矩阵分析与应用 第三次作业

学号： 202128013229021　　　　　　姓名： 刘炼

6. 验证如下：

$$A^TA=\begin{pmatrix}1&-1&2\\3&-3&6\\1&1&2\\-4&0&-8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&3&1&-4\\-1&-3&1&0\\2&6&2&-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6,&18,&4,&-20\\18,&54,&12,&-60\\4,&12,&6,&-20\\-20&-60&-20&80\end{pmatrix}$$

$$AA^T=\begin{pmatrix}1&3&1&-4\\-1&-3&1&0\\2&6&2&-8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&2\\3&-3&6\\1&1&2\\-4&0&-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}27&-9&54\\-9&11&-18\\54&-18&108\end{pmatrix}$$

利用高斯消元法来处理主元.

$$A^TA=\begin{pmatrix}6&18&4&-20\\18&54&12&-60\\4&12&6&-20\\-20&-60&-20&80\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}6&18&4&-20\\0&0&0&0\\0&0&\frac{10}{3}&-\frac{20}{3}\\0&0&-\frac{20}{3},&\frac{40}{3}\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}6&18&4&-20\\0&0&0&0\\0&0&\frac{10}{3}&-\frac{20}{3}\\0&0&0.&0\end{pmatrix}$$

$\therefore Rank(A^TA)=2.$

$$A=\begin{pmatrix}1&3&1&-4\\-1&-3&1&0\\2&6&2&-8\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&3&1&-4\\0&0&2&-4\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\therefore Rank(A)=2$

$$AA^T=\begin{pmatrix}27&-9&54\\-9&11&-18\\54&-18&108\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}27&-9&54\\0&8&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$\therefore Rank(AA^T)=2$

故可验证 $rank(A^TA)=rank(A)=rank(AA^T)$

7. 解，分两种情况进行讨论和计算

① 假设 $y=a_0+a_1x$

故令 $A=\begin{pmatrix}1&-5\\1&-4\\1&-3\\1&-2\\1&-1\\1&0\\1&1\\1&2\\1&3\\1&4\\1&5\end{pmatrix}$ $\quad x=\begin{pmatrix}a_0\\a_1\end{pmatrix}$ $\quad b=\begin{pmatrix}2\\7\\9\\12\\13\\14\\14\\13\\10\\8\\4\end{pmatrix}$

根据最小二乘法进行求解，应有

$$x=(A^TA)^{-1}A^Tb$$

其中，$A^TA=\begin{pmatrix}11&0\\0&110\end{pmatrix}$ $\quad \therefore (A^TA)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{11}&0\\0&\frac{1}{110}\end{pmatrix}$

$A^Tb=(106,20)^T=\begin{pmatrix}106\\20\end{pmatrix}$

$\therefore x=\begin{pmatrix}\frac{106}{11}\\\frac{2}{11}\end{pmatrix}$ $\Rightarrow a_0=\frac{106}{11}$，$a_1=\frac{2}{11}$

② 假设 $y=a_0+a_1x+a_2x^2$，则有

$A=\begin{pmatrix}1&-5&25\\1&-4&16\\1&-3&9\\1&-2&4\\1&-1&1\\1&0&0\\1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\\1&4&16\\1&5&25\end{pmatrix}$ $\quad x=\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{pmatrix}$

故此时，$A^TA=\begin{pmatrix}11&0&110\\0&110&0\\110&0&1958\end{pmatrix}$ $\Rightarrow (A^TA)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{178}{858}&0&-\frac{10}{858}\\0&\frac{1}{110}&0\\-\frac{10}{858}&0&\frac{1}{858}\end{pmatrix}$

因有 $A^Tb=\begin{pmatrix}106\\20\\688\end{pmatrix}$ $\Rightarrow x=\begin{pmatrix}\frac{18868}{858}\\\frac{2}{11}\\-\frac{372}{858}\end{pmatrix}$

对上面两式的结果进行代入，若 $x=\begin{pmatrix}a_0\\a_1\end{pmatrix}$，则误差

① $E_1 = (Ax-b)^T(Ax-b)$

$= 162.8$

②若 $x=\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{pmatrix}$，则代入可得，误差为

$E_2 = (Ax-b)^T(Ax-b)$

$= 1.62$

∴，显然，$E_2<E_1$，$y=a_0+a_1x+a_2x^2$ 更好能进行拟合

4.解，根据题意分析可知

(a) $S=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}=\{u_1,u_2,u_3\}$

$\therefore [A(u_1)]_S=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=1u_1+1u_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

$[A(u_2)]_S=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}=2u_1-u_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$

$[A(u_3)]_S=\begin{pmatrix}-1\\0\\7\end{pmatrix}=-u_1+7u_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\7\end{pmatrix}$

$\therefore [A]_S=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&-1&0\\1&0&7\end{pmatrix}$

(b) 根据相应的定理可知，

$$Q = [I]_{s's}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_s, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_s, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_s \right\}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore [A]_{s'} = Q^{-1} [A]_s Q$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -9 \\ 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

7. 解，由题意可知，

(a) $Te_1 = e_1 \in X$, $Te_2 = e_1 + e_2 \in X$

故对于一个向量 $e = \alpha e_1 + \beta e_2$

$$\Rightarrow Te = T(\alpha e_1 + \beta e_2) = \alpha e_1 + \beta(e_1 + e_2)$$

$$= (\alpha + \beta) e_1 + \beta e_2$$

$\therefore$ 有 $Te \in X$ ，故 X 在 T 下是不变的，为不变子空间

(b) $\because$ $T/_X(e_1) = e_1$, $T/_X(e_2) = e_1 + e_2$

故 $[T/_X]_{\{e_1, e_2\}} = \left([T/_X(e_1)]_{\{e_1, e_2\}} \middle| [T/_X(e_2)]_{\{e_1, e_2\}} \right)$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c)

(3) 设 $B=\{e_1,e_2,y_1,y_2,\dots,y_q\}$

根据前面的分析， $[T]_B = \left([T(e_1)]_B \,|\, \cdots \,|\, [T(y_1)]_B \,|\, \cdots \,|\, [T(y_q)]_B\right)$

且有 $T(e_1)=e_1$， $T(e_2)=e_1+e_2$

对于空间 $Y=\mathrm{span}\{y_1,y_2,\dots,y_q\}$

对其可能表示为： $T(y_j)=\sum_{i=1}^{2}\beta_{ij}e_i+\sum_{i=1}^{q}\gamma_{ij}y_i$

$$\text{则 } [T(y_j)]_B=\begin{pmatrix}\beta_{1j}\\ \vdots\\ \gamma_{ij}\\ \vdots\\ \gamma_{qj}\end{pmatrix}$$

$$\therefore [T]_B=\begin{array}{r}\\ \\ \\ m\text{行}\leftarrow\\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix}1 & 1 & \beta_{11} & \cdots & \beta_{1q}\\ 0 & 1 & \beta_{21} & \cdots & \beta_{2q}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \gamma_{m1} & \cdots & \gamma_{mq}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \gamma_{q1} & \cdots & \gamma_{qq}\end{pmatrix}.$$