一、简单题

（1）写出 $Rank(A)=r$ 的十种等价陈述；（5 分）

（2）简要说明所有实矩阵 $A_{m\times n}$ 构成实数域 R 上的向量空间，并说明其中零元素的唯一性；（10 分）

（3）试描述出 R^{2x2} 空间中所有正交投影矩阵的形式；（10 分）

（4）写出三维空间中分别绕 x 轴、y 轴和 z 轴旋转 θ 角的旋转矩阵。（5 分）

二、（1）计算 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ 的 1-Norm，2-Norm 和∞-Norm；（5 分）

（2）确定 α 和 β 的值，使得矩阵$\begin{pmatrix} \alpha+\beta & \beta-\alpha \\ \alpha-\beta & \alpha+\beta \end{pmatrix}$为正交矩阵。（10 分）

三、设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 19 & -34 \\ -2 & -5 & 20 \\ 2 & 8 & 37 \end{pmatrix}$, 使用 Givens reduction 方法把矩阵 A 化为上三角矩阵 R . （15 分）

四、设 X 和 Y 为 R^3 空间的子空间，B_X和B_Y 分别为一组基，定义如下：

$$B_X=\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}, \qquad B_Y=\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$$

（1）说明 X 和 Y 互为补空间；（5 分）

（2）给出沿子空间 Y 方向投影到子空间 X 的投影矩阵 P，并计算 Pv，这里 $v=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.（10 分）

五、设

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -20 & -14 \\ 3 & 27 & -4 \\ 4 & 11 & -2 \end{pmatrix}$$

使用 Gram-Schmidt 正交化方法求出矩阵 A 的 QR 分解。（15 分）

六、设 A 和 B 为 $m\times n$ 的矩阵，证明：（1）$trace(A^TB)^2 \le trace(A^TA)trace(B^TB)$；（5 分）

（2）$trace(AB)=trace(BA)$.（5 分）