Produits de taux / 1ère partie

Calcul actuariel & obligataire

Mars 2016

Antonin Chaix | antonin.chaix@gmail.com

DiFiQ Ensae Dauphine Bärchen

Plan

- **Calcul actuariel**
  - Capitalisation et actualisation
  - Intérêts simples, pré et post comptés, composés…
  - VAN et TRI
  - Prêts/emprunts amortissables, tableaux d’amortissement

- **Calcul obligataire**
  - Caractéristiques des obligations
  - Évaluation et taux de rendement d’une obligation
  - Sensibilité / convexité d’une obligation
  - Cotation des obligations, calcul du coupon couru

Capitalisation

- On parle de « capitalisation » lorsque l’on place une somme d’argent donnée et que l’on réinvestit dans le placement les intérêts perçus.

Capitalisation

- Taux d'intérêt r = 5,00%

$$1000\text{ €} \xrightarrow{\text{1 an}} 1000\text{ € x }(1 + 5\%) \xrightarrow{\text{1 an}} 1000\text{ € x }(1 + 5\%)^2$$

- **Formule générale de capitalisation :**

$$\boxed{V_n = V_0 \times (1 + r)^n}$$

  - V_0 : capital initial
  - r : taux d'intérêt
  - n : durée du placement en années

Capitalisation : exercices

- Je place 1000 € au taux de 5%. Quelle est la valeur acquise par mon placement au bout de 10 ans ?

- Je place la somme de 2000 €. Au bout de 5 ans la valeur acquise par mon placement est 3000 €. Quel est le taux de ce placement?

- Je place une somme d’argent aujourd’hui au taux de 4%. Au bout de combien d’années mon capital aura-t-il doublé ?

- Quelle somme dois-je placer aujourd’hui pour obtenir un placement d’une valeur 1000 euros dans 3 ans, sachant que le taux d’intérêt est 3,5% ?

Actualisation

- Quel montant X dois-je placer aujourd'hui pour obtenir 1 € dans un an ?

- Et donc : $X \times (1 + r) = 1$

➔ **X est la valeur actuelle** de 1 € dans un an

$$X = \frac{1}{1 + r}$$

Actualisation

- La valeur actuelle d'un flux reçu à une date future est la somme que je dois placer aujourd'hui pour obtenir ce flux futur.

- Sachant que le taux d'intérêt *r*, la valeur actuelle du Flux *F* reçu dans *n* années est donc :

$$\boxed{\mathrm{VA} = \frac{F}{(1+r)^n}}$$

Valeur actuelle d'une série de flux futurs

- **Valeur actuelle** d'une série de flux C_1, C_2,…, C_n payés respectivement à la fin des années 1, 2, …, n vaut :

$$VA = \frac{C_1}{(1+r)} + \frac{C_2}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{C_n}{(1+r)^n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{(1+r)^i}$$

Intérêts simples

- L'intérêt est dit simple lorsqu'il est payé en une seule fois et qu'il est proportionnel à la durée du placement.

$$\textbf{Intérêt} = C \times r \times n$$

Avec

C : Le capital ou encore appelé nominal

n : La durée du placement

r : Le taux d'intérêt

pratiqué très couramment sur les marchés financiers lorsque les prêts ou les emprunts sont de courtes durées (1 an ou moins)

Intérêts simples : exercice

- Calculer le montant des intérêts dans le cas d'un emprunt de 1M€

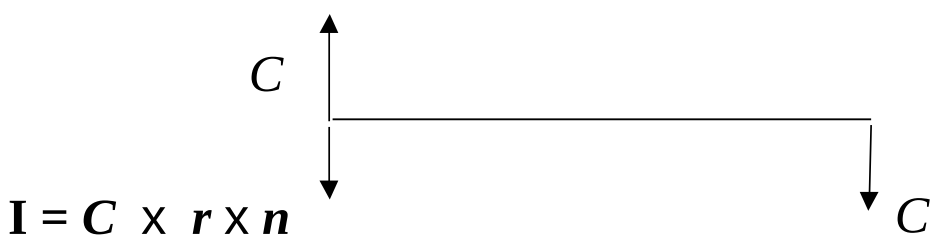
  1) à un taux d'intérêt de 10% annuel sur une durée de 6 mois.

  2) à un taux d'intérêt de 1% mensuel sur une durée de 6 mois.

Intérêts précomptés / postcomptés

- **Il existe deux modes de paiement des intérêts…**
  - Les intérêts ***postcomptés*** (terme échu) :

  - Les intérêts ***précomptés*** (terme à échoir) :



Intérêts précomptés / postcomptés

- Dans le cas d'un emprunt de 1 M€ sur une période de 1 mois à un taux d'intérêt de 5 %, le montant des intérêts est de

1 000 000 x 5 % = 50 000 €

	Intérêts précomptés	Intérêts postcomptés
Flux initial	950 000 €	1 000 000 €
Remboursement	1 000 000 €	1 050 000 €

- **Conclusion** : les deux opérations ne sont pas équivalentes en termes de rentabilité.

Intérêts composés

- Jusqu'à présent on a parlé de taux **composés annuellement**.

- Un placement de 100 € au taux annuel de 10% rapporte à l'issue d'une année la somme de :

$$100\text{ €} \times 1{,}1 = 110\text{ €}$$

- Si la composition des intérêts est semestrielle, le taux annuel de 10% correspondra proportionnellement à un taux de 5% pour 6 mois. Dans ce cas on obtient, à l'issue d'un an, la somme :

$$100\text{ €} \times 1{,}05 \times 1{,}05 = 110{,}25\text{ €}$$

Intérêts composés

- On peut généraliser à une fréquence de composition quelconque :

- Comme on l'a vu un montant ***S*** investi pendant ***n*** années au taux annuel ***r*** donne, si la composition est annuelle :

$$S \times (1+r)^n$$ à l'issue des ***n*** années.

- Si la composition des intérêts a lieu ***m*** fois par an, le résultat est :

$$S \times \left(1+\frac{r}{m}\right)^{n\times m}$$

Intérêts composés

Fréquence de composition	**Valeur de 100 € à la fin de l'année**
Annuelle (*m* = 1)	110,00
Semestrielle (*m* = 2)	110,25
Trimestrielle (*m* = 4)	110,38
Mensuelle (*m* = 12)	110,47
Hebdomadaire (*m* = 52)	110,51
Journalière (*m* = 365)	110,52

Intérêts composés

- **Composition en continu** : quand ***m*** tend vers l'infini, le résultat du placement au bout de ***n*** années est :

$$\boldsymbol{S} \times e^{\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{n}}$$

- **Exemple précédent :**

$$\mathbf{100\ €} \times \mathbf{e^{0,1} = 110,52\ €}$$

(très proche de la composition journalière)

Intérêts composés

- Le taux continu r_c équivalent à un taux r_m composé m fois est tel que :

$$S e^{n r_c} = \left(1 + \frac{r_m}{m}\right)^{nm}$$

- Soit :

$$\frac{r_c}{m} = \ln\left(1 + \frac{r_m}{m}\right)$$

- Inversement :

$$\frac{r_m}{m} = e^{\frac{r_c}{m}} - 1$$

Valeur Actuelle Nette (VAN)

- **Rappel** : La valeur actuelle d'une séquence de flux $(F_0,\ldots,F_n)$ actualisée au taux r est égale à :

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{F_i}{(1+r)^i}$$

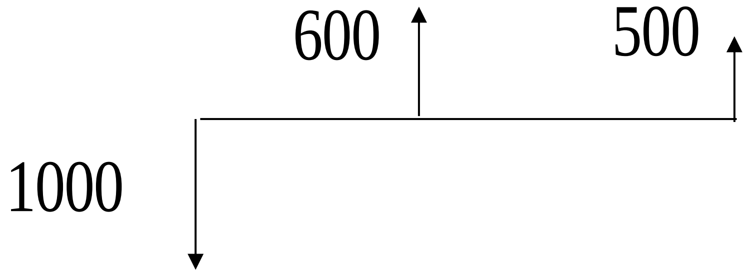
- Cette somme représente le prix à payer aujourd'hui pour avoir droit aux flux présents et futurs.

- Dans le cadre des investissements, et donc avec des flux positifs (reçus) et négatifs (payés) on parle de ***Valeur Actuelle Nette (VAN)***

$$\boxed{\mathrm{VAN} = \sum_{i=0}^{n} \frac{F_i}{(1+r)^i}}$$

VAN : exercice

- **Calculons la VAN de l'investissement suivant :**
  - Investissement initial de 1 000 €
  - 600 € d'encaissements la première année
  - 500 € la deuxième année.
  - Le taux qui prévaut sur le marché est égal à 3 %.



VAN : exercice

- Réponse :

$$V_{act}=\sum_{j=0}^{n}\frac{Fj}{(1+i)^{j}}=-1000+\frac{600}{(1+3\%)^{1}}+\frac{500}{(1+3\%)^{2}}=53.82€(gain)$$

Taux de Rendement Interne (TRI)

- Une opération financière quelconque se traduit par des flux financiers (dépenses et recettes).

- Le « TRI » est le taux d'actualisation R qui rend nulle la VAN de l'investissement :

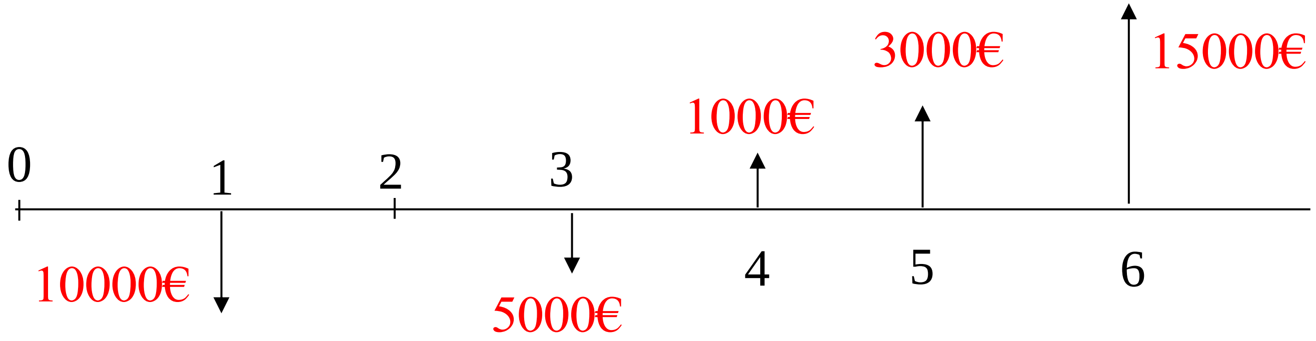
$$\sum_{i=0}^{n} \frac{F_i}{(1+R)^i} = 0$$

- NB : Il permet donc l'égalité entre la valeur actuelle des sommes reçues et la valeur actuelle des sommes versées :

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{\text{Dépenses}_i}{(1+R)^i} = \sum_{i=0}^{n} \frac{\text{Recettes}_i}{(1+R)^i}$$

Taux de Rendement Interne (TRI)

- **Exercice**
  - Soit un investissement générant les dépenses et recettes suivantes:



  - **Quel est le TRI de l'opération ?**

Taux de Rendement Interne (TRI)

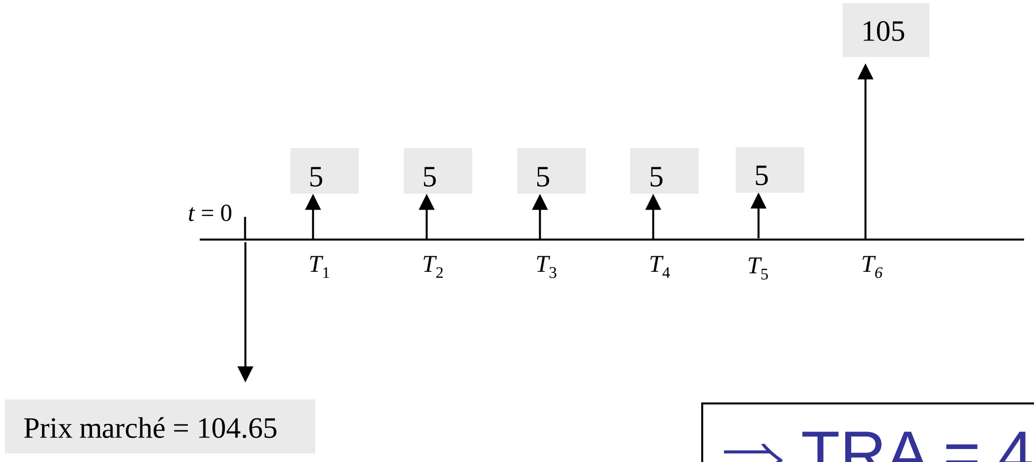
Réponse…

- Après résolution sous Excel : **R = 5.95%**

Application du TRI : TRA d'une obligation

- Le **taux de rendement actuariel** d'une obligation est le taux avec lequel il faut actualiser les flux de l'oblig pour retomber sur son prix de marché

- C'est le TRI de l'investissement consistant à acheter l'obligation et à recevoir tous ses flux futurs



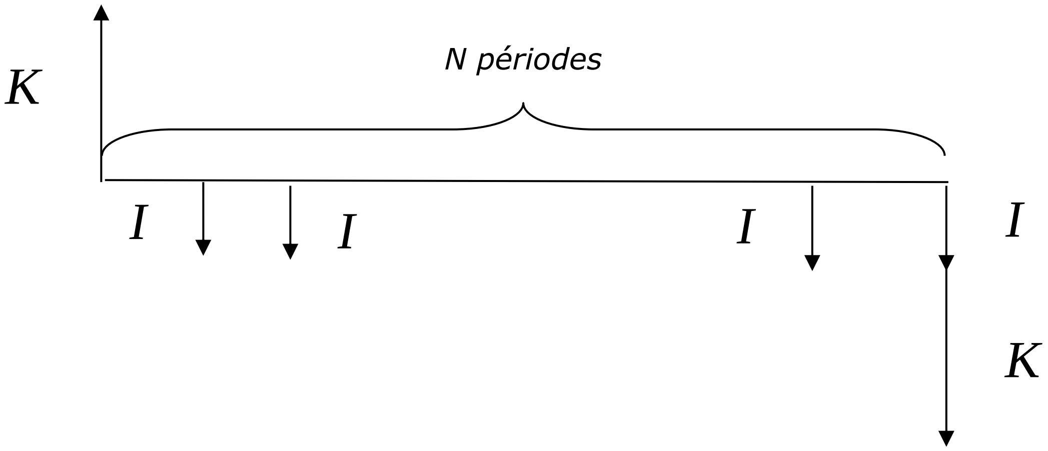
$\Rightarrow$ TRA = 4,11%

Prêts / emprunts : Les différents types d'amortissement

- Amortissement « in fine »
- Amortissement par annuités constantes
- Amortissement par tranches égales (amortissement constant)
- Tableau d'amortissement

Amortissement *in fine*

- Le remboursement du capital d'un emprunt s'effectue en une seule fois en fin de contrat.
- Le montant de l'intérêt versé à chaque échéance prévue par le contrat est égal au montant emprunté multiplié par le nominal.



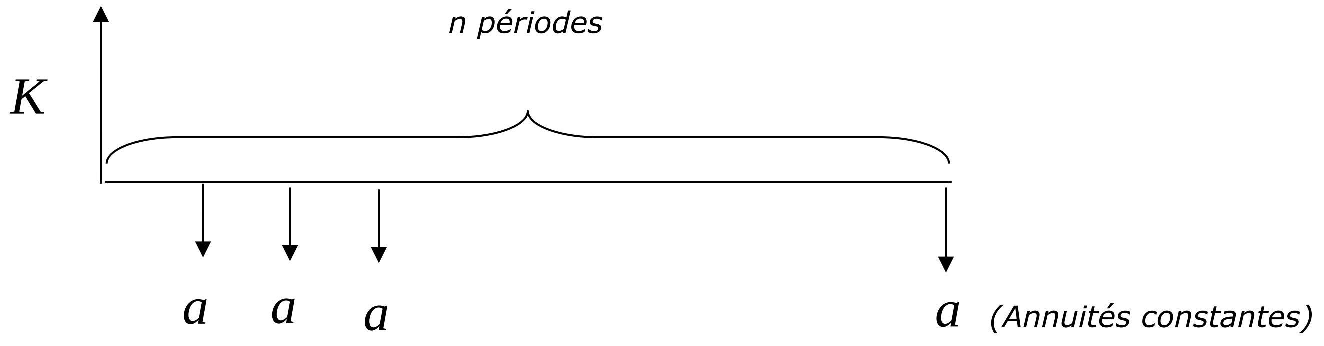
Avec **K** : capital emprunté

I : montant d'intérêt versé à chaque échéance, égal au taux nominal appliqué au capital emprunté ***K***.

Amortissement par annuités constantes

- Chaque versement effectué dans le cadre d'un prêt amortissable contient non seulement des intérêts mais également une partie du capital amorti.

- **Annuités constantes :** L'emprunteur paie une même somme à chaque échéance.



Amortissement par annuités constantes

- L'annuité constante se calcule en écrivant que le capital que je perçois aujourd'hui est égal à la valeur actuelle des annuités futures que j'aurai à payer :

$$K = \frac{a}{1+r} + \frac{a}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{a}{(1+r)^n} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a}{(1+r)^j}$$

- D'où l'annuité constante :

$$a = \frac{K}{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(1+r)^j}} = \frac{K \times r}{1-(1+r)^{-n}}$$

Amortissement par annuités constantes

Exercice 1

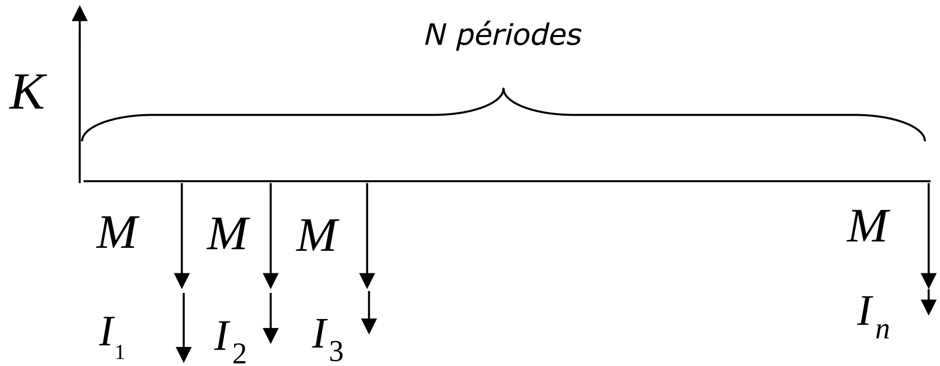
- **Soit un emprunt de 1 M€ sur 10 ans au taux de 4,15 % et remboursé par annuités**
- Quelle est l'annuité constante à payer?
- Quelle est la part d'intérêts et de capital remboursé chaque année?

Exercice 2

- **Soit un emprunt immobilier sur 15 ans au taux de 3.75% et remboursé par mensualités**
- Quel est le montant des mensualités ?
- Construire le tableau d'amortissement

Amortissement par tranches égales

- **Principe :** le montant du capital remboursé à chaque échéance est constant



Avec :

K capital emprunté

M Montant du capital amorti à chaque période (K/n)

I_j montant d'intérêt dû au titre de l'échéance j,

$$I_j = i \times K \times \frac{n-j+1}{n}$$

Amortissement par tranches égales

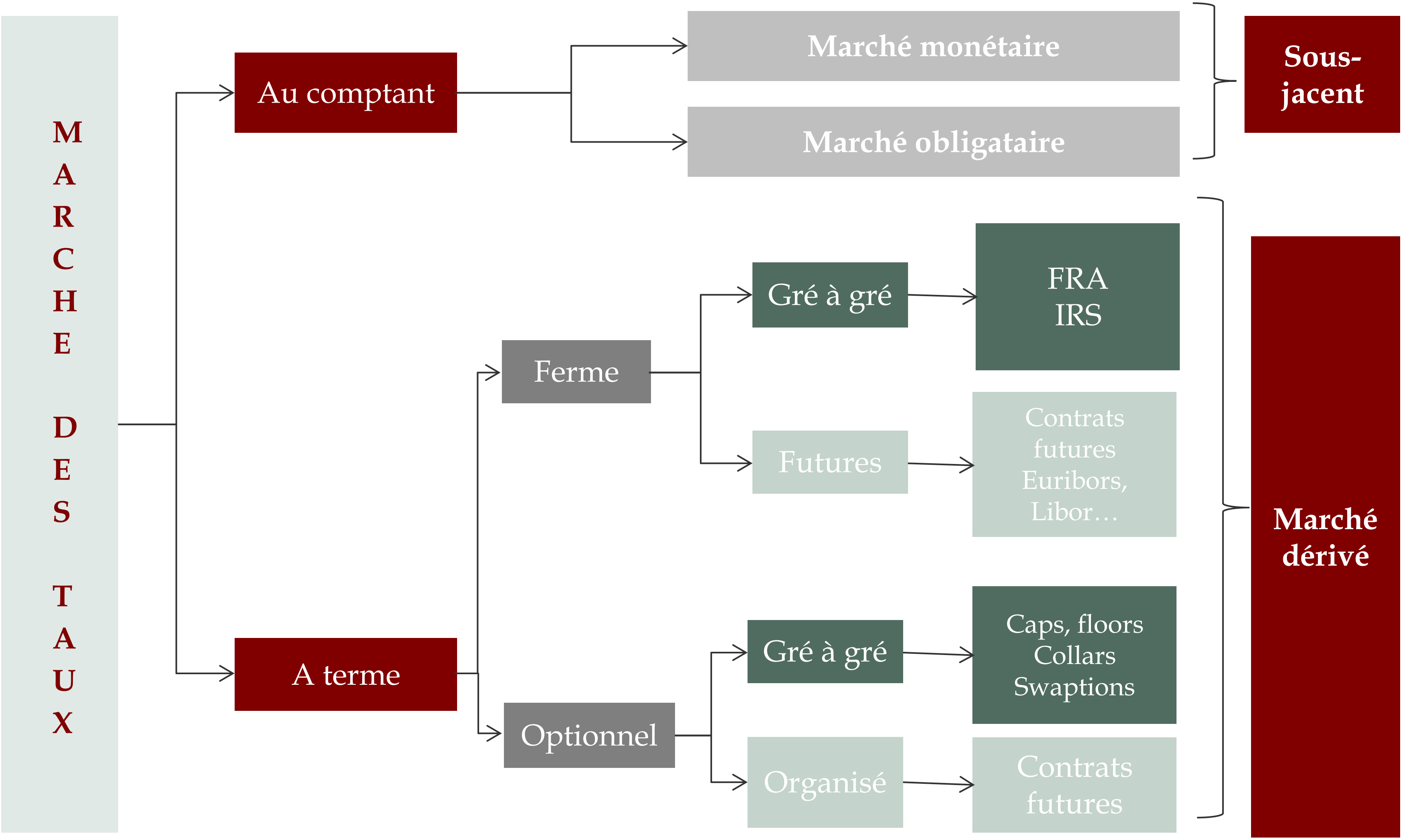
Exercice

- Soit un emprunt de 1 M€ sur 5 ans au taux de 5%.
- Tableau d'amortissement?

Calcul obligataire

Pricer les obligations et appréhender leur risque de taux

Marché des taux



Les obligations

- Une obligation est une **part de dette**

- C'est une **valeur mobilière** au même titre que les actions : son prix dépend de l'offre et de la demande

- Elle peut être **émise** par:
  - Les états
  - Les organismes supra-nationaux (Banque Mondiale, BERD,etc…)
  - Les entreprises publiques, para-publiques, privées
  - Les banques
  - Les collectivités locales et territoriales

- C'est un titre à revenus fixes

Obligations vs. actions

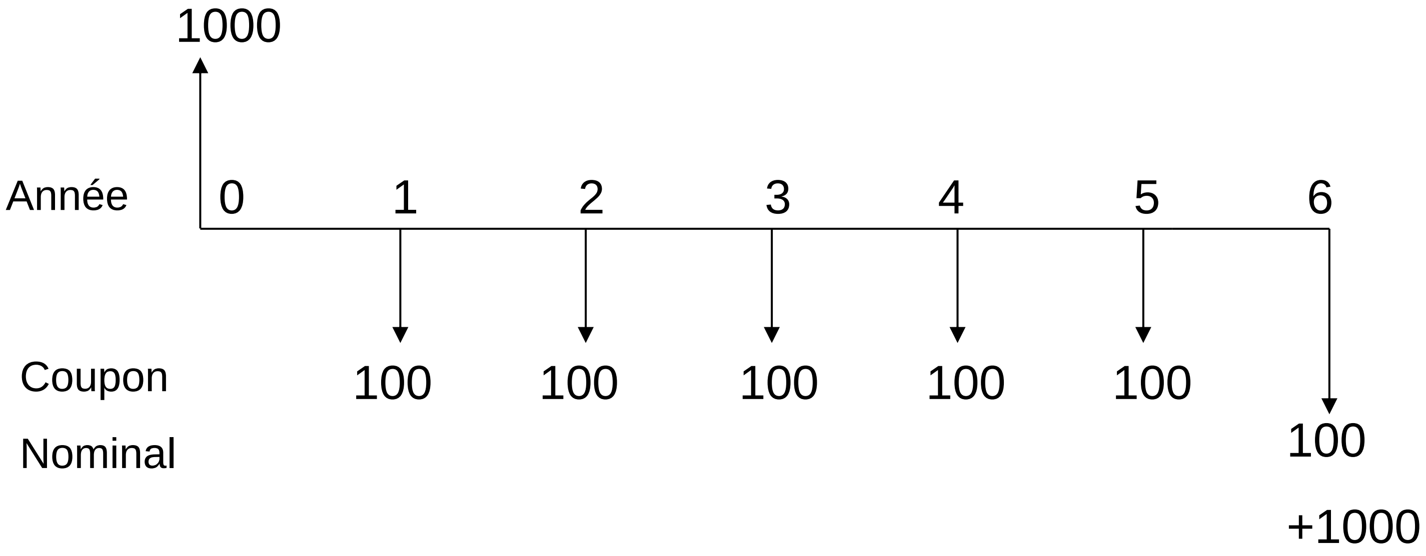
	Action	**Obligation**
Nature juridique	Part d'associé	Part de dette
Nature des revenus	Dividende fonction des résultats de l'entreprise	Intérêts fixes
Risque	Elevé	Faible

Les obligations : caractéristiques

- Valeur nominale
- Date d'échéance
- Taux nominal
- Prix d'émission
- Prix de remboursement
- Périodicité

Les obligations : exemple

- **Cash-Flows** d'une obligation de maturité 6 ans, de nominal 1000 € et de taux nominal 10%



Autres types d'obligations

- **Obligations indexées :** taux nominal variable (révisable)
  - **L'OAT TEC10 :** taux déterminé à partir de l'observation du tauxde rendement des emprunts d'états à 10 ans
  - **L'OATi :** OAT indexée sur l'inflation

- **Obligations hybrides,**
  - Obligations Remboursables en Actions (ORA)
  - Obligations convertibles (OC)

Déterminants des prix obligataires

- **Deux principaux facteurs :**
  - Niveau des taux d'intérêt :
    - ✓ quand les taux montent le prix des obligations baisse
    - ✓ quand les taux baissent, le prix des obligations augmente
  - Qualité de la signature ou *rating*
    - ✓ Quand le rating de l'émetteur se dégrade le prix de ses obligations baisse
    - ✓ Quand le rating de l'émetteur s'apprécie le prix de ses obligations augmente

- Mais aussi :
  - Liquidité
  - Fiscalité
  - Mode de remboursement
  - …

Évaluer les obligations

Exemple.

Obligation ordinaire de nominal 100 €, de maturité 4 ans et de taux facial 4%.

- Flux reçus par le titulaire de l'obligation à la fin de chaque année :

Année 1 : 4 €

Année 2 : 4 €

Année 3 : 4 €

Année 4 : 104 € = 100 € (nominal) + 4 € (dernier coupon)

Évaluer les obligations

- On se donne les taux zéro-coupon du marché

Echéance	**Taux zéro-coupon**
1 an	4,10%
2 ans	4,96%
3 ans	5,65%
4 ans	6,07%

- Valeur de l'obligation :

$$VA = 4 \times FA(1) + 4 \times FA(2) + 4 \times FA(3) + 104 \times FA(4)$$

$$VA = \frac{4}{1.0410} + \frac{4}{1.0496^2} + \frac{4}{1.0565^3} + \frac{104}{1.0607^4} = 93.02$$

Les obligations: page de cotation

- Bloomberg : page de cotation d’obligations d’état US

<HELP> for explanation. N200 Govt

ENTER # <GOVT> <GO> TO SELECT SECURITY

GOVERNMENT SECURITIES Page 13of 14

	SECURITY				BID	ASK	YTM	DUR	RISK	PSRC
1)	US TREASURY N/B	8 7/8	11/15/98							
2)	US TREASURY N/B	8 7/8	2/15/99							
3)	US TREASURY N/B	8 7/8	5/15/00							
4)	US TREASURY N/B	8 7/8	8/15/17		135-17	135-19	5.49	9.80	12.99	BGN
5)	US TREASURY N/B	8 7/8	2/15/19		137-2+	137-4+	5.53	10.34	13.85	BGN
6)	US TREASURY N/B	9	5/15/98							
7)	US TREASURY N/B	9	11/15/18		138-8	138-10	5.52	10.06	13.82	BGN
8)	US TREASURY N/B	9 1/8	5/15/99							
9)	US TREASURY N/B	9 1/8	5/15/09		112-5	112-6+	7.04	5.68	6.31	BGN
10)	US TREASURY N/B	9 1/8	5/15/18		139-3+	139-5+	5.51	9.87	13.63	BGN
11)	US TREASURY N/B	9 1/4	8/15/98							
12)	US TREASURY N/B	9 1/4	2/15/16		137-24+	137-26+	5.43	9.15	12.33	BGN
13)	US TREASURY N/B	9 3/8	2/15/06		119-13	119-14	4.50	3.78	4.44	BGN
14)	US TREASURY N/B	9 7/8	11/15/15		143-27	143-29	5.40	8.80	12.59	BGN
15)	US TREASURY N/B	10	5/15/10		118-12	118-13+	7.12	6.09	7.14	BGN
16)	US TREASURY N/B	10 3/8	11/15/09		117-17	117-18+	7.46	5.77	6.72	BGN
17)	US TREASURY N/B	10 3/8	11/15/12		128-21	128-23	6.69	7.23	9.23	BGN
18)	US TREASURY N/B	10 5/8	8/15/15		150-27	150-29	5.39	8.72	12.87	BGN
19)	US TREASURY N/B	10 3/4	2/15/03		109-27	109-28	3.65	1.37	1.49	BGN
20)	US TREASURY N/B	10 3/4	5/15/03		111-12+	111-13+	3.71	1.55	1.75	BGN
21)	US TREASURY N/B	10 3/4	8/15/05		122-15	122-16	4.46	3.37	4.06	BGN

Taux de rendement actuariel d'une obligation

- Le **TRA** d'une obligation n'est rien d'autre que le TRI de l'investissement que représente l'achat d'une obligation

- **Exemple** :
  - Obligation de maturité 3 ans et de taux facial 4%.
  - Le TRA de cette obligation est le taux ***r*** tel que

$$\mathrm{VA}_{\text{marché}} = \frac{4}{1+r} + \frac{4}{(1+r)^2} + \frac{104}{(1+r)^3}$$

Exercice : calculer le TRA pour $\mathrm{VA}_{\text{marché}} = 95.73$

Taux de rendement actuariel d'une obligation

Réponse

- Le TRA de cette obligation est le taux r tel que :

$$95.73 = \frac{4}{1+r} + \frac{4}{(1+r)^2} + \frac{104}{(1+r)^3}$$

➔ on trouve r = 5,21%
(utiliser la fonctionnalité valeur cible d'Excel)

Taux de rendement actuariel : propriété

- Obligation ordinaire de nominal 100, prise à une date anniversaire (ou date d'émission)

- Si le prix de marché de l'obligation est égal à son nominal 100 alors :

  TRA = **Taux nominal de l'obligation**

- On dit que l'obligation est ***au pair***

Taux de rendement actuariel : propriété

- Si l’obligation a un prix de marché supérieur à son nominal alors :

  ➔ TRA < taux nominal

  L’obligation est *au dessus du pair*

- Si l’obligation a un prix de marché inférieur à son nominal alors :

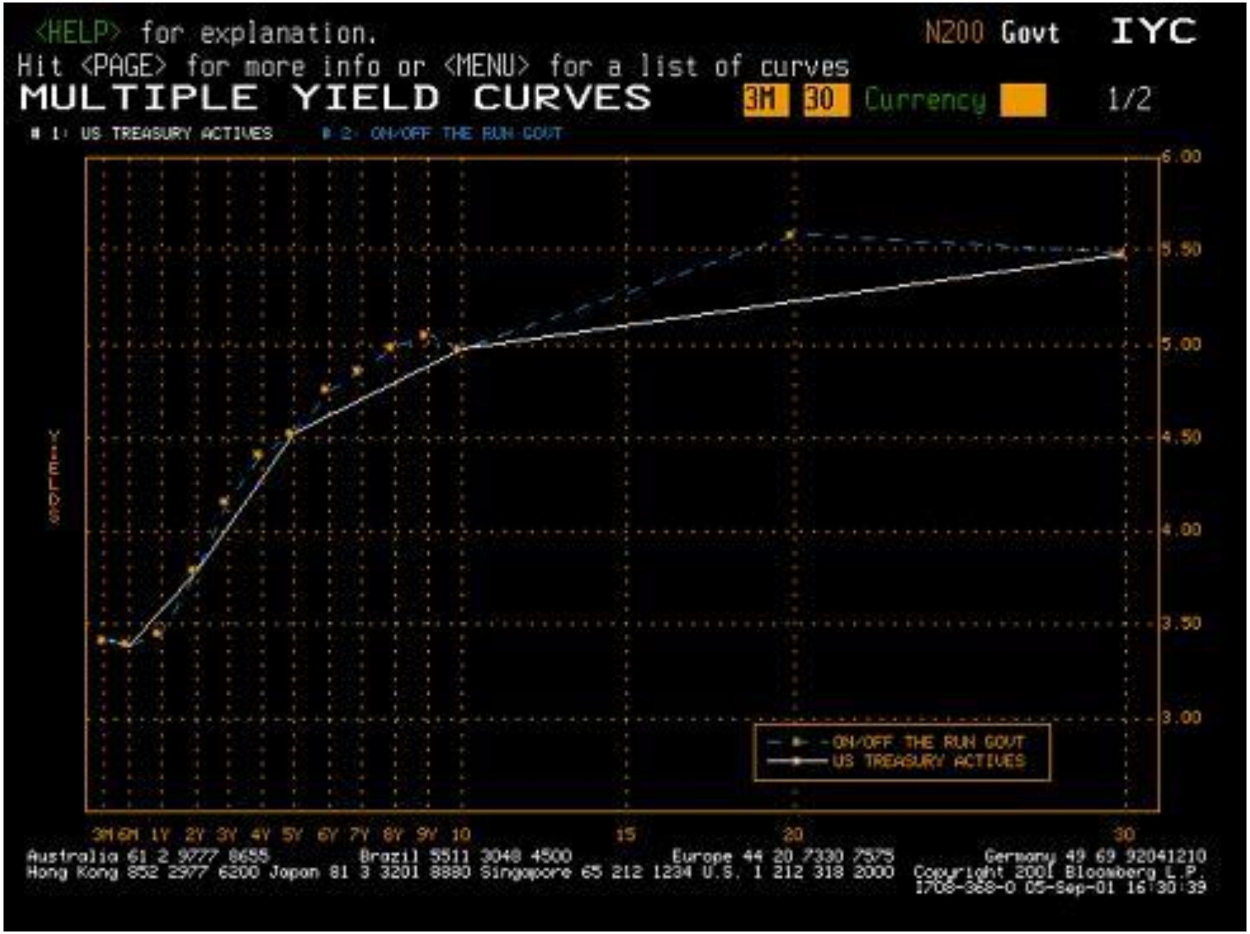
  ➔ TRA > taux nominal

  L’obligation est *en dessous du pair*

Taux de rendement actuariel : propriété

Obligation	**Prix**	**Taux**
En dessous du pair	Prix < Valeur nominale	TRA > Taux nominal
Au pair	Prix = Valeur nominale	TRA = Taux nominal
Au dessus du pair	Prix > Valeur nominale	TRA < Taux nominal

Courbe des rendements obligataires



Bloomberg : courbe des rendements obligataires sur les emprunts d'état américains

Sensibilité d'une obligation

- La sensibilité est une grandeur que l'on calcule pour appréhender la dépendance du prix d'une obligation vis à vis des taux d'intérêt.

Plus précisément :

- Prenons une obligation cotée sur le marché. Son prix observé correspond à un taux de rendement actuariel.

- **La sensibilité de l'obligation est la variation relative du prix de l'obligation lorsque le TRA bouge de 1%.**

Sensibilité d'une obligation

- Par exemple : une sensibilité de 4 signifie que si le TRA augmente (baisse) de 1%, le prix de l'obligation baissera (augmentera) de 4%.

- La formule permettant d'obtenir la sensibilité s'obtient à partir de la dérivée mathématique du prix de l'obligation par rapport au TRA. Nous admettrons ici la formule.

- Considérons une obligation délivrant des flux F_i à la fin de chaque année i, et ce pendant n années. Typiquement : les flux F_i sont égaux au coupon de l'obligation, sauf F_n, qui vaut nominal + dernier coupon.

Sensibilité d'une obligation

- Prix ***P*(*r*)** de l'oblig en fonction du TRA ***r*** :

$$P(r) = \sum_{i=1}^{n} \frac{F_i}{(1+r)^{T_i}}$$

- La sensibilité ***S*(*r*)** est :

$$S(r) = -\frac{P'(r)}{P(r)} = \frac{1}{P(r)} \sum_{i=1}^{n} \frac{T_i \times F_i}{(1+r)^{T_i+1}}$$

- **NB** : grâce au signe négatif, les valeurs de sensibilité sont positives. Mais gardons bien à l'esprit que le prix des obligations varie dans le sens opposé à celui du taux d'intérêt.

Sensibilité d'une obligation

- Prenons une obligation de maturité 3 ans, versant un coupon de 5%, et évaluée avec un TRA de 4,23%.
- Son prix est :

$$P = \frac{5}{(1+0.0423)} + \frac{5}{(1+0.0423)^2} \frac{105}{(1+0.0423)^3} = 102.13$$

Sensibilité d’une obligation

- D’après la formule, sa **sensibilité** sera :

$$S = \frac{1}{102.13} \times \left(\frac{1 \times 5}{(1+0.0423)^2} + \frac{2 \times 5}{(1+0.0423)^3} \frac{3 \times 105}{(1+0.0423)^4} \right) = 2.74$$

- Ce qui veut dire que si le TRA augmente de 1%, l’obligation verra son prix baisser de 2,74%. En montant absolu, cela correspond donc à une variation de prix de 102,13 x 2,74%, soit environ 2,80 €.

- La sensibilité est à comprendre comme l’*élasticité* du prix de l’obligation par rapport au TRA.

Duration

- C'est une mesure alternative de la dépendance du prix d'une obligation vis à vis des taux.

- La **duration d'une obligation** est définie à partir de sa sensibilité :

$$D(r) = S(r) \times (1+r) = \frac{1}{P(r)} \sum_{i=1}^{n} \frac{T_i \times F_i}{(1+r)^{T_i}}$$

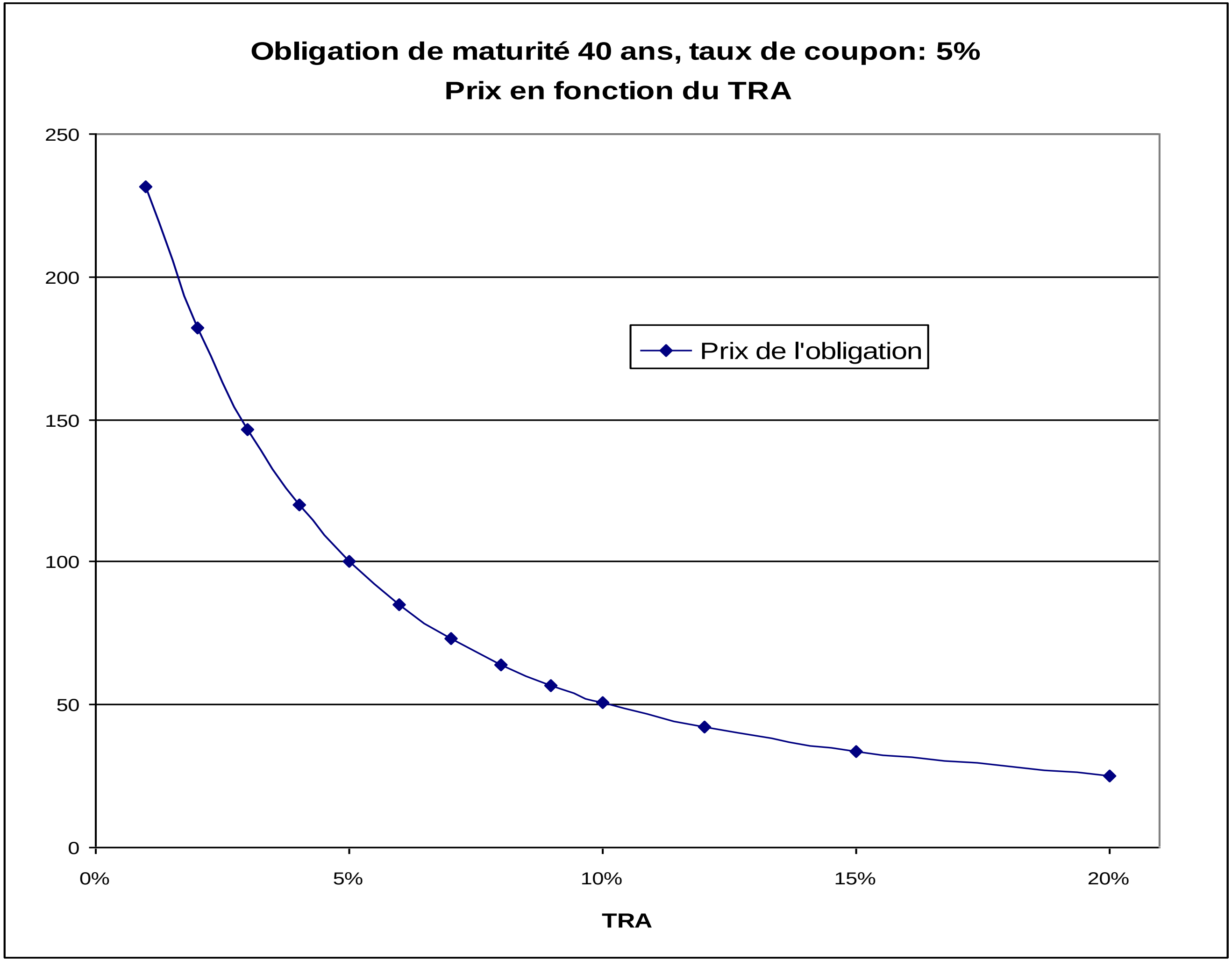
- Interprétation ?

Convexité d’une obligation

- La convexité permet d’appréhender plus finement la dépendance du prix des obligations vis à vis des taux.

- Le prix d’une obligation ne dépend pas linéairement de son TRA. En pratique ce prix est une fonction convexe du TRA, comme le montre le graphique suivant.

Convexité d'une obligation



Convexité d'une obligation

- Cette convexité a une conséquence directe en terme de variation de prix de l'obligation : en valeur absolue, la variation de prix de l'obligation est plus faible si les taux montent de 1% que s'ils baissent de 1%.

- Cela est très clair sur l'obligation de longue maturité de notre graphique. On considère que les conditions initiales sont un TRA de 4%. Si celui-ci baisse à 3%, le prix de l'obligation progresse de 26,44, alors que si le TRA monte à 5%, le prix de l'obligation ne baisse que de 19,79 :

TRA	Prix	Variation
4%	**119,79**	-
3%	146,23	26,44
5%	100	-19,79

Convexité d’une obligation

- La convexité se mesure au moyen de la dérivée seconde du prix de l’obligation :

$$C(r) = \frac{P''(r)}{P(r)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{T_i \times (T_i + 1) \times F_i}{(1+r)^{T_i+2}}$$

Sensibilité, duration, convexité : quelques propriétés

- La sensibilité d’une obligation est d’autant plus élevée que sa maturité est grande.
- La sensibilité d’une obligation est d’autant plus élevée que son coupon est petit.
- La duration d’une obligation zéro-coupon est égale à sa maturité
- La sensibilité d’une obligation zéro-coupon est assez proche de sa maturité
- La sensibilité d’une obligation est d’autant plus grande que les taux sont bas

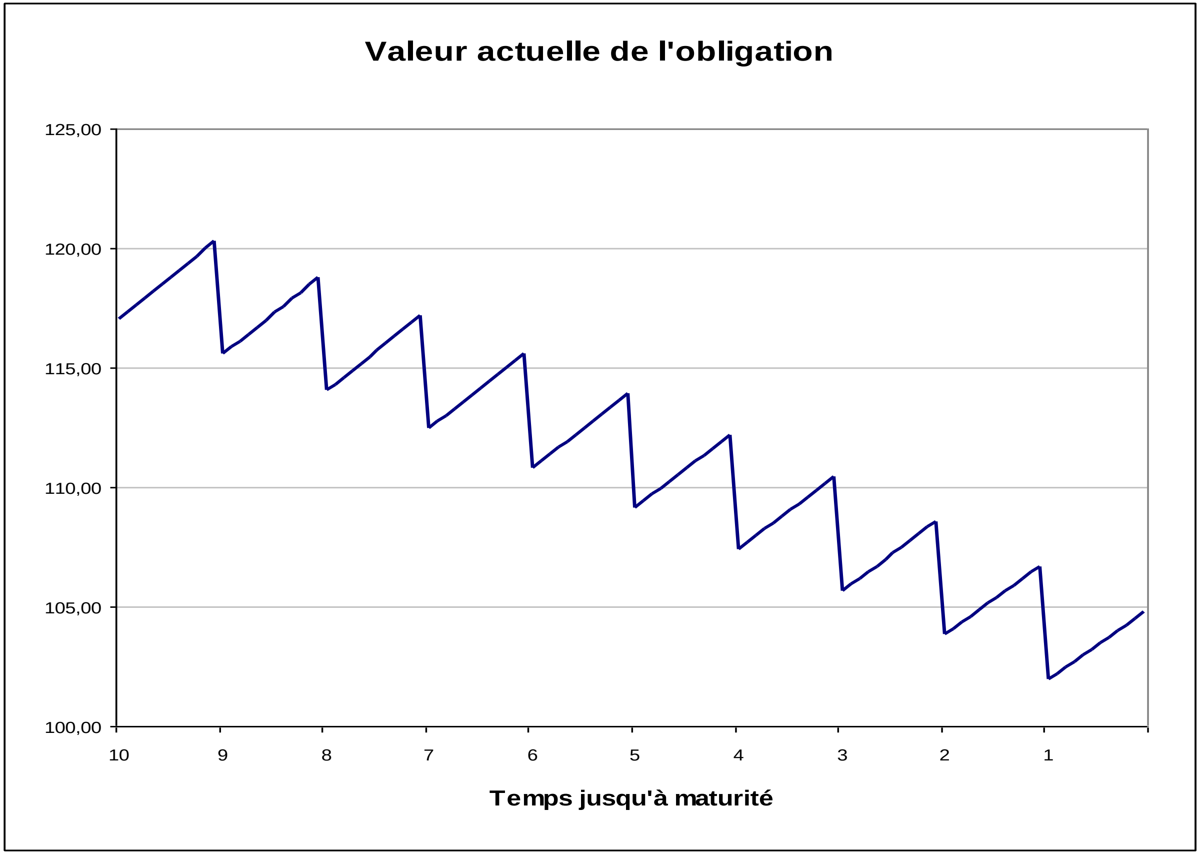
Cotation des obligations

- La valeur actuelle d'une obligation telle que calculée jusqu'à maintenant **présente un saut** à la date de versement de coupon.

- Plus on approche de la date de versement de coupon, plus le prix intègre le montant dudit coupon. Cette valeur est **brusquement perdue** dès le coupon versé.

Cotation des obligations

- *Valeur actuelle d'une obligation de maturité initiale 10 ans (taux nominal : 5%) en fonction du temps restant jusqu'à maturité (TRA constant : 3%)*



Cotation des obligations

- On a donc pris l'habitude de décomposer artificiellement la valeur actuelle de l'obligation en :
  - **Cours**, dit aussi « **Prix pied de coupon** »
  - **Coupon couru**

- Autrement dit, le prix « pied de coupon » s'obtient en soustrayant à la valeur actuelle le « **coupon couru** », c'est à dire l'effet *pro-rata temporis* du prochain coupon.

- Ce faisant, on obtient un **cours** (« prix pied de coupon ») beaucoup plus régulier. Ce cours apparent facilite les comparaisons de prix d'une obligation à l'autre.

Cotation des obligations

Cotation des obligations

A bien retenir:

- Sur le marché il est d'usage de coter une obligation via son « **prix pied de coupon** » (appelé aussi « **cours** » ou « **clean price** »)

- Le prix auquel on échange vraiment l'obligation est bien sûr sa **valeur actuelle** (appelée aussi « **dirty price** », « **all-in-one price** ») qui s'obtient donc comme : **Cours** + **Coupon couru**.

Calcul du coupon couru

- Le coupon couru est calculé via un *prorata temporis* et s'exprime en pourcentage du nominal, concrètement :

Coupon couru = Taux Nominal x (*n* / *N*)

- ***n*** = nbre de jours écoulés entre le début de la période d'intérêt et la date de la transaction

- ***N*** = nbre de jours total de la période d'intérêt

Coupon couru : exercice

Nous sommes le **30 mars 2010**. Je souhaite acheter une obligation de maturité le **18 mai 2015** et de taux nominal **5,50%**.

Son cours (« prix pied de coupon ») est **102.25**

1. Combien dois-je débourser pour acquérir cette obligation?

2. Quel est son taux de rendement actuariel ?

Coupon couru : exercice (suite)

- **Calcul du coupon couru :**

  CC = 5,50 x (n / N)

  Avec :

  n = 316 (nbre de jours entre le 18/05/2009 et le 30/03/2010)

  N = 365 (nbre de jours entre le 18/05/2009 et le 18/05/2010)

  D'où **CC = 4,76**

- **Prix d'achat (« dirty price ») =** 102,25 + 4,76 **= 107,01**

- **TRA =** taux d'actualisation pour retrouver un prix de 107,01

- On trouve **TRA = 4,99%**

Obligations : quelques exercices

- **Exercice 1**

  On considère une obligation zéro coupon de maturité 10 ans et de nominal 10 000 €. Si le taux zéro-coupon de maturité 10 ans est de 6%, quelle est le prix de cette obligation ?

- **Exercice 2**

  Une obligation zéro-coupon de maturité 8 ans a sur le marché un prix de 65.16. Quel est son taux de rendement actuariel ?

- **Exercice 3**

  Dans les condition actuelles du marché, une obligation de maturité 4 ans et de taux nominal 7%, a un taux de rendement actuariel de 6%. Quel est son prix de marché ?

Obligations : quelques exercices

- **Exercice 4**

  On suppose connus les taux zéro-coupons pour les maturités de 1 à 3 ans. Ils ont par exemple pu être déterminés par l'observation des prix de marché d'obligations zéro-coupon :

Echéance	Taux zéro-coupon
1 an	4,26%
2 ans	5,15%
3 ans	6,10%

  Quel serait le prix d'une obligation de maturité 3 ans et de taux nominal 8% ? En utilisant Excel, déterminer son taux de rendement actuariel

  Si l'on suppose à présent que le taux nominal de notre obligation est de 4%, quel serait son prix et son taux de rendement actuariel ?

Obligations : quelques exercices

- **Exercice 5**

  En réutilisant les taux zéro-coupon précédents, quel est le prix d'une obligation de maturité 2 ans et de taux nominal 6%, s'il y a une prime de remboursement égale à 20% du nominal ?

- **Exercice 6**

  En réutilisant les taux zéro-coupon précédents, quel serait le prix d'un titre payant 10 € à la fin de l'année 1, 20 € à la fin de l'année 2 et 30 € à la fin de l'année 3 ?

Obligations : quelques exercices

- **Exercice 7**

  Nous sommes le 3 octobre 2009.

  On considère une obligation émise le 11 avril 1996, d'échéance le 11 avril 2015 et payant un taux nominal de 5%.

  Le taux de rendement actuariel de cette obligation est de 4.2%.

  Quel est le cours de cette obligation ? Combien dois-je débourser si je souhaite l'acheter ?