

# 量子信息与量子密码 课程报告

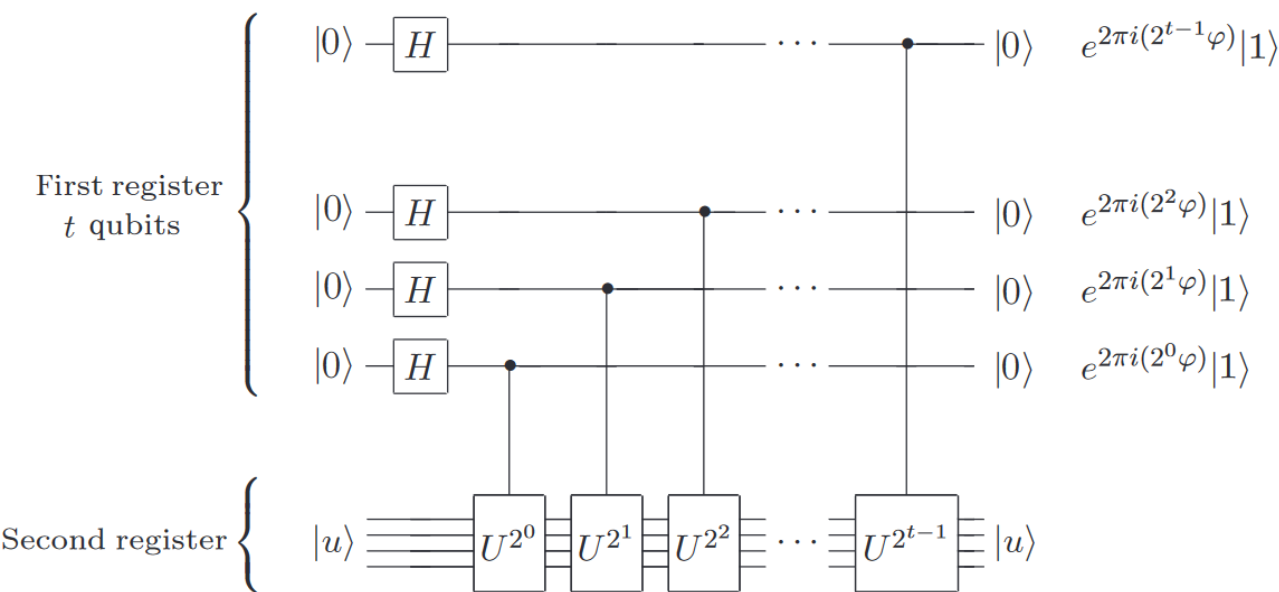
## 从经典量子算法到量子机器学习

本报告主要探索了一些经典的量子计算的算法，以及其在典型的量子机器学习中的应用。 其中的部分算法是在课程汇中涉及到的，这里会进行一定的略过，并突出一些没有讲解过的经典算法，例如HHL 算法，并给出两个经典机器学习算法的量子实现（QPCA 和 QSVM），来分析这些基础算法在其中的应用。

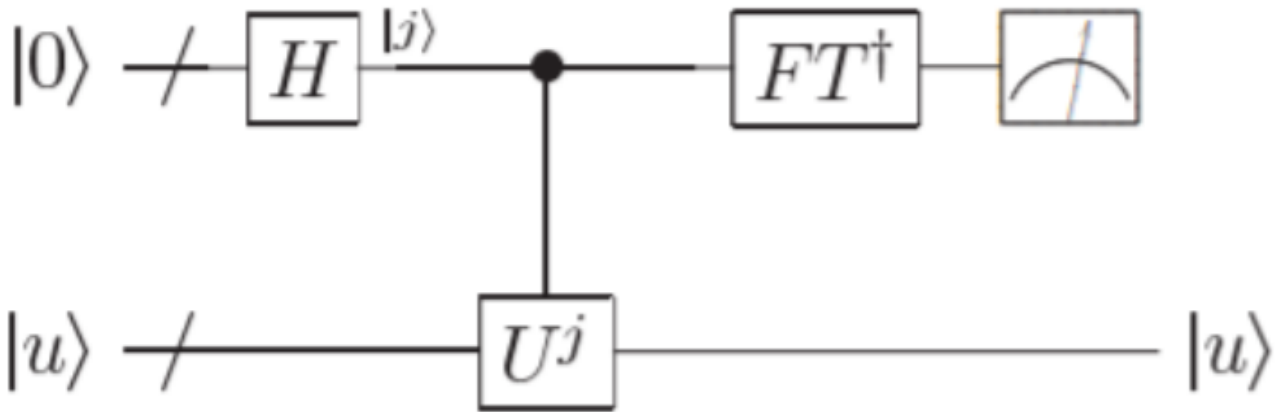
### HHL 算法

#### 相位估计

相位估计算法是课上已经讲解过的一个算法，其是许多量子算法的关键，其第一个阶段的框架如下：



总线路图如下所示：



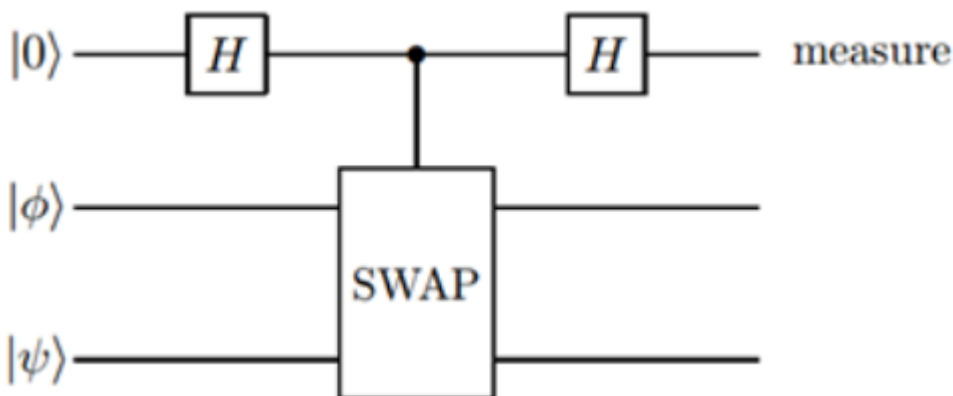
$$\frac{1}{2^{t/2}} \sum_{j=0}^{2^t-1} e^{2\pi i \varphi j} |j\rangle |u\rangle \rightarrow |\tilde{\varphi}\rangle |u\rangle$$

上述路线实现的变换为

最后在计算基下的测量将会给出 $|\varphi\rangle$ 的估计值。相位估计通过两个阶段实现，**第一阶段提取了目标酉算子的特征值放到了量子态的概率幅中，第二阶段提取了概率幅中的相位放到了量子态的基态中**。最终输出的就是估计的相位，由这个相位就可以进一步求出输入矩阵的特征值。在相位估计中，实际上是通过QFT算法的逆运算，将量子态的概率幅值存储到基态中，以便通过后续测量得到相位值。

## Swap test

在课程中，介绍了经典的两个纯态量子之间进行交换的量子电路，如下图所示，其主要是用来计算内积模的平方，以表明两个纯量子态的接近程度。

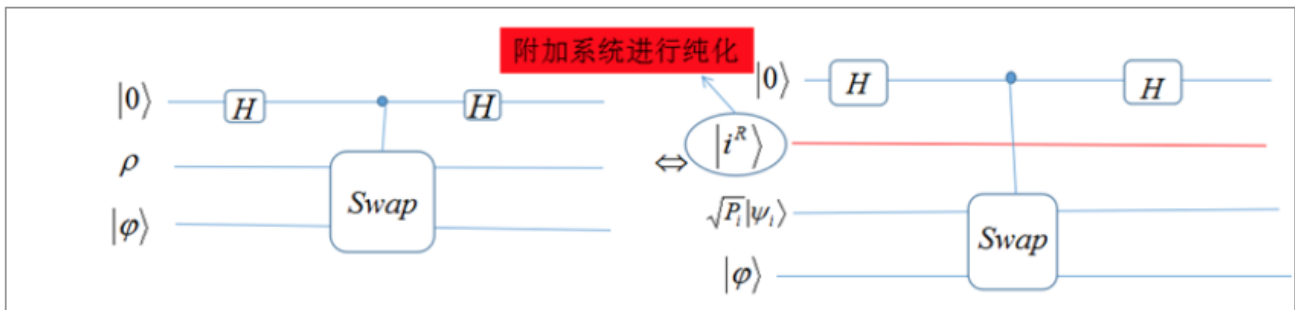


其基本的计算过程如下所示：

$$\begin{aligned}
|0\rangle_1 |\phi\rangle_2 |\psi\rangle_3 &\xrightarrow{H_1} \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_1 + |1\rangle_1) |\phi\rangle_2 |\psi\rangle_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_1 |\phi\rangle_2 |\psi\rangle_3 + |1\rangle_1 |\phi\rangle_2 |\psi\rangle_3) \\
&\xrightarrow{Swap_{2,3}} \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_1 |\phi\rangle_2 |\psi\rangle_3 + |1\rangle_1 |\psi\rangle_2 |\phi\rangle_3) \\
&\xrightarrow{H_1} \frac{1}{2} \{ (|0\rangle_1 + |1\rangle_1) |\phi\rangle_2 |\psi\rangle_3 + (|0\rangle_1 - |1\rangle_1) |\psi\rangle_2 |\phi\rangle_3 \} \\
&= \frac{1}{2} |0\rangle_1 (|\phi\rangle_2 |\psi\rangle_3 + |\psi\rangle_2 |\phi\rangle_3) + \frac{1}{2} |1\rangle_1 (|\phi\rangle_2 |\psi\rangle_3 - |\psi\rangle_2 |\phi\rangle_3)
\end{aligned}$$

可以看到，用基态 $|0\rangle$  在最后测量为0的概率为  $\frac{1}{2}(1 + |\langle \phi | \varphi \rangle|^2)$ ，而用基态 $|1\rangle$  测量得到1的概率为  $\frac{1}{2}(1 - |\langle \phi | \varphi \rangle|^2)$ 。所以可以用这样的方法来计算内积。

而要进行混合态与纯态的swap test 操作，需要对混合态进行纯化操作，相较于上面的电路图而言，其具体为：



可以看到，对于混合态的密度算子  $\rho = \sum_i p_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$  而言，附加一个系统R 对其进行纯化得到：

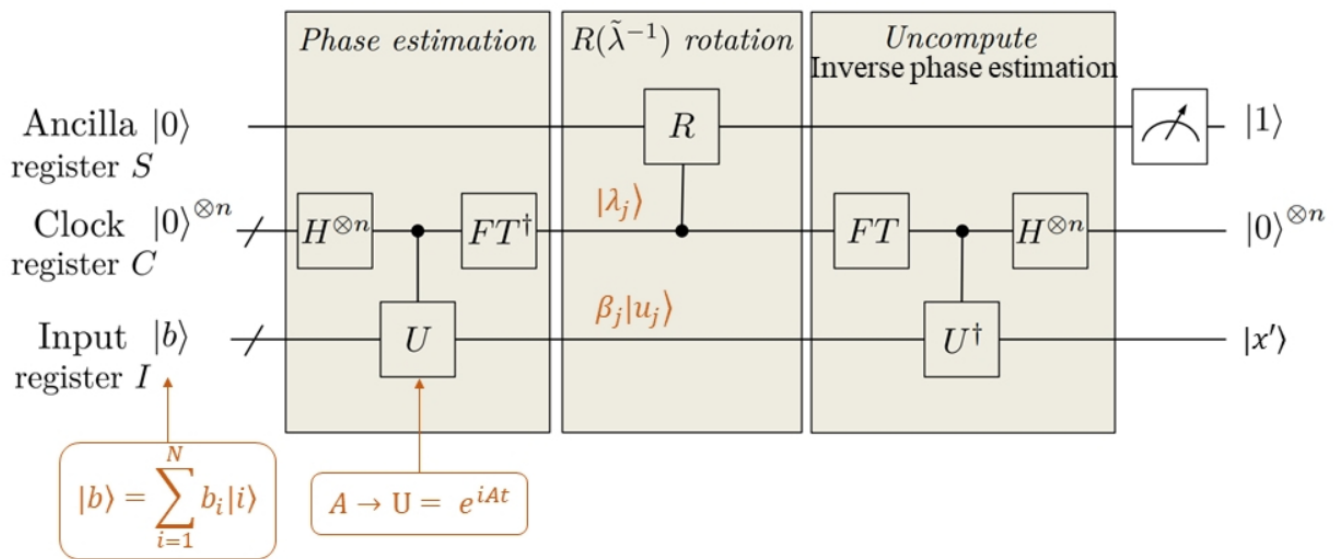
$$|\rho R\rangle = \sum_i \sqrt{p_i} |\varphi_i\rangle |i^{R_i}\rangle$$

而后的操作就和之前的swap test 操作是一致的。

## HHL 算法

### 基本框架

HHL 算法[1] 是在2009年由 Harrow 等人提出的一个经典量子算法，用于求解线性方程的问题。**线性系统是很多科学和工程领域的核心，由于HHL算法在特定条件下实现了经典算法的\*指数加速\*效果**，能够在数据处理、机器学习、数值计算等场景具有广泛应用。



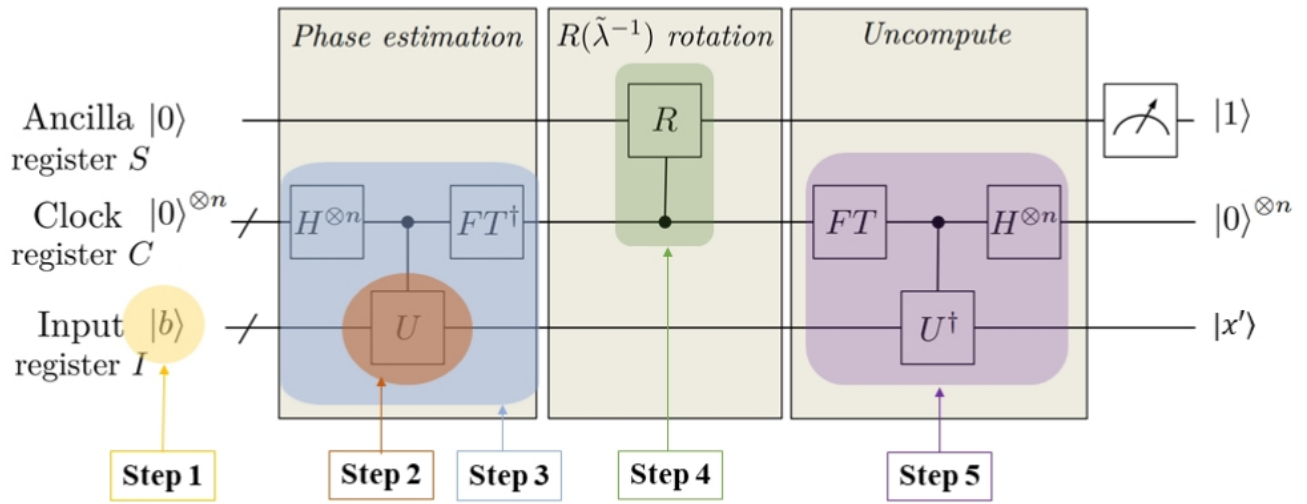
经典的求解线性方程的问题，一般表示为：输入一个  $n \times n$  的矩阵  $A$  和一个  $n$  维向量  $b$ ，输出  $n$  维向量  $x$ ，满足  $Ax=b$

对于HHL量子算法而言，对输入和输出有一定的限制，包括如下：

- 1) 对输入  $A$  和  $b$  的要求：首先要求  $n \times n$  的矩阵  $A$  是一个厄米矩阵，其次输入  $b$  是一个单位向量。
- 2) 对输出  $x$  的形式的要求：算法的输出如上图中电路最后一行所示，为  $|x'\rangle$ ，其依旧存放在底部寄存器中（即输出  $x$  和 输入  $b$  是在同一个寄存器中）。底部寄存器存放的是一个蕴含了向量  $x$  的量子态。这里的“蕴含”的意思是我们并不能读出这个  $x$  的确切值是什么。不过我们能够得到一个关于  $x$  的整体特性，比如我们能够通过一个算子  $M$ ，得到一个关于  $x$  期望值的一个评估： $\langle x | M | x \rangle$ 。

从上图中，我们可以清晰地看到，HHL算法有三个过程，分别是相位估计，受控旋转和逆相位估计。在上一节中，已经说明了相位估计的基本方法，而逆相位估计，就是相位估计的逆运算。具体而言，可以将相位估计看做是一个基本的算子  $U_{pe}$ ，相位估计的过程也就是得到  $|\varphi\rangle = U_{pe}|u\rangle$ ，那么相位估计的逆运算，也就是将该算子求逆，并带入到具体的运算过程中。

## 计算过程



下面来具体解析HHL 算法，根据上图的步骤来分析每步的计算(为了简化描述，将线路图中第一行附加量子比特称为第一寄存器，第二行称为第二寄存器，底部的第三行即输入 $|b\rangle$ 所在的寄存器称为第三寄存器。):

**step 1.** 在第三寄存器中，准备  $|b\rangle = \sum_{i=1}^N b_i |i\rangle$ ，其中  $\text{vec}\{b\} = (b_1, \dots, b_N)$ ，且有  $\sum_{i=1}^N |b_i|^2 = 1$  (根据前面提出的对输入的限制)

**step 2.** 在最底部线路中，构建酉算子。将厄米矩阵A 转换为酉操作  $e^{iAt}$ ，其中HHL 算法中还介绍了如何将一个非厄米矩阵转换为厄米矩阵的形式。这里所构造的酉算子，就是这样的一个形式。

**step 3.** 通过相位估计，这也是前面介绍过的部分，在A 的特征空间上分解 $|b\rangle$ ，得到其结果为  $|b\rangle = \sum_{j=1}^N \beta_j |u_j\rangle$ ，其中 $|u_j\rangle$ 是矩阵A 的特征向量，对应的特征值为  $\lambda_j$ ，具体而言，可以将矩阵A表示为如下的分解形式：  $A = \sum_{i=1}^N \lambda_i |u_i\rangle \langle u_i|$

**step 4.** 如图中绿色方框所示，设计一个映射R，其是一个受控旋转操作，其基本的操作如下：将附加量子比特由基态 $|0\rangle$ 映射到 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 的叠加态上，同时到值提取到基态 $|1\rangle$ 的概率幅上，具体计算为：

$$R|0\rangle = \sqrt{1 - \frac{c^2}{\lambda_j^2}} |0\rangle + \frac{c}{\lambda_j} |1\rangle$$

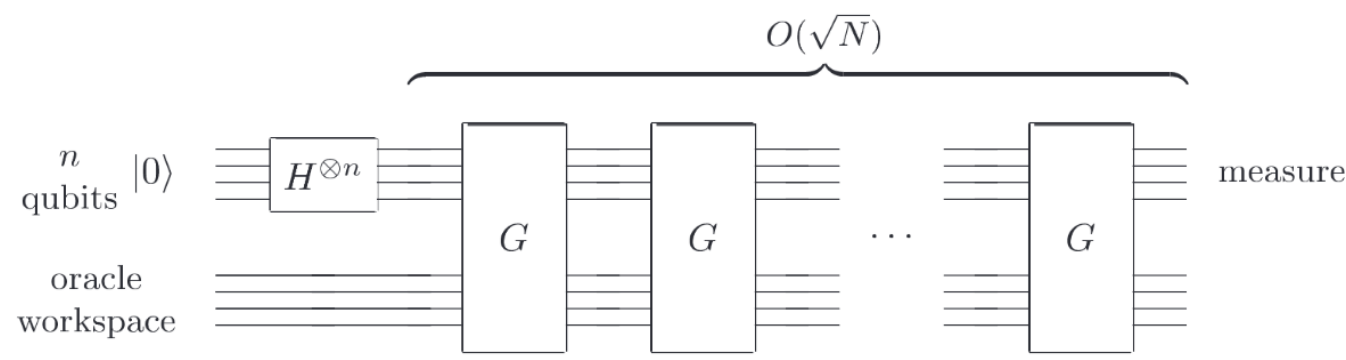
其中  $c = O(1/\kappa) \leq \min_j |\lambda_j|$ 。因此，在经过了step 4 之后，得到的量子寄存器态为  $\sum_{j=1}^N (\sqrt{1 - \frac{c^2}{\lambda_j^2}} |0\rangle + \frac{c}{\lambda_j} |1\rangle) \beta_j |u_j\rangle$ 。

**step 5.** 执行逆相位估计将  $|\lambda_j\rangle$  变为  $|0\rangle$ ，并测量附加的量子比特，若测量的结果为 $|1\rangle$ ，那么得到该线性系统的计算值  $|x\rangle$ 。

# 量子搜索算法

## Grover 算法

Grover算法最早被用于在无序数据中搜索最大值、最小值问题[3]。Grover 算法在课程中已经清晰地说明过，这里就只作简单的介绍，不进行过多细节的深化。



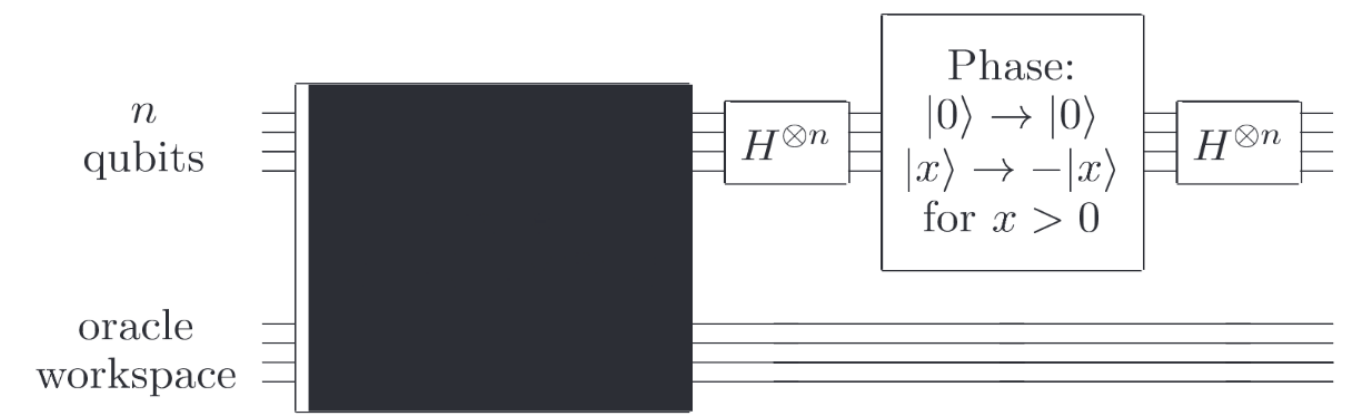
如上图所示，Grover 算法的基本执行过程主要是经过 $\sqrt{N}$  次 $G$ 门，就可以以很大的概率找到需要寻找的那个值，这里不再对 $\sqrt{N}$  次 $G$ 门之后，以多大概率能够区分搜索的值和其它值进行说明。

其基本流程如下：

首先对 $n$ 量子比特的基态进行一个初始化操作，得到无序数据集，一共有 $2^n$ 个基态的均衡叠加态：

$$|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x=0}^{2^n-1} |x\rangle$$

然后进行多次Grover 迭代，如图中 $G$  部分所示。



Grover 迭代分为四步，分别为：黑箱Oracle，起到标记解的作用，对满足等式 $C(x) = 1$ 的  $x$  进行标记。然后进行Hadamard 变换，相位翻转，然后再进行一次Hadamard 变换。整个Grover 迭代过程可以标记为：

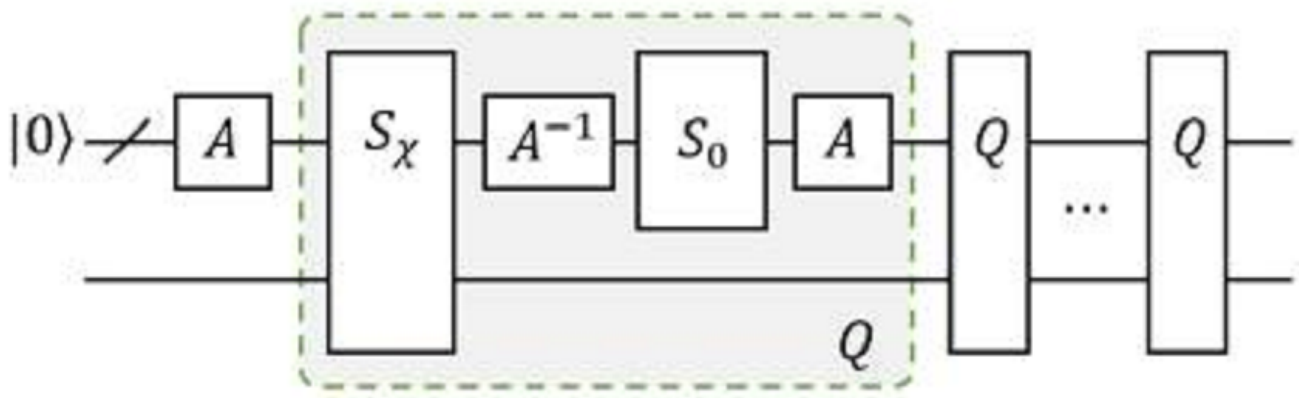
$$G = (2|\varphi\rangle\langle\varphi| - I)O$$

经过 $O(\sqrt{N})$ 次Grover 迭代后进行测量，会以高概率得到要搜索的 $X$ 。

## Grover 算法的推广 —— AA 算法

AA (Amplitude Amplification) 算法[4]在Grover算法基础上做了推广，使其应用更加广泛。原始的Grover算法主要应用于搜索问题。推广的AA算法不仅可以提高经典算法的成功概率，也可以用于提高量子算法输出的成功概率。例如，该算法在很多HHL-based算法中都有应用。具体而言，假设量子算法输出满足 $f(x = 1)$ 的 $x$ 的概率为 $a > 0$ ，则经过 $O(1/\sqrt{a})$  次迭代，算法能够以一个很高的概率搜索到解 $x$ ，其实现呢了经典算法的二次加速。

从计算的步骤上而言，两个算法具有很强的相似性，下图展示了AA 算法的计算步骤，可以看到，相较于 Grover 算法而言，其同样是一个首先进行初始化，然后迭代计算  $Q$  门的状态。



接下来通过对比 Grover 算法 和 AA 算法，来说明AA 算法的基本计算流程：

对于Grover 算法而言，其  $G$  门的计算逻辑可以表示为  $G = -HS_0HS\{\chi\}$ ，而上图中AA算法中的迭代部分 $Q$ 可以表示为：

$$Q = Q(A, \chi) = -AS_0A^{-1}S_\chi Q = Q(A, \chi, \phi, \varphi) = -AS_0(\phi)A^{-1}S_\chi(\varphi)$$

可以看到，从上述公式的描述中，实际上 $Q$  是 $G$  的一般化过程，当算子 $A$  为 Hadamard 门的时候，那么就可以表示成Grover 算子的形式。而在更一般的情况下， $A$ 可以是任意一个量子算法，将初始基态 $|0\rangle$  转变为一个任意叠加态，具体可以表示为 $A|0\rangle = \sum_{x \in X} a_x|x\rangle$ 。

在公式中，另外两个值得注意的算子就是 $S_0$  和  $S\{\chi\}$ ，在考虑给这两个算子添加可变角度之后，可以将这两个变换的函数表示为：

$$S_\chi(\varphi) : |x\rangle \rightarrow \begin{cases} e^{i\varphi}|x\rangle & \text{if } \chi(x) = 1 \\ |x\rangle & \text{if } \chi(x) = 0 \end{cases} S_0(\phi) : |x\rangle \rightarrow \begin{cases} e^{i\phi}|x\rangle & \text{if } x = 0 \\ |x\rangle & \text{if } x \neq 0 \end{cases}$$

对于一般化的 $S_0$ 和 $S\{\chi\}$ ，其设置了 $\phi=\varphi=\pi$ ，那么可以得到公式为如下：

$$S_{\chi}(\pi):|x\rangle\rightarrow\begin{cases}-|x\rangle& \text{if } \chi(x)=1 \\ |x\rangle & \text{if } \chi(x)=0\end{cases} S_0(\pi):|x\rangle\rightarrow\begin{cases}-|x\rangle& \text{if } x=0 \\ |x\rangle & \text{if } x\neq 0\end{cases}$$

总体来看，AA 算法是对于Grover 算法的一般化，并从这种一般化的过程中，研究出了一些新的可适用的场景，这种思路是一个很好的研究思路。

## 量子主成分分析 (QPCA)

主成分分析 (PCA) 是一种常用的降维方式，在很多方面都有应用。本章将首先介绍经典的PCA 算法，然后介绍量子主成分分析的实现。

### 经典主成分分析算法

PCA 算法的目标是将高维数据投影到低维空间，具体而言，其寻找投影后的低维空间中的 $r$ 个新变量，基本要求是要通过降维手段，将这些样本点的投影尽可能的分开，即投影后的样本点方差最大化。其具体的推导过程如下。

**数据：** 给定数据集  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ，其中 $x_i \in R^d$  为  $d$ 维数据，为了后续计算的简化，不妨假设 $\sum_{i=1}^n x_i = 0$

**目标：** 构造一个投影矩阵 $P_{r \times d}$ ，使得将原数据集投影到低维空间，投影方式为 $Y = P^T X$ ，其中 $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ ， $y_i \in R^r$ ， $r < d$ 。而根据最大化方差的基本目标，寻找这个投影算子 $P$  的优化目标应该是：

$$\max_P tr(P^T X X^T P) s.t. P^T P = I$$

**求解：** 对于该目标函数使用拉格朗日乘值法，可得到：

$$X X^T P = \lambda P$$

因此，只需要对计算样本的协方差矩阵  $A = X X^T$  进行特征分解，然后将求得特征值进行排序，得到其排序为：

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_d$$

再取前 $r$ 个特征值对应的特征向量构成  $P = (p_1, \dots, p_r)$

### 量子主成分分析算法

根据上文的介绍，实际上 PCA 的关键在于取协方差矩阵 $A$ 的前 $r$ 个最大特征值对应的特征向量来构造投影矩阵 $P$ ，这里我们使用bra-ket 形式来进行描述，其可以构建为如下图所示的形式：



$r$  (few) eigenvalues  
larger than a threshold

$N-r$  eigenvalues  
less than a threshold

$$A_{N \times N} = \sum_{j=1}^r \lambda_j |u_j\rangle\langle u_j| + \sum_{j=r+1}^N \lambda_j |u_j\rangle\langle u_j|$$

需要说明的是，QPCA [6] 并不是经典PCA 一个简单对应的量子版本，其具有其独特的研究背景和目标，主要是为了研究密度算子的特征向量和特征值，这也是在课程中多次涉及到的内容。

QPCA 的求解过程可以理解为矩阵的特征分解过程，在之前所讨论的算法中，相位估计能够有效求解矩阵的特征分解问题。在相位估计中，需要构造两个内容，即量子态和对应的受控U算子。在QPCA中，这两个输入均由密度算子 $\rho$ 来构造，具体构造为：

**量子态：** 即密度算子 $\rho$  本身，其在特征空间上的分解为：

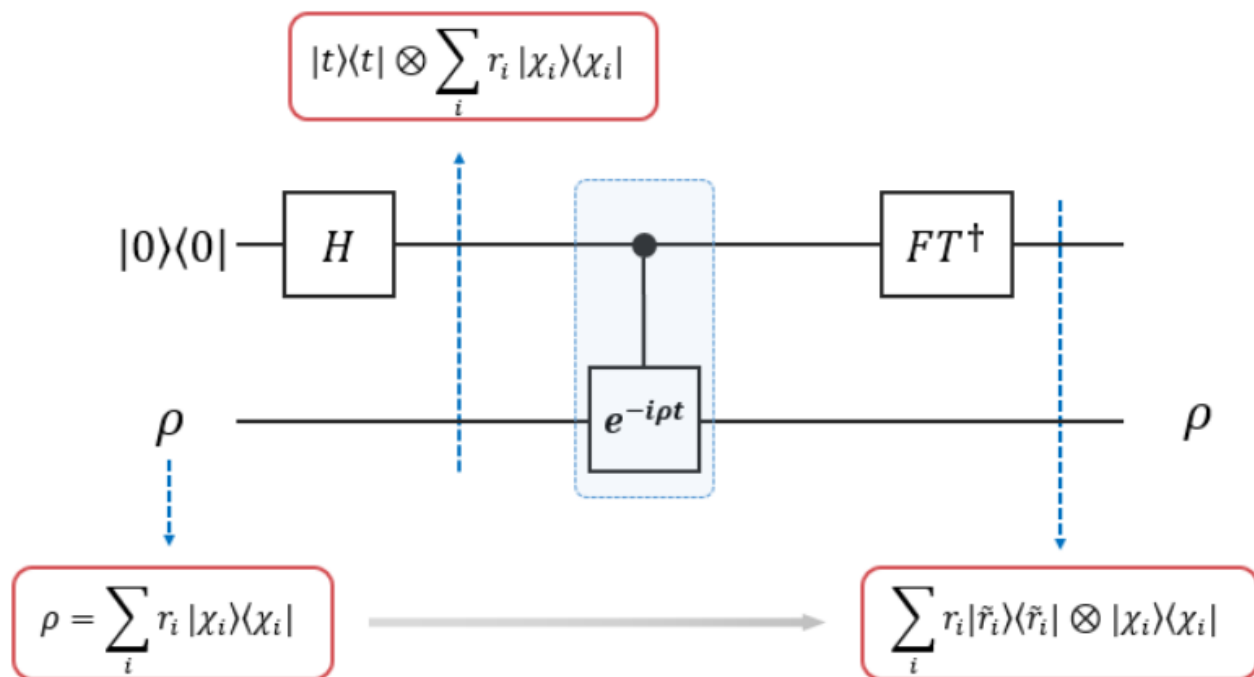
$$\rho = \sum_i r_i |\chi_i\rangle\langle\chi_i|$$

**受控U 算子：** 构造受控的 $e^{-i\rho t}$ 。假定能够复制得到 $n$ 个密度算子 $\rho$ ，则可以构造得到受控的酉算子 $U$ 。其构造方式如下所示

$$\begin{aligned} \text{tr}_\rho e^{-iS\Delta t} \rho \otimes \sigma e^{iS\Delta t} &= (\cos^2 \Delta t) \sigma + (\sin^2 \Delta t) \rho - i \sin \Delta t \cos \Delta t [\rho, \sigma] \\ &= \sigma - i \Delta t [\rho, \sigma] + O(\Delta t^2) \end{aligned} \quad (1)$$

具体而言，其借助密度算子 $\rho$ 的 $n$ 个复制和稀疏的交换矩阵 $S$ ，通过偏迹运算实现 $e^{-i\rho t}$ 的构造。进一步的，在相位估计中，执行的是受控酉算子。在QPCA[6] 中，提出了使用受控Swap来代替原始的Swap 操作，从而解决了这一问题。

因此，QPCA 的过程如下图所示，其本质上就是一个相位估计的内容。



根据计算图的描述，最终的相位估计会输出的结果为

$$\sum_i r_i |\chi_i\rangle\langle \chi_i| \otimes |\tilde{r}_i\rangle\langle \tilde{r}_i|$$

综上，QPCA借助相位估计便可分解出密度算子 $\rho$ 的特征值和特征向量，从而实现了降维的操作。实际上，在QPCA的文章中指出，这个算法不仅仅用于求解经典PCA，也可以用于进行量子态层析，量子态的区分和分配问题等。

## 量子支持向量机（QSVM）

### 经典支持向量机

支持向量机（SVM）是传统机器学习中，基于监督学习算法来解决分类问题的一个经典的算法，当然，在一定的条件下，SVM算法也可以用于回归问题。本小节主要简单说明SVM算法的计算过程。SVM的目标是寻找到一个超平面能够最好的区分两类数据，并提供一个决策边界。下面我们将以最简单的二分类问题，来说明经典的SVM算法的建模和求解过程。

**数据：** 对于一个二分类问题，假设其共有 $N$ 个样本，表示为 $x_i$ ，其对应的标签为 $y_i$ ，其中用 $y_i = 1$ 和 $y_i = -1$ 来分别表示这两类。其目标是最大化两种类别之间的距离。

**目标与对偶问题：** 根据SVM求解的目标，即最大化两种类别之间的距离，将其描述为如下形式：

$$\min_{w,b} \frac{1}{2} \|w\|^2 \text{ s.t. } y_j(w \cdot x_j + b) \geq 1$$

对于原问题的求解，是困难的，将其转换为对偶问题，表示为：

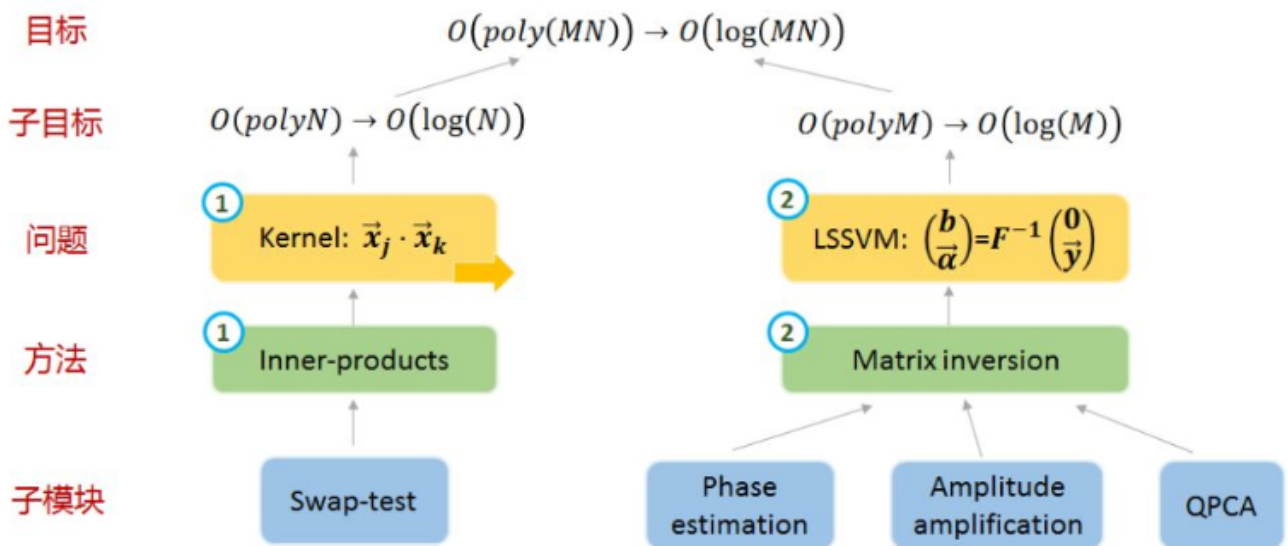
$$\max_{\alpha} \min_{w,b} L(w, b, \alpha) = \frac{1}{2} \|w\|^2 - \sum_{i=1}^N y_j \alpha_j (y_j (w \cdot x + b) - 1) s.t. \quad y_j \alpha_j \geq 0$$

进一步地，会有：

$$\max_{\alpha} L(\alpha) = \sum_{i=1}^N y_j \alpha_j - \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^N \alpha_j K_{jk} \alpha_k s.t. \quad \sum_{j=1}^N \alpha_j = 0, \quad y_j \alpha_j \geq 0 K_{jk} = k(x_j, x_k) = x_j \cdot x_k$$

## QSVM 算法的实现

QSVM [5] 算法是在SVM 算法的基础上，对于原有的计算过程的改进，其主要的改进如下图所示：



在经典的SVM 实现中，对于 $\alpha$ 的求解过程需要涉及到核函数的计算，也就是样本之间的内积操作。在上文的分析中，我们给出了利用swap-test 方法实现的内积运算的加速操作，对于经典的内积操作，其时间复杂度为 $O(N)$ ，而基于swap-test 实现的内积操作，其时间复杂度仅为 $O(\log N)$ ，实现了指数级的加速。

在求得了内积之后，就是要求解了 $\alpha$ ，对于 $\alpha$ 的求解，本身是一个二次规划问题，在这里文章没有对原始SVM 进行分析，而是对最小二乘支持向量机LSSVM 的求解进行了分析，具体如下。

对于SVM 的初始约束条件，可以进行如下的转换：

$$y_j(w \cdot x_j + b) \geq 1 \rightarrow w \cdot x_j + b = y_j - y_j e_j y_j = \pm 1$$

在这里，引入了一个松弛变量 $e_j$ ，将不等式约束转变为了等式约束。通过这样的转换，使得求解 $\alpha$  的问题从二次规划变成了求解线性方程组的问题。而在之前的讨论中，我们已经说明了，使用HHL 算法可以对于求解线性方程组实现指数级别的加速。该问题的实际计算过程为：

$$F \begin{pmatrix} b \\ \vec{\alpha} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & \vec{1}^T \\ \vec{1} & K + \gamma^{-1} I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ \vec{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{y} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b \\ \vec{\alpha} \end{pmatrix} = F^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{y} \end{pmatrix}$$

下面展示整个算法的训练和推理流程：

---

**Input:**  $F \in \mathbb{R}^{(M+1) \times (M+1)}, y \in \mathbb{R}^M$

**Output:** A quantum state  $\propto |b, \vec{\alpha}\rangle$ , where  $(b, \vec{\alpha})^T \approx (b^*, \vec{\alpha}^*)^T \stackrel{\text{def}}{=} F^{-1}(0, \vec{y})^T$

---

**Algorithm:**

1. Prepare the quantum state  $|\tilde{y}\rangle = \sum_{j=1}^{M+1} \langle u_j | \tilde{y} \rangle |u_j\rangle$  ( $|u_j\rangle$  : eigenstates of  $\hat{F}$ ).
2. Perform **phase estimation** to create  $\sum_{j=1}^{M+1} \langle u_j | \tilde{y} \rangle |u_j\rangle |\lambda_j\rangle$ .
3. Inverts the eigenvalue by performing **a controlled rotation** and remove the eigenvalue register to get  $\sum_{j=1}^{M+1} \langle u_j | \tilde{y} \rangle |u_j\rangle \left( \sqrt{1 - \frac{c^2}{\lambda_j^2}} |0\rangle + \frac{c}{\lambda_j} |1\rangle \right)$ .
4. Use **amplitude amplification** to boost the amplitude for  $|1\rangle$ .
5. Measure the qubit.

If we observe  $|1\rangle$ , the remaining state is  $\propto \sum_{j=1}^{M+1} \langle u_j | \tilde{y} \rangle / \lambda_j |u_j\rangle$ .  $|b, \vec{\alpha}\rangle = \frac{1}{\sqrt{c}} (b|0\rangle + \sum_{k=1}^M \alpha_k |k\rangle)$   
 else output 0.

---

上图给出了训练过程，可以看到，其训练过程主要就是对于之前所讨论的F的估计，通过得到一个好的F，来实现最终的优化，其具体线路和HHL 是类似的。在上述过程中，重点使用到了我们介绍的HHL 和 AA 算法。

---

**Input:**  $|b, \vec{\alpha}\rangle = \frac{1}{\sqrt{C}}(b|0\rangle + \sum_{k=1}^M \alpha_k |k\rangle)$ ,  $|\vec{x}\rangle$

**Output:**  $y \in \{-1, +1\}$

---

**Algorithm:**

1. By calling the training data oracle, construct  $|\tilde{u}\rangle$  and the query state  $|\tilde{x}\rangle$ :

$$|\tilde{u}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N_{\tilde{u}}}}(b|0\rangle|0\rangle + \sum_{k=1}^M \alpha_k |\vec{x}_k\rangle|k\rangle), N_{\tilde{u}} = b^2 + \sum_{k=1}^M \alpha_k^2 |\vec{x}_k|^2$$

$$|\tilde{x}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N_{\tilde{x}}}}(|0\rangle|0\rangle + \sum_{k=1}^M |\vec{x}| |k\rangle |\vec{x}\rangle), N_{\tilde{x}} = M|\vec{x}|^2 + 1$$

2. Perform a **swap test**.

Using an **ancilla**, construct:  $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|\tilde{u}\rangle + |1\rangle|\tilde{x}\rangle)$ , measure the **ancilla** in  $|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$

$$\text{Success } P = |\langle\psi|\phi\rangle|^2 = \frac{1}{2}(1 - \langle\tilde{u}|\tilde{x}\rangle), \quad \langle\tilde{u}|\tilde{x}\rangle = 1/\sqrt{N_{\tilde{x}}N_{\tilde{u}}}(b + \sum_{k=1}^M \alpha_k |\vec{x}_k| |\vec{x}| \langle\vec{x}_k|\vec{x}\rangle)$$

3. If  $P < \frac{1}{2}$ , we classify  $|\vec{x}\rangle$  as +1; otherwise, -1.
- 

而对于推理过程，其就是对于内积进行求解，重点使用了介绍的swap test 来实现向量内积的计算模式。

通过量子算法，对于这两个过程的计算都实现了指数级别的加速。

## 总结

在本课程报告中，首先介绍了一些经典的量子算法，并说明如何利用这些算法求解量子机器学习问题。量子机器学习是量子计算中一个极具吸引力的领域，在一些经典的机器学习算法上，利用量子算法进行改写，已经证明了可以实现指数级别的加速。而如何将两者有机的结合，还是需要回归到一些基本的量子算法上，并通过恰当的构造，得到一个好的实现。

## 参考文献

- [1] Harrow A W, Hassidim A, Lloyd S. Quantum algorithm for linear systems of equations[J]. Physical review letters, 2009, 103(15): 150502.
- [2] quantum algorithm for data fitting PRL 109,050505(2012)
- [3] Durr C, Hoyer P. A quantum algorithm for finding the minimum[J]. arXiv preprint quant-ph/9607014, 1996.
- [4] Brassard G, Hoyer P, Mosca M, et al. Quantum amplitude amplification and estimation[J]. Contemporary Mathematics, 2002, 305: 53-74.
- [5] Patrick Rebentrost, Masoud Mohseni, and Seth Lloyd. Quantum Support Vector Machine for Big Data Classification, Physical Review Letters, 113, 130503 (2014).

[6] Lloyd S, Mohseni M, Rebentrost P. Quantum principal component analysis[J]. Nature Physics, 2014, 10(9): 631.

[7] Lloyd, S., Mohseni, M. & Rebentrost, P. Quantum algorithms for supervised and unsupervised machine learning.