Torodd F. Ottestad
@lektorodd

Eksamen 2P våren 2024

Sist oppdatert: 26.05.2024, 21.00

24.05.2024

Del 1

Oppgåve 1

Startar med å sortera observasjonane i stigande rekkjefølgje:

0 1 2 2 3 4 4 5 7 12

Gjennomsnitt:

$$\overline{x} = \frac{0+1+2+2+3+4+4+5+7+12}{10} = \frac{40}{10} = 4$$

Gjennomsnittet er 4 timar.

Median: Medianen er den midterste observasjonen når observasjonane er sorterte i stigande rekkefølgje. Her er det 10 observasjonar, så medianen er gjennomsnittet av observasjon nummer 5 og 6.

$$\text{median} = \frac{3+4}{2} = 3.5$$

Medianen er 3.5 timar.

Oppgåve 2

At KPI er 129.6 i 2023 betyr at prisnivået i 2023 er 29.6% høgare enn i 2015. Bruker vekstfaktor for å finna ut kva ei vare som kosta 500 kr i 2015 vil kosta i 2023:

$500 \text{ kr} \cdot 1.296 = 648 \text{ kr}$

Vara vil kosta 648 kr i 2023.

Tips til hovudrekning: Ta utgangspunkt i ei vare som kosta 1000 kr i 2015 og finn ut kva den ville kosta i 2023.

$$1000 \text{ kr} \cdot 1.296 = 1296 \text{ kr}$$

Så kan du dela dette på to for å finna ut korleis det ville gått med ei vare til halve prisen (500 kr).

Oppgåve 3

Dersom Astrid veit at ei rett gate er 300 meter i verkelegheita og 2 cm på kartet kan ho bruka dette for å finna målestokken til kartet. Ho må starta med å finna ut kor mange cm 300 meter er:

$$300m = 30000 \text{ cm}$$

Då veit ho at 2 cm på kartet svarar til 30000 cm i verkelegheita. Dermed veit me at 1 cm på kartet svarar til $\frac{30000}{2} = 15000$ cm i verkelegheita.

Målestokken til kartet er 1:15000.

Oppgåve 4

Set opp eit likninssystem for å finna prisane.

La x vera prisen på ein ispinne og y vera prisen på ein brusboks.

Den første likninga finn me ved å sjå på totalprisen og kor mange dei kjøpte av kvar.

$$30 \cdot x + 30 \cdot y = 900$$

Den andre likninga finn me ved å sjå på at prisen på ein brusboks er 6 kr meir enn prisen på ein ispinne.

$$y = x + 6$$

Løyser likningssystemet:

Set den andre liknina inn i den første. Då får me at

$$\begin{aligned}
30x + 30y &= 900 \\
30x + 30(x+6) &= 900 \\
30x + 30x + 30 \cdot 6 &= 900 \\
60x &= 900 - 180 = 720 \\
x &= \frac{720}{60} = 12
\end{aligned}$$

Sett inn x i den andre likninga for å finna y:

$$y = x + 6 = 12 + 6 = 18$$

Prisne for ein ispinne er 12 kr og prisen for ein brusboks er 18 kr.

Oppgåve 5

Nora kan velja mellom 2 for 32 kr eller 4 for 48 kroner. Prisen per bagett er henholdsvis 16 kr og 12 kr.

$$\frac{\text{endring}}{\text{utgangspunkt}} = \frac{16-12}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} = 0.25$$

Prisen blir 25 % lågare per bagett dersom ho kjøper fire bagettar i staden for to.

Alternativ løysing med vekstfaktor

$$\begin{aligned} \text{startverdi} \cdot \text{vekstfaktor} &= \text{sluttverdi} \\ \text{vekstfaktor} &= \frac{\text{sluttverdi}}{\text{startverdi}} \\ \text{vekstfaktor} &= \frac{12}{16} = 0.75 \end{aligned}$$

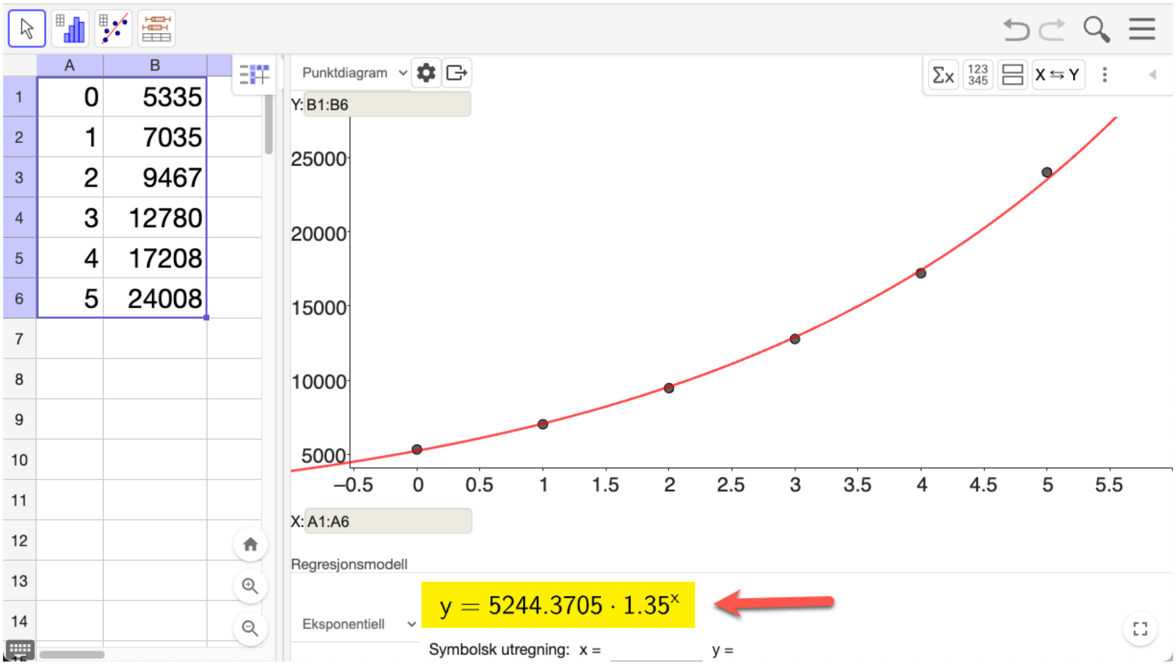
Vekstfaktor på 0.75 svarar til ein reduksjon på 25 %.

Del 2

Oppgåve 1

a) Lar x vera talet på månader etter november 2023. Skriv inn i reknearket i Geogebra med x i kolonne A og tal følgjarar i kolonne B.

Markerer cellene i tabellen og vel "Regresjonsanalyse". Sidan det er snakk om prosentvis vekst vel me "Eksponentiell".



Ser at vekstfaktoren i funksjonsuttrykket er 1.35 som vil seie at talet på følgjarar aukar med 35% kvar månad.

b) Ser på kva som skjer med 5 prosentpoeng auke i tal følgarar per månad etter april 2024.

	A	B	C
1	**Vekst før april**	35 %	
2	**Auke pr. mnd**	5 %	
3			
4	**Månad**	**Følgarar**	**Vekstfaktor**
5	April	24 008	1,35
6	Mai	33 611	1,40
7	Juni	48 736	1,45
8	Juli	73 104	1,50
9	August	113 312	1,55

	A	B	C
1	**Vekst før april**	0,35	
2	**Auke pr. mnd**	0,05	
3			
4	**Månad**	**Følgarar**	**Vekstfaktor**
5	April	24008	=1+B1
6	Mai	=B5*C6	=C5+B$2
7	Juni	=B6*C7	=C6+B$2
8	Juli	=B7*C8	=C7+B$2
9	August	=B8*C9	=C8+B$2

Ser at talet på følgjarar vil vera 33 611 i mai og 48 736 i juni dersom Tuva klarar å nå målet sitt.

c) Finn ut kor mange følgarar Tuva ville hatt i august 2024 dersom veksten hadde vore 35% vidare. Ser vidare på kor mange prosent fleire følgarar det nye målet ville gitt framfor den opphavlege veksten.

1. $24008 \cdot 1.35^4$

   $\approx \mathbf{79742.72}$

2. $\dfrac{113312}{79743}$

   $\approx \mathbf{1.42}$

Tuva ville hatt ca. 42% fleire følgarar i august 2024 dersom ho hadde nådd det nye målet sitt.

Oppgåve 2

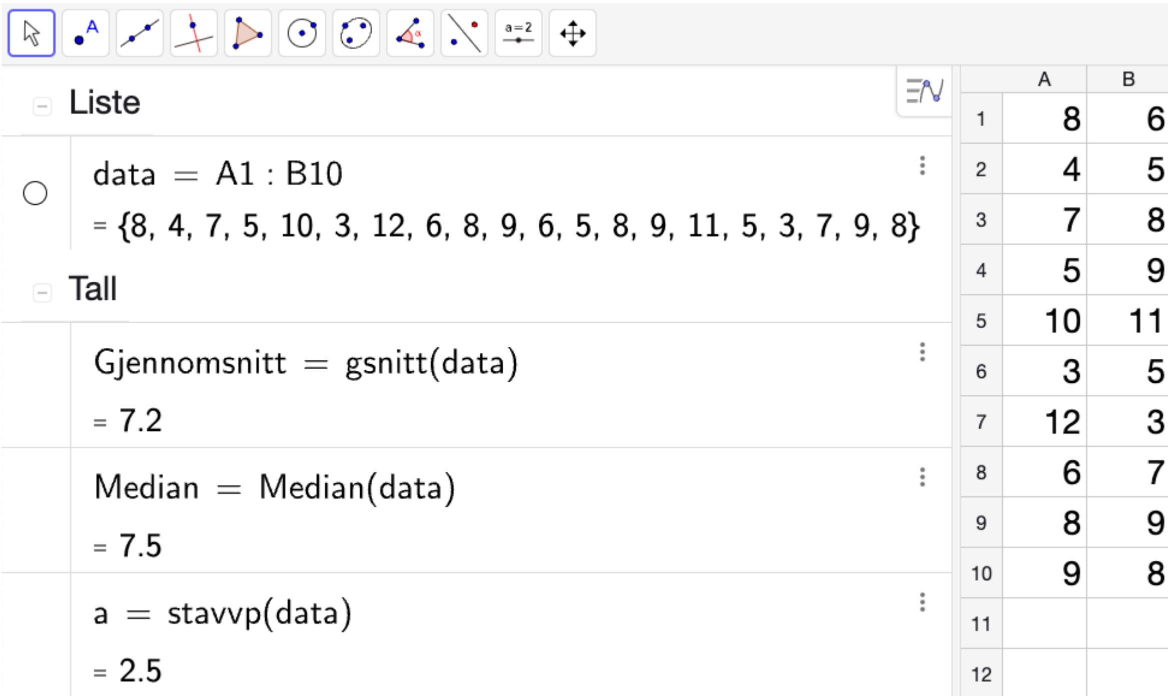
Turane til Solveig:

8	4	7	5	10	3	12	6	8	9
6	5	8	9	11	5	3	7	9	8

Miriam:

- Gjennomsnitt: 4.7 timar per tur
- Median: 4 timar
- Standardavvik: 4.2 timar

a) Reknar ut gjennomsnitt, median og standardavvik for Solveig sine turar i GeoGebra.



Solveig sine turar:

- Gjennomsnitt: 7.2 timar per tur
- Median: 7.5 timar
- Standardavvik: 2.5 timar

Ut frå desse opplysingane ser me at Solveig i snitt går lengre turar. Standardavviket fortel at det er større variasjon i turane til Miriam enn til Solveig.

Miriam har eit gjennomsnitt som er høgare enn medianen, som tyder på at det er nokre lange turar som drar opp gjennomsnittet. Solveig har eit gjennomsnitt som er lågare enn medianen, som tyder på at det er nokre korte turar som drar ned gjennomsnittet.

b) Ser på dei to påstandane kvar for seg.

1) Miriam og Solveg gjekk 3 skiturar på 5 timar saman

Av tabellen med kumulative frekvensar ser me at 11 av turane var 3 timar eller kortare. Me ser også at 14 av turane var 5 timar eller kortare. Dette vil seie at det er 3 turar som var 5 timar lange.

Påstanden stemmer

2) Miriam var ikkje med alle gongane Solveig gjekk ein skitur på 8 timar

Av tabellen ser me at dei har gått $17 - 14 = 3$ turar på 8 timar saman. Samtidig veit me frå oppgåve a) at Solveig har gått 4 turar på 8 timar. Dette vil seie at Miriam ikkje har vore med alle gongane Solveig har gått ein skitur på 8 timar.

Påstanden stemmer

Oppgåve 3

I histogrammet er frekvensen lik arealet av søylene $(\text{klassebreidd} \cdot \text{høgd})$. Dermed kan me skriva inn opplysingane i histogrammet til ein tabell:

Klasse	Frekvens
$[0, 40\rangle$	$40 \cdot 2 = 80$
$[40, 60\rangle$	$20 \cdot 6 = 120$
$[60, 100\rangle$	$40 \cdot 5 = 200$
$[100, 150\rangle$	$50 \cdot 2 = 100$

Til saman på skulen er det då $80 + 120 + 200 + 100 = 500$ elevar.
Går gjennom dei ulike påstandane:

Påstand 1: 80 elevar brukte mindre enn 40 minutt på lekser denne ettermiddagen.

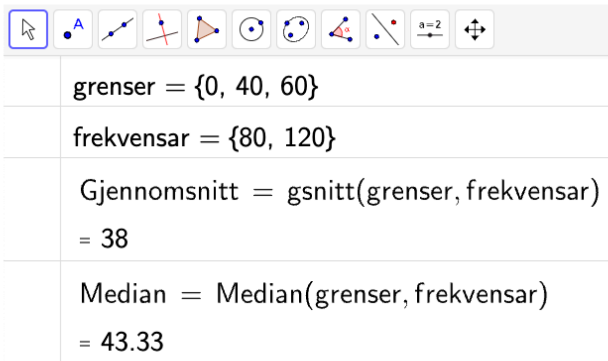
Ser av frekvenstabellen at påstanden stemmer.

Påstand 2: Den relative frekvensen for 100-150 minutt brukter på lekser er $\frac{1}{5}$.

Ser av frekvenstabellen at det er 100 elevar som brukte 100-150 minutt på lekser. Dette er 1/5 av 500 elevar, så påstanden stemmer.

Påstand 3: Elevane som brukte mindre enn 60 minutt på leksene, brukte i gjennomsnitt 38 minutt.

Legg inn klassegrenser og frekvenser i Geogebra og finn gjennomsnittet.



Gjennomsnittet er 38 minutt så påstanden stemmer. Her ligg det til grunn ei antaking om at elevane sine tider i dei ulike klassane er jevnt fordelt, noko som ikkje treng å vera tilfellet i praksis. Om det er 80 elevar som les 0 minutt, og 120 elevar som les 40 minutt vil gjennomsnittet bli

$$\overline{x} = \frac{80 \cdot 0 \text{ min} + 120 \cdot 40 \text{ min}}{200} = 24 \text{ min}$$

Påstand 4: For elevane som brukte mindre enn 60 minutt på leksene, er medianen for talet på minutt høgare enn gjennomsnittet for talet på minutt.
Ser av utrekningane over at medianen er ca. 43 minutt så påstanden kan stemma (jevn fordeling). Her vil også ei skeivfordeling kunna gjera påstanden usann. Til dømes:

$$\overline{x} = \frac{80 \cdot 39 \text{ min} + 120 \cdot 59 \text{ min}}{200} = 51 \text{ min}$$

Oppgåve 4

a) Sara jobbar med å løyse likningssettet

$$4x = -12 + y$$
$$2x + 24 - y = 2x^2$$

Ser at likningane kan skrivast om til "y = …". Då får me:

$$y = 4x + 12$$
$$y = -2x^2 + 2x + 24$$

Ser at dette tilsvarar henholdsvis `f(x)` og `g(x)` i programkoden i oppgåveteksten.

I for-løkka (rad 7-10 i koden) går Sara gjennom heiltalls x-verdiar frå og med −5 til og med 4. For kvar x-verdi reknar ho ut verdiane for `f(x)` og `g(x)`. Dersom desse er like, skriv ho ut x- og y-verdien. Frå det omskrivne likningssettet ser me at `f(x)` blir det samme som `y` her.)

b) Ole jobbar med likningssettet

$$2x = y - 8$$
$$x^2 + x - 48 = y$$

Skriv om på same måte som i a):

$$y = 2x + 8$$
$$y = x^2 + x - 48$$

Det første Ole må gjera er å endra `f(x)`og `g(x)` i programkoden til å tilsvara høgresidene i dei omskrivne likningane.

Sjekkar likningssettet i CAS:

1 $y = 2x + 8;$

2 $y = x^2 + x - 48;$

3 Løs({\$1, \$2})

→ $\{\{x = 8, y = 24\}, \{x = -7, y = -6\}\}$

Ser her at likningssettet ikkje har nokon løysingar i det intervallet som Sara brukte i sin kode. Ole må derfor utvida området han undersøker om han skal finna løysingar. T.d. kan han endra til `for i in range(-10, 10):`

Oppgåve 5

Ut frå oppgåveteksten les me at

- forma er ei rettavkorta kjegle $\rightarrow$ grunnflata er ein sirkel
- grunnflata må passa på eit kvadrat på 20 m^2 $\rightarrow$ me kan finna største radius som passar.
- toppen skal vera 2.5 m over bakken og ha eit areal på 10 m^2 $\rightarrow$ finn ein passande radius

Grunnflata: Bruker CAS for å finna radiusen til grunnflata. Viss kvadratet har sidelengd s vil radiusen til sirkelen vera $r = \frac{s}{2}$. Ser at radiusen til grunnflata må vera 2.24 meter.

1 $$\text{Løs}(s^2 = 20)$$
$$\approx \{s = -4.47, s = 4.47\}$$

2 $$r := \frac{4.47}{2}$$
$$\approx r := 2.24$$

Plattformen: Bruker CAS for å finna radiusen som tilsvarar eit areal på 10 m^2. Kallar plattformradiusen for r_p og bruker at arealet av ein sirkel er $A = \pi r^2$. Plattformradiusen må vera 1.78 meter.

3 $$\text{Løs}(\pi\, r_p^2 = 10)$$
$$\approx \{r_p = -1.78, r_p = 1.78\}$$

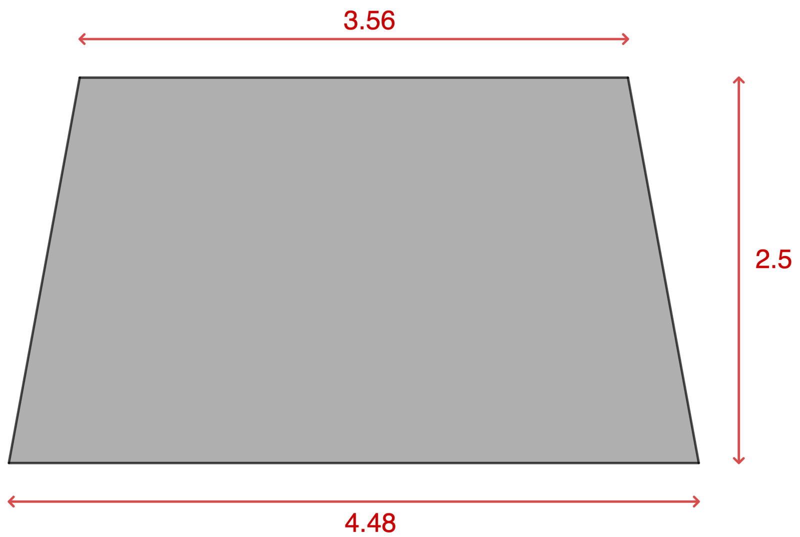
Høgdene: No må me finna ut kor høg kjegla er før ho vert rettavkorta og kor høg kjegla me fjernar frå toppen er. Viss den største kjegla har høgd x vil toppen ha høgd $x - 2.5$ (sidan me skal la det stå att 2.5 meter). Den eine kjegla er toppen av den andre kjegla som gjer at me kan bruka formlikskap for å finna høgdene. Formlikskapen gjer at forholdet mellom høgde og radius i dei to kjeglene må vera like. Bruker CAS:

1 $$\text{Løs}\left(\frac{x}{2.24} = \frac{x - 2.5}{1.78}\right)$$
$$\approx \{x = 12.17\}$$

2 $$12.17 - 2.5$$
$$\approx 9.67$$

Den største kjegla har høgd 12.17 meter og kjegla i toppen har høgd 9.67 meter.

a) Bruker GeoGebra til å teikne skissa (teiknar frå sida for å gjera det enkelt). Bruker måla på radius og høgde og trekk linjer mellom hjørnepunkta på klatreveggen.



b) For å finne volumet av den rettavkorta kjegla finn me volumet av den store kjegla og trekk frå volumet av den minste kjegla. Formelen for volum av ei kjegle er gitt ved

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Bruker CAS:

1	$V_{stor} := \frac{1}{3}\pi \cdot 2.24^2 \cdot 12.17$
	$\approx$ $\mathbf{V_{stor} := 63.95}$
2	$V_{liten} := \frac{1}{3}\pi \cdot 1.78^2 \cdot 9.67$
	$\approx$ $\mathbf{V_{liten} := 32.08}$
3	$\text{Betong} := V_{stor} - V_{liten}$
	$\approx$ $\mathbf{Betong := 31.86}$

Det vil gå med ca. 32 m^3 betong for å laga klatreveggen.

Oppgåve 6

a) Ut frå biletet skal det betalast 10 495 kr pr. mnd. Dermed er lånet er eit annuitetslån sidan det er eit **fast terminbeløp** i heile perioden. (I eit serielån er **avdraga like**, medan terminbeløpet minkar gradvis).

Grunnen til at Johannes ikkje kan legga inn meir enn 1 700 000 kr som ønskt lånebeløp handlar om kravet på 15 % eigenkapital. 15% av 2 000 000 kr er 300 000 kr, og dermed kan han ikkje låna meir enn 1 700 000 kr.

b) Når ein reknar ut årsrente som gjort i oppgåveteksten

$$(1+0.015)^{12} = 1.1956$$

tek ein omsyn til renters rente. Om ein set inn x kr vil det ha forrenta seg til $x \cdot 1.015$ kr etter ein månad. Etter to månader vil det ha forrenta seg til $x \cdot 1.015 \cdot 1.015 = x \cdot 1.015^2$ kr. Etter eitt år vil det ha forrenta seg til $x \cdot 1.015^{12}$ kr.

For å rekne ut kor mykje ei rente på 5.49% årleg rente svarar til per månad kan ein løyse likninga

$$x^{12} = 1.0549$$

Då finn ein den vekstfaktoren som opphøgd i 12 gir 1.0549. Bruker CAS:

1 $\text{Løs}(x^{12} = 1.0549)$

$\approx \{x = -1.0045, x = 1.0045\}$

Altså vil 5.49% årleg rente svara til 0.45% per månad.

c) Finn først ut kor mykje Johannes må betala i renter den første månaden.

2 $0.0045 \cdot 1700000$

≈ 7650

Ser vidare kor stor del dette er av terminbeløpet

3 $\frac{7650}{10495}$

≈ 0.729

Dvs. at omlag 73% av terminbeløpet går til renter, og 27% går til avdrag den første månaden.

d) Bruker Excel og reknar ut nettoløn og totale utgifter før evt. kjøp av bustad.

	A		B
1	**Inndata**		
2	Fast månadsløn	kr	52 000,00
3	Pensjonstrekk		2,0 %
4	Fagforeningstrekk		1,2 %
5	Skattetrekk		32,0 %
6			
7	**Inntekter**		
8	Fastløn	kr	52 000,00
9	Pensjonstrekk	kr	1 040,00
10	Fagforeningstrekk	kr	624,00
11	Trekkgrunnlag	kr	50 336,00
12	Skattetrekk	kr	16 107,52
13	**Nettoløn**	**kr**	**34 228,48**
14			
15	**Utgifter**		
16	Individspesifikke utgifter (SIFO)	kr	8 683,00
17	Husholdsspesifikke utgifter (SIFO)	kr	3 610,00
18	Studielån	kr	1 600,00
19	Forsikringar	kr	2 000,00
20	**Sum utgifter**	**kr**	**15 893,00**
21			
22	**Resultat (før lån)**	**kr**	**18 335,48**

	A	B
1	**Inndata**	
2	Fast månadsløn	52000
3	Pensjonstrekk	0,02
4	Fagforeningstrekk	0,012
5	Skattetrekk	0,32
6		
7	**Inntekter**	
8	Fastløn	=B2
9	Pensjonstrekk	=B8*B3
10	Fagforeningstrekk	=B8*B4
11	Trekkgrunnlag	=B8-B9-B10
12	Skattetrekk	=B11*B5
13	**Nettoløn**	**=B11-B12**
14		
15	**Utgifter**	
16	Individspesifikke utgifter (SIFO)	8683
17	Husholdsspesifikke utgifter (SIFO)	=3610
18	Studielån	1600
19	Forsikringar	2000
20	**Sum utgifter**	**=SUMMER(B16:B19)**
21		
22	**Resultat (før lån)**	**=B13-B20**

Ut frå berekningane over har Johannes 18 335,48 kr til rådighet etter at han har betalt alle utgiftene sine. Dersom han kjøper leiligheita vil han betala 10 495 kr på lånet. Då har han 7 840,48 kr att. Dersom leiligheita ligg i eit burettslag må han nok betala felleskostnader i tillegg. Om det er eit sameige kjem nok kommunale avgifter etc. i tillegg. I begge tilfelle må han nok betala for straum. Om ein går ut frå at desse kostar om lag 2000 kr pr månad vil han ha 5 840,48 kr att. Då kan han ha råd til å kjøpa leiligheita.

Men dersom rentene aukar med 3 prosentpoeng, som banken har som krav at han skal klara, vil det bli verre. Då vert årsrenta 8.49%. Bruker CAS for å finna månadsrenta og renteutgiftene første månaden:

1 $\text{Løs}\left(x^{12} = 1.0849\right)$

$\approx \{x = -1.0068, x = 1.0068\}$

2 $0.0068 \cdot 1700000$

$\rightarrow 11560$

Her ser me at berre rentene vil vera 11 560 kr den første månaden. Når ein legg til eit avdrag her vil nok terminbeløpet fort verta i høgaste laget. Med såpass trange marginer kan ein tenka at Johannes ikkje bør/kan kjøpa leiligheita.