

Annales des Concours

# MP

Physique · Modélisation · Chimie

## 2015

Sous la coordination de

**Vincent Freulon**

Professeur en CPGE

Ancien élève de l'école Normale Supérieure (Ulm)

**Alexandre Hilgault**

Professeur en CPGE

Ancien élève de l'école Normale Supérieure (Cachan)

Par

**Claire Besson**

Docteur en chimie

**Olivier Frantz**

Professeur agrégé en école d'ingénieurs

**Vincent Freulon**

Professeur en CPGE

**Alexandre Hilgault**

Professeur en CPGE

**Tom Morel**

Professeur en CPGE

**Valentin Raban**

ENS Lyon

**Jimmy Roussel**

Professeur en CPGE

**Tiphaine Weber**

Enseignant-chercheur à l'université

# Sommaire thématique de physique

2015

e3a PSI Physique-Modélisation				•					•	
e3a PSI Physique et Chimie	•	•	•							
CCP MP Physique			•	•					•	•
CCP MP Physique et Chimie	•	•								
CCP PC Physique	•	•		•		•	•			•
CCP PC Modélisation Phys-Chimie										
CCP PSI Physique et Chimie	•		•	•		•			•	
CCP PSI Modélisation numérique		•								
Centrale MP Physique et Chimie 1		•		•		•			•	
Centrale MP Physique et Chimie 2			•	•					•	
Centrale PC Physique 1				•			•	•		
Centrale PC Physique 2		•	•			•	•			
Centrale PSI Physique et Chimie 1	•		•						•	
Centrale PSI Physique et Chimie 2				•	•	•		•	•	•
Mines MP Physique 1	•					•			•	
Mines MP Physique 2			•			•			•	
Mines PC Physique 1	•					•	•		•	
Mines PC Physique 2	•					•	•	•		
Mines PSI Physique 1	•					•	•		•	
Mines PSI Physique 2	•						•			
X/ENS MP Physique						•		•		
X MP Physique et SI	•					•		•		
X PC Physique A						•				•
X/ENS PC Physique B			•			•			•	
	Thermodynamique générale	Phénomènes di usifs	électrostatique et magnéto	électronique	Conversion de puissance	Mécanique du point et du solide	Mécanique des fluides	Ondes mécaniques et sonores	électromagnétisme	Optique

# Sommaire

11/2

11/2

## Concours Communs Polytechniques

Physique	Une autre voie vers la fusion thermonucléaire. Mesure de l'épaisseur et de l'indice d'une lame. optique, électromagnétisme, électrocinétique	11	29
Physique et Chimie	Les aciers inoxydables et la corrosion. Autour de l'eau. thermodynamique, cristallographie, courbes courant-potentiel, diagrammes E-pH, thermodynamique	47	63

## Centrale-Supélec

Physique et Chimie 1	Loi de Moore. électrocinétique, cristallographie, modèle de Drude, diffusion thermique	78	90
Physique et Chimie 2	Contrôle non destructif et alliage. Intégrité et structure d'alliages d'aluminium en aéronautique. électromagnétisme, électrocinétique, oxydoréduction, cristallographie, solutions aqueuses, courbes courant-potentiel, diagrammes E-pH	108	122

Mines-Ponts

Physique 1	Aspects de la propulsion spatiale. thermodynamique, mécanique, électromagnétisme	137	143
Physique 2	Nature de la gravitation. mécanique, électromagnétisme	157	165
Chimie	Métallurgie du lithium. cristallographie, solutions aqueuses, oxydoréduction, courbes courant-potentiel, thermodynamique	180	186

Polytechnique-ENS

Physique	Propagation d'ondes le long d'une chaîne de pendules couplés mécanique, physique ondulatoire	194	202
Physique et Sciences de l'ingénieur	Ralentissements et freinages. mécanique du point, mécanique du solide, régimes transitoires	222	230

Formulaires

Constantes physiques	251
Constantes chimiques	248
Formulaire d'analyse vectorielle	252
Classification périodique	256

# Sommaire thématique de chimie

2015

e3a PSI Physique et Chimie							•				
CCP MP Physique et Chimie	•				•	•	•				
CCP PC Chimie	•	•	•				•	•	•	•	•
CCP PC Modélisation Phys-Chimie											
CCP PSI Physique et Chimie				•		•					
Centrale MP Physique et Chimie 1	•										
Centrale MP Physique et Chimie 2	•	•		•	•	•					
Centrale PC Chimie	•			•	•				•	•	•
Centrale PSI Physique et Chimie 1	•			•							
Centrale PSI Physique et Chimie 2											
Mines MP Chimie	•	•		•		•	•				
Mines PC Chimie		•	•	•	•				•		
Mines PSI Chimie	•	•		•		•	•				
X/ENS PC Chimie			•	•			•		•		
	Cristallographie	Solutions aqueuses	Chimie chimique	Oxydoréduction	Diagrammes E-pH	Courbes courant-potentiel	Thermodynamique	Mélanges binaires	Chimie organique	Orbitales moléculaires	Chimie de coordination

SESSION 2015

MPPH008



**CONCOURS COMMUNS  
POLYTECHNIQUES**

**EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE MP**

**PHYSIQUE**

**Durée : 4 heures**

*N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a pu prendre.*

**Les calculatrices sont interdites**

Les applications numériques seront réalisées de manière approchée avec un nombre de chiffres significatifs approprié.

## PROBLEME I

**Données**

$$\text{Permittivité électrique du vide } \epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \text{ F.m}^{-1}$$

$$\text{Perméabilité magnétique du vide } \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$$

Pour les calculs numériques, on donne les valeurs approchées

$$\ln 1,1 \approx 0,13 \quad \ln 3 \approx 1,1 \quad \ln 7,1 \approx 2,0 \quad \ln 40 \approx 3,7.$$

Ce problème se divise en quatre parties : la première partie définit l'inductance dans une configuration coaxiale ; la deuxième partie est une étude de documents présentés en annexes sur les puissances pulsées ; la troisième partie s'intéresse au flux magnétique ; la quatrième partie concerne l'optimisation du dispositif de compression de flux. Les trois premières sont totalement indépendantes. La résolution de la quatrième partie nécessite les résultats de la première partie.

## Une autre voie vers la fusion thermonucléaire : les Z machines

### Première partie - Inductance dans une configuration coaxiale

Dans un repère cartésien  $(O, e_x, e_y, e_z)$ , un câble coaxial, considéré comme infiniment long et placé dans un milieu de perméabilité magnétique, est formé de deux armatures cylindriques de

l'axe  $z$  (Figure 1). L'armature intérieure (l'âme) est un cylindre creux de rayon  $a$  ; l'armature extérieure (la gaine) est un cylindre creux de rayon  $b$ . Le courant continu d'intensité  $I$  qui circule dans l'âme dans le sens de  $+e_z$  revient avec la même intensité dans la gaine selon  $-e_z$  ; ce câble constitue ainsi un circuit fermé.

A un point  $M$  de l'espace, on associera les coordonnées cylindriques  $(\rho, \phi, z)$  et la base orthonormée directe cylindrique  $\mathcal{B}_{cyl} = (\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_z)$ .

**I.1.a)** Exploiter les symétries et les invariances de la distribution de courant pour déterminer l'orientation du champ magnétique  $\mathbf{B}(M)$  en tout point  $M$  ainsi que les variables dont il peut dépendre en un point  $M$  quelconque de l'espace.

**I.1.b)** Donner la valeur de  $B(M)$  pour un point  $M$  intérieur à l'âme ( $\rho < a$ ) ou extérieur à la gaine ( $b < \rho$ ). Justifier.

**I.1.c)** Dans la base  $\mathcal{B}_{cyl}$ , exprimer le champ magnétique  $\mathbf{B}(M)$  en tout point  $M$  situé à la distance  $\rho$  ( $a < \rho < b$ ) de son axe.

**I.2.a)** Calculer le flux de  $\mathbf{B}(M)$  à travers la surface rectangulaire  $(PQRS)$  correspondant à une longueur  $l$  du câble, représentée sur la figure 1 et orientée dans le sens de  $+e_\phi$ .

**I.2.b)** Rappeler l'expression générale qui lie le flux de  $\mathbf{B}(M)$  à l'inductance propre (ou coefficient d'auto-inductance) et en déduire l'inductance  $L$  d'une longueur  $l$  du câble en fonction de  $\mu_0, l, a$  et  $b$ .

**I.2.c)** Application numérique pour un câble standard : calculer  $L$  si :  $l = 1$  m,  $a = 1$  mm,  $b = 3$  mm.

**I.2.d)** Application numérique pour un dispositif à compression de flux qui sera développé en troisième et quatrième parties de ce problème : calculer  $L$  si :  $l = 66$  mm,  $a = 1,0$  mm,  $b = 40$  mm.

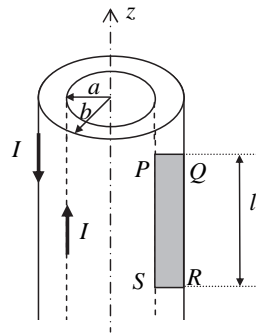


Figure 1 - Représentation schématisée d'un câble coaxial. Surface rectangulaire  $(PQRS)$  comprise entre l'âme et la gaine.

## Deuxième partie - Contexte des hautes puissances pulsées

Etude des documents présentés en annexes 1, 2 et 3 (pages 6 à 9)

**I.3.a)** Décrire en deux à cinq lignes le phénomène physique de striction magnétique et ses causes.

**I.3.b)** Décrire en deux à cinq lignes le phénomène physique de Z-pinch.

**I.3.c)** Expliquer en deux à cinq lignes et à partir de vos connaissances personnelles, en quoi le Z-pinch s'approche des conditions favorables pour la fus ion thermonucléaire contrôlée.

**I.4.a)** Décrire sommairement en une à deux lignes les deux actions nécessaires à un fonctionnement optimal d'une machine à hautes puissances pulsées.

**I.4.b)** Pour une machine capable de stocker une énergie de 1 MJ et de la délivrer en un temps caractéristique de 100 ns, donner la puissance mise en jeu. Comparer avec l'ordre de grandeur de la puissance moyenne délivrée par un réacteur conventionnel de centrale nucléaire.

## Troisième partie - Principe de conservation du flux magnétique et amplification en courant

### Cas d'un circuit inductif indiformable

On considère ici l'évolution libre d'un circuit inductif. Initialement, le circuit inductif est alimenté par un générateur (interrupteur  $K$  ouvert). A l'instant  $t=0$ , le générateur est déconnecté. L'interrupteur  $K$  est fermé. Le circuit inductif est parcouru par un courant d'intensité  $i_0$ . On adopte le modèle simple de l'association en série d'une inductance  $L$  et d'une résistance, comme représenté sur la figure 2.

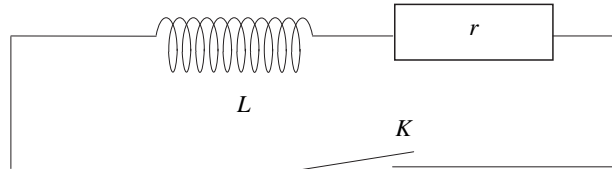


Figure 2 - Circuit inductif modélisé par une inductance et une résistance en série.

- I.5.a) Etablir l'équation différentielle à laquelle obéit l'intensité  $i(t)$  dans le circuit après l'instant initial.
- I.5.b) Résoudre cette équation en tenant compte des conditions initiales.
- I.5.c) Tracer l'allure de  $i(t)$  et identifier sur le graphe le temps caractéristique dont on donnera l'expression en fonction de  $r$  et  $L$ .
- I.5.d) Si on néglige les pertes dans le circuit inductif (donc  $r \rightarrow 0$ ), quelle hypothèse peut-on légitimement faire sur l'intensité ?

On supposera cette hypothèse raisonnable pour la suite de cette troisième partie.

- I.5.e) En déduire la conservation du flux magnétique à travers le circuit inductif au cours du temps pour ce circuit supposé indiformable.
- I.5.f) Conclure sur la force électromotrice d'induction  $\mathcal{E}_i(t)$  de ce circuit.

### Cas d'un circuit déformable

On considère ici un circuit inductif dont on fait varier la géométrie et au sein duquel on néglige les pertes. On remarque alors que  $L(t)$  varie au cours du temps et que  $r \approx 0 \Omega$ . Par le même raisonnement que précédemment, ce circuit est parcouru par un courant d'intensité  $i_0$  à l'instant initial.

- I.6.a) Justifier que la force électromotrice d'induction est nulle à tout instant.
- I.6.b) En déduire la conservation du flux magnétique au cours du temps pour ce circuit déformable.
- I.6.c) En vous appuyant sur l'expression de  $L$  obtenue en I.2.b), proposer une évolution de la géométrie radiale du dispositif (paramètres  $a$  et  $b$ ) permettant d'obtenir une variation de l'intensité du courant bien au-delà de sa valeur initiale.



## CCP Physique MP 2015 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Vincent Freulon (Professeur en CP GE) ; il a été relu par Louis Salkin (Professeur en CPGE) et Cyril Jean (ENS Ulm).

Ce sujet est constitué de deux problèmes indépendants. Le premier porte sur l'électromagnétisme et l'électrocinétique ; il se propose d'étudier une technique envisagée pour réaliser des expériences de fusion nucléaire. Le second porte sur l'optique ; l'objectif est de présenter deux méthodes de détermination de l'indice optique et de l'épaisseur d'une lame de verre.

- Le premier problème débute par l'établissement de l'expression de l'inductance linéique d'un câble coaxial. S'ensuit une analyse documentaire dont l'objectif est d'introduire la technique de fusion qui fait l'objet de la suite du problème. Celle-ci utilise un dispositif dont la géométrie est semblable à celle du câble coaxial. On cherche à comprendre en quoi l'induction magnétique conduit à la compression de la matière, qui est nécessaire à la fusion. On conclut cette étude en s'interrogeant sur les valeurs des paramètres physiques pour optimiser la compression et l'énergie libérée via cette technique de fusion.
- C'est par des rappels sur les lois de Snell-Descartes que s'ouvre le second problème. On établit d'abord la relation de conjugaison d'une lame d'indice optique  $n$ , dans les conditions de Gauss. L'étude d'un viseur horizontal fixe est ensuite proposée. Sur ce viseur, on ajoute un dispositif, utilisé dans les goniomètres, pour effectuer le réglage de la lunette. On montre alors qu'en assemblant ces deux dispositifs, on est capable de mesurer avec une précision accrue le déplacement d'un objet réfléchissant placé devant la lunette. En positionnant une lame de verre devant la lunette, on accède ainsi à son indice optique. Enfin, la dernière partie propose d'effectuer cette mesure en combinant l'observation de franges d'interférence sur un écran et l'analyse d'un spectre cannelé.

Le premier problème est assez facile, contrairement au second où l'assemblage des différents éléments optiques (lentilles, miroirs, lame) et la convention d'orientation des axes optiques compliquent grandement la résolution. Même lorsque l'énoncé ne le demande pas, il est indispensable de prendre le temps de tracer des schémas optiques propres pour faciliter les calculs.

## Indications

### Partie I

- I.1.a L'angle  $\theta$  est l'azimut (noté  $\phi$  ordinaire, en coordonnées cylindriques).  
 I.3.a Montrer que la force de Laplace subie par le conducteur est radiale.  
 I.5.d On néglige les pertes, donc il n'y a plus de dissipation.  
 I.5.e Puisque  $i$  est constant, que dire de  $\rho$  ?  
 I.6.a Utiliser le circuit électrique équivalent au circuit en l'absence de résistance.  
 I.9.c Le coefficient de réflexion  $E$  s'écrit

$$E = E_f - E_0 = \frac{E_f}{E_0} - 1 \quad E_0$$

- I.10.c Le transfert d'énergie est optimum lorsque  $E = E_{\text{disp}}$ .

### Partie II

- II.5 Établir la relation de conjugaison pour chaque dioptré plan en utilisant des relations de trigonométrie.  
 II.8 Décomposer  $\overline{O_2O_1}$  en  $\overline{O_2O_1} = f_2 + \overline{F_2A} + f_1$ .  
 II.11.b Contrairement à ce qui figure dans l'énoncé,  $\overline{M_1L_5} = -100 \text{ mm}$ .  
 II.11.c Introduire  $\overline{F_3}$ , l'image de R par  $L_3$ . Relier  $\overline{F_3}$ ,  $\overline{F_3R}$ ,  $f_3$ , et  $\overline{F_2R}$ ,  $\overline{F_2}$ ,  $f_2$ .  
 II.11.d Il apparaît que  $\overline{O_3R} = f_3$ , donc l'image de R par  $L_3$  est à l'infini.  
 II.11.e Utiliser le caractère afocal du système et appliquer le théorème de Thalès.  
 II.12.a L'énoncé comporte une erreur. Il faut lire « R sert d'objet au système {miroir  $M_0$  + lentille  $L_2$ } ». Dans les conditions d'usage,  $\overline{F_2R} = -\overline{F_2A}$ .  
 II.12.b Cette fois,  $\overline{F_2R} = -\overline{F_2A} - 2e$ .  
 II.13.c On peut accoler le miroir  $M_0$  et la lame, puis tracer la marche d'un rayon lumineux.  
 II.13.d En utilisant la question II.5, montrer que

$$\overline{F_2R} = -\overline{F_2A} - 2e \quad 1 - \frac{1}{n}$$

- II.16.d L'énoncé comporte une erreur, la formule demandée est :

$$-\frac{e}{f} \frac{x}{n^2 - 1/2} =$$

- II.17.a Introduire un entier  $k$  et raisonner sur la  $(k-p)$ -ième longueur d'onde incidente, notée  $\lambda_p$ .

## Problème I

Les notations de la base cylindrique, introduites par l'anglais, sont celles utilisées outre-Atlantique. L'angle représente alors l'azimut (que l'on désigne usuellement par la lettre  $\phi$  en Europe). Il ne faut pas se laisser distraire par ce changement de notation.

**I.1.a** Notons  $M$  un point quelconque de l'espace. Le plan contenant  $M$  et l'axe  $z$  est plan de symétrie pour la distribution de courant. Comme  $\vec{B}$  est un vecteur axial,  $\vec{B}(M)$  est normal à ce plan donc

$$\vec{B}(M) \text{ est porté par } \vec{e}_z.$$

La distribution de courant est invariante par translation selon l'axe  $z$  donc la norme du champ magnétique est indépendante de  $z$ . Il y a également invariance par rotation autour de cet axe donc la norme de  $\vec{B}$  est également indépendante de la coordonnée  $z$ . Il s'ensuit que

$$\vec{B}(M) = B(r) \vec{e}_z$$

Une erreur répandue consiste à croire que l'invariance par rotation autour de l'axe  $z$  implique l'indépendance du vecteur  $\vec{B}$  à la coordonnée  $z$ . Cela est faux : seule la norme de  $\vec{B}$  ne dépend pas de  $z$ . On peut s'en convaincre en remarquant que lorsque  $z$  varie, le vecteur  $\vec{B}$  tourne. Comme sa direction change, le vecteur, lui, n'est pas invariant par rotation autour de  $z$ .

**I.1.b** Soit  $H$  le projeté orthogonal de  $M$  sur l'axe  $z$ . Considérons le cercle  $C$  de rayon  $HM$ , de centre  $H$ , contenu dans le plan perpendiculaire à  $z$  et contenant  $H$ . Ce contour constitue un lacet fermé sur lequel on applique le théorème d'Ampère :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$$

où  $I_{\text{enlacé}}$  est le courant enlacé par  $C$ . On a

$$r < a, \quad I_{\text{enlacé}} = 0$$

$$r > b, \quad I_{\text{enlacé}} = I - I = 0$$

Dans les deux cas,  $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = 0$

Le long de  $C$ ,  $d\vec{r}$  est porté par  $\vec{e}_\phi$  donc

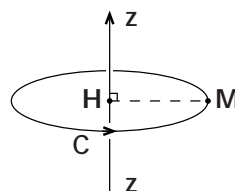
$$\oint_C B(r) d\phi = 0$$

Comme l'intégration sur ce contour s'effectue à  $r = HM$  constant,

$$B(r) \int_C d\phi = B(r) 2\pi = 0$$

ce qui impose

$$\vec{B}(M) = \vec{0} \text{ lorsque } r < a \text{ ou } r > b.$$



I.1.c Ici  $I_{\text{enc}} = I$ ,  $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = B(2\pi a) = \mu_0 I$

Il s'ensuit que

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2} \vec{e}_\theta \quad (\text{pour } a < r < b)$$

I.2.a Notons  $\Phi$  le flux de  $\vec{B}$  à travers la surface considérée. Par définition,

$$\Phi = \oint_{PQRS} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{z_S}^{z_P} dz \int_a^b B(r) dr$$

Injectons l'expression obtenue à la question précédente :

$$\Phi = \frac{\mu_0 I}{2} \int_a^b \frac{dr}{r}$$

Ainsi,

$$\Phi = \frac{\mu_0 I}{2} \ln \frac{b}{a}$$

I.2.b L'inductance propre  $L$  est le coefficient de proportionnalité entre le flux propre et l'intensité qui génère le champ magnétique  $\vec{B}$  propre. Formellement,

$$\Phi = L I$$

De la question précédente, on déduit que

$$L = \frac{\mu_0}{2} \ln \frac{b}{a}$$

I.2.c évaluons l'expression précédente :

$$L = 2 \ln 3 \times 10^{-7} = 2,2 \cdot 10^{-7} \text{ H}$$

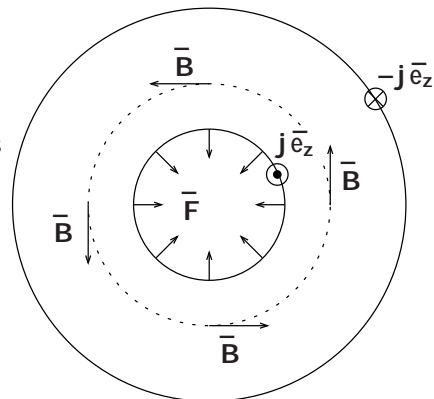
Cette valeur est bien celle de l'inductance d'un câble coaxial de longueur 1 m, utilisée en travaux pratiques.

I.2.d Cette fois,  $L = 1,32 \ln 40 \times 10^{-8} = 4,9 \cdot 10^{-8} \text{ H}$

I.3.a D'après la question I.1.a, le champ magnétique  $\vec{B}(M)$  en point  $M$  du cylindre est selon  $\vec{e}_\theta$ . Notons  $\vec{j} = j \vec{e}_z$  le vecteur densité de courant électrique dans le cylindre. L'élément de volume  $dV$  du cylindre, situé en  $M$ , est alors soumis à la force  $d\vec{F}_{\text{Laplace}}$  :

$$d\vec{F}_{\text{Laplace}} = dV \vec{j} \wedge \vec{B}(M) = -j dV B(M) \vec{e}_r$$

La force de Laplace est radiale et centripète. C'est elle qui est responsable de l'effet de compression décrit dans l'annexe 1. Les forces de Laplace conduisent à une compression du conducteur central.



## CCP Physique et Chimie MP 2015 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Tiphaine Weber (Enseignant-chercheur à l'université) et Tom Morel (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Claire Besson (Docteur en chimie), Yvonne Thibierge (Professeur en CPGE), Alexandre Hillaud (Professeur en CPGE) et Vincent Freulon (Professeur en CPGE).

Ce sujet est constitué de deux problèmes indépendants : le problème de chimie s'intéresse à l'état et du chrome sur la corrosion des aciers ; le problème de physique porte sur l'eau et sur des problèmes de diffusion thermique lorsqu'on l'utilise comme fluide caloporteur.

- Une courte première partie s'intéresse aux propriétés atomiques de l'élément chrome, avec des questions qui restent très classiques.
- La deuxième partie traite de la corrosion des aciers chromés. Ses trois sous-parties indépendantes utilisent le diagramme E-pH du chrome, les courbes courant-potential d'un acier et la structure cristallographique du carbure de titane.
- La troisième et dernière partie de chimie étudie d'un point de vue thermodynamique la formation des carbures de chrome. Après le calcul de constantes d'équilibre, le déplacement d'un équilibre de réaction en fonction des conditions imposées par l'utilisateur est discuté.
- La quatrième partie est consacrée à une étude thermodynamique de l'eau en travaillant d'abord sur le diagramme de phase pression/température puis sur l'allure des isothermes dans le diagramme d'Amagat. Cette partie s'appuie uniquement sur des notions simples de première année.
- Une brève étude d'un échangeur thermique est réalisée dans une cinquième partie. En partant du premier principe de la thermodynamique pour un système ouvert, on détermine le débit massique de l'eau dans l'échangeur puis on calcule le taux de création d'entropie par unité de temps pour ce système ouvert. Une bonne compréhension des systèmes ouverts suffit à traiter cette partie.
- Enfin, la sixième partie s'intéresse à l'isolation thermique d'une canalisation cylindrique en prenant en compte un transfert conducto-convectif sur sa surface latérale. Le but est de trouver la relation entre les puissances dissipées avec et sans isolation. Cette partie repose entièrement sur le cours de diffusion thermique de seconde année.

Dans l'ensemble, ce problème comporte un grand nombre de questions proches du cours auxquelles il est nécessaire de pouvoir répondre rapidement. Il est également à noter qu'un certain nombre de données de l'énoncé pour les parties I.B et I.C, sont inutiles pour résoudre ce problème, ce qui ne doit pas dissuader.

## Indications

### Problème I

- I.2 Établir la configuration électronique du molybdène. Le chrome étant situé dans la même colonne, il possède la même configuration de valence.
- I.6 Calculer le degré d'oxydation du chrome dans chacune des espèces, puis écrire les équilibres entre espèces de même degré d'oxydation afin de déterminer celles qui sont majoritaires en milieu acide.
- I.7 Exprimer les potentiels d'oxydation et de réduction de l'eau en fonction du pH.
- I.8 Dans une eau aérée la présence de dioxygène dissous augmente le potentiel de la solution par rapport à une eau dionisée.
- I.11 La corrosion s'accompagne de la production d'électrons et donc de l'apparition d'un courant.
- I.12 D'après le diagramme potentiel-pH du chrome, quelles réactions peuvent se produire à pH = 6 pour des valeurs élevées de potentiel ?
- I.13 La précipitation de carbure de chrome dans les joints entraîne l'apparition d'une pile de concentration dans le grain.
- I.15 Passer par le calcul de la quantité d'électrons impliqués dans la corrosion pendant l'intervalle de temps  $\Delta t$ .
- I.18 Compter chaque type d'atomes dans la structure représentée.
- I.22 Combiner les réactions (1) et (2).
- I.24 Comment le changement de température modifie-t-il la valeur de  $r_{G_3}$  ?
- I.25 Raisonner sur  $r_{G_3}$ .

### Problème II

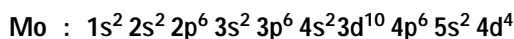
- II.1.c La pression exercée par les patins vaut  $Mg/S$  avec  $M$  la masse de la personne et  $S$  la surface des lames des patins.
- II.4.b Écrire le premier principe des systèmes ouverts pour un système fermé à l'air constitué de l'échangeur et des masses entrante et sortante.
- II.5.a Utiliser le deuxième principe pour le système fermé entre  $t$  et  $t + dt$  en introduisant les entropies entrante et sortante sous la forme
 
$$\sum_k d_k S_k dt$$
- II.8.e Reconnaître une équation différentielle à variables séparables.
- II.9 Introduire l'expression de  $P_{th}$  dans celle de  $P_{th,isolant}$  en utilisant le résultat de la question II.8.f.

## I. Les aciers inoxydables et la corrosion

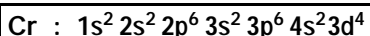
**I.1** Les trois règles quantiques permettant d'établir la configuration électronique d'un atome sont :

- La règle de Klechkowski qui indique que les orbitales atomiques sont remplies par ordre croissant de  $n + l$  et par  $n$  croissant en cas d'égalité.
- Le principe d'exclusion de Pauli, selon lequel deux électrons ne peuvent pas avoir le même quadruplet de nombres quantiques, qui entraîne qu'il ne puisse pas y avoir plus de deux électrons (de spins opposés) par orbitale atomique.
- La règle de Hund qui implique que, dans une sous-couche, le maximum d'orbitales atomiques sont occupées par des électrons de spins parallèles.

**I.2** En appliquant ces règles à l'atome de molybdène, qui contient 42 électrons, on trouve la configuration électronique suivante :

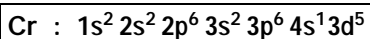


Le chrome étant situé juste au-dessus du molybdène dans la classification périodique, il possède la même configuration électronique de valence (i. e. le même nombre d'électrons dans la couche de plus grand  $n$ , et les sous-couches partiellement remplies) pour la valeur de  $n$  inférieure.



Le chrome contient donc  $Z = 24$  électrons. Il possède 6 électrons de valence et sa couche de  $n = 4$  est partiellement remplie. Il est par conséquent situé dans la quatrième ligne et la sixième colonne de la classification périodique.

**I.3** En réalité, les sous-couches semi-pleines, avec des électrons de spin tous parallèles sont particulièrement stables et la configuration électronique la plus stable pour le chrome correspond à celle où un électron de l'orbitale  $4s$  est promu dans l'orbitale  $3d$  afin de n'avoir que des sous-couches pleines ou semi-pleines.



**I.4** Des isotopes sont des nucléides d'un même élément, c'est-à-dire formés d'un même nombre de protons (même numéro atomique  $Z$ ) mais d'un nombre de neutrons, et donc de nucléons (nombre de masse atomique  $A$ ) différent. Les noyaux des isotopes du chrome sont ainsi constitués de

$^{50}\text{Cr}$ : 24 protons	et	$50 - 24 = 26$ neutrons
$^{52}\text{Cr}$ : 24 protons	et	$52 - 24 = 28$ neutrons
$^{53}\text{Cr}$ : 24 protons	et	$53 - 24 = 29$ neutrons
$^{54}\text{Cr}$ : 24 protons	et	$54 - 24 = 30$ neutrons

**I.5** La masse atomique d'un élément dans son état naturel est la moyenne des masses atomiques des différents isotopes pondérée par leur abondance, soit

$$m_{\text{Cr}} = 52,0 \text{ u.m.a.}$$

Dans la deuxième partie de la question, il faut demander de calculer la masse molaire du chrome naturel en u.m.a. Or l'u.m.a est une unité de masse, et pas une unité de masse molaire. On peut supposer que l'auteur attendait

le calcul de la masse molaire du chrome en  $\text{g.mol}^{-1}$ . Sachant que la masse molaire du carbone  $^{12}\text{C}$  est de  $M(^{12}\text{C}) = 12,0 \text{ g.mol}^{-1}$  et que par définition

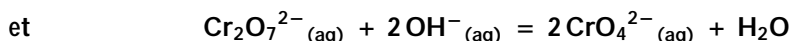
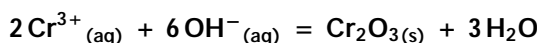
$$1 \text{ u.m.a} = \frac{1}{12} m(^{12}\text{C}) = \frac{M(^{12}\text{C})}{12 N_A}$$

alors  $M_{\text{Cr}} = m_{\text{Cr}} N_A = 52,0 \text{ g.mol}^{-1}$

**1.6** Le diagramme potentiel-pH du chrome fait intervenir 6 espèces dans lesquelles le degré d'oxydation du chrome est

$\text{Cr}_{(\text{s})}$	$\text{Cr}^{2+}_{(\text{aq})}$	$\text{Cr}^{3+}_{(\text{aq})}$	$\text{Cr}_2\text{O}_{3(\text{s})}$	$\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}_{(\text{aq})}$	$\text{CrO}_4^{2-}_{(\text{aq})}$
0	+II	+III	+III	+VI	+VI

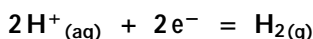
Dans le diagramme, plus le potentiel augmente plus le degré d'oxydation de l'espèce majoritaire (ou existante pour les solides) est élevé. De plus, d'après les équations de formation de  $\text{Cr}_2\text{O}_3$  et  $\text{CrO}_4^{2-}$  à partir, respectivement, de  $\text{Cr}^{3+}$  et  $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$



on voit que ces espèces prédominent en milieu basique. Les domaines correspondent donc aux espèces suivantes :

A	B	C	D	E	F
$\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}_{(\text{aq})}$	$\text{CrO}_4^{2-}_{(\text{aq})}$	$\text{Cr}^{3+}_{(\text{aq})}$	$\text{Cr}_2\text{O}_{3(\text{s})}$	$\text{Cr}^{2+}_{(\text{aq})}$	$\text{Cr}_{(\text{s})}$

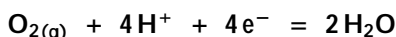
**1.7** Le domaine de stabilité de l'eau est limité pour les potentiels négatifs par la réduction des protons en dihydrogène :



Le potentiel associé à cette demi-réaction électronique s'écrit d'après la loi de Nernst

$$E_{\text{H}^{+}/\text{H}_2} = E_{\text{H}^{+}/\text{H}_2} + \frac{RT}{2F} \ln \frac{a_{\text{H}^{+}}^2}{a_{\text{H}_{2(\text{g})}}} = -0,06 \text{ pH} \quad (\text{en V})$$

Pour les potentiels positifs, la frontière correspond à l'oxydation de l'eau, que l'on écrit, conventionnellement, dans le sens de la réduction du dioxygène :



avec

$$E_{\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}} = E_{\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}} + \frac{RT}{4F} \ln \frac{a_{\text{H}^{+}}^4}{a_{\text{O}_{2(\text{g})}}} = 1,23 - 0,06 \text{ pH} \quad (\text{en V})$$

Les équations de ces frontières faisant intervenir des espèces gazeuses, leur pression partielle est fixée par convention, à la pression standard  $P = 1 \text{ bar}$  pour leur tracé.

**1.8** En milieu anoxique, pauvre en oxygène, le potentiel de l'eau est faible, proche de la limite de stabilité inférieure. Le chrome peut donc s'oxyder en ions  $\text{Cr}^{3+}_{(\text{aq})}$  (domaine C) pour des pH inférieurs à 2,8 et en oxyde solide  $\text{Cr}_2\text{O}_{3(\text{s})}$  (domaine D) pour des pH supérieurs. En revanche, dans une eau aérée le potentiel de la solution



# Centrale Physique et Chimie 1 MP 2015 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Valentin Raban (ENS Lyon) ; il a été relu par Tom Morel (Professeur en CPGE) et Stéphane Ravier (Professeur en CPGE).

Le sujet propose d'étudier différents aspects de la physique des ordinateurs. Il est composé de quatre parties indépendantes.

- La première porte sur un convertisseur analogique-numérique, dont une application typique est de transformer un son en une suite de 0 et de 1 sur un CD. Les raisonnements et les calculs d'électronique restent simples mais il faut prendre le temps de bien comprendre les éléments du montage.
- La deuxième partie étudie les bandes de conduction et de valence du cuivre et du silicium, deux matériaux qui interviennent dans la fabrication des ordinateurs.
- La troisième partie aborde la conduction électrique dans les solides. On y évoque le modèle de Drude, l'effet Hall, l'influence d'un champ magnétique sur la conductivité puis enfin le ferromagnétisme, ce qui donne l'occasion d'utiliser le facteur de Boltzmann, et la magnétorésistance géante, qui est au cœur de la technologie des disques durs.
- La quatrième partie s'intéresse à la température d'un processeur et à son refroidissement par un radiateur à ailettes.

Ce sujet varié et motivant n'est pas aussi long qu'il en a l'air ; une connaissance solide du cours permettrait d'en traiter une bonne partie. Les trois questions non guidées (repérées par une barre verticale dans l'énoncé) nécessitent de discerner les données réellement utiles plutôt que la mise en œuvre d'outils lourds.

## Indications

### Partie I

- I.B.1.a Tracer  $u_2(t)$  aide à visualiser l'approximation proposée.
- I.B.2.a Le compteur s'arrête lorsque  $u_2$  passe par 0. Supposer  $t_2$  .
- I.C.1 Choisir un comparateur et modifier ses entrées, puis généraliser.
- I.E.1 Se souvenir de la gamme des fréquences audibles.
- I.E.2 Penser au critère de Shannon.
- I.F Utiliser les informations apportées par le dialogue est une manière intéressante de conclure sur la nature du filtre. Déterminer ensuite graphiquement la fréquence  $f_0$ . Évaluer enfin la fonction de réponse en  $f_0$  pour obtenir le facteur de qualité.

### Partie II

- II.A.1 La sous-couche 3d est remplie.
- II.B.1 Pour une population d'électrons,  $F$  représente le taux d'occupation des niveaux d'énergie.
- II.C.1.a Utiliser la masse volumique.
- II.C.2.b Représenter  $F$  pour le silicium, pour comprendre l'effet de la température.

### Partie III

- III.A.2.b La direction après le choc est arbitraire.
- III.C.2 On se place en régime stationnaire.
- III.E.1 Remarquer que  $j_y$  est nécessairement nul.
- III.G.2 Utiliser la distribution de Boltzmann.
- III.H Commencer par déterminer la « taille » d'un octet.

### Partie IV

- IV.A.3 La puissance thermique est l'intégrale sur la surface de la densité de courant.
- IV.C Atteindre la température de fusion est un critère de destruction.
- IV.D.1 Ne pas oublier les flux conducto-convectifs sur les faces latérales.
- IV.E.3 Les droites horizontales sur le diagramme  $(P, v)$  sont les isothermes de changement d'état.

# Loi de Moore

## I. Numérisation avant stockage

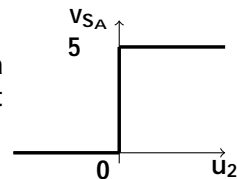
**I.A.1** La période maximale est l'inverse entre deux bips. On a donc, avec cette horloge, une période

$$t = \frac{1}{f_{ck}} = 1 \text{ ns}$$

**I.A.2.a** La masse d'un circuit électrique est la référence des potentiels. Elle est arbitraire puisque seule la tension, qui est une différence de potentiels, est pertinente physiquement. Le potentiel de la masse est choisi nul :  $V_M = 0$ .

Ne pas confondre avec la terre. Cette dernière désigne un point relié physiquement au sol par un câble électrique (par exemple par la fiche d'une prise murale).

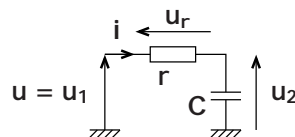
**I.A.2.b** Le point 4 est la masse, donc  $V_{(4)} = 0$ , et on a  $V_{(3)} = u_2$ . Ainsi,  $v_{SA}$  est au niveau bas (0 V) lorsque  $u_2 < 0$  et au niveau haut (5 V) lorsque  $u_2 > 0$ .



**I.A.3** Relions  $u_2$  et  $u_1$ . Le comparateur A a une impédance d'entrée infinie, il n'y a donc aucun courant sur ses branches d'entrée. L'intensité du courant dans la branche de la résistance est la même que celle dans la branche du condensateur. La loi des mailles donne

$$u_1 = u_r + u_2$$

De plus,  $u_r = r i$  et  $i = C \frac{du_2}{dt}$



On obtient donc l'équation différentielle

$$u = r C \frac{du_2}{dt} + u_2$$

qui se réécrit

$$\frac{du_2}{dt} = \frac{u - u_2}{r C} \quad \text{avec} \quad \tau = r C$$

Puisque  $u$  est constante, la solution de cette équation différentielle est

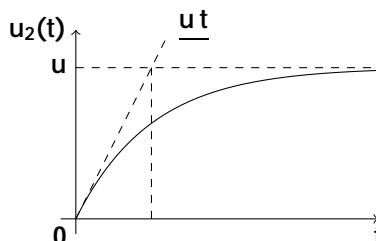
$$u_2(t) = u + U e^{-t/\tau}$$

avec  $U$  une constante. À  $t = 0^-$ , le condensateur est déchargé ce qui implique  $u_2(0) = 0$ , car la tension est continue aux bornes d'un condensateur. Il vient

$$U = -u$$

d'où

$$u_2(t) = u (1 - e^{-t/\tau})$$



**I.B.1.a** Supposons que  $t_1$  , alors nécessairement  $t$  car  $t < t_1$ . Faisons un développement limité d'ordre 1 en  $t/$  :

$$u_2(t) = u \left( 1 - e^{-t/} \right)$$

$$u \left( 1 - 1 - \frac{t}{} \right)$$

$$u_2(t) = \frac{u t}{}$$

ce qui correspond à la tangente à l'origine de la représentation graphique de  $u_2$ . Dans l'équation différentielle, supposer grand devant  $t_1$  revient à négliger  $u_2/$  devant  $du_2/dt$  de sorte que

$$\frac{du_2}{dt} = - \frac{u}{}$$

**I.B.1.b** Intégrons cette équation entre 0 et  $t$ , avec  $u_2(0) = 0$  :

$$u_2(t) = - \frac{1}{} \int_0^t u(t') dt'$$

La sortie  $u_2$  du bloc est donc l'intégrale du signal d'entrée  $u$ .

Le bloc B est un bloc intégrateur.

**I.B.1.c** Entre 0 et  $t_1$ ,  $u_1 = u > 0$  donc, d'après la question I.A.3,  $u_2 > 0$ . Ainsi, la sortie du comparateur est au niveau haut (cf. question I.A.2.b).

$$v_{SA} = 5 \text{ V}$$

**I.B.2.a** à l'instant  $t_1$ , l'interrupteur K bascule et on a désormais  $u_1 = -V_{ref}$ . Supposons  $t_2$  et intégrons la nouvelle équation différentielle de la question I.B.1.a entre  $t_1$  et  $t_1 + t$  :

$$u_2(t_1 + t) = u_2(t_1) - \frac{V_{ref}}{t}$$

La tension est continue aux bornes du condensateur, par conséquent

$$u_2(t_1^+) = u_2(t_1^-) = \frac{u t_1}{}$$

d'où

$$u_2(t_1 + t) = \frac{u t_1}{t} - \frac{V_{ref}}{t}$$

Le comparateur A bascule lorsque  $u_2$  passe par 0 et devient négatif. Le temps  $t_2$  vérifie donc

$$u_2(t_1 + t_2) = \frac{u t_1}{t} - \frac{V_{ref}}{t} = 0$$

soit

$$t_2 = \frac{u t_1}{V_{ref}}$$

Puisque  $u < V_{ref}$ , on a  $t_2 < t_1$  donc  $t_2$  en accord avec l'hypothèse de départ.

## Centrale Physique et Chimie 2 MP 2015 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Tom Morel (Professeur en CPGE) et Claire Besson (Docteur en chimie) ; il a été relu par Jeanne Thibierge (Professeur en CPGE), Fabrice Maquie (Professeur agrégé), Vincent Freulon (Professeur en CPGE) et Alexandre Hillaud (Professeur en CPGE).

Ce sujet, composé de deux parties indépendantes, porte sur la diffusion de défauts dans une structure métallique et sur un alliage aluminium-cuivre.

- La partie de physique est consacrée à l'étude du dispositif de contrôle non destructif par courants de Foucault. Tout d'abord, le sujet détermine l'expression du champ magnétique au voisinage d'une plaque métallique à partir de relevés numériques. Ensuite, on cherche l'expression des courants de Foucault dans la plaque pour en déduire l'impédance du système couplé {bobine+plaque}. Enfin, on mesure cette impédance en utilisant un montage à détection synchrone. Cette partie s'appuie essentiellement sur des notions d'électromagnétisme et d'électrocinétique.
- La partie de chimie traite d'un alliage d'aluminium et de cuivre employés dans la construction aéronautique. L'essentiel des questions concernent divers aspects des réactions redox, incluant diagrammes potentiel-pH, courbes courant-potentiel et dosages redox. Dans plus d'un cas, il est simplement demandé d'équilibrer une réaction. Par ailleurs, deux questions traitent de cristallographie et une de thermochimie.

Pour l'essentiel, ce problème reste très proche du cours et sa structuration en de nombreuses questions indépendantes rend aisé de glaner des points dans les sections les plus faciles. Quelques questions demandent cependant de développer un raisonnement autonome, sans guidage par l'énoncé : c'est le cas par exemple de la question de cristallographie ou de la toute dernière question, dans laquelle est demandé de faire quantitative une courbe courant-potentiel dérivée car montrant une passivation de l'électrode.

## Indications

### Partie I

- I.A.3.b Le champ créé par un solénoïde infini parcouru par un courant d'intensité  $i$  s'écrit  $B = \mu_0 n I$  avec  $n$  le nombre de spires par unité de longueur.
- I.B.2 Dans un conducteur, la loi d'Ohm locale s'écrit  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ .
- I.C.1 L'ALI permet de ne pas prendre en compte la résistance interne du générateur car  $i_+ = 0$ . Pour mesurer  $L$  et  $R$ , on pourra écrire la loi des mailles et calculer la constante de temps et la valeur de la tension en régime permanent.
- I.C.4 La puissance dissipée par le fil est donnée par

$$P_J = \int_V \vec{j} \cdot \vec{E} \, dV$$

- I.C.5.a Écrire l'équation de Maxwell-Ampère sous forme intégrale sur un contour rectangulaire de longueur  $h$  selon  $(Oz)$  et compris entre  $r$  et  $2R_b - r$  avec  $r < R_b$ .
- I.D.4.a Déterminer l'expression de  $u(t)$  en passant par la représentation complexe, puis celle de  $s(t)$ . Montrer que  $s(t)$  s'écrit comme la somme d'un signal continu et de deux signaux sinusoïdaux de pulsations  $\omega$ .
- I.D.4.b La tension  $e_1(t)$  doit être divisée de  $\pm 1/2$  pour pouvoir isoler la partie imaginaire.

### Partie II

- II.A.1 Déterminer la taille des sites interstitiels. Les plus grands sont les sites octaédriques.
- II.B.1.d Utiliser la loi de Nernst appliquée au couple considéré.
- II.C.1.b Quelle serait la pression partielle de dioxygène à l'équilibre ?
- II.C.5.a La couche d'aluminium est infranchissable par les électrons et par les ions.
- II.C.5.c Pour parvenir au résultat demandé, il faut d'abord calculer la quantité d'électrons échangés et en déduire la quantité d'alumine formée. Attention aux unités.

## I. Contrôle non destructif (CND) par courants de Foucault

**I.A.1** Le plan contenant M et l'axe (Oz) est plan d'antisymétrie de la distribution de courant. Le champ magnétique en M est donc contenu dans ce plan. Par conséquent,

$$\vec{B} = B_r(r, z, t) \vec{e}_r + B_z(r, z, t) \vec{e}_z$$

Le système est invariant par rotation autour de l'axe (Oz). La norme du champ magnétique ne dépend donc pas de  $\theta$ , ainsi

$$\vec{B} = B_r(r, z, t) \vec{e}_r + B_z(r, z, t) \vec{e}_z$$

**I.A.2** Les lignes de champ de la première simulation sont celles d'une bobine sans couplage quelconque.

La première carte correspond à la première simulation.

En outre, plus la fréquence augmente, plus les effets inductifs sont importants. Or, ces derniers diminuent la valeur du champ magnétique au centre du solide. Pour la troisième simulation, le champ magnétique est plus intense au centre que dans la deuxième simulation. Ainsi

La deuxième carte correspond à la troisième simulation et la troisième carte correspond à la deuxième simulation.

**I.A.3.a** D'après les profils de la troisième simulation, le champ magnétique au voisinage de la plaque en  $x = 2,5$  cm (ou bien  $z = 6$  cm) vaut

$$B_0 = 3 \cdot 10^{-3} \text{ T}$$

**I.A.3.b** D'après l'allure des lignes de champ, le champ magnétique au centre de la bobine  $\vec{B}_s$  est bien colinéaire à  $\vec{B}_0$ . Or, le champ magnétique créé au centre s'identifie à celui d'un solénoïde infini, d'où

$$\vec{B}_s = \frac{\mu_0 N i_0}{b} \vec{e}_z$$

avec  $N/b$  le nombre de spires par unité de longueur. Lisons sur la figure 5 la valeur du champ magnétique pris au centre de la bobine,

$$B_s = 5,7 \cdot 10^{-3} \text{ T}$$

D'après l'énoncé est le rapport entre les normes  $B_0$  et  $B_s$ . Numériquement,

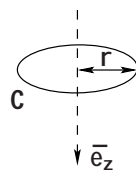
$$= 0,5$$

Avec l'expression de B déterminée précédemment, on trouve

$$B_0 = \frac{\mu_0 N i_0}{b}$$

**I.B.1** Prenons un contour fermé  $C$  de rayon  $r$  dont le vecteur surface est orienté selon  $\vec{e}_z$ . Notons  $S(C)$  l'aire du disque s'appuyant sur  $C$ . L'équation de Maxwell-Faraday s'écrit alors

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \frac{d}{dt} \int_{S(C)} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$



D'après l'annexe 1, le champ électrique est orthoradial, c'est-à-dire que

$$\vec{E} = E(r, t) \vec{e}$$

donc

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = 2\pi r E(r, t)$$

et

$$\frac{d}{dt} \int_{S(C)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{d}{dt} (B_0 \pi r^2 \cos t) = -B_0 \pi r^2 \sin t$$

L'équation de Maxwell-Faraday sous forme intégrale donne finalement

$$\vec{E} = -\frac{B_0 r}{2} \sin t \vec{e}$$

**I.B.2** La plaque est un conducteur ohmique donc, d'après la loi d'Ohm,

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

Ainsi,

$$\vec{J} = -\frac{\sigma B_0 r}{2} \sin t \vec{e}$$

**I.C.1** D'après l'annexe 2, les courants entrant dans les bornes  $+$  et  $-$  sont nuls. Ainsi, la tension aux bornes de la résistance  $R_g$  est nulle. Par conséquent, le potentiel  $V_+$  vaut  $e(t)$ . L'amplificateur fonctionne ici en régime linéaire, d'où

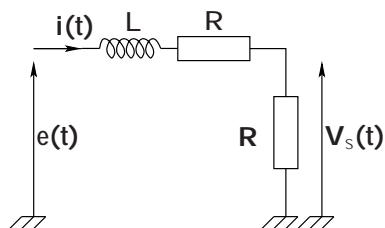
$$V_- = V_+ = e(t)$$

Le courant dans la maille n'est pas nul puisque le courant de sortie de l'amplificateur  $i_s$  est non nul. La loi des mailles donne

$$E = e(t) = (R + R) i + L \frac{di}{dt}$$

Or,  $V_s = R i$ . Par conséquent,

$$\frac{dV_s}{dt} + \frac{R + R}{L} V_s(t) = \frac{R}{L} E$$



Faisons apparaître une constante de temps  $\tau$  et la valeur  $V_{s\lim}$  en  $t \rightarrow \infty$  tels que

$$\tau = \frac{L}{R + R} \quad \text{et} \quad V_{s\lim} = \frac{R E}{R + R}$$

Les courbes en pointillés permettent de connaître la valeur du temps  $\tau$  à 63% et la valeur asymptotique. Numériquement,

$$\tau = 78,4 \mu\text{s} \quad \text{et} \quad V_{s\lim} = 4,90 \text{ V}$$

d'où

$$R = R \frac{E}{V_{s\lim}} - 1 = 10,2 \quad \text{et} \quad L = (R + R) \tau = 40,0 \text{ mH}$$



## Mines Physique 1 MP 2015 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Vincent Freulon (Professeur en CP GE) ; il a été relu par Julien Dumont (Professeur en CPGE) et Stéphane Ravier (Professeur en CPGE).

Cet énoncé présente deux méthodes de propulsion : la propulsion chimique, qui est utilisée par les fusées, et la propulsion par moteur ionique, utilisée pour les satellites et les sondes spatiales.

- La première partie étudie la force de poussée indépendante du mode de propulsion. Son expression est obtenue par la loi de la quantité de mouvement appliquée à un système ouvert. On justifie ensuite l'utilisation de fusées à deux étages, plutôt qu'un seul : cette configuration permet d'atteindre des vitesses plus élevées. On calcule enfin le rendement propulsif du moteur d'une fusée en utilisant des méthodes de calcul adaptées à l'étude des systèmes ouverts.
- C'est la propulsion chimique qui fait l'objet de la seconde partie. Après avoir rappelé le premier principe de la thermodynamique en système ouvert, on détermine la vitesse maximale des gaz de propulsion.
- La troisième partie étudie le mouvement de particules chargées dans un champ électromagnétique. On abandonne la physique des systèmes ouverts pour se concentrer, d'abord, sur le mouvement d'un électron d'un plasma froid, soumis à une onde électromagnétique. C'est l'occasion d'utiliser la force de Lorentz, mais aussi les équations de Maxwell. On en déduit les caractéristiques (puissance, consommation et force de poussée) du moteur ionique. On montre que l'utilisation d'une onde électromagnétique permet d'accélérer les électrons du plasma, mais limite sa densité.
- Dans la courte quatrième partie, on cherche à déterminer si le moteur ionique qui fait l'objet de la partie précédente permet le maintien d'un satellite sur son orbite. Cette partie fait appel au cours de mécanique sur les mouvements à force centrale.

Ce sujet, commun aux trois filières, fait appel aux programmes de première et de deuxième année. Le spectre des thèmes abordés n'est pas très large. Il contient peu de discussions physiques et d'analyses de données, mais fait appel à des méthodes de résolution particulières et à des points de cours. En ce sens, ce sujet constitue un bon problème de révision.

## Indications

### Partie I

- 1 On traite la fusée comme un système ouvert.
- 2 Le gaz qui est éjecté durant  $dt$  fait partie de la fusée à l'instant  $t$ .
- 8 La masse  $m_{c1}$  correspond à la propulsion chimique et  $m_{c2}$  à la propulsion ionique.
- 9 Dans le référentiel terrestre, la vitesse des gaz éjectés est  $\vec{u} + \vec{v}$ . Exprimer  $P_{\text{jet}}$  en fonction de  $D_m$ ,  $v$ ,  $u$  et  $dt$ . Utiliser l'expression de  $F$  obtenue à la question 3 pour obtenir  $P_F$ .
- 10 Faire appel à la formule  $P_F = P_{\text{jet}} + P_F$ .

### Partie II

- 12 Les quantités  $W$ ,  $W$  et  $Q$  sont inchangées pendant la durée  $dt$ .
- 13 Ici,  $(h + e_c) = 0$ . Dans le cas d'un gaz parfait,

$$h = \frac{R}{M(\gamma - 1)} T$$

- 14 Le gaz éjecté est de la vapeur d'eau de masse molaire  $18 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

### Partie III

- 15 La force de Lorentz magnétique peut être négligée. On le justifie en s'appuyant sur une des équations de Maxwell.
- 16 Écrire la loi de la quantité de mouvement. Se placer en régime sinusoïdal forcé.
- 17 Utiliser l'équation de Maxwell-Gauss et la formule d'analyse vectorielle fournie.
- 18 Pour avoir propagation, il faut  $k^2$ . En déduire une propriété pour  $k^2$ .
- 19 Montrer que  $m_e \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -e \vec{v}_e \times \vec{B}_0 u_z$ .
- 20 Remarquer qu'une onde polarisée rectilignement est la somme de deux ondes polarisées circulairement. Repartir de l'expression de la vitesse obtenue à la question précédente et appliquer la méthode de variation de la constante.
- 21 On veut que l'onde se propage dans le milieu lorsque sa pulsation est  $\omega_c$ ; il faut donc que  $k^2(\omega_c) > 0$ .
- 22 L'énergie d'un photon de pulsation  $\omega$  est  $\hbar \omega$ .
- 23 Raisonner par analyse dimensionnelle.
- 24 Traduire la conservation de l'énergie mécanique pour exprimer  $v$  en fonction de  $V_a$ , puis l'expression de  $F$  en fonction de  $D_m$  et  $u$ .
- 26 Se contenter d'un ordre de grandeur pour évaluer  $P_{\text{jet}}$ . On peut, par exemple, utiliser la valeur de  $v$  fournie à la question 8.

### Partie IV

- 30 Calculer la durée d'une révolution (à l'aide de l'analogie de la troisième loi de Kepler). Utiliser la valeur de  $P_{\text{jet}}$  estimée à la question 26.

# Aspects de la propulsion spatiale

## I. Généralité

1 Par définition, la quantité de mouvement  $\vec{p}_f(t)$  de la fusée à l'instant  $t$ , est le produit de sa masse  $m(t)$  à cet instant par sa vitesse  $\vec{v}(t)$  au même instant, dans le référentiel d'étude. Ainsi, en prenant successivement  $t = t$ , puis  $t = t + dt$ , il vient

$$\vec{p}_f(t) = m(t) \vec{v}(t) \quad \text{et} \quad \vec{p}_f(t + dt) = m(t + dt) \vec{v}(t + dt)$$

La masse  $D_m dt$  de gaz, éjectée entre les instants  $t$  et  $t + dt$ , possède une vitesse à l'instant  $t + dt$  notée  $\vec{u}$  par rapport à la fusée. La vitesse de la fusée par rapport au sol est  $\vec{v}(t + dt)$ . Par composition des vitesses, la vitesse du gaz éjecté par rapport au sol est  $\vec{u} + \vec{v}(t + dt)$ . Il s'ensuit que

$$\vec{p}_g = D_m dt \vec{u} + \vec{v}(t + dt) = D_m dt [\vec{v}(t + dt) - \vec{u}]$$

L'énigme est doublement lorsqu'il demande de prendre « pour système la fusée à l'instant  $t$  » (ce qui laisse penser que la fusée est vue comme un système fermé) puis invite à la traiter comme un système ouvert. C'est bien cette seconde approche que l'on choisit.

2 Le système {fusée + gaz} est un système fermé entre  $t$  et  $t + dt$ . On peut donc lui appliquer la loi de la quantité de mouvement dans le référentiel terrestre supposé galiléen. La somme des forces extérieures à ce système se réduit à son poids  $m \vec{g}$ . Notons  $\vec{P}(t)$  la quantité de mouvement de ce système à l'instant  $t$ , dans le référentiel d'étude, alors

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\vec{P}(t + dt) - \vec{P}(t)}{dt} = m \vec{g} \quad ( )$$

Mais  $\vec{P}(t) = \vec{p}_f(t)$  et  $\vec{P}(t + dt) = \vec{p}_f(t + dt) + \vec{p}_g$

Remplaçons les quantités de mouvement par leur expression établie précédemment,

$$\begin{aligned} \vec{P}(t + dt) - \vec{P}(t) &= \vec{p}_f(t + dt) - \vec{p}_f(t) + D_m dt \vec{u} + \vec{v}(t + dt) \\ &= m(t + dt) \vec{v}(t + dt) - m(t) \vec{v}(t) + D_m dt \vec{u} + \vec{v}(t + dt) \end{aligned}$$

Par conservation de la masse  $m(t + dt) = m(t) + D_m dt$ , il apparaît que

$$\vec{P}(t + dt) - \vec{P}(t) = m(t) \vec{v}(t + dt) - m(t) \vec{v}(t) + D_m dt \vec{u}$$

Injectons cette expression dans l'équation ( ),

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} + D_m \vec{u} = m \vec{g}$$

Projetons cette équation sur  $u_z$  et utilisons  $\vec{u} = -u_z \vec{e}_z$ ,

$$m \frac{dv}{dt} = D_m u - m g \quad (1)$$

3 L'expression obtenue à la question précédente montre que la fusée est soumise à deux forces : l'une est son poids et l'autre correspond au terme  $D_m u$ , qui s'identifie à la poussée des gaz éjectés. Cette force est bien orientée vers le haut. Ainsi,

$$F = D_m u$$

Pour que la fusée décolle, il faut que l'accélération soit positive. On en déduit que

$$D_m u > mg$$

Puisque  $m(t)$  est une fonction décroissante de  $t$ , cette condition peut aussi s'écrire en utilisant  $m(0) = m_0$ ,

$$D_m u > m_0 g$$

4 L'impulsion spécifique  $I_s$  est la durée pendant laquelle  $m$  est éjectée, donc

$$D_m = \frac{m}{I_s}$$

car le débit est constant. La poussée est supposée égale au poids utilisé pour éjecter  $I_s$ , si bien que

$$D_m u = \frac{m}{I_s} u = mg$$

d'où

$$I_s = \frac{u}{g}$$

On doit s'assurer rapidement que  $I_s$  possède bien la dimension d'un temps :

$$[I_s] = \frac{L \cdot T^{-1}}{L \cdot T^{-2}} = T$$

5 Divisons l'équation (1) par  $m(t)$  et séparons les variables,

$$dv = \frac{D_m u}{m(t)} dt - g dt$$

Comme

$$dm = -D_m dt$$

Il vient

$$dv = -\frac{dm u}{m} - g dt$$

Intégrons entre l'état initial en  $t = 0$  et l'état instantané  $t$  :

$$v(t) - v(0) = u \ln \frac{m_0}{m(t)} - g(t - 0)$$

d'où

$$v(t) = u \ln \frac{m_0}{m(t)} - g t$$

On peut également résoudre cette question en s'appuyant plus explicitement sur la conservation de la masse :  $m(t) + D_m t = m_0$ . Cela conduit à intégrer l'équation :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{D_m u}{m(t)} - g = \frac{D_m u}{m_0 - D_m t} - g$$

qui conduit au même résultat.

## Mines Physique 2 MP 2015 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Tom Morel (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Vincent Freulon (Professeur en CPGE) et Jimmy Roussel (Professeur en CPGE).

Ce problème est consacré à l'astrophysique, plus précisément à la gravitation.

- La première partie présente l'expérience d'Eötvös qui fut l'une des premières à tenter de mesurer une différence entre la masse grave et la masse inerte. Le dispositif utilise un pendule de torsion avec frottements mécaniques dont on cherche à mesurer les positions d'équilibre en prenant en compte le caractère non galiléen du potentiel terrestre.
- La deuxième partie cherche à améliorer le modèle de gravitation de Newton pour rendre compte de certaines observations dans les galaxies spirales : l'étude des vitesses des étoiles de la Voie lactée conduit à une contradiction entre théorie et observations, qui est levée en introduisant la matière noire. Cependant, face à l'absence de mesures permettant d'en vérifier l'existence, un second modèle de gravitation, basé sur une théorie phénoménologique ne faisant pas intervenir la matière noire, est introduit. Cette partie repose entièrement sur l'analogie électrostatique/gravitation.
- L'étude de la gravitation sur l'antimatière est au cœur de la troisième partie, qui présente un projet d'expérience. On commence par étudier une technique de piégeage de particules chargées reposant sur l'utilisation conjointe d'un champ électrostatique et d'un champ magnétostatique. Ces particules sont utilisées pour produire de l'antimatière. Les particules d'antimatière créées sont abandonnées dans le champ gravitationnel. Une étude statistique des durées de chute devrait permettre de mesurer l'intensité du champ ressenti par l'antimatière.

Le sujet est très bien construit et représentatif des thèmes du concours Mines-Ponts. À travers des exemples tirés de la physique moderne, il donne l'occasion de faire le point sur la mécanique, notamment le programme de première année.

## Indications

### Partie I

- 6 Tracer la droite  $T^2 = f(L^2)$  et obtenir par régression linéaire le coefficient directeur qui est lié à  $G$ .
- 7 Utiliser l'expression de la force d'inertie d'entraînement pour une rotation uniforme autour d'un axe fixe

$$\vec{f}_i = m \omega^2 \overrightarrow{HM}$$

avec H le projeté du point M sur l'axe de rotation.

- 9 La divergence du faisceau lumineux correspond au double de l'angle  $\alpha$ .

### Partie II

- 11 Par analogie avec l'électrostatique,  $\vec{E} = -\text{grad } V$ .
- 12 Appliquer le principe fondamental de la dynamique en coordonnées polaires pour une trajectoire circulaire.
- 18 Le vecteur  $\vec{g}$  est homogène à une accélération d'après le principe fondamental de la dynamique.
- 19 Si la divergence d'un vecteur est nulle, ce dernier peut alors s'exprimer en fonction du rotationnel d'un autre vecteur.

### Partie III

- 22 Appliquer la divergence à la force  $\vec{F} = -q \text{grad } V$  et utiliser l'équation de Poisson dans le vide.
- 23 Les équipotentielles sont définies par  $dV = 0$  et les lignes de champs sont orthogonales aux équipotentielles.
- 25 Les expressions, pour lesquelles le discriminant de l'équation caractéristique est soit positif, soit nul, sont divergentes en l'infini.
- 26 Faire un développement limité des pulsations à l'ordre le plus bas en  $v_0/c$ .
- 27 En moyenne, on a  $\langle \dot{z}^2 \rangle = \frac{1}{2} \dot{z}^2$  avec la pulsation du mouvement selon (Oz).
- 28 Pour un gaz parfait homogène et isotrope,

$$v = \sqrt{\frac{k_B T}{m_p}}$$

- 29 Avec un niveau de confiance à 95%, les incertitudes s'écrivent

$$h = 2 \sigma_h \quad \text{et} \quad v = 2 \sigma_v$$

# Nature de la gravitation

## I. L'expérience d'Étienne

- 1 Le principe d'inertie s'écrit de la façon suivante :

Il existe des référentiels privilégiés appelés référentiels galiléens, dans lesquels tout corps isolé est animé d'un mouvement rectiligne uniforme.

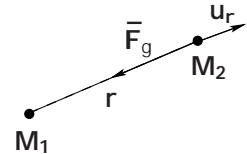
Dans un référentiel galiléen, le principe fondamental de la dynamique stipule que pour un point matériel  $M$  de masse inerte  $m_i$  et de vitesse  $\vec{v}$  soumis à des forces extérieures  $\vec{F}_{\text{ext}}$  :

$$\frac{d(m_i \vec{v})}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}}$$

Variationnellement, il faut noter d'appeler ces principes I es première et deuxième lois de Newton. En effet, un principe ne se démontre pas théoriquement mais n'est pas contredit par l'expérience. En mathématiques, un principe est équivalent à un postulat. Alors qu'une loi est par essence démontrable.

- 2 La force de gravitation  $\vec{F}_g$  qu'exerce  $M_1$  de masse  $m_1$  sur  $M_2$  de masse  $m_2$  est donnée par

$$\vec{F}_g = -\frac{G m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_r$$



- 3 Calculons le travail du couple :

$$W = M_0 \cdot d\theta$$

$$= M_0 d\theta$$

$$W = -C (\theta - \theta_0) d\theta$$

Il existe donc une énergie potentielle  $E_p$  telle que  $W = -dE_p$  d'où

$$E_p(\theta) = \frac{C}{2} (\theta - \theta_0)^2$$

Par définition, l'énergie cinétique est

$$E_{c,S} = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$$

Par conséquent

$$E_m = E_{c,S} + E_p = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + \frac{C}{2} (\theta - \theta_0)^2$$

- 4 Le théorème de l'énergie mécanique s'écrit

$$\frac{dE_m}{dt} = P_{\text{frot}} = -\dot{\theta}^2$$

Avec l'expression de la question précédente, on arrive après simplification gauche et droite par  $\dot{\theta}^2$

$$J \ddot{\theta} + C (\theta - \theta_0) = 0$$

5 Les oscillations faiblement amorties imposent d'être en régime pseudo-périodique. Le discriminant de l'équation caractéristique doit être strictement négatif, c'est-à-dire

$$\Delta = 4CJ < 0$$

Les solutions de cette équation sont donc

$$r_{\pm} = \frac{-\pm i \sqrt{4JC - \gamma^2}}{2J}$$

On en déduit l'expression de  $x(t)$  :

$$x(t) = x_0 + \exp\left(-\frac{\gamma}{2J}t\right) \left[ A \cos\left(\frac{\sqrt{4JC - \gamma^2}}{2J}t\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{4JC - \gamma^2}}{2J}t\right) \right]$$

La valeur en l'infini de  $x(t)$  donne

$$x_0 = 0$$

La pseudo-période  $T$ , qui est la période des fonctions cosinus et sinus, s'écrit

$$T = 2\pi \times \frac{2J}{\sqrt{4JC - \gamma^2}}$$

Mettons  $4JC$  en facteur sous la racine et introduisons  $\gamma_0$ ,

$$T = 2\pi \frac{J}{C} \times \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\gamma_0^2}{4JC}}}$$

La période propre  $T_0$  est définie pour  $\gamma = 0$  d'où

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{\gamma_0^2}{4JC}}}$$

Comme  $\gamma_0 \ll 1$ , développons à l'ordre le plus bas non nul en  $\gamma_0^2$  :

$$T = T_0 \left( 1 + \frac{\gamma_0^2}{8JC} \right)$$

L'erreur relative s'écrit  $\frac{T - T_0}{T_0} = \frac{\gamma_0^2}{8JC}$

Pour avoir  $T/T_0$  inférieur à 1%, il vient  $\gamma_0^2 < 0,14$ .

6 D'après la question précédente, prenons  $T = T_0$ . Avec l'expression de  $J$  donnée dans l'énoncé on obtient

$$T^2 = \frac{4}{C} (J_0 + 2J_1 + 2mL^2)$$

Récrivons la relation précédente sous la forme

$$T^2 = \frac{8}{C} mL^2 + \frac{4}{C} (J_0 + 2J_1)$$

ce qui fait apparaître une droite sous la forme

$$T^2 = aL^2 + b \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} a &= 5,3 \cdot 10^7 \text{ s}^2 \cdot \text{m}^{-2} \\ b &= 715 \text{ s}^2 \end{aligned}$$

Le coefficient directeur  $a$  permet alors d'avoir la valeur numérique de  $C$ , c'est-à-dire

$$C = 3,0 \cdot 10^{-7} \text{ J} \cdot \text{rad}^{-1}$$



## Mines Chimie MP 2015 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Alexandre Hillaert (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Tiphaine Weber (Enseignant-chercheur à l'université) et Fabrice Maquie (Professeur agrégé).

L'épreuve de chimie de la filière MP au concours Mines-Ponts s'intéresse globalement à un thème chimique. Cette année le sujet aborde le lithium au cours de trois petites parties indépendantes.

- La première partie est traditionnelle, la traditionnelle question sur le remplissage électronique commence le sujet puis l'on s'intéresse à la structure cristallographique du lithium ainsi qu'à quelques propriétés comme l'abondance relative des isotopes ou la réaction d'oxydation avec l'eau. La dualité thermodynamique/cinétique est illustrée pour cette réaction que l'on doit interpréter en traçant l'allure des courbes courant-potentiels.
- La deuxième partie concerne le traitement du minerai naturel de lithium en vue de la production de lithium métallique par électrolyse, que l'on étudie dans la dernière partie. L'objectif est ici d'obtenir les ions lithium. On s'intéresse à la dissolution du minerai ainsi qu'à la précipitation des impuretés. Une étude thermodynamique de la dissolution du carbonate de lithium clôt cette partie.
- La troisième et dernière partie traite de l'électrolyse du chlorure de lithium. On établit classiquement les réactions aux électrodes et la tension minimale nécessaire en nuanciant l'aide des phénomènes de surtension. Pour finir, on calcule la consommation électrique lors du procédé.

La durée de l'épreuve est très courte mais le sujet de cette année peut être traité entièrement dans le temps imparti. Les thèmes abordés sont variés et les questions restent simples, dans l'esprit de l'enseignement de la chimie en filière MP. Notons que l'énoncé est construit à l'aide de plusieurs documents issus d'un article sur la métallurgie du lithium. Il convient d'en retirer quelques données nécessaires à la résolution.

Comme toujours cette épreuve est un très bon entraînement pour les sessions futures car les sujets de chimie dans cette filière sont toujours construits de manière analogue et les thèmes sont récurrents.

## Indications

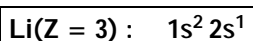
- 1 Le numéro atomique du lithium s'obtient à l'aide de la notation  ${}^7_3\text{Li}$ .
- 2 L'énergie d'ionisation (notion hors programme) est l'énergie nécessaire pour arracher un électron à l'état gazeux. Le lithium est petit.
- 4 La masse molaire d'un isotope est voisine de son nombre de nucléons.
- 9 Si la thermodynamique est favorable mais que la réaction ne se fait pas, quel facteur entre en jeu ?
- 10 Faire apparaître une surtension pour la réduction de l'eau sur cathode de lithium.
- 11 L'acide sulfurique libère 2 protons. Pour 100 g de solution, il n'y a que 93 g d'acide sulfurique (la solution est 23 % en masse).
- 12 La chaux est un composé basique. Utiliser les ions hydroxyde  $\text{OH}^-$ .
- 13 Calculer la concentration en  $\text{Al}^{3+}$  dans les deux cas et appliquer la relation de Guldberg et Waage en présence de solide.
- 16 Utiliser l'évolution de la solubilité avec la température : on constate qu'elle est plus importante à froid.
- 18 Relier la solubilité à la constante  $K_s$  et intégrer la relation de Van't Hoff entre 293 et 373 K.
- 19 Il y a toujours oxydation à l'anode et réduction à la cathode.
- 20 La cathode est reliée au pôle – lors d'une électrolyse.
- 22 On forme 2 fois moins de dichlore que de lithium et la masse molaire du dichlore est 10 fois plus importante.
- 23 Exprimer le travail électrique en fonction de la charge ayant circulé et de la tension d'électrolyse. Par ailleurs, la réaction met en jeu un électron pour un atome de lithium.

## Métallurgie du Lithium

1 Les trois règles de remplissage des électrons sont :

- Règle de Klechkowski : on remplit les sous-couches par ordre croissant de  $n + l$ , avec  $n$  croissant en cas d'égalité.
- Règle de Hund : lorsqu'une sous-couche est disponible, on place les électrons dans un maximum d'orbitales avec des spins parallèles.
- Principe d'exclusion de Pauli : deux électrons ne peuvent pas être décrits par le même quadruplet de nombres quantiques ( $n, l, m, m_s$ ).

La configuration électronique du lithium est



Le lithium appartient à la première colonne de la classification périodique : c'est un alcalin.

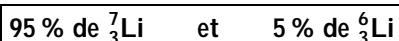
Le numéro atomique du lithium est  $Z = 3$  comme le montre la notation  ${}^6_3\text{Li}$ .

2 Lors de l'ionisation d'un atome alcalin, l'électron arraché appartient à une sous-couche de type  $ns^1$  (avec  $n \geq 2$  car l'hydrogène n'est pas un alcalin). Pour le lithium, on a  $n = 2$ , l'électron arraché est alors le plus proche du noyau parmi tous les alcalins. L'attraction est donc la plus forte et l'énergie d'ionisation la plus élevée de la famille.

L'énergie d'ionisation n'est plus au programme depuis l'entrée en vigueur de la réforme de 2013. On signale ici que, par définition, l'énergie d'ionisation est l'énergie requise pour arracher un électron à un atome gazeux.

3 Le lithium est un réducteur puissant (son potentiel standard d'oxydoréduction est faible), il peut être utilisé dans la fabrication de piles.

4 La masse molaire d'un isotope est voisine de son nombre de nucléons, en grammes par mole, ce qui donne ici 6 et 7  $\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$  pour les deux isotopes du lithium. Comme la masse molaire vaut 6,951  $\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$ , on déduit la composition



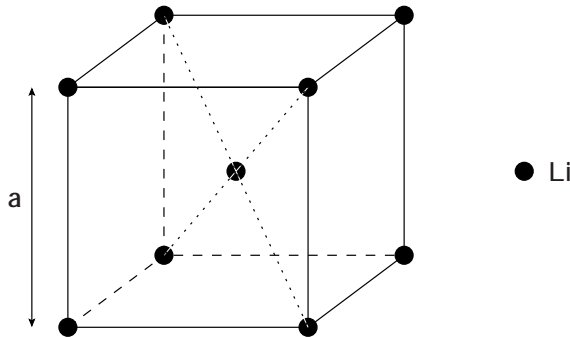
Le calcul est ici très simple, on peut donner le résultat directement. Pour le retrouver, on pose, en notant  $x$  la fraction molaire de  ${}^7_3\text{Li}$ ,

$$M = 6,951 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1} = 7x + 6(1 - x) = x + 6$$

d'où  $x = 0,95$

En conséquence, l'abondance naturelle de  ${}^7_3\text{Li}$  est de 92,5 %.

5 La maille cubique centrée du lithium est



Le nombre d'atomes de lithium dans cette maille est

$$Z = 8 \times \frac{1}{8} + 1 \times 1 = 2$$

La coordinence est le nombre de premiers voisins d'un atome dans la structure. Le lithium occupant un site cubique (les voisins sont aux 8 sommets),

$$\text{Li}|\text{Li} = [8]$$

6 Dans une structure cubique centrée, il y a contact sur la diagonale du cube :

$$\frac{a\sqrt{3}}{2} = 2R$$

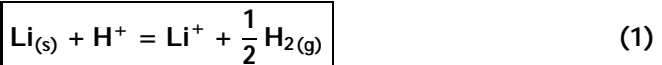
en notant  $a$  le paramètre de maille et  $R$  le rayon métallique d'un atome de lithium. Cela donne

$$a = \frac{4R}{\sqrt{3}} \quad 350 \text{ pm}$$

La calculatrice n'étant pas autorisée pour cette épreuve, voici comment l'application numérique peut se faire de tête :

$$a = \frac{4 \times 155}{\sqrt{3}} = \frac{16 \times 155}{7} \quad 16 \times 22 = 352 \text{ pm} \quad 350 \text{ pm}$$

7 La réaction entre le lithium et l'eau est une réaction d'oxydation. L'eau est réduite par le lithium en dihydrogène, le lithium est oxydé en cation lithium(I).



8 La constante d'équilibre de cette réaction est telle que

$$\ln K = \frac{nF}{RT} (E_{\text{ox}} - E_{\text{red}})$$

La réaction échangeant un seul électron, on a  $n = 1$ . L'oxydant est  $\text{H}^+$ , le réducteur est  $\text{Li}_{(s)}$  et  $RT \ln 10 / F = 0,06 \text{ V}$  à  $25^\circ \text{C}$ . Il vient donc

$$\log K = \frac{1}{0,06} (0 + 3) = 50$$

d'où

$$K = 10^{50}$$

Comme  $K \gg 1$ , on s'attend à ce que la réaction soit quantitative.

## X/ENS Physique MP 2015 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Jimmy Roussel (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Tom Morel (Professeur en CPGE) et Vincent Freulon (Professeur en CPGE).

L'épreuve porte sur la propagation d'ondes le long d'une chaîne de pendules couplés par l'intermédiaire d'un câble de torsion. L'épreuve est effectuée dans l'approximation du milieu continu et comprend deux parties.

- La première partie débute par l'étude de deux pendules couplés puis on établit les équations pour une chaîne de  $N$  pendules couplés dans le cadre des petits angles. L'approximation des milieux continus permet de montrer que le système est le siège d'une propagation dispersive si la fréquence dépasse une valeur critique. En outre, une analogie électrique permet d'établir l'expression de l'impédance mécanique associée à la chaîne de pendules.
- La seconde partie aborde un aspect plus original puisque l'on quitte l'approximation linéaire pour envisager des solutions ondulatoires localisées se propageant sans déformation, que l'on appelle « solitons ».

L'épreuve fait essentiellement appel à la mécanique (mouvement d'un solide autour d'un axe fixe) et à la physique ondulatoire (équation de propagation, relation de dispersion, vitesse de phase, vitesse de groupe). Bien que la partie sur l'analogie électro-mécanique soit hors programme, l'ensemble de l'épreuve laisse beaucoup de place à l'analyse qualitative des phénomènes et elle est de ce fait conforme à l'esprit du programme. La difficulté majeure est sans doute la longueur du sujet et l'absence de résultats intermédiaires, ce qui exigeait une grande autonomie de la part des candidats. Enfin, comme les années précédentes, l'usage de la calculatrice était interdit. Les applications numériques sont dans ce cas particulièrement valorisées.

## Indications

### Partie 1

- 2 Utiliser le théorème du moment cinétique projeté suivant l'axe des  $x$ .
- 4.d Remarquer, par exemple, que dans le mode symétrique, chaque pendule n'est soumis qu'à un seul couple de torsion.
- 5 Montrer que la constante de torsion varie comme  $1/a$  puis effectuer une analyse dimensionnelle.
- 6 Remarquer que le  $n$ -ième pendule subit le couple  $-C(\theta_n - \theta_{n-1})$  de la part de la portion de chaîne située à sa gauche et  $-C(\theta_n - \theta_{n+1})$  de la part de l'autre portion située à sa droite.
- 8 Exprimer le fait que le terme d'ordre trois est petit devant le terme d'ordre deux, lors du développement de  $(x \pm a, t)$ .
- 13.a Dans l'équation d'onde, remplacer  $\theta$  par la fonction proposée puis déterminer la relation entre  $\omega$  et  $k$  qui permet l'existence de telles ondes harmoniques.
- 14.a La vitesse de phase vaut  $\omega/k$  et la vitesse de groupe  $d\omega/dk$ .
- 15 Analyser le caractère complexe ou réel du nombre  $K$ .
- 17 Appliquer le théorème du moment cinétique à un pendule soumis à  $M$ .
- 19 La chaîne électrique trouvée peut-elle transmettre une tension continue ?
- 20 Exprimer le couple que subit le  $n$ -ième entre deux pendules puis effectuer une approximation continue.

### Partie 2

- 30.a Imaginer un point matériel libre au voisinage du sommet du potentiel. À partir de son mouvement, déduire l'évolution de  $F(z)$ .
- 35.c Déterminer la longueur d'onde en estimant  $\lambda$ , l'extension spatiale du soliton.
- 37.a Utiliser la fonction  $F_s(z)$  trouvée à la question 34.b puis identifier.
- 40.b Effectuer un raisonnement énergétique.
- 41 Utiliser la conservation de l'énergie et de la vitesse.

## 1. Étude d'une chaîne de pendules couplés

1 Les frottements dissipent l'énergie des pendules et entraînent un phénomène d'amortissement des oscillations qui s'effectue sur une durée caractéristique. Par exemple, dans le cas d'un oscillateur harmonique soumis à un faible frottement visqueux, les oscillations s'amortissent sur une durée  $\tau = Q/\omega_0$  où  $Q$  désigne le facteur de qualité et  $\omega_0$  la pulsation propre. Si  $Q$  est grand devant la période des oscillations, cela signifie que l'énergie stockée est faiblement dissipée à chaque période de sorte que les effets dissipatifs sont négligeables.

En pratique, on compare la période d'oscillation  $T$  avec le temps d'amortissement  $\tau$ . Il est alors légitime de négliger les phénomènes dissipatifs si  $T \ll \tau$ .

2 Plaçons le pendule de gauche dans le référentiel du laboratoire que l'on considère galiléen. Ce système est soumis à l'action de la pesanteur et aux actions de contact dues aux portions de cylindre situées de part et d'autre du pendule. Appliquons le théorème du moment cinétique en projection suivant l'axe  $(z)$  orienté par  $\vec{e}_x$ . Le moment du poids selon  $\vec{e}_x$  vaut

$$M_P = -mg \sin \alpha_1 \quad \text{avec} \quad \sin \alpha_1 \approx \alpha_1$$

Quant à l'action du cylindre, la portion de gauche étant en torsion d'angle  $\alpha_1$ , elle produit un couple de rappel  $\tau_g = -C \alpha_1$  alors que la portion de droite exerce le couple  $\tau_d = -C(\alpha_1 - \alpha_2)$ . Le théorème du moment cinétique s'écrit donc

$$\frac{dL}{dt} = -mg \alpha_1 - C \alpha_1 - C(\alpha_1 - \alpha_2)$$

Enfin, le moment cinétique du pendule vaut  $L = I \dot{\alpha}_1 = m l^2 \dot{\alpha}_1$ , d'où

$$m l^2 \ddot{\alpha}_1 = -mg \alpha_1 - C \alpha_1 - C(\alpha_1 - \alpha_2)$$

En reproduisant le même raisonnement sur le pendule de droite, on trouve

$$m l^2 \ddot{\alpha}_2 = -mg \alpha_2 - C \alpha_2 - C(\alpha_2 - \alpha_1)$$

Ainsi, le mouvement des deux pendules est régi par le système d'équations différentielles couplées suivant :

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha}_1 + (g^2 + 2C^2) \alpha_1 - C^2 \alpha_2 &= 0 \\ \ddot{\alpha}_2 + (g^2 + 2C^2) \alpha_2 - C^2 \alpha_1 &= 0 \end{aligned} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} g &= \frac{g}{l^2} \\ C &= \frac{C}{m l^2} \end{aligned}$$

$g$  représente la pulsation à laquelle chaque pendule oscille sous l'effet de son poids en l'absence de couplage alors que  $C$  est celle à laquelle oscille chaque pendule en l'absence de pesanteur dans le mode symétrique ( $\alpha_1 = \alpha_2$ ).

3.a Sommons (resp. soustrayons) les deux équations différentielles précédentes et introduisons la variable  $\alpha_+$  (resp.  $\alpha_-$ ). On obtient

$$\ddot{\alpha}_+ + (g^2 + C^2) \alpha_+ = 0 \quad \text{et} \quad \ddot{\alpha}_- + (g^2 + 3C^2) \alpha_- = 0$$

3.b Ce changement de variables permet de transformer deux équations différentielles couplées en un système de deux équations différentielles indépendantes.

4.a) Lorsque  $\alpha = 0$ ,  $\theta_1 = \theta_2 = \alpha/2$ .

Les deux pendules oscillent de façon harmonique, synchrone et en phase. On parle de mode symétrique.

En revanche, lorsque  $\alpha = 0$ ,  $\theta_1 = -\theta_2 = -\alpha/2$ .

Les deux pendules oscillent de façon harmonique et synchrone, mais sont en opposition de phase ( $\theta_1 = -\theta_2$ ). On parle de mode antisymétrique.

4.b) Dans le mode symétrique, les deux angles vérifient l'équation de l'oscillateur harmonique

$$\ddot{x} + (g^2 + c^2)x = 0 \quad \text{avec} \quad x = \theta_1 \text{ ou } \theta_2$$

La pulsation est

$$\omega_{1,1} = \sqrt{g^2 + c^2}$$

De même, pour le mode antisymétrique, on obtient l'équation d'un oscillateur harmonique pour  $\theta_1$  et  $\theta_2$  mais cette fois

$$\omega_{1,-1} = \sqrt{g^2 + 3c^2}$$

On peut montrer que les oscillations libres de chaque pendule se décomposent en une somme de deux oscillations harmoniques de pulsation  $\omega_{1,1}$  et  $\omega_{1,-1}$ , dont les amplitudes dépendent des conditions initiales. Cette propriété se généralise aux systèmes de  $N$  oscillateurs harmoniques couplés.

4.c) D'après la question précédente,  $\theta_1$  et  $\theta_2$  vérifient la même équation différentielle : dans chaque mode propre, les deux pendules oscillent à la même pulsation.

4.d) Reprenons l'équation de la question 2, en supposant  $\theta_1 = \theta_2$  à chaque instant (mode symétrique). Analysons le mouvement du pendule de gauche caractérisé par l'angle  $\theta_1$ . Sur sa gauche le cylindre exerce un couple de torsion  $-C\theta_1$ . En revanche, de l'autre côté le cylindre ne présentant aucune torsion ( $\theta_2 - \theta_1 = 0$ ), il ne produit aucun couple. Ainsi le mouvement du pendule est régi par

$$m l^2 \ddot{\theta}_1 = -mg\theta_1 - C\theta_1$$

soit 
$$\ddot{\theta}_1 + (g^2 + c^2)\theta_1 = 0$$

d'où

$$\omega_{1,1} = \sqrt{g^2 + c^2}$$

On peut retrouver également la pulsation  $\omega_{1,-1}$  du mode antisymétrique en procédant de la même manière. Dans ce mode,  $\theta_1 = -\theta_2$  de sorte que la portion centrale présente une torsion angulaire égale à  $\theta_1$ . Au total, le couple de torsion que subit le pendule de gauche vaut  $-3C\theta_1$  et le théorème du moment cinétique appliqué à ce pendule donne

$$m l^2 \ddot{\theta}_1 = -3C\theta_1 - mg\theta_1$$

soit 
$$\ddot{\theta}_1 + (g^2 + 3c^2)\theta_1 = 0$$

d'où

$$\omega_{1,-1} = \sqrt{g^2 + 3c^2}$$



# X Physique et Sciences de l'ingénieur MP 2015

## Corrigé

Ce corrigé est proposé par Olivier Frantz (Professeur agrégé en école d'ingénieurs) ; il a été relu par Julien Dumont (Professeur en CPGE) et Emmanuel Bourgeois (Professeur en CPGE).

Ce sujet comporte deux problèmes indépendants sur le thème du freinage.

- Les parties 1 et 2 traitent des marées et de la synchronisation des périodes de la Terre et de la Lune. On présente d'abord la cause du freinage du système Terre-Lune en évaluant la force de marée qui s'exerce sur la Lune. Le problème se poursuit par des calculs différentiels qui ont pour but d'évaluer, à la fin de la synchronisation, la période de rotation, la distance Terre-Lune et la durée du processus.
- La partie 3 aborde différents aspects du freinage d'un véhicule sur un pont. Au début, elle s'intéresse au régime transitoire oscillant d'un pont constitué de trois tabliers reliés par des joints élastiques modélisés par des ressorts. Il s'agit d'identifier les modes propres de vibration de la structure. La fin propose d'évaluer la distance de freinage d'une voiture et de comparer un modèle de roue ponctuel à un modèle en trois dimensions. Cette partie traite essentiellement de mécanique du solide.

Ce sujet pourrait aussi bien appeler le programme de physique que celui de sciences de l'ingénieur. Il est long mais pas trop ; il nécessite une bonne compréhension du cours et de l'aisance dans les calculs. La première partie pose des questions qualitatives qui testent le sens physique.

Signalons que la première partie est reprise quasiment identique d'un sujet posé au concours Mines-Ponts en 1989. Ceci explique peut-être que les questions 7, 9, 10 et 18 utilisent des notions hors programme.

## Indications

### Partie 1

- 1 Exprimer les forces gravitationnelle et d'inertie subies par  $G_1$ .
- 2 La cohésion du satellite est liée à la différence d'intensité entre la force de marée et la force gravitationnelle, attractive, entre  $G_1$  et  $G_2$ .
- 4 Exprimer la force gravitationnelle en fonction du vecteur  $\vec{TP}$  et de la distance  $TP$  puis développer  $TP$  au premier ordre en  $r/d$ .
- 5 Évaluer rapidement la direction de la force en prenant un angle au hasard (45°).

### Partie 2

- 6 L'énoncé indique la réponse.
- 8 Comparer les termes cinétiques en utilisant les masses et distances données.
- 9 Le moment cinétique d'une masse  $m$  ponctuelle, située à la distance  $d$  de  $G$  et tournant à la vitesse  $\omega$ , vaut  $L_G = m d^2 \omega$ .
- 10 Une seule force s'applique sur la Terre, en mouvement de rotation autour du point  $G$ . Projeter la relation fondamentale de la dynamique sur  $r$ .
- 11 Le moment cinétique d'un système isolé est constant. Déterminer celui du couple Terre-Lune.
- 12 Récupérer l'énergie potentielle grâce à la question 10 pour obtenir une expression simplifiée de l'énergie mécanique. Déterminer celle-ci.
- 15 La troisième loi de Kepler et le moment cinétique permettent d'obtenir des relations entre les distances et vitesses de rotation initiales et finales. Effectuer une résolution approchée de l'équation obtenue en évaluant l'ordre de grandeur de chacun de ses termes.

### Partie 3

- 18 La définition du coefficient ne figure pas au programme :  $\alpha = \frac{1}{d} \frac{d}{dt}$ .
- 20 La quantité  $x_i$  est l'écart à la position d'équilibre du tablier numéroté  $i$ .
- 21 À l'équilibre, la somme des forces est nulle.
- 24 Utiliser les symétries du problème pour gagner du temps. Des combinaisons linéaires des lignes du système permettent de faire ressortir  $s = x_1 + x_3$  et  $d = x_1 - x_3$ .
- 25 Une valeur propre est évidente. Il reste une matrice  $2 \times 2$  associée au couple  $(x_2, s)$ . On peut obtenir ses valeurs propres à l'aide de sa trace et son déterminant.
- 27 Si le freinage est instantané, le véhicule et le tablier constituent un système isolé dans un référentiel galiléen.
- 28 Transposer l'équation différentielle dans le domaine de Laplace.
- 30 Montrer qualitativement qu'il n'y a pas de terme d'ordre 0 en  $\alpha$  en analysant le mouvement du deuxième tablier lorsque  $\alpha$  tend vers 0.
- 31 Exprimer l'équilibre vertical et celui des moments de force au point  $G$  puisque le véhicule ne bascule pas. En limite de glissement,  $T = f N$ .
- 32 La divergence est constante.
- 36 Appliquer le théorème de l'énergie cinétique.

## 1. Marées et synchronisations d'oscillateurs

1 Soient  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  les vecteurs unitaires portés respectivement par  $Ox$  et  $Oy$ , représentés sur la figure 1c de l'annexe 2 qui sont les axes du référentiel d'inertie, en translation circulaire autour de  $T$ . Le point  $G_1$  subit de la part de la Terre la force gravitationnelle

$$\vec{F}_G = -\frac{GMm}{(d-b)^2} \mathbf{x}$$

Puisqu'on néglige, en raison de leur faible importance, les effets inertiels associés à la rotation propre, la force d'inertie se réduit aux effets d'entraînement du centre  $O$  de la Lune. Elle a pour expression

$$\vec{F}_I = m \, r^2 d \mathbf{x}$$

Développons au premier ordre en  $b/d$  la force  $\vec{F}_G$

$$\begin{aligned} \vec{F}_G &= -\frac{GMm}{d^2} \frac{1}{(1-b/d)^2} \mathbf{x} \\ &= -\frac{GMm}{d^2} \left(1 + 2\frac{b}{d}\right) \mathbf{x} \end{aligned}$$

Avec  $r^2 = GM/d^3$ , la force d'inertie devient quant à elle

$$\vec{F}_I = \frac{GMm}{d^2} \mathbf{x}$$

Ainsi, la force totale  $\vec{F}_{T1} = \vec{F}_G + \vec{F}_I$ , subie par  $G_1$ , s'écrit

$$\vec{F}_{T1} = -\frac{2bGMm}{d^3} \mathbf{x}$$

Le terme d'ordre 0 est nul : dans le référentiel tournant, la Lune est immobile.

L'expression  $r^2 = GM/d^3$  est fournie par l'annexe 2. Pour la retrouver, on peut utiliser le principe fondamental de la dynamique sur la Lune, relative à son centre. Comme la Lune est animée d'un mouvement circulaire uniforme, son accélération se réduit à

$$\vec{a} = -\frac{v^2}{d} \mathbf{r} = -d \, r^2 \mathbf{r} \quad (\text{avec } v = d \, \dot{\theta})$$

La seule force qui s'exerce sur la Lune est l'attraction terrestre :

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{d^2} \mathbf{r}$$

Avec  $m \vec{a} = \vec{F}$ , on conclut immédiatement que  $r^2 = GM/d^3$ .

2 Le point  $G_1$  subit l'attraction de  $G_2$ , ce qui contribue à la cohésion de la Lune :

$$\vec{F}_{21} = \frac{Gm^2}{(2b)^2} \mathbf{x}$$

La force de marée, bilan de l'écart entre les forces gravitationnelles et d'inertie sur le point  $G_1$ , est responsable de l'éloignement de la Lune et de sa décroissance. Le satellite se brise si la force de cohésion est plus faible que la force de marée soit lorsque

$$F_{21} < F_{T1}$$

puis

$$\frac{G m^2}{(2b)^2} < \frac{2b G M m}{d^3}$$

et donc

$$\frac{m}{(2b)^3} < \frac{M}{d^3}$$

Il existe par conséquent une limite en distance à laquelle le satellite se brise :

$$d < d_m = 2b \left( \frac{M}{m} \right)^{1/3}$$

3 Calculons pour le système Terre-Lune,

$$d_m = 7,15 \cdot 10^6 \text{ m}$$

Cette distance limite est très inférieure à la distance Terre-Lune ( $d = 380 \cdot 10^6 \text{ m}$ ) et donc compatible avec l'existence de la Lune.

L'hypothèse d'une Lune déchirée de la Terre est incompatible avec ce modèle. En effet, au moment de la séparation, la distance Terre-Lune aurait été inférieure à  $d_m$ , aboutissant à la dislocation de la Lune et à la formation d'un anneau, comme ceux qui existent en orbite de Saturne par exemple.

4 Exprimons la force de marée qui s'exerce au point P, somme de la force de gravitation et de la force d'inertie d'entraînement,

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{TP^3} \vec{TP} + \frac{GMm}{d^2} \vec{x}$$

Or,

$$\vec{TP} = \vec{TO} + \vec{OP} = d\vec{x} + r\cos\alpha\vec{x} + r\sin\alpha\vec{y}$$

donc

$$TP^3 = [(d + r\cos\alpha)^2 + (r\sin\alpha)^2]^{3/2}$$

Un développement au premier ordre en  $r/d$  conduit à

$$TP^3 \approx (d^2 + 2r\cos\alpha)^{3/2}$$

et donc

$$\frac{1}{TP^3} \approx \frac{1}{d^3} \left( 1 - \frac{3r}{d} \cos\alpha \right)$$

Par conséquent, en ne conservant que les termes du premier ordre en  $r/d$ ,

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \frac{GMm}{d^2} \left( -\vec{x} - \frac{r}{d} \cos\alpha \vec{x} - \frac{r}{d} \sin\alpha \vec{y} \right) \left( 1 - \frac{3r}{d} \cos\alpha \right) + \frac{GMm}{d^2} \vec{x} \\ &= \frac{GMm}{d^2} \left( -\vec{x} - \frac{r}{d} \cos\alpha \vec{x} - \frac{r}{d} \sin\alpha \vec{y} + \frac{3r}{d} \cos\alpha \vec{x} + \dots \right) \end{aligned}$$

$$\vec{F} = \frac{GMm}{d^3} (2r\cos\alpha \vec{x} - r\sin\alpha \vec{y})$$

5 La force qui s'exerce sur le point P possède deux composantes, qui dépendent de l'angle  $\alpha$ . Elle est toujours dirigée vers l'axe (Ox) et s'oppose à l'axe (Oy). La conséquence de cette force est la déformation de la Lune, le manteau déformable étant attiré vers l'axe Terre-Lune. Un bourrelet équatorial apparaît. Deux points opposés correspondent à une différence d'angle de  $\pi$  dans la force exprimée à la question 4 et donc à deux forces opposées en P et P'.

