Modélisations avancées, produits et risques exotiques

Novembre – décembre 2016

Antonin Chaix

Programme

1. **Introduction**
   - Rappels utiles sur les vanilles
   - Qu’est ce qu’une option exotique?
   - Principaux risques liés aux exotiques
   - Options les plus populaires suivant le marché (taux / change / equity)

2. **Panorama des options exotiques**
   - Options américaines
   - Options digitales
   - Options à barrière
   - Options à départ forward
   - Options sur spread
   - Options « best of » et « worst of »
   - Options « lookback »
   - Options asiatiques
   - Options quantos

Programme (suite)

3. **Modèle binomial / pricing par arbre des options américaines**
   - Modèle binomial à 1 période
   - Modèle binomial à n périodes

4. **Monte Carlo et pricing des options *path-dependent***
   - Loi des Grands Nombres et Théorème Central Limite
   - Génération des lois uniformes / gaussiennes
   - Pricing call / call barrières / digitales et autres exemples
   - Techniques de réduction de variance
   - Cas de plusieurs actifs corrélés

5. **Au delà de Black & Scholes**
   - Modèle à volatilité locale, formule de Dupire
   - Modèles à volatilité stochastique

Quelques rappels utiles….

L'hypothèse d'A.O.A.

- L'hypothèse d'**A**bsence d'**O**pportunités d'**A**rbitrages (A.O.A) signifie que sur les marchés, on ne peut pas gagner de l'argent à coup sûr sans prendre de risques

- **Un arbitrage** = un portefeuille de valeur nulle aujourd'hui et de valeur future positive et strictement positive avec une proba non nulle. Formellement : $X_0 = 0$, $X_T \geq 0$ et $\mathbf{P}(X_T > 0) > 0$.

- L'hypothèse d'A.O.A implique que de tels portefeuilles n'existent pas sur le marché.

- L'A.O.A. implique que deux portefeuilles de valeurs finales identiques ont la même valeur aujourd'hui.

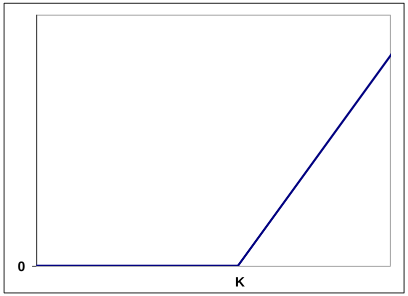
Call européen

- Un **call** européen est une **option d'achat**

- Son détenteur a la possibilité, mais pas l'obligation, d'**acheter** un actif *S* à une date future (*maturité* ou *échéance*) et à un prix fixé à l'avance (*prix d'exercice* ou *strike*).

- **Stratégie d'exercice** : exercer si à maturité le cours de l'actif est **supérieur** au strike.

- **Payoff** : $\max(S_T - K, 0)$, encore noté $(S_T - K)^+$



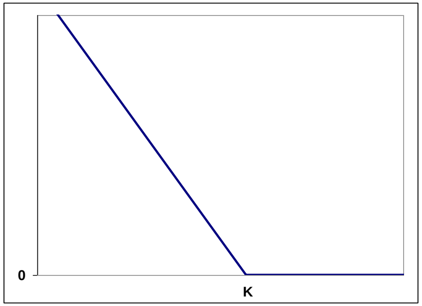
Put européen

- Un **put** européen est une **option de vente**

- Son détenteur a la possibilité, mais pas l'obligation, de **vendre** un actif *S* à une date future (*maturité* ou *échéance*) et à un prix fixé à l'avance (*prix d'exercice* ou *strike*).

- **Stratégie d'exercice** : exercer si à maturité le cours de l'actif est **inférieur** au strike.

- **Payoff** : **max** $(K - S_T, 0)$, encore noté $(K - S_T)^+$



DiFiQ Ensae Dauphine Bärchen

Propriétés des calls et puts européens

L'A.O.A. implique :

- Prix du call < cours de l'actif sous-jacent : $C_0 \leq S_0$
- Prix du put < strike actualisé : $P_0 \leq K\ B(0,T)$
- Parité call-put : $C_0 - P_0 = S_0 - K\ B(0,T)$

Déterminants des prix d’options

Variable	**Call**	**Put**
Cours de l'action	+	–
Prix d'exercice	–	+
Temps jusqu'à l'échéance	+	+
Volatilité	+	+
Tx sans risque	+	–
Dividendes	–	+

Modèle de Black & Scholes

- Le modèle de Black & Scholes spécifie la dynamique de l'actif sous-jacent sous la forme d'un processus log-normal (appelé aussi *brownien géométrique*)

- Cela implique que les rendements de l'actif sont gaussiens

- Mathématiquement : $$\frac{dS_t}{S_t} = r dt + \sigma dW_t$$

- Qui s'intègre en : $$S_T = S_0 e^{\left(r - \sigma^2/2\right)T + \sigma W_T}$$

- W_T est la valeur en T du mouvement brownien : il suit donc une loi normale de variance T.

Formule de Black & Scholes

- Dans le cadre du modèle de Black & Scholes on dispose d'une formule exacte pour le prix du call et du put européens :

$$C = S_0 \mathcal{N}(d_1) - K e^{-rT} \mathcal{N}(d_2)$$

$$P = K e^{-rT} \mathcal{N}(-d_2) - S_0 \mathcal{N}(-d_1)$$

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad \text{et} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

$\mathcal{N}$: fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

$$\mathcal{N}(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} du$$

DiFiQ Ensae Dauphine Bärchen

Qu’est ce qu’une option exotique ?

- Une option sera considérée comme **exotique** si elle ne se s’apparente pas à un call / put européen ou à une combinaison simple de call / put européens

- A ce titre un straddle, un strangle, un collar etc. ne peuvent pas véritablement être considérés comme des exotiques.

- En revanche, une option sur moyenne, une option à barrière, une digitale, une swaption bermuda sont considérées comme exotiques.

- **NB** : Sur certains marchés (notamment FX) certaines exotiques sont très fréquemment traitées. Elle ont donc presque le statut d’options vanilles.

DiFiQ Ensae Dauphine Bärchen

Risques liées aux options exotiques

- On peut distinguer **3 grands types de risques** sur les exotiques:

  – Risque **digital** (ou de discontinuité)
  – Risque de **volatilité forward**
  – Risque de **corrélation**

- Un modèle candidat à l'évaluation d'un produit exotique doit toujours appréhender correctement les différents risques du produit.
  – Dynamique adéquate
  – Mais surtout : calibration adéquate !

Exotiques les plus populaires

- **Exotiques de change**
  - Barrières simples / doubles (Up/Down, In/Out)
  - Digitales américaines (No touch, One touch)
  - Digitales européénnes
  - Asiatiques (strike ou actif moyenné)

- **Exotiques equity**
  - Basket / range options (Altiplano, Annapurna, Atlas, Himalaya…)
  - Variance swaps

- **Exotiques taux d'intérêt**
  - Digitales & corridors
  - CMS et CMS spread options (steepeners)
  - *Callable* : bermuda, callable RF, spread options, corridors…
  - *Path-dependent* : ratchet, TARN, snowball, vol bond etc.

Un petit panorama (non exhaustif) des options exotiques…

Au menu…

- Options américaines
- Options digitales
- Options à barrière
- Options à départ forward
- Options sur spread
- Options « best of » et « worst of »
- Options « lookback »
- Options asiatiques
- Options quantos

Options américaines

- Les calls et les puts américains ont même payoff que les européens à ceci près qu'**ils peuvent être exercés à tout moment** entre leur émission et leur maturité

- **Evaluation :**
  - Pas de formule analytique exacte sauf dans le cas du call américain sur actif ne distribuant pas de dividendes
  - Formules analytiques approchées (Barone Adesi, Whaley)
  - Méthode numérique *backward* (arbre binomial, différences finies)

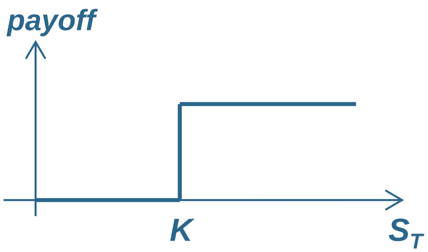
- **Variantes :**
  - Exercice limité à une période donnée (notamment *no call period*)
  - Exercice possible uniquement à certaines dates (options *bermudéennes* associées aux produits callable)

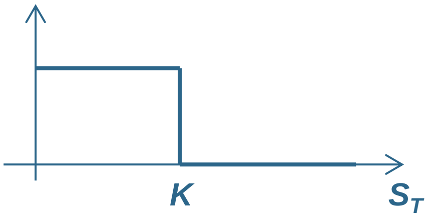
Options digitales

- **Définition**
  - Appelées également *options binaires*

Payoff du call : 1 € si S(T) > K
0 € sinon

Payoff du put : 1 € si S(T) < K
0 € sinon





- **Évaluation dans le cadre B&S**

Prix du call = $e^{-rT} N(d_2)$ Prix du put = $e^{-rT} N(-d_2)$

Call Digital + Put Digital = e^{-rT}

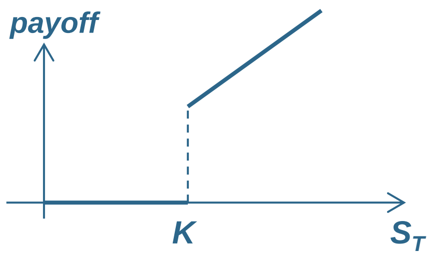
DiFiQ Ensae Dauphine Bärchen

Options digitales

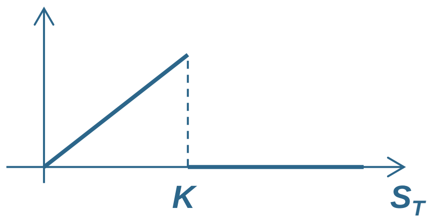
- **Digitales variables (« asset-or-nothing »)**

  Les options binaires précédentes sont dites « cash-or-nothing »

  Il en existe une version « asset-or-nothing » :



Payoff du call : S(T) si S(T) > K
0 sinon



Payoff du put : S(T) si S(T) < K
0 sinon

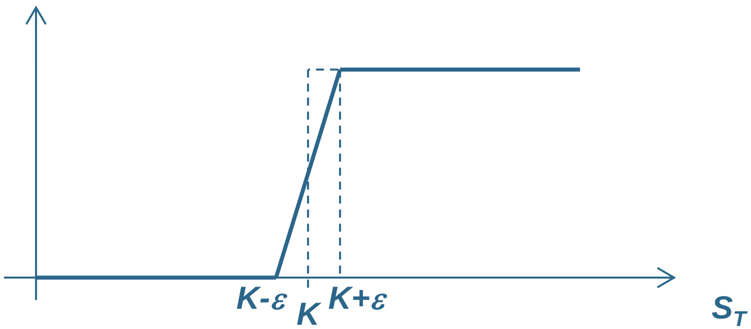
- **Évaluation dans le cadre B&S**

Prix du call = $S_0\, N(d_1)$ Prix du put = $S_0\, N(-d_1)$

$$\text{Call} + \text{Put} = S_0$$

Options digitales

- **Limites de l'approche B&S**
  - Une digitale « cash-or-nothing » peut être approchée par un ***call spread*** *i.e.* par la différence de deux calls européens :



Digitale $\approx$ (C(T, K– ε) - C(T, K + ε)) / 2ε = – ∂/∂K { C(T, K) }

  - En présence d'un smile de volatilité, l'évaluation via B&S peut s'avérer très approximative.

Options digitales

- **Illustration** : *Call Digital ATM*

  ✓ $K = S_0 = 100$ €
  ✓ Maturité T = 2 ans
  ✓ Taux sans risque r = 5%

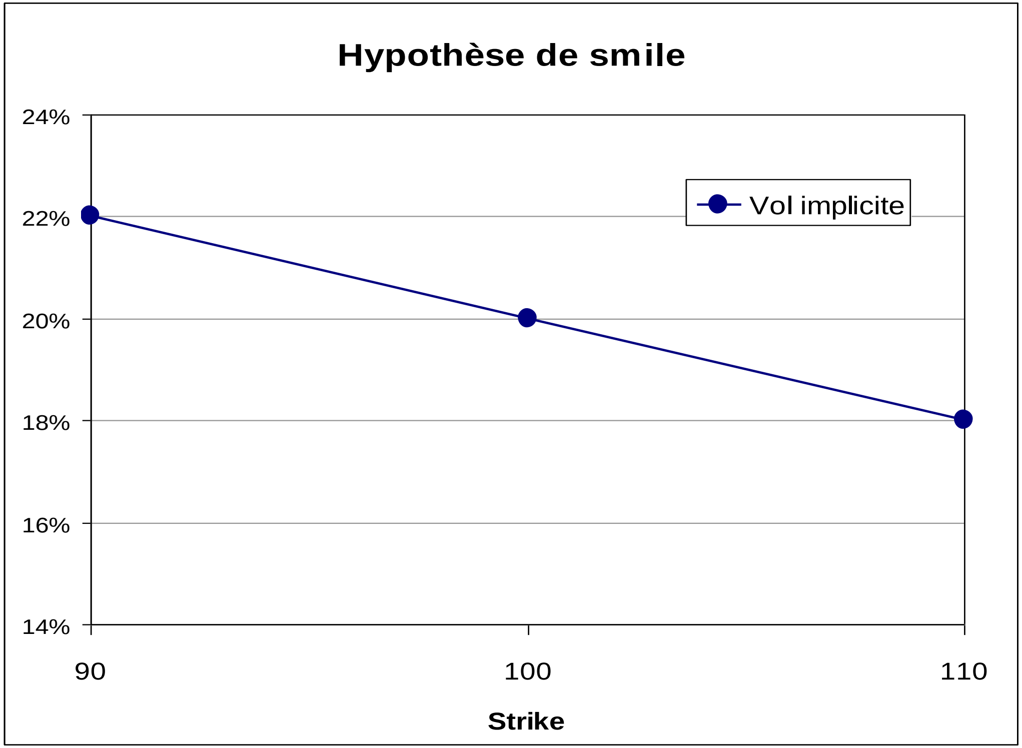
  – Prix du call digital dans le cadre Black & Scholes, pour différents niveaux de volatilité :

Vol BS	Call Digital ATM
22,00%	0,5120 €
20,00%	0,5284 €
18,00%	0,5472 €

DiFiQ Ensae Dauphine Bärchen

Options digitales

- Pricing via *call spread* avec hypothèse de smile :

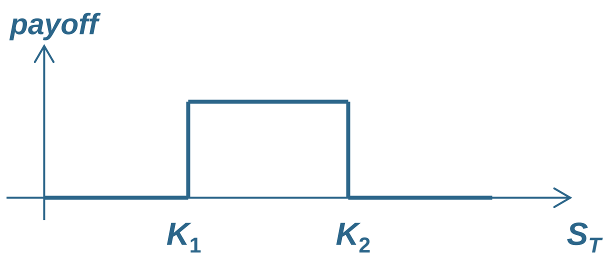


Call Digital ATM = 0,6282 €

Options digitales

Options Double-Digitales

Payoff **:**



Ce payoff se synthétise facilement de la manière suivante :

- Achat d'un call digital simple de strike K_1
- Vente d'un call digital de strike K_2

Application : produit de type *Corridor Range Accrual*

A l'issue d'une année on touche une rémunération égale à :

6% x (n / N), avec :

- ✓ n = nombre de jour où le taux EURIBOR 3M fixe dans entre 3,80% et 4,70%
- ✓ N = nombre d'observation de l'EURIBOR 3M dans l'année ≈ 250

Options à barrière

- **Définition**

  Payoff d'un call / put européen mais paiement conditionné par le franchissement (ou le non franchissement) d'une barrière par l'actif sous-jacent au cours de la vie de l'option.

  $\Longrightarrow$ Caractère « ***path-dependent*** »

  Caractéristiques (pouvant être combinées) :
  - Type : Call / Put
  - Barrière : Up / Down
  - Activation : In / Out

- **Variantes**
  - Avec Rebate (« at hit » / « at expiry »)
  - Double barrière
  - Digitales à barrière (« at hit » / « at expiry ») dites aussi « one touch », « no touch »
  - …

Options à barrière

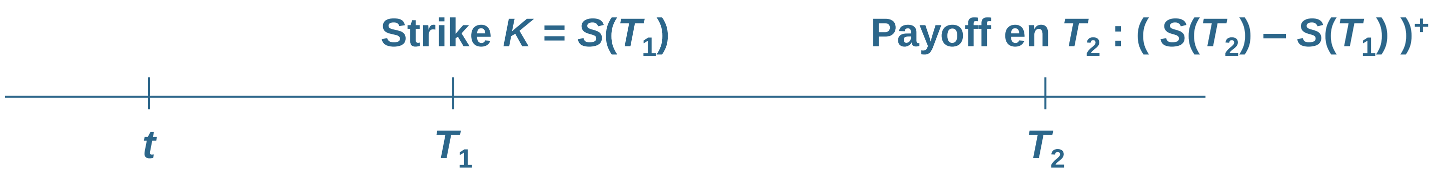
- **Intérêt :** coût moindre, tout en conservant des propriétés de couverture ou d'investissement intéressantes

- **Évaluation**
  - Par formule fermée dans le cadre B&S
  - Par *Monte Carlo* sinon

Options « Forward start »

- **Définition**

  Comme un call / put européen à ceci près que le **strike** est déterminé par le niveau de l'actif sous-jacent **à une date ultérieure** spécifiée dans le contrat.



- **Intérêt / utilisation**
  - Fixer le niveau de volatilité, tout en laissant le strike s'établir plus tard
  - **Exemple** : fonds à capital garanti avec période de souscription

Options « Forward start »

- **Evaluation**
  - Formule fermée dans le cadre B&S
  - Mais on ne fait pas comme ça !

- **Risque majeur de volatilité forward !**
  - Synthétiquement, le vendeur de l'option délivre à l'acheteur un call à la monnaie à la date T_1
  - Cela s'apparente à vendre la volatilité future !

  - **Conséquence** : difficile de s'affranchir d'un modèle à volatilité stochastique

Spread options

- **Définition**
  – Option sur la différence entre deux sous-jacents S et X

Payoff : $(S_T - X_T)^+$

- **Évaluation**
  – **Dans le cadre B&S :** Il suffit d'utiliser comme numéraire un des deux sous-jacent pour obtenir une formule d'évaluation simple

  – En présence d'un payoff avec **strike**, de la forme $(S_T - X_T - K)^+$, cette technique ne s'applique pas $\rightarrow$ On procède par intégrale numérique, ou on utilise un modèle gaussien

- **Risque de corrélation :**
  – Plus les actifs sont décorréllés (ρ faible), plus la spread option est chère

Options « Best Of » et « Worst Of »

- **Définition**
  - « Best Of » : **Max (S_T, X_T)**
  - « Worst Of » : **Min (S_T, X_T)**
  - Se généralise à un panier de N actifs

- **Évaluation :** à partir de l'option de la spread option :

$$\text{Max}\,(S_T, X_T) = X_T + \text{Max}\,(0, S_T - X_T)$$

$$\text{Min}\,(S_T, X_T) = X_T - \text{Max}\,(0, X_T - S_T)$$

Options « lookback »

- **Définition**
  - Call « lookback » : $(S_T - \min_{[0,T]} S_t)$
  - Put « lookback » : $(\max_{[0,T]} S_t - S_T)$

- **Propriétés**
  - Rémunérateur, mais bien sûr onéreux
  - Hautement « path dependent »

- **Évaluation**
  - Par formule fermée dans le cadre B&S
  - Par méthode de Monte Carlo sinon

Options asiatiques

- **Définition**

  Il s'agit des options faisant intervenir une moyenne de valeur du sous-jacent :
  - Soit en lieu et place du sous-jacent S_T
  - Soit en lieu et place du strike K

	Call	**Put**
SJ moyen	$(M_S(T_1,T_2) - K)^+$	$(K - M_S(T_1,T_2))^+$
Strike moyen	$(S_T - M_S(T_1,T_2))^+$	$(M_S(T_1,T_2) - S_T)^+$

- **Intérêt**
  - Cours moyen souvent plus pertinent

- **Évaluation dans le cadre B&S**
  - Formule fermée dans dans le cas d'une moyenne géométrique
  - Moyenne arithmétique : approx ou Monte Carlo avec variable de contrôle

Options quantos

- **Définition**

  Dite aussi « *option à garantie de change* »

  Le payoff est de la forme :

$$X_0 \, (S^f(T) - K^f \,)^+$$

  - ✓ $\mathbf{X_0}$: niveau du taux de change spécifié dans le contrat
  - ✓ $\mathbf{S^f}$: actif sous-jacent étranger, libellé en monnaie étrangère
  - ✓ $\mathbf{K^f}$: strike de l'option, libellé en monnaie étrangère

- **Intérêt :**

  Prendre position sur le marché étranger sans subir le risque de change

- **Évaluation**

  En écrivant la dynamique de l'actif étranger sous la probabilité risque-neutre domestique…

$$dS^f(t)/S^f(t) = (\, r^f(t) - \rho \, \sigma_X(t)\sigma_{Sf}(t) \,) \, dt + \sigma_{Sf}(t) \, dW^{\,d}(t)$$

Options quantos

- **Cas particulier :** vente d'une action étrangère quanto à horizon T

$$\textbf{Prix} = \exp((r^f - r^d)T)\ X_0\ S^f(0)\ \exp(-\ \rho\ \sigma_X\ \sigma_{Sf}\ T)$$

- L'ajustement de convexité $\exp(-\ \rho\ \sigma_X\ \sigma_{Sf}\ T)$ s'explique par l'effet des achats / ventes d'action que j'effectue pour me couvrir lorsque le taux de change bouge.

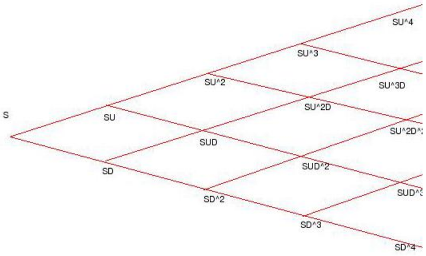
- Si la correlation est > 0, ces rebalancements me sont en général favorables

- Si la correlation est < 0, ces rebalancements me sont en général défavorables

Méthodes numériques

Deux catégories de méthodes numériques :

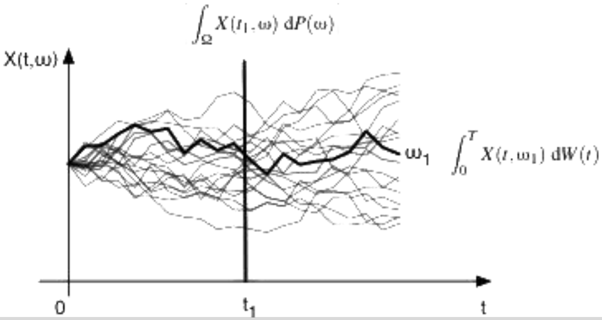
- **Les méthodes *backward***
  - – Arbres



  - – EDP

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t,x)+\mu(t,x)\frac{\partial v}{\partial x}(t,x)+\frac{1}{2}\sigma(t,x)^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t,x)-r(t,x)v(t,x)=0$$

- **Les méthodes *forward***
  - – *Monte Carlo*



Modèle binomial

Pricing par arbre des options américaines

Options américaines

- Contrairement à une option européenne, une **option américaine** peut s'exercer à n'importe quel moment.

- « Qui peut le plus, peut le moins », donc :

  Valeur call / put **européen** ≤ Valeur call / put **américain**

- En général on constate une inégalité stricte

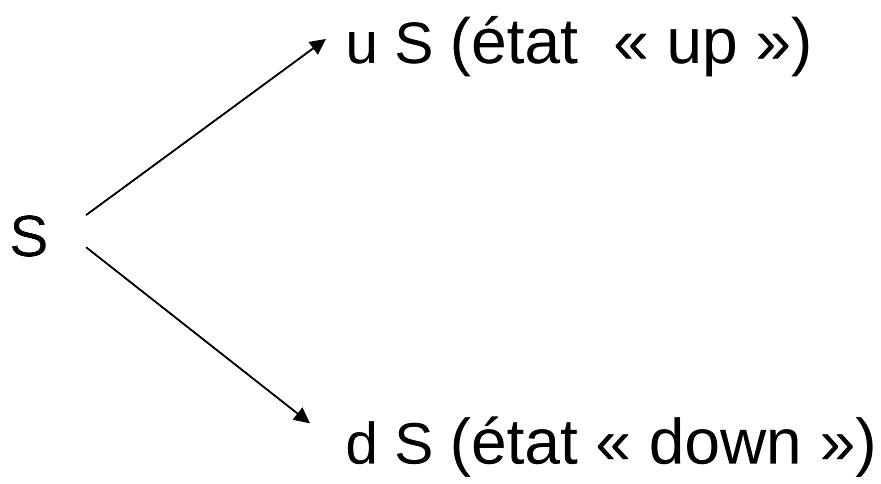
- Sauf dans le cas d'un call américain sur un actif ne distribuant pas de dividendes ! Dans ce cas :

  Valeur call **européen** = Valeur call **américain**

- Autrement dit : il n'est jamais optimal d'exercer un call américain sur actif sans dividendes avant sa maturité !

Le modèle binomial

- Modèle à une période et deux états du monde :



- u > d
- Le taux d'intérêt est noté r

Le modèle binomial

- Première propriété (issue de l'A.O.A.) :

$$d < 1 + r < u$$

- Call écrit sur l'actif S :
  - Payoff $C_1^u = \max(uS - K, 0)$ dans l'état « up »
  - Payoff $C_1^d = \max(dS - K, 0)$ dans l'état « down »

- Portefeuille de couverture à la date initiale:

$$V_0 = \alpha S + \beta$$

Le modèle binomial

- Portefeuille de couverture à la date finale :

$$V_1^u = \alpha\, u\, S + \beta\, (1+r) \text{ dans l'état « up »}$$
$$V_1^d = \alpha\, d\, S + \beta\, (1+r) \text{ dans l'état « down »}$$

- On choisit les quantités α et β de telle sorte que le portefeuille « réplique » le payoff du call

$$\alpha\, u\, S + \beta\, (1+r) = C_1^u$$
$$\alpha\, d\, S + \beta\, (1+r) = C_1^d$$

- La solution (α^*, β^*) de cette équation est le portefeuille de couverture

DiFiQ Ensae Dauphine Bärchen

Le modèle binomial

- Solution :

$$\alpha^* = \frac{C_1^u - C_1^d}{uS - dS} \qquad \text{formellement} \quad \alpha^* = \frac{\Delta C}{\Delta S}$$

$$\beta^* = \frac{C_1^u - \alpha^* uS}{1+r}$$

- Valeur du portefeuille de couverture et donc prix de l'option…

$$C_0 = \frac{1}{1+r}\left(C_1^u \frac{(1+r)-d}{u-d} + C_1^d \frac{u-(1+r)}{u-d} \right)$$

DiFiQ Ensae Dauphine Bärchen

Le modèle binomial

- Probabilité « risque-neutre » :

  $\mathbf{q} = [(1 + r) - d] / (u - d)$ compris entre 0 et 1

  $1 - \mathbf{q} = [u - (1 + r)] / (u - d)$ compris entre 0 et 1

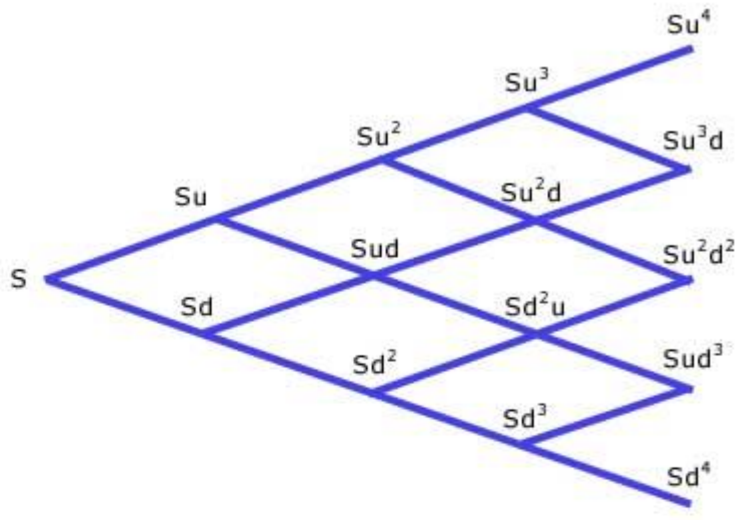
- Le prix du call (du put) s'interprète comme l'espérance actualisée de son payoff sous la probabilité « risque-neutre » (q, 1 – q)

$$C_0 = E^q [C_1] / (1+r)$$

- Sous la probabilité risque-neutre, tous les actifs du marché (action, option, actif sans risque), ont la même espérance de rentabilité, égale au taux sans risque r

L'arbre binomial de Cox-Ross-Rubinstein

- Il est possible d'étendre le modèle précédent **au cas multi- périodes**



- L'arbre est alors dit *recombinant*

L'arbre binomial de Cox-Ross-Rubinstein

- En choisissant :

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}$$

Si on multiplie le nombre de pas de temps, on montre que la dynamique de l'actif S **converge la dynamique Black & Scholes (r, σ).**

- C'est l'arbre de **Cox-Ross-Rubinstein**

L'arbre binomial de Cox-Ross-Rubinstein

- Pour pricer une option dans ce modèle, le passage d'un instant *t* à l'instant précédent *t* - ΔT s'obtient en écrivant à chaque nœud *i* que le prix à l'instant *t* - ΔT est **l'espérance actualisée** du prix à l'instant *t* :

$$V_{t-\Delta t,i} = e^{-r\Delta T}\left(pV_{t,i+1} + (1-p)V_{t,i-1}\right)$$

- Exemple du **put américain** :
  – Valeur du payoff à maturité :

$$P_{T,i} = \max(K - S_{T,i}, 0)$$

  – Rétropropagation :

$$P_{t-\Delta t,i} = \max\left(e^{-r\Delta T}\left(pP_{t,i+1} + (1-p)P_{t,i-1}\right), K - S_{t-\Delta t,i}\right)$$

Pricing des options path-dependent :
Focus sur la méthode de Monte Carlo

Méthode de Monte Carlo

- Tout prix d'actif financier s'exprime sous forme d'une **espérance mathématique**, calculée sous une mesure de probabilité spécifique appelée *probabilité risque-neutre*

- L'**espérance mathématique** peut être estimée à l'aide d'une **moyenne empirique** (*Loi des Grands Nombres*).

- On peut également obtenir un **intervalle de confiance** pour le prix obtenu (*Théorème Central Limite*)

DiFiQ Ensae Dauphine Bärchen

Loi des grands nombres

- Soit X_1, X_2, …, X_n,…. une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi (i.i.d.)

- Alors leur **moyenne empirique** converge vers l'espérance de ces variables

- Formellement :

$$\widehat{m}_n := \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \longrightarrow \mathbb{E}[X_1]$$

- L'idée de la méthode de Monte Carlo est d'estimer cette espérance en **simulant les variables aléatoires X_i** et en calculant leur moyenne empirique.

Théorème central limite

- Soit X_1, X_2, …, X_n,…. une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi (i.i.d.). Alors :

$$\sqrt{n}\Big(\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}-\mathbb{E}\left[X_1\right]\Big) \xrightarrow{loi} \mathcal{N}(0, \mathrm{Var}\left[X_1\right])$$

- On a également :

$$\frac{\sqrt{n}}{\widehat{\sigma}_n}\Big(\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}-\mathbb{E}\left[X_1\right]\Big)\mathbf{1}_{\widehat{\sigma}_n>0} \xrightarrow{loi} \mathcal{N}(0,1)$$

- Avec la variance empirique : $\widehat{\sigma}_n^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\Big(X_i-\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}\Big)^2$

- **Intervalle de confiance** à 95% : $\left[\widehat{m}_n - 1,96\,\frac{\widehat{\sigma}_n}{\sqrt{n}}\,;\,\widehat{m}_n + 1,96\,\frac{\widehat{\sigma}_n}{\sqrt{n}}\right]$

Génération de lois uniformes et gaussiennes

- La plupart des générateurs aléatoires fournissent des tirages indépendants d'une loi uniforme sur [0,1]

- Pour transformer ces tirages en lois normales N(0,1):
  - Appliquer l'inverse de la fonction de répartition de la loi normale
  - Algorithme de Box-Muller

- Pour simuler les accroissement d'un mouvement brownien :

$(W_{t+\Delta t} - W_t)$ suit une loi normale de variance Δt

On peut donc le simuler comme $\varepsilon\,(\Delta t)^{1/2}$ où ε suit une loi N(0,1)

DiFiQ Ensae Dauphine Bärchen

Pricing d'un call par Monte Carlo

- **Exemple** : pricing d'un call par Monte Carlo dans le cadre Black & Scholes.

1. Tirage de N de loi normales centrées réduites indépendantes. $\Rightarrow \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_N$

2. $\Rightarrow S^1_T, S^2_T, \ldots, S^N_T$ = N réalisations correspondantes de S_T :

$$S_T^i = S_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}\varepsilon_i\right), \quad i = 1, \ldots, N$$

3. $\Rightarrow P_1, P_2, \ldots, P_N$ = N réalisations correspondantes du payoff :

$$P_i = \max(S_T^i - K, 0), \quad i = 1, \ldots, N$$

4. Estimation du prix par Monte Carlo : $P_{\mathrm{MC}} = e^{-rT}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} P_i$

Monte Carlo : TP excel

- Calculer par Monte Carlo le prix d'un call européen de maturité 1 an. On prendra $S_0 = K = 100$. S = 20% et r = 3% et on réalisera 1000 simulations de l'actif sous jacent

- S'assurer que l'on retombe pas trop loin du prix B&S du call.

- Calculer l'intervalle de confiance à 95% du prix obtenu

- Passer à présent au cas d'un call down & out de même strike et de barrière H = 90.

- Pricer un call lookback sur le même sous-jacent

DiFiQ Ensae Dauphine Bärchen

Avantages & inconvénients de Monte Carlo

- **Avantages**
  - Méthode très intuitive
  - Implémentable facilement
  - Possible pour tous les modèles
  - Permettant de pricer tout type de payoff *path-dependent*

- **Inconvénients**
  - Inadapté aux options américaines / bermudéennes
  - Gourmand en temps de calcul
  - Peu précis

→ D’où les techniques de « réduction de variance »

Monte Carlo : techniques de réduction de variance

- **Variables antithétiques**
  - Utilisation du vecteur gaussien symétrique

- **Importance sampling**
  - Changer le drift de l'actif pour favoriser les payoffs non nuls
  - **Application** : digitale en dehors de la monnaie

- **Variable de contrôle**
  - Retirer Y tel que $E(Y) = 0$ et $Cov(X,Y) > 0 \Rightarrow E(X) = E(X - Y)$
  - **Application** : call asiatique

Monte Carlo : l'importance sampling en pratique

- **Monte Carlo standard :**

$$\frac{dS_t}{S_t} = r\,dt + \sigma\,dW_t \qquad\qquad P^{\text{std}}_{\text{mc}} = e^{-rT}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\phi(S^i)$$

- **Monte Carlo + Importance sampling :**
  - On choisit arbitrairement un drift μ pour l'actif S :

$$\frac{d\widetilde{S}_t}{\widetilde{S}_t} = (r+\mu)\,dt + \sigma\,dW_t$$

  - On montre que l'estimateur suivant converge vers le prix :

$$P^{\text{is}}_{\text{mc}} = e^{-rT}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\phi(\widetilde{S}^i)\exp\left(-\frac{1}{2}\rho^2 T - \rho W_T\right) \qquad \rho = \frac{\mu}{\sigma}$$

DiFiQ Ensae Dauphine Bärchen

MC : cas de plusieurs actifs corrélés

- Le but du jeu est de simuler *n* actifs corrélés, c'est à dire :

$$\frac{dS_i(t)}{S_i(t)} = r dt + \sigma_i \, dW_t^i, \qquad i = 1, \ldots, n$$

- Avec une structure de corrélation : $\Omega = (\rho_{ij})_{i,j = 1 \ldots n}$

- Or on sait simuler facilement *n* browniens indépendants : $B_t = (B_t^1, \ldots, B_t^n)$

- Si on arrive à trouver une matrice *L* telle que : $\Omega = LL^T$

- Alors $W_t = L\, B_t$ est un mouvement brownien *n* dimensionnel présentant la structure de corrélation voulue.

- En pratique on utilise la **décomposition de Choleski** qui fournit une matrice ***L*** triangulaire inférieure.

Exercice Excel

Dans le cadre B&S, utiliser la technique précédente pour évaluer par Monte Carlo le produit suivant :

- 3 indices (Nikkei, S&P, SMI)
- Maturité 7 ans, 7 dates d'observation des indices
- **Payoff** à maturité = $\text{Notional Amount} * \left[\sum_{i=1}^{7} 3.1\% * n_i \right]$
- Avec $\mathbf{n_i} = \mathbf{1}$ si les 3 indices sont au dessus de leur niveau initial à la date d'observation, et 0 sinon

Au delà de Black & Scholes…

Problématique

- Bien que souvent utilisé, le modèle de B&S est très imparfait
  - **Dynamique** des actifs incohérente avec l'**observation empirique**
  - Mais surtout : non prise en compte du **smile de volatilité**

- Cela implique la **mauvaise évaluation de certains risques exotiques**, notamment :
  - Risque **digital** (impact du skew)
  - Risque de **volatilité forward**

- **Idée** : utiliser des modèles plus riches permettant notamment de se calibrer au smile de volatilité

DiFiQ Ensae Dauphine Bärchen

Autres types de modèles

- Modèles à volatilité locale
- Modèles à sauts
- Modèles à volatilité stochastique

Modèle à volatilité locale

- **Idée :**

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu(t)dt + \sigma(t, S_t)dW_t \qquad \mu(t) = r(t) - \gamma(t)$$

- Avec σ fonction **déterministe** de t et S_t

- **Problématique :** calibrer la fonction σ de telle sorte que le modèle reproduise le *smile* observé sur le marché des options.

Modèle à volatilité locale

Formule de Dupire

- si on dispose du prix des calls (ou puts) pour tout strike/maturité, il existe une fonction explicite donnant la volatilité locale cohérente avec les prix d'option :

$$\sigma^2(T,K) = 2\frac{\frac{\partial C}{\partial T} + \gamma(T)C + K[r(T)-\gamma(T)]\frac{\partial C}{\partial K}}{K^2\frac{\partial^2 C}{\partial K^2}}$$

- On peut bien sûr exprimer la vol. locale en fonction de la surface de vol. implicite :

$$\sigma^2(T,K) = \frac{2\frac{\partial\hat{\sigma}}{\partial T} + \frac{\hat{\sigma}}{T-t} + 2K[r(T)-\gamma(T)]\frac{\partial\hat{\sigma}}{\partial K}}{K^2\left[\frac{\partial^2\hat{\sigma}}{\partial K^2} - d_+\sqrt{T-t}\left(\frac{\partial\hat{\sigma}}{\partial K}\right)^2 + \frac{1}{\hat{\sigma}}\left(\frac{1}{K\sqrt{T-t}} + d_+\frac{\partial\hat{\sigma}}{\partial K}\right)^2\right]}$$

Modèle à volatilité locale

- **En pratique :**
  – On construit une nappe régulière à partir des volatilités de marché
  – On l'utilise pour calculer la volatilité locale via la formule de Dupire

- **Intérêt de l'approche vol. locale / Dupire**
  – Calibration simple et rapide au smile de marché
  – Implémentation facile des méthodes numériques (MC / Arbre / EDP)

- **Inconvénients**
  – Dépendance de la vol. locale / methode de lissage de la vol. marché
  – Volatilité déterministe
  – Dynamique du *smile* inconsistente

Modèles à volatilité stochastique

- Seuls modèles véritablement à même d'appréhender **le risque de vol. forward** (forward start options / cliquets, vol bond…)

- Plusieurs approches existent notamment :
  - Le modèle de Heston

$$dS_t = \mu S_t\,dt + \sqrt{\nu_t} S_t\,dW_t^S$$
$$d\nu_t = \kappa(\theta - \nu_t)\,dt + \xi\sqrt{\nu_t}\,dW_t^\nu$$

  - Le modèle SABR

$$\begin{cases} dF_t = \sigma_t F_t^\beta dW_t^1 \\ \dfrac{d\sigma_t}{\sigma_t} = \alpha\, dW_t^2 \end{cases}$$

Focus sur le modèle SABR

$$\begin{cases} dF_t = \sigma_t \, F_t^{\beta} \, dW_t^1 \\ \dfrac{d\sigma_t}{\sigma_t} = \alpha \, dW_t^2 \end{cases}$$

- Etant donné une valeur initiale F_0 pour le forward, le modèle se définit au moyen des 4 paramètre suivants :
  - ✓ σ_0 : vol initiale
  - ✓ α : vol de la vol
  - ✓ β : backbone
  - ✓ ρ : corrélation des browniens

DiFiQ Ensae Dauphine Bärchen

Focus sur le modèle SABR

- **Intérêt de l'approche SABR** :
  - C'est un modèle à vol. stochastique qui génère des formes de smiles proche de ce qu'on observe en réalité.
  - Il existe une formule approchée mais assez précise donnant la volatilité implicite (et donc le prix) d'un call
  - C'est de ce fait devenu un standard dans le monde des options de taux

Focus sur le modèle SABR

- **La formule SABR :**

$$\sigma_{\mathrm{bs}}(T,K;F_0,\sigma_0,\alpha,\beta,\rho)=\frac{\sigma_0}{(F_0K)^{\frac{1-\beta}{2}}\left\{1+\frac{(1-\beta)^2}{24}\log^2\left(\frac{F_0}{K}\right)+\frac{(1-\beta)^4}{1920}\log^4\left(\frac{F_0}{K}\right)+\dots\right\}}\left(\frac{x}{y(x)}\right)$$
$$\times\left\{1+\left[\frac{(1-\beta)^2}{24}\frac{\sigma_0^2}{(F_0K)^{1-\beta}}+\frac{1}{4}\frac{\rho\beta\sigma_0\alpha}{(F_0K)^{\frac{1-\beta}{2}}}+\frac{2-3\rho^2}{24}\alpha^2\right]T+\dots\right\}$$

Avec :

$$\begin{cases} x=\dfrac{\alpha}{\sigma_0}(F_0K)^{\frac{1-\beta}{2}}\log\left(\dfrac{F_0}{K}\right)\\ y(x)=\log\left(\dfrac{\sqrt{1-2\rho x+x^2}+x-\rho}{1-\rho}\right)\end{cases}$$

- **Conséquence :** on peut calibrer le modèle relativement facilement sur le smile de marché.

Focus sur le modèle SABR

- Impact des paramètres du modèle