量子信息与量子密码

第一次作业

姓名：　刘炼　　　　　　　　　　　　　学号：　202128013229021

Date

习题1.

根据描述，知：

$$\hat{F}_a^2 = \lambda_a(\hat{I}+\vec{n}_a\cdot\hat{\sigma})\lambda_a(\hat{I}+\vec{n}_a\cdot\hat{\sigma})$$

$$= \lambda_a^2[\hat{I}^2+2\vec{n}_a\cdot\vec{\sigma}+(\vec{n}_a\cdot\hat{\sigma})^2]$$

$$= \lambda_a^2[2(\hat{I}+\vec{n}_a\cdot\hat{\sigma})]$$

$$= 2\lambda_a^2\hat{F}_a$$

∴ $\hat{F}_a = \frac{1}{2\lambda_a^2}\hat{F}_a^2$

∴ $\langle\psi|\hat{F}_a|\psi\rangle = \frac{1}{2\lambda_a^2}\langle\psi|\hat{F}_a^2|\psi\rangle$

≥ 0

而 $\sum_a\hat{F}_a = \sum_a\lambda_a(\hat{I}+\vec{n}_a\hat{\sigma})$

$= \sum_a\lambda_a\hat{I}+\sum_a\lambda_a\vec{n}_a\hat{\sigma}$

$= \hat{I}+0$

$= \hat{I}$

∴得证.

2、解，由题意知，根据泡利算符，~~可以得~~

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\vec{n} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$

当有 $\vec{\sigma}\cdot\vec{n} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\varphi} \\ \sin\theta e^{i\varphi} & -\cos\theta \end{pmatrix}$.

考虑本征值 $\lambda_1 = 1$，即 $\sigma_n = 1$

则对应的本征态：　即有 $\vec{\sigma}\cdot\vec{n} - I = 0$

可求得本征态为 $|\lambda_1\rangle$

最终求得：$|\lambda_1\rangle\langle\lambda_1| = \frac{1}{2}(I + \vec{\sigma}\cdot\vec{n})$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\cos\theta & \sin\theta e^{-i\varphi} \\ \sin\theta e^{i\varphi} & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\therefore \rho(\sigma_n = 1) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\cos\theta & \sin\theta e^{-i\varphi} \\ \sin\theta e^{i\varphi} & 1-\cos\theta \end{pmatrix}$$

同理，可求得在本征值 $\lambda_2 = -1$ 时：

$$\rho(\sigma_n = -1) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-\cos\theta & \sin\theta e^{-i\varphi} \\ \sin\theta e^{i\varphi} & 1+\cos\theta \end{pmatrix}.$$

在 $|\sigma_n = 1\rangle$ 情况下，

$\langle\sigma_x\rangle = \langle\varphi|\sigma_x|\varphi\rangle = tr(\rho\sigma_x) = \sin\theta\cos\varphi$

$\langle\sigma_y\rangle = \langle\varphi|\sigma_y|\varphi\rangle = tr(\rho\sigma_y) = \sin\theta\sin\varphi$

$\langle\sigma_z\rangle = \langle\varphi|\sigma_z|\varphi\rangle = tr(\rho\sigma_z) = \cos\theta$.

∴得证.

3、证明如下：

~~知~~ ~~由~~ 可将 $\vec{\sigma}$ 分解为 $\vec{\sigma}_x$、$\vec{\sigma}_y$ 和 $\vec{\sigma}_z$.

知：$\vec{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\vec{\sigma}_x^2 = I$, $\vec{\sigma}_y = I$, $\vec{\sigma}_z^2 = I$

其中 $\vec{\sigma}_x \vec{\sigma}_y = -i\vec{\sigma}_z$, ~~Q~~ $\vec{\sigma}_y \vec{\sigma}_z = -i\vec{\sigma}_x$, $\vec{\sigma}_z \vec{\sigma}_x = -i\vec{\sigma}_y$.

知 $(\vec{\sigma}\cdot\vec{n}_1)(\vec{\sigma}\cdot\vec{n}_2) = (n_{1x}\vec{\sigma}_x + n_{1y}\vec{\sigma}_y + n_{1z}\vec{\sigma}_z)(n_{2x}\vec{\sigma}_x + n_{2y}\vec{\sigma}_y + n_{2z}\vec{\sigma}_z)$

$$
\begin{aligned}
&= (n_{1x}n_{2x}\vec{\sigma}_x^2 + n_{1y}n_{2y}\vec{\sigma}_y^2 + n_{1z}n_{2z}\vec{\sigma}_z^2) \\
&\quad + (n_{1y}n_{2z} - n_{1z}n_{2y})\,\vec{\sigma}_y\vec{\sigma}_z \\
&\quad + (n_{1z}n_{2x} - n_{1x}n_{2z})\,\vec{\sigma}_z\vec{\sigma}_x \\
&\quad + (n_{1x}n_{2y} - n_{2x}n_{1y})\,\vec{\sigma}_x\vec{\sigma}_y \\
&= (\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2)\,I + i\,\vec{\sigma}\,(\vec{n}_1\times\vec{n}_2)
\end{aligned}
$$

∴ 得证.

4. ~~证如下~~ 证明如下：

① 若复合系统 AB 的一个态为直积态 $|\psi\rangle$，那么 $|\psi\rangle$ 是复合系统 AB 的纯态，可以表示为 $|\psi\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |I_B\rangle$.

而根据 Schmidt 定理 $|\psi\rangle = \sum_i \lambda_i |i_A\rangle|i_B\rangle$，可知 ρ^A 的本征值和 ρ^B 本征值相同，而 ρ^B 本征值为 1，∴ $\lambda_i = 1$.

从而可知，由于为直积态，$\rho^A = tr_B(|\psi\rangle\langle\psi|)$

② 若 ρ^A 为纯态，即引入一个系统 B，构成复合系统，那么，

$|\psi\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |I_B\rangle$ ，此时 $|\psi\rangle$ 为直积态，并且

$|\psi\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |I_B\rangle$，表示 $\lambda_i = 1$，故得证.

Date

5\. (1)

$$A = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2)

$$A = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3)

$$A = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin^2\theta & -\sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

∴对所有情况， $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$