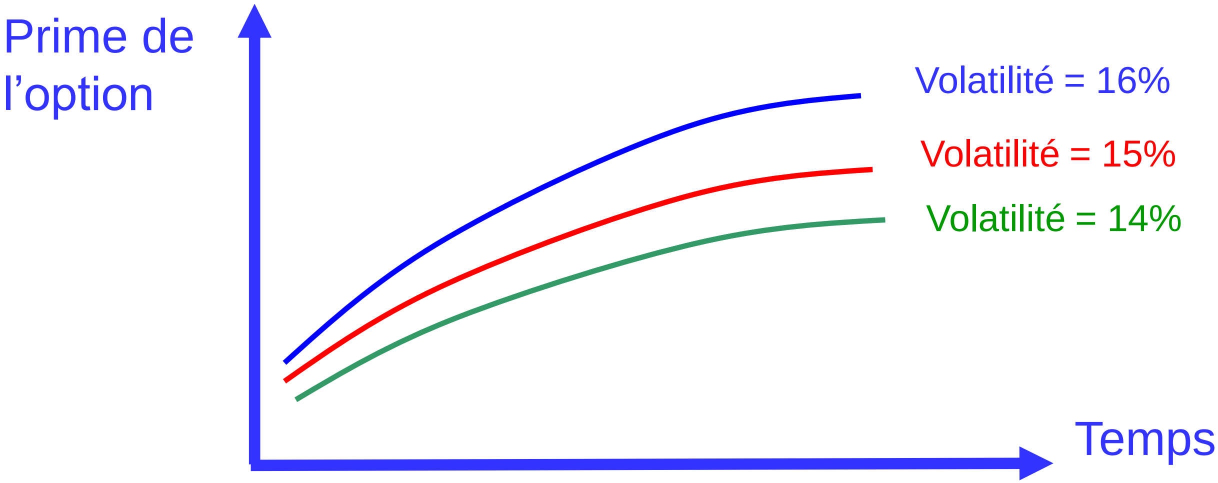
- Le prix de l'option baisse au fur et à mesure que l'on se rapproche de l'échéance.
-





Impact de la volatilité

- Le prix de l’option varie fortement en fonction de la volatilité.
- Une forte volatilité renchérit le prix de l’option (la probabilité d’obtenir une forte variation est plus importante).
- L’impact de la volatilité est d’autant plus important que la maturité est longue.



La couverture des options

Options : les sensibilités

Le Delta (Δ)

Sensibilité de la prime de l'option au cours de l'actif sous-jacent

Le Gamma (Γ)

Sensibilité du Delta au cours de l'actif sous-jacent

Le Thêta (θ)

Sensibilité de la prime de l'option à l'écoulement du temps

Le Véga (V)

Sensibilité de la prime de l'option à la volatilité cours de l'actif sous-jacent

Le Rhô (ρ)

Sensibilité de la prime de l'option au taux d'intérêt sans risque

Options : les sensibilités

$$\Delta = \mathrm{N}(d_1)$$

$$\Gamma = \frac{e^{-d_1^2/2}}{S\sigma\sqrt{2\pi T}}$$

$$\Theta = -\frac{S\sigma e^{-d_1^2/2}}{2\sqrt{2\pi T}} - rKe^{-rt}N(d_2)$$

$$V = S\sqrt{\frac{T}{2\pi}}e^{-d_1^2/2}$$

Options : les sensibilités

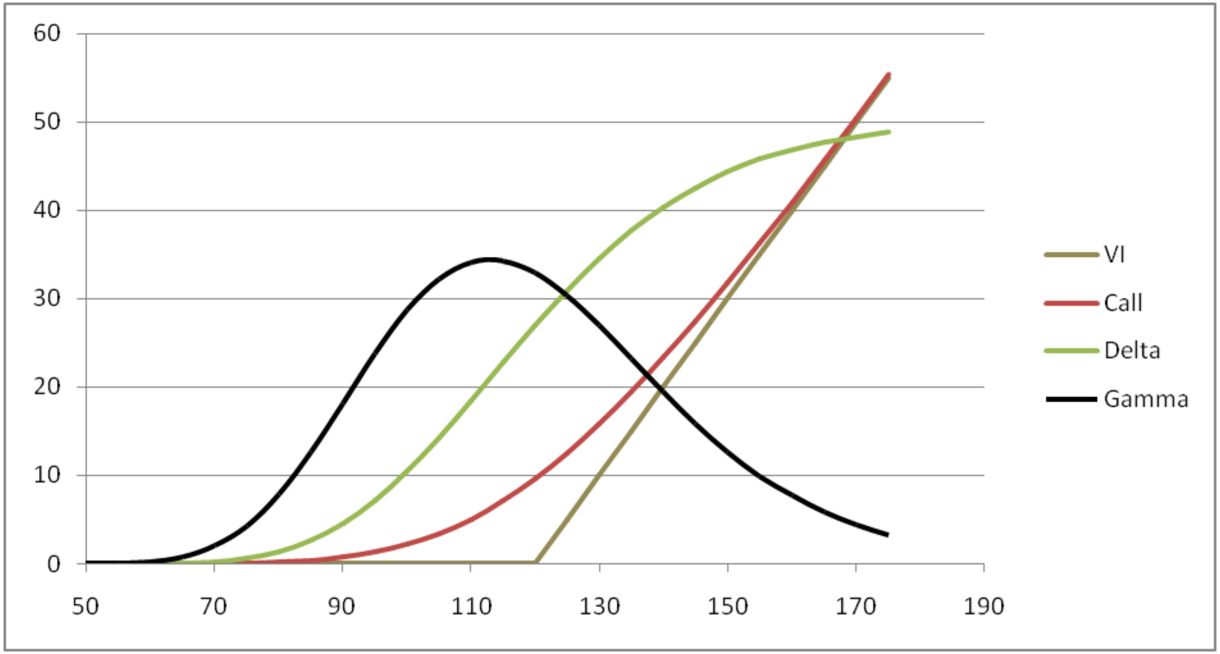
Position	Delta	Gamma	Thêta	Vega	Rhô
Achat d'un call	> 0	> 0	< 0	> 0	> 0
Vente d'un call	< 0	< 0	> 0	< 0	< 0
Achat d'un put	< 0	> 0	< 0	> 0	< 0
Vente d'un put	> 0	< 0	> 0	< 0	> 0

Delta :

	Hors de la monnaie	A la monnaie	Dans la monnaie
Call	$0 < \Delta < 0,5$	$\Delta \approx 0,5$	$0,5 < \Delta < 1$
Put	$-0,5 < \Delta < 0$	$\Delta \approx -0,5$	$-1 < \Delta < -0,5$

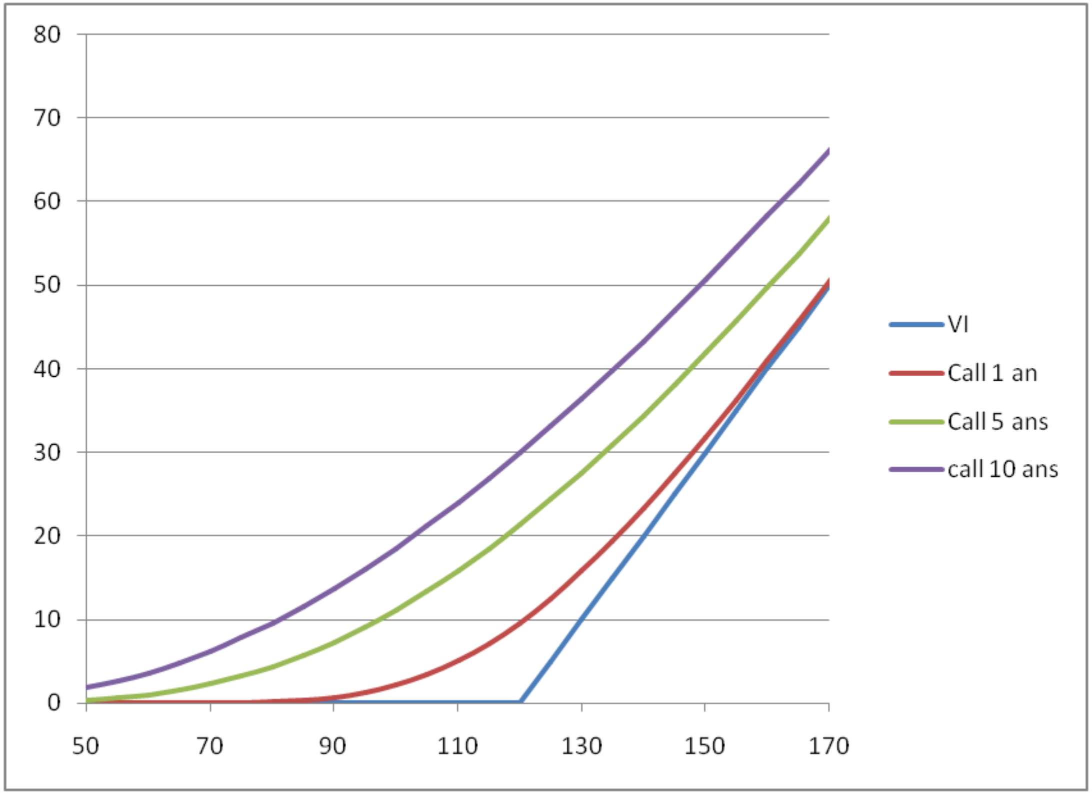
Options : les sensibilités

- **Prix / Delta / Gamma** suivant le cours de l'actif sous-jacent



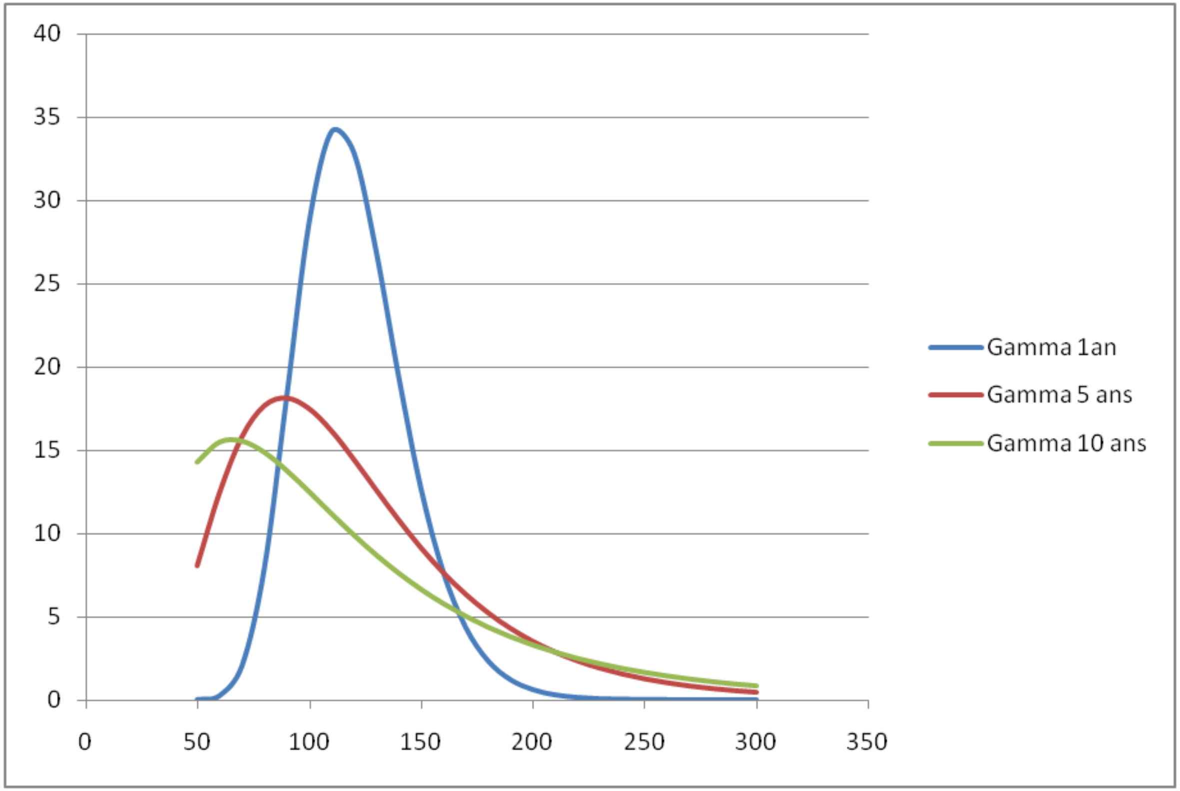
Options : les sensibilités

- Effet maturité sur le prix



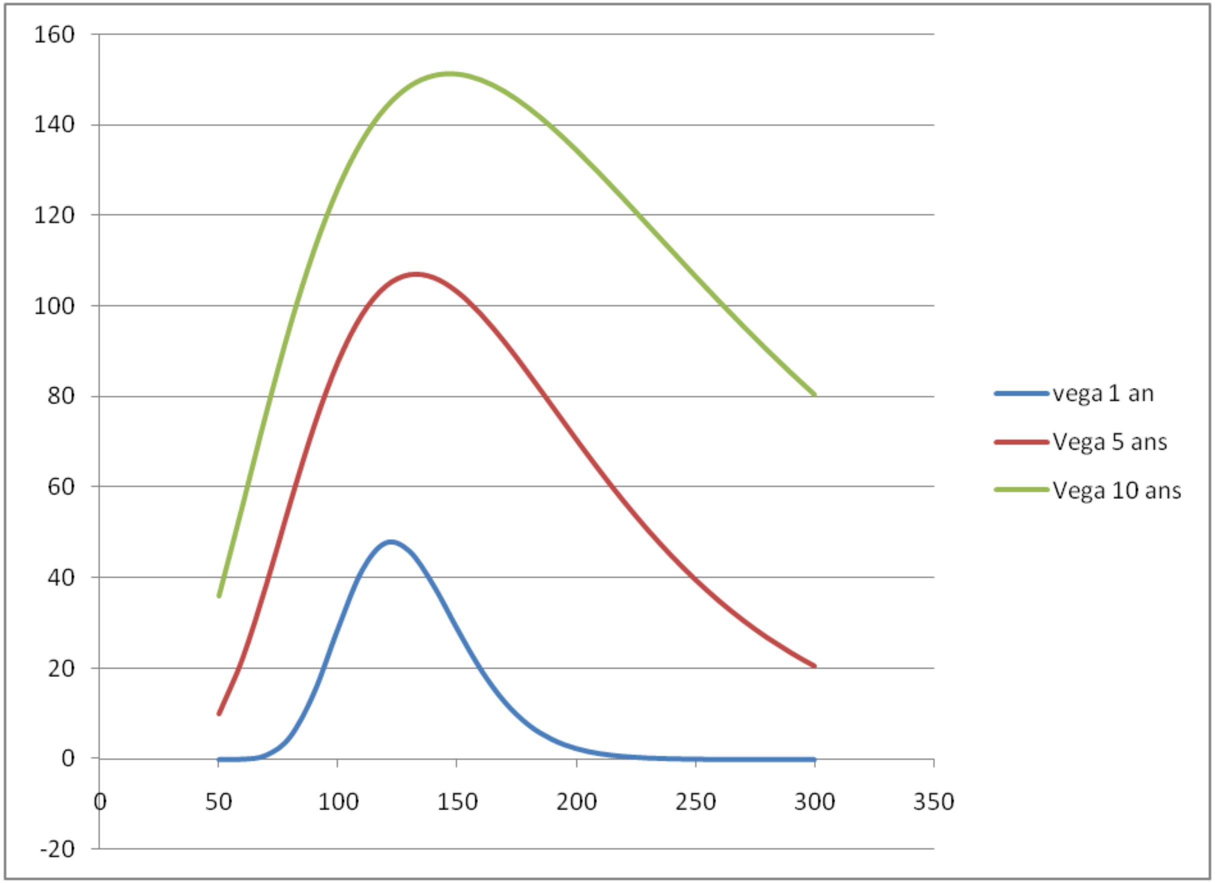
Options : les sensibilités

- Effet maturité sur le gamma



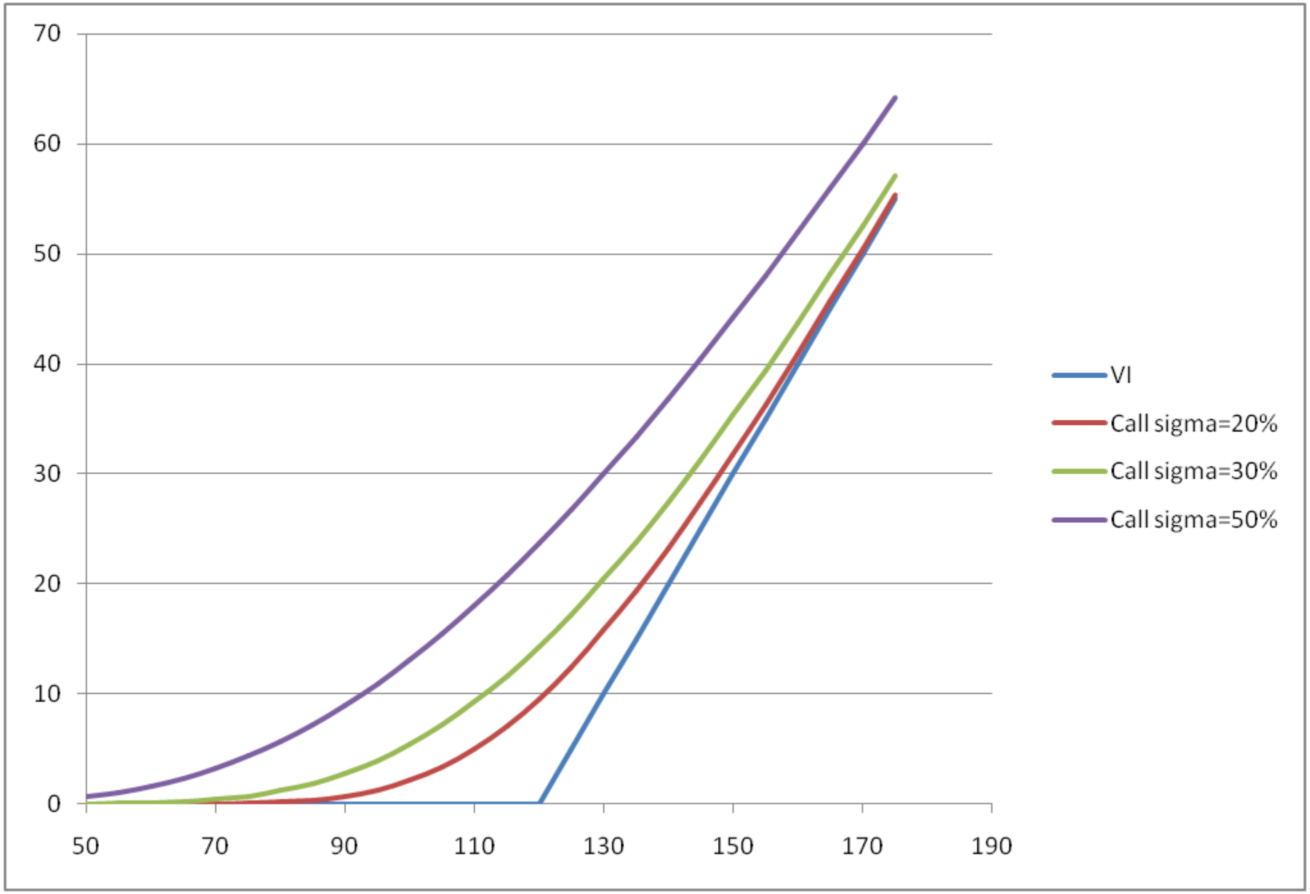
Options : les sensibilités

- Effet maturité sur le vega



Options : les sensibilités

- Effet volatilité sur le prix



Risk management des options : *delta hedging*

- Un *trader* options couvre systématiquement son portefeuille vis-à-vis des variations du marché

- **Risque principal** : variation de l'actif sous-jacent.

- **Solution** : s'immuniser contre les variations du sous-jacent en achetant (ou vendant) de l'actif sous-jacent en proportion du **delta** de l'option.

- Cette couverture doit être réajustée régulièrement à mesure que le delta évolue.

- On parle de **delta-hedging** ou encore de **gestion en delta-neutre**.

Risk management des options : *delta hedging*

- **Exemple :** vente d'un call à la monnaie ($S_0 = K$) $\rightarrow$ $\boldsymbol{\Delta \approx}$ **0,5**

- **Couverture delta-neutre** à la date initiale **=** achat d'1/2 action.

- **Au cours de la vie de l'option** :

  – Lorsque le cours de l'actif sous-jacent **augmente**, le delta aussi $\rightarrow$ **achat** d'actions pour rester delta-neutre.

  – Lorsque le cours de l'actif sous-jacent **diminue**, le delta aussi $\rightarrow$ **vente** d'actions pour rester delta-neutre.

Risk management des options : *delta hedging*

- Les variations du *Delta* lorsque le sous-jacent bouge – et donc la taille des réajustements – sont représentées par la valeur du *Gamma*.

- Equation de Black Scholes :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + rS\frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = rC$$

=> P&L du *trader* : ***Gamma*** vs. ***Thêta***

$$\int_0^T \Gamma \frac{S^2}{2}\left(\sigma_{hedge}^2 - \sigma_t^2\right) dt$$

Options exotiques et méthodes numériques

Options « exotiques » - options « illiquides »

- Options américaines, bermudas
- Options digitales
- Options barrières
- Options lookback
- Options asiatiques
- Options sur panier, sur spread
- Etc….

Les méthodes numériques

- Il est souvent impossible de trouver des **formules explicites (closed form)** pour évaluer certains payoffs:
  - Produits trop complexes
  - Modèles trop complexes
  - Les deux !

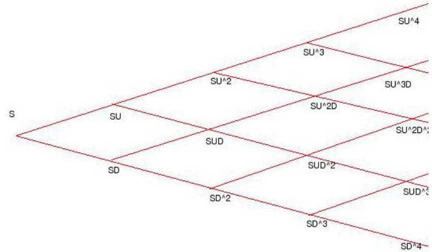
- On utilise des **méthodes numériques**

- Elles consistent à résoudre informatiquement les équations dont les prix d'options sont la solution.

Les méthodes numériques

Deux catégories de méthodes numériques :

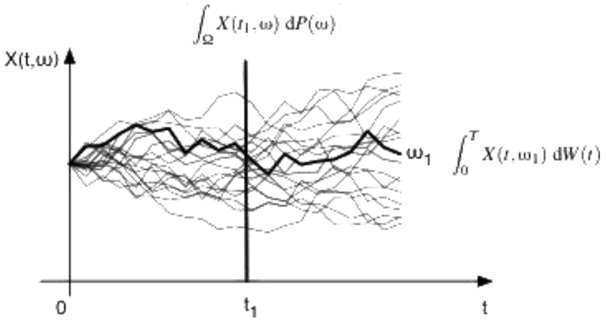
- **Les méthodes *backward***
  - Arbres



  - EDP

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) + \mu(t,x)\frac{\partial v}{\partial x}(t,x) + \frac{1}{2}\sigma(t,x)^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t,x) - r(t,x)v(t,x) = 0$$

- **Les méthodes *forward***
  - *Monte Carlo*



Méthode de Monte Carlo

- Comme on l'a vu dans les 2 modèles précédents, tout prix d'actif financier s'exprime sous forme d'une **espérance mathématique**, calculée sous une mesure de probabilité spécifique appelée *probabilité risque-neutre lorsqu'elle existe.*

- L'**espérance mathématique** peut être estimée à l'aide d'une **moyenne empirique** (*Loi des Grands Nombres*).

  – on simule un grand nombre de **trajectoires** indépendantes de l'actif sous-jacent.

  – Chaque trajectoire fournit une réalisation du **payoff** de l'option

  – Le prix est obtenu comme la **moyenne empirique** des payoffs simulés.

  – Le *Théorème Central Limite* fournit un **intervalle de confiance.**

Méthode de Monte Carlo

Exemple : pricing d'un call par Monte Carlo dans le cadre Black & Scholes.

1. Tirage de N de loi normales centrées réduites indépendantes. $\Rightarrow \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_N$

2. $\Rightarrow S^1_T, S^2_T, \ldots, S^N_T$ = N réalisations correspondantes de S_T :

$$S_T^i = S_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}\varepsilon_i\right), \quad i = 1, \ldots, N$$

3. $\Rightarrow P_1, P_2, \ldots, P_N$ = N réalisations correspondantes du payoff :

$$P_i = \max(S_T^i - K, 0), \quad i = 1, \ldots, N$$

4. Estimation du prix par Monte Carlo :

$$P_{\mathrm{MC}} = e^{-rT}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} P_i$$