量子信息与量子密码

Quantum Information & Quantum Cryptology

[第4次课] 量子信息论与早期量子算法

授课教师：杨理

授课时间：2022年3月28日

内容概要

Information is Physical

- Rolf Landauer

IBM Research

Landauer 原理

- 每擦除一比特，或执行计算机中物理比特的一个扇入运算，至少增加环境的热量 $k_B T \ln 2$ 焦耳，其中

$$k_B = 1.38062 \times 10^{-23}\ \mathrm{J/K}$$

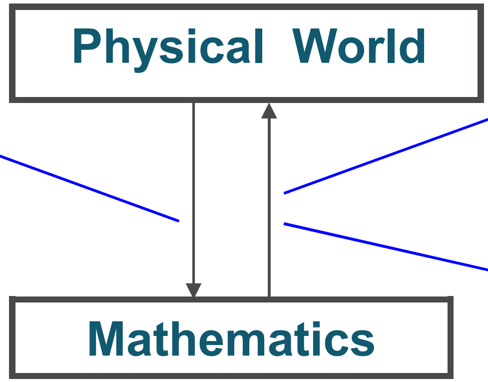
为波尔兹曼常数，T为环境的绝对温度[1]。

[1]R. Landauer, Information is Physical, *Physics Today,* May 1991.

- 从Landauer原理到Maxwell佯谬的解决（C. Bennett）。

信息是物理的：进一步讨论

通信和计算上对物理（例如热力学）资源的需求



物理态及其演化的计算复杂性

物理相互作用的信息荷载能力

当Turing, Shannon, von Neumann以及他们的同时代人精确刻画信息与计算的概念时，他们忽略了可逆性和叠加原理：

可逆性 =〉计算热力学 （**C. Bennett** ）

态叠加 =〉量子信息的计算理论

电子自旋

- 1925年G.E.乌伦贝克和S.A.古兹密特受到泡利不相容原理的启发，基于Stern-Gerlach实验和原子光谱的一些实验结果，提出电子具有内禀运动--自旋，并且有与电子自旋相联系的自旋磁矩。

- 可以解释原子光谱的精细结构及反常塞曼效应。

- 1928年P.A.M.狄拉克提出电子的相对论波动方程，方程中自然地包括了电子自旋。

- 电子自旋是量子效应，不能作经典的理解，如果把电子自旋看成绕轴的旋转，则得出与相对论矛盾的结果。

§3.1 量子信息论简介

◆经典信息论主要关心通过经典信道传送经典信息。如果考虑经典信息或量子信息在量子信道中传送，会遇到新的问题。

◆虽然量子信息论产生于对量子信道的研究，但应用领域众多。

◆量子信息论在本质上比经典信息论更普适、更丰富、更深刻。

◆把接收者的accessible information定义为取遍所有测量方案时互信息 $H(X:Y)$ 的最大值，accessible information就是接收者能够在多大程度上推断出发送者制备状态的一种度量。

◆Holevo界是accessible information的上界。

von Neumann Entropy

◆量子统计物理学中的熵算符：

$$\hat{S} \equiv -k_B \ln \hat{\rho}$$

◆量子统计物理学中的von Neumann熵：

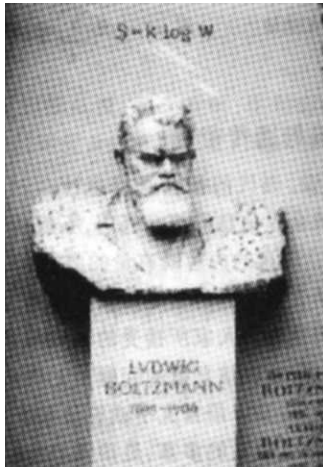
$$S \equiv \left\langle \hat{S} \right\rangle = \mathrm{Tr}\left(\hat{\rho}\hat{S}\right) = -k_B \,\mathrm{Tr}\left(\hat{\rho} \ln \hat{\rho}\right).$$

◆在微正则系综中，上式正是Boltzmann公式

$$S = k_B \ln \Omega\left(E\right).$$

◆量子信息科学中的von Neumann 熵：

$$S\left(\rho\right) \equiv -\mathrm{Tr}\left(\rho \log \rho\right) = -\sum_x \lambda_x \log \lambda_x .$$



Lvdwig Boltzmann

Holevo界

◆**定理12.1（ Holevo界 ）**

设Alice以概率$\{p_0,\cdots,p_n\}$**制备状态**$\{\rho_x|x=1,\cdots,n\}$**，Bob进行由POVM元**$\{E_y\}=\{E_0,\cdots E_m\}$**描述的测量，测量结果是**$Y$ **。**

Holevo证明，Bob的任何测量都满足：

$$H(X:Y)\le S(\rho)-\sum_x p_x S(\rho_x)\equiv\chi,$$

其中$\rho=\sum_x p_x\rho_x$**。**

◆**Holevo界是 J. P. Gordon 1964年猜想的，Holevo 1973年给出证明。Holevo定理是量子信息论的基石。**

◆**Holevo界也叫做Holevo** χ **量。**

Schumacher 定理

◆**定理 12.6 （Schumacher 无噪声信道的编码定理）**

令$\{H,\rho\}$是独立同分布的量子信源。若$R > S(\rho)$，则对该源存在比率为R的可靠压缩方案。若$R < S(\rho)$，则比率为R的任何压缩方案都不可靠。

◆是Shannon第一定理的量子推广，本课程后面将给出严格的证明。

◆ε-典型序列发展为ε-典型状态；典型序列定理发展为典型子空间定理。

量子信道上的经典通信- HSW 定理

信道ε传递直积态 $\rho_1 \otimes \rho_2 \otimes \cdots \otimes \rho_n$ 编码经典消息，则信道容量 $C^{(1)}(\varepsilon)$ 由下述定理给出：

HSW 定理 设ε是一个保迹量子操作，定义：

$$\chi(\varepsilon) \equiv \max_{\{p_i,\rho_i\}} \left[S\left(\varepsilon\left(\sum_j p_j \rho_j \right)\right) - \sum_j p_j S\left(\varepsilon\left(\rho_j\right)\right)\right],$$

其中最大值是在信道的所有可能状态 ρ_j 的系综 $\{p_j,\rho_j\}$ 上取的，则有 $C^{(1)}(\varepsilon) = \chi(\varepsilon).$

1. Super-dense Coding

Alice和Bob共享一个处于Bell态$|\Phi^+\rangle$的EPR对，Alice 对手中的粒子做下述四个操作之一：

$$X_1|\Phi^+\rangle=|\Psi^+\rangle, Z_1|\Phi^+\rangle=|\Phi^-\rangle,$$
$$Y_1|\Phi^+\rangle=|\Psi^-\rangle, I_1|\Phi^+\rangle=|\Phi^+\rangle,$$

然后将粒子发给Bob，如果Bob可以进行Bell基测量，则可以确知Alice所做的操作，于是实现了一个粒子传递 2 比特经典信息的任务。

2. 量子Teleportation

- 如果只通过定域量子操作和经典信号传递（LOCC）即可将$|\Psi\rangle$变为$|\Phi\rangle$，则称$|\Psi\rangle$ LOCC可归约为$|\Phi\rangle$，记为

$$|\Psi\rangle \xrightarrow{LOCC} |\Phi\rangle$$

- 如果$|\Psi\rangle \xrightarrow{LOCC} |\Phi\rangle$且$|\Phi\rangle \xrightarrow{LOCC} |\Psi\rangle$，则称$|\Psi\rangle$和$|\Phi\rangle$是LOCC等价的，记为

$$|\Psi\rangle \overset{LOCC}{\rightleftarrows} |\Phi\rangle$$

- 如果$|\Psi\rangle$与$|\Phi\rangle$只相差一个定域酉变换，则称$|\Psi\rangle$与$|\Phi\rangle$是LU等价的。 Bennett et al. 证明，对于纯态，LU等价与LOCC等价是相同的(*e-print arXive*: quant-ph/9912039)。

◆从LOCC的观点来看量子 Teleportation：

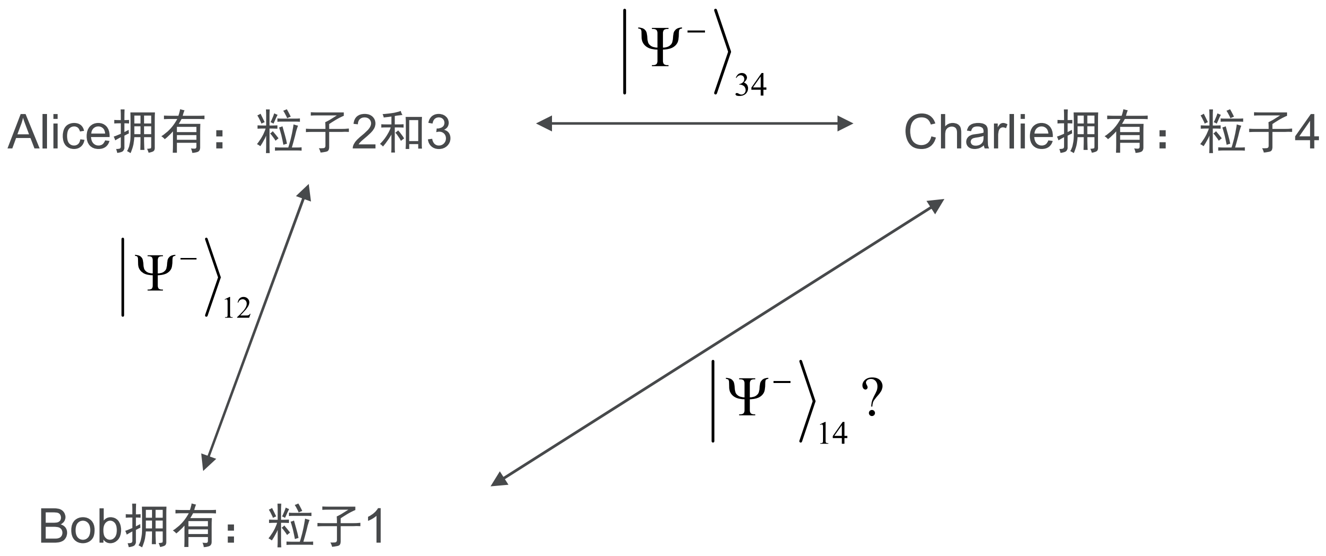
$$\left|\Psi^{-}\right\rangle_{12}\left|\phi\right\rangle_{3}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0\right\rangle_{1}\left|1\right\rangle_{2}-\left|1\right\rangle_{1}\left|0\right\rangle_{2}\right)\left(\alpha\left|0\right\rangle_{3}+\beta\left|1\right\rangle_{3}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\left(\alpha\left|1\right\rangle_{1}+\beta\left|0\right\rangle_{1}\right)\left|\Phi^{+}\right\rangle_{23}+\left(\alpha\left|1\right\rangle_{1}-\beta\left|0\right\rangle_{1}\right)\left|\Phi^{-}\right\rangle_{23}$$

$$+\left(-\alpha\left|0\right\rangle_{1}-\beta\left|1\right\rangle_{1}\right)\left|\Psi^{+}\right\rangle_{23}+\left(\alpha\left|0\right\rangle_{1}-\beta\left|1\right\rangle_{1}\right)\left|\Psi^{-}\right\rangle_{23}\Big]$$

Alice 测量手中的2、3粒子处于哪一Bell态，告诉Bob，Bob对粒子1进行操作(X,Y,Z, I)以使粒子1处于 。

◆**纠缠交换（ Entanglement Swapping ）方案：如何通过LOCC使从未谋面、也未进行直接量子通信的Bob和Charlie共享纠缠态？**



量子纠缠交换

◆初态为：

$$|\Psi\rangle_{1234}=\frac{1}{2}\left(|0\rangle_1|1\rangle_2-|1\rangle_1|0\rangle_2\right)\left(|0\rangle_3|1\rangle_4-|1\rangle_3|0\rangle_4\right)$$

◆将其表示为按 $|\Phi^{\pm}\rangle_{23}$ 和 $|\Psi^{\pm}\rangle_{23}$ 展开的形式：

$$\begin{aligned}|\Phi\rangle_{1234}=\frac{1}{2}\Big[&|0\rangle_1\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\Psi^{+}\rangle_{23}-|\Psi^{-}\rangle_{23}\right)|1\rangle_4\\&-|0\rangle_1\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\Phi^{+}\rangle_{23}-|\Phi^{-}\rangle_{23}\right)|0\rangle_4\\&-|1\rangle_1\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\Phi^{+}\rangle_{23}+|\Phi^{-}\rangle_{23}\right)|1\rangle_4\\&+|1\rangle_1\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\Psi^{+}\rangle_{23}+|\Psi^{-}\rangle_{23}\right)|0\rangle_4\Big]\end{aligned}$$

量子纠缠交换

$$= \frac{1}{2}\Big(-\left|\Phi^{+}\right\rangle_{23}\left|\Phi^{+}\right\rangle_{14} + \left|\Phi^{-}\right\rangle_{23}\left|\Phi^{-}\right\rangle_{14} + \left|\Psi^{+}\right\rangle_{23}\left|\Psi^{+}\right\rangle_{14} - \left|\Psi^{-}\right\rangle_{23}\left|\Psi^{-}\right\rangle_{14} \Big)$$

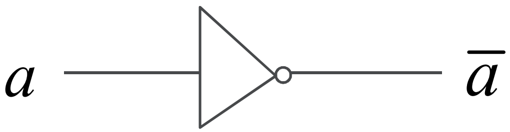
① Alice通过定域操作测量粒子2、3;

② Alice用经典信道通知Bob和Charlie测量结果;

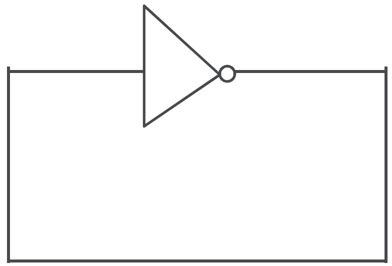
③ Bob和Charlie通过定域操作（I,X,Y,Z)共享 $\left|\Psi^{-}\right\rangle_{14}$ 。

1. 基本的经典逻辑门与计算逻辑线路

逻辑线路模型所计算的函数为逻辑函数 $f:\{0,1\}^k\rightarrow\{0,1\}$.
计算的线路模型中所用线路都是无环的。

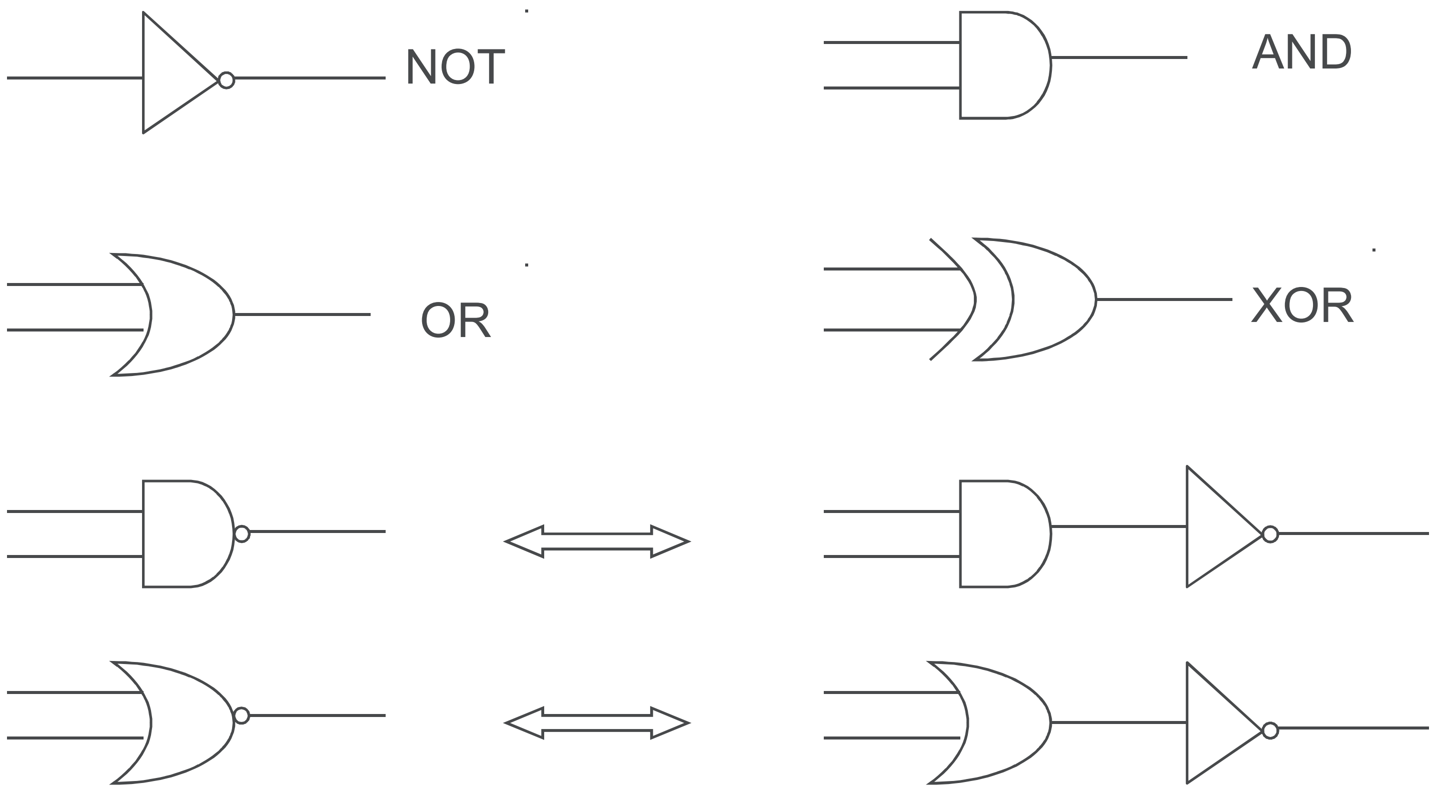


单输入比特上的非门运算路线。

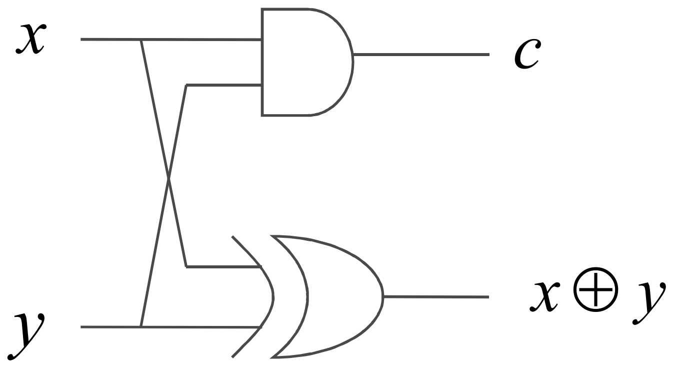


回路可能会不稳定，计算模型中一般不采用回路结构。

1. 基本的经典逻辑门与计算逻辑线路（2）



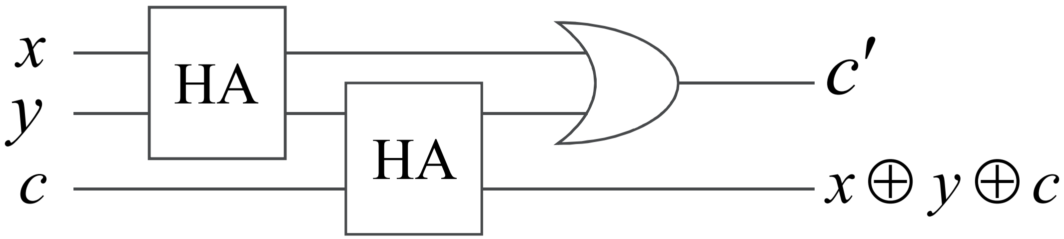
1. 基本的经典逻辑门与计算线路（3）



半加器（HA）线路

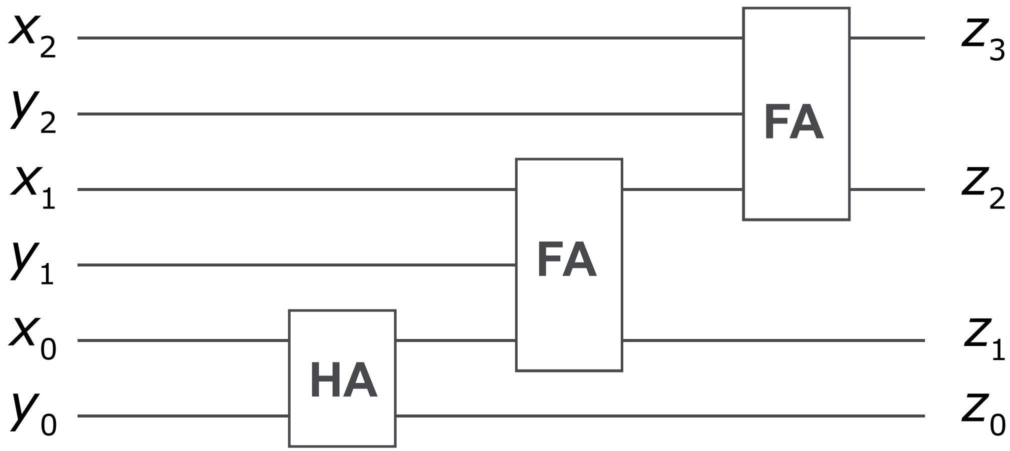
进位比特 c 当 x 和 y 都是1时置1，否则置0。

1. 基本的经典逻辑门与计算逻辑线路（3）



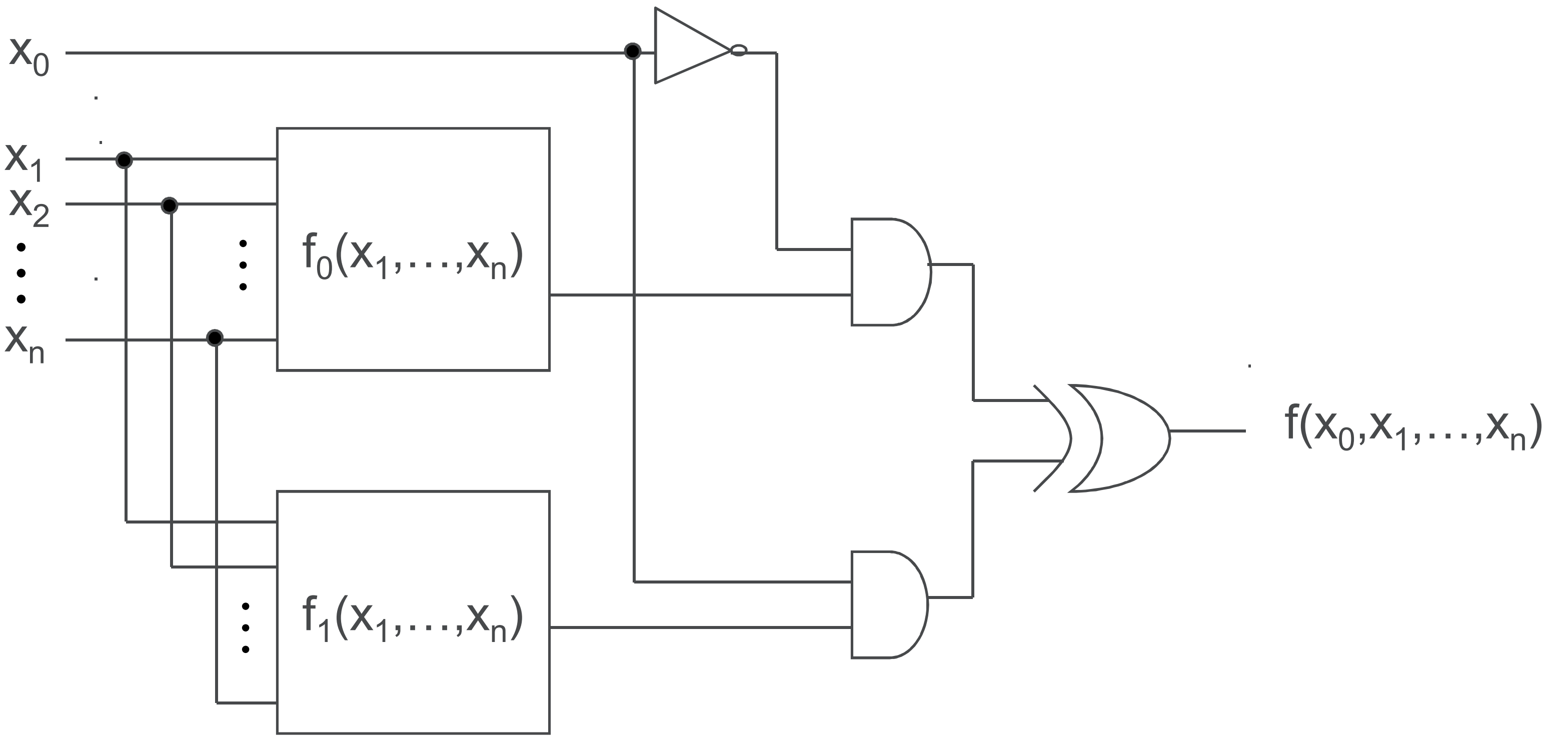
全加器（FA）线路

1. 基本的经典逻辑门与计算逻辑线路（4）



Addition circuit for two three-bit integers, $x=x_2x_1x_0$ and $y=y_2y_1y_0$, using the elementary algorithm taught to school-children.

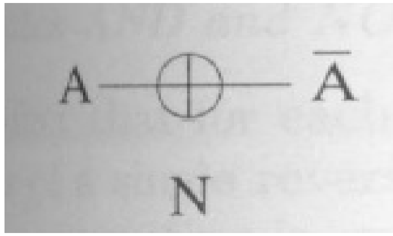
1. 基本的经典逻辑门与计算逻辑线路（5）

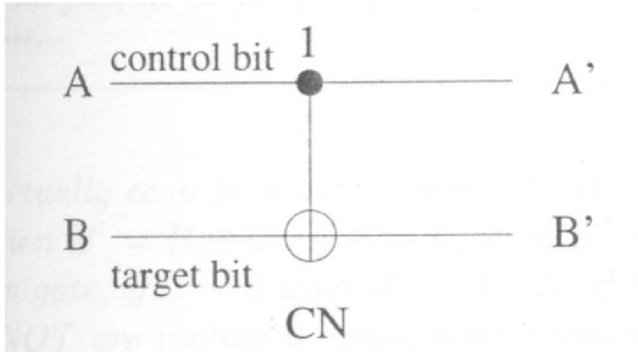


递归构造计算任意布尔函数的线路

2. 基本的可逆逻辑门

基本的可逆逻辑门包括非门、受控非门、双控非门（Toffoli门）、受控交换门（Fredkin门）等。





2. 基本的可逆逻辑门（2）

Fredkin门的真值表：

Inputs			Outputs		
a	b	c	a'	b'	c'
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0
0	1	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1

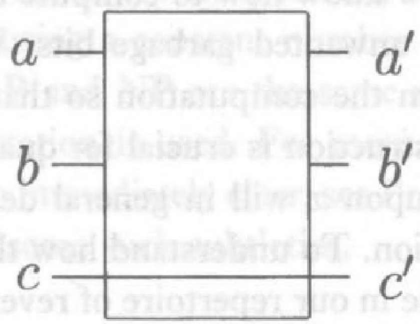


Figure 3.15. Fredkin gate truth table and circuit representation. The bits a and b are swapped if the control bit c is set, and otherwise are left alone.

2. 基本的可逆逻辑门（3）

Fredkin门是通用逻辑门：

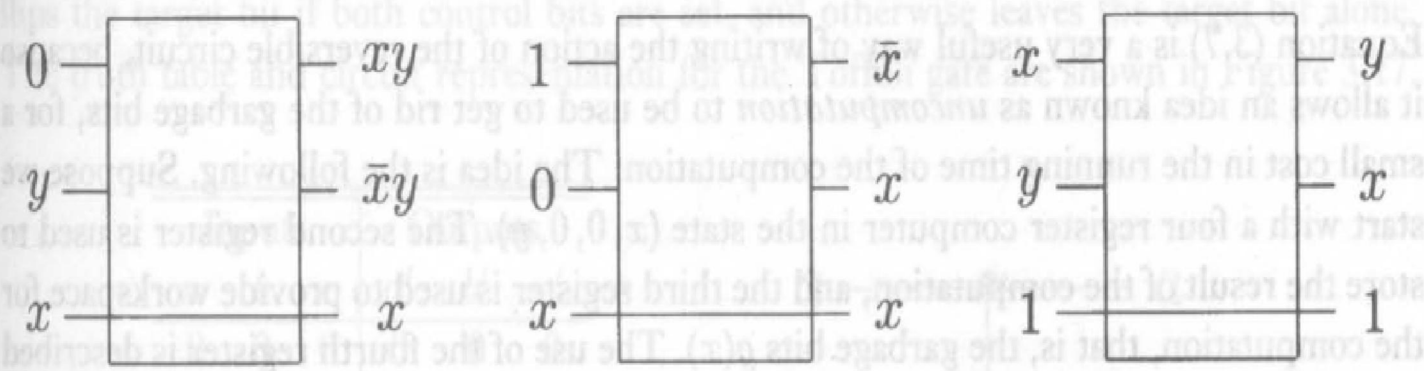


Figure 3.16. Fredkin gate configured to perform the elementary gates AND (left), NOT (middle), and a primitive routing function, the CROSSOVER (right). The middle gate also serves to perform the FANOUT operation, since it produces two copies of x at the output. Note that each of these configurations requires the use of extra 'ancilla' bits prepared in standard states – for example, the 0 input on the first line of the AND gate – and in general the output contains 'garbage' not needed for the remainder of the computation.

2. 基本的可逆逻辑门（4）

Toffoli门的真值表：

Inputs			Outputs		
a	b	c	a'	b'	c'
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	0

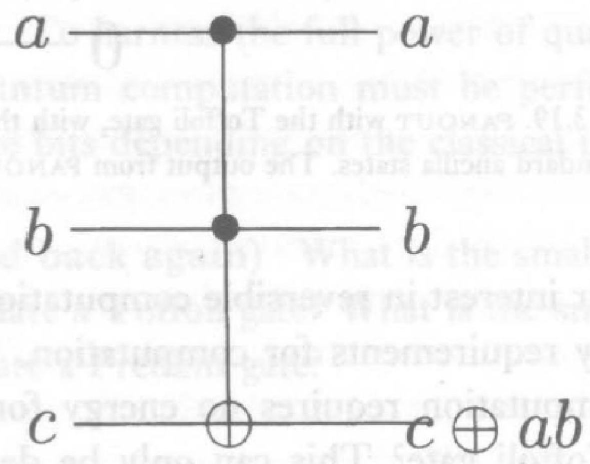


Figure 3.17. Truth table and circuit representation of the Toffoli gate.

2. 基本的可逆逻辑门（5）

Toffoli门是通用逻辑门—与非运算：

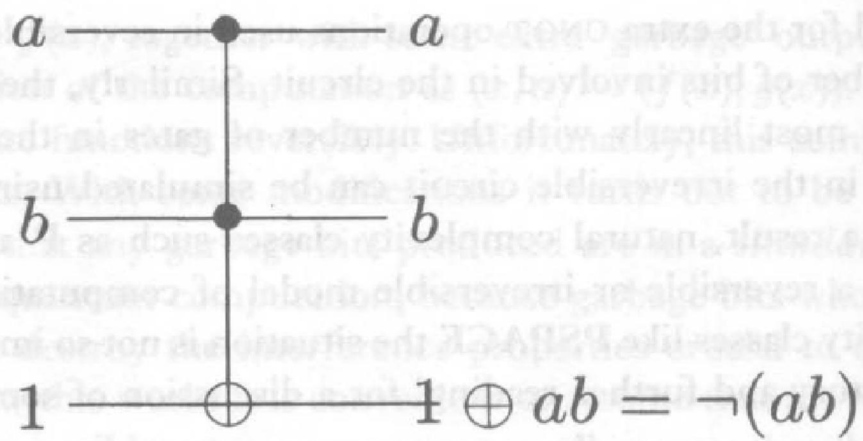


Figure 3.18. Implementing a NAND gate using a Toffoli gate. The top two bits represent the input to the NAND, while the third bit is prepared in the standard state 1, sometimes known as an *ancilla* state. The output from the NAND is on the third bit.

2. 基本的可逆逻辑门（6）

Toffoli门是通用逻辑门—扇出运算：

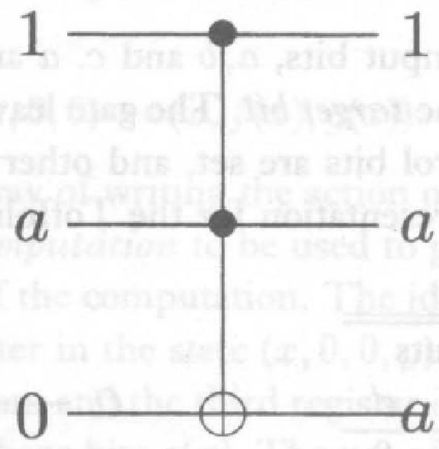
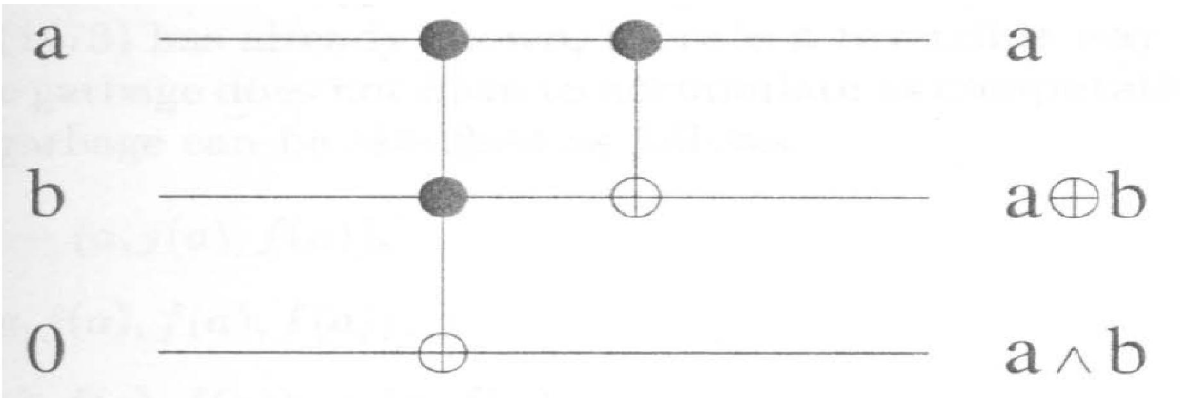


Figure 3.19. FANOUT with the Toffoli gate, with the second bit being the input to the FANOUT, and the other two bits standard ancilla states. The output from FANOUT appears on the second and third bits.

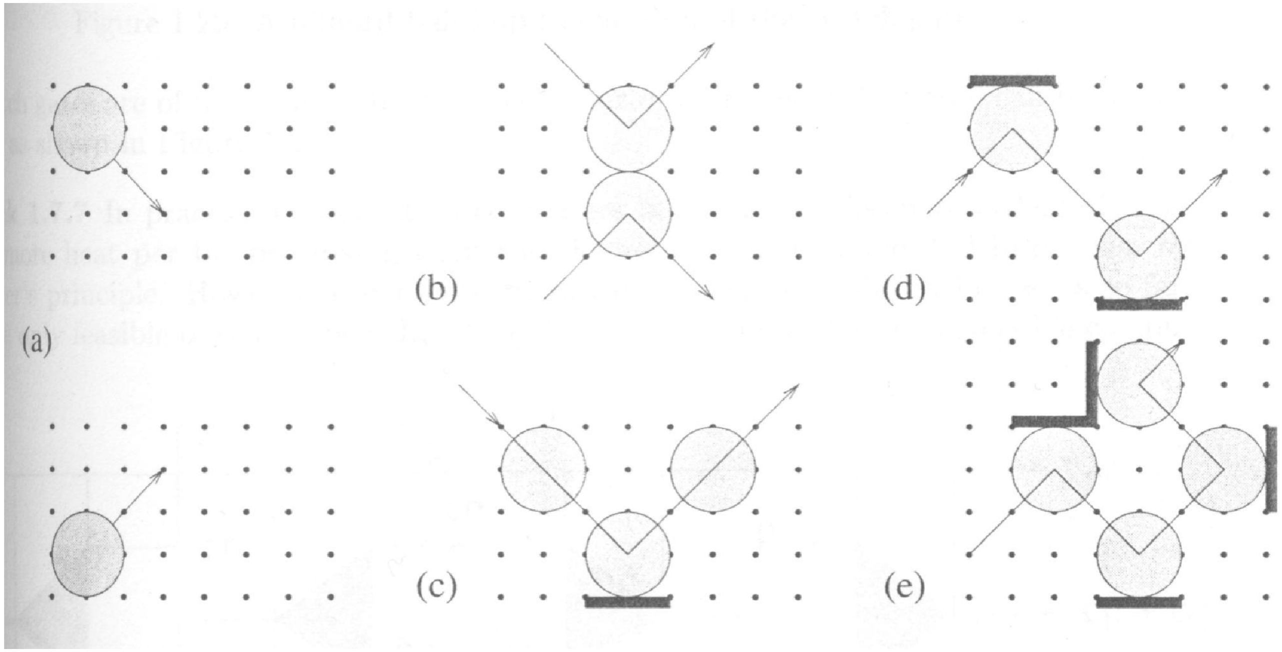
2. 基本的可逆逻辑门（7）

基于Toffoli门的可逆两比特加法器（HA）：



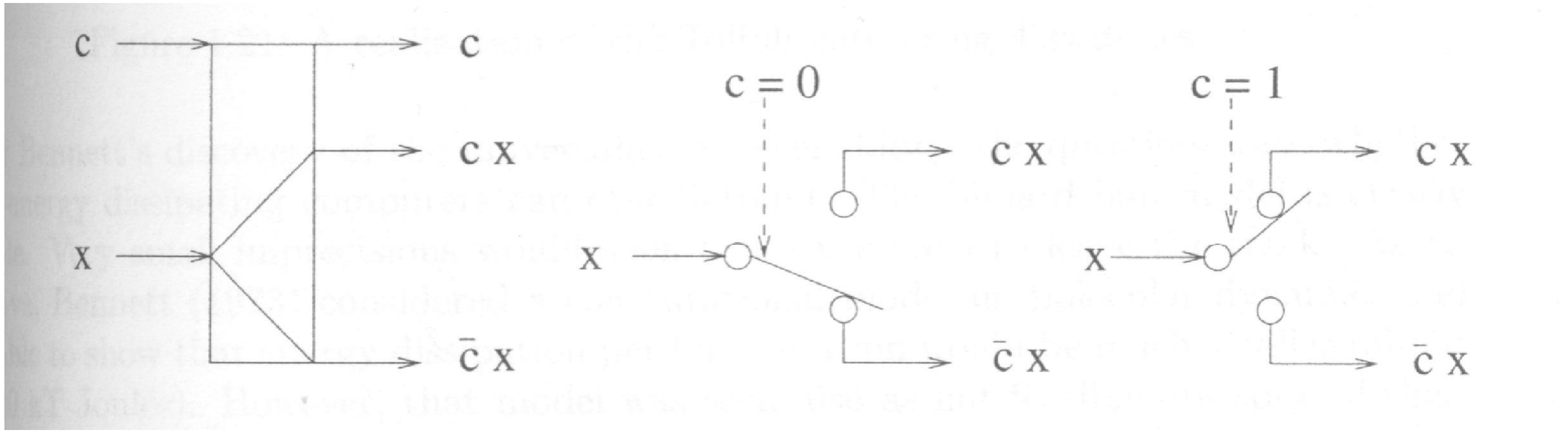
3. 可逆计算的硬球模型

◆Billiard ball model of reversible computation:



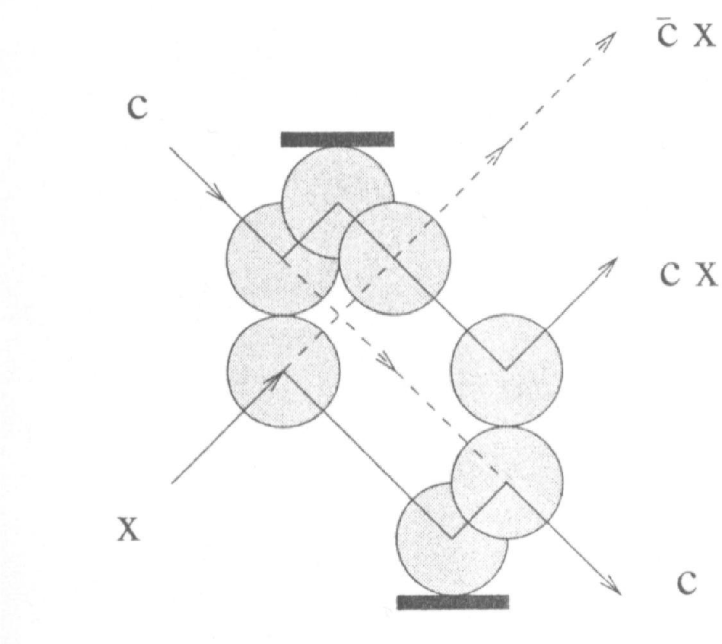
3. 可逆计算的硬球模型（2）

◆ Switch gate:



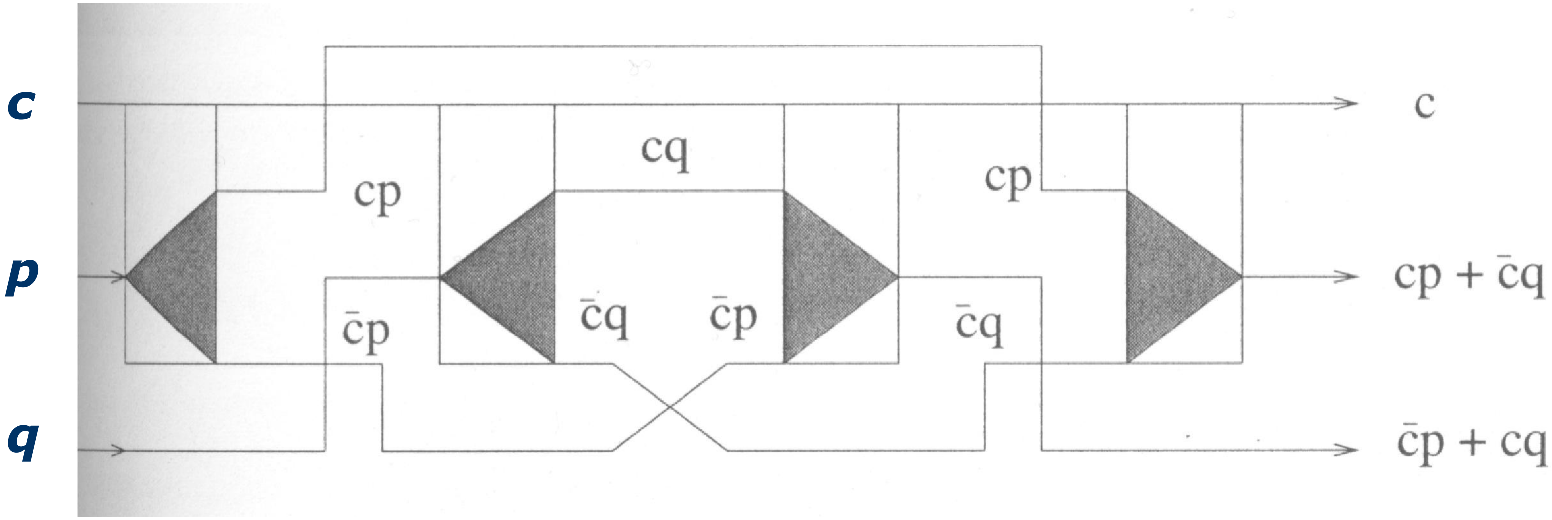
3. 可逆计算的硬球模型（3）

◆A billiard ball implementation of the switch gate:

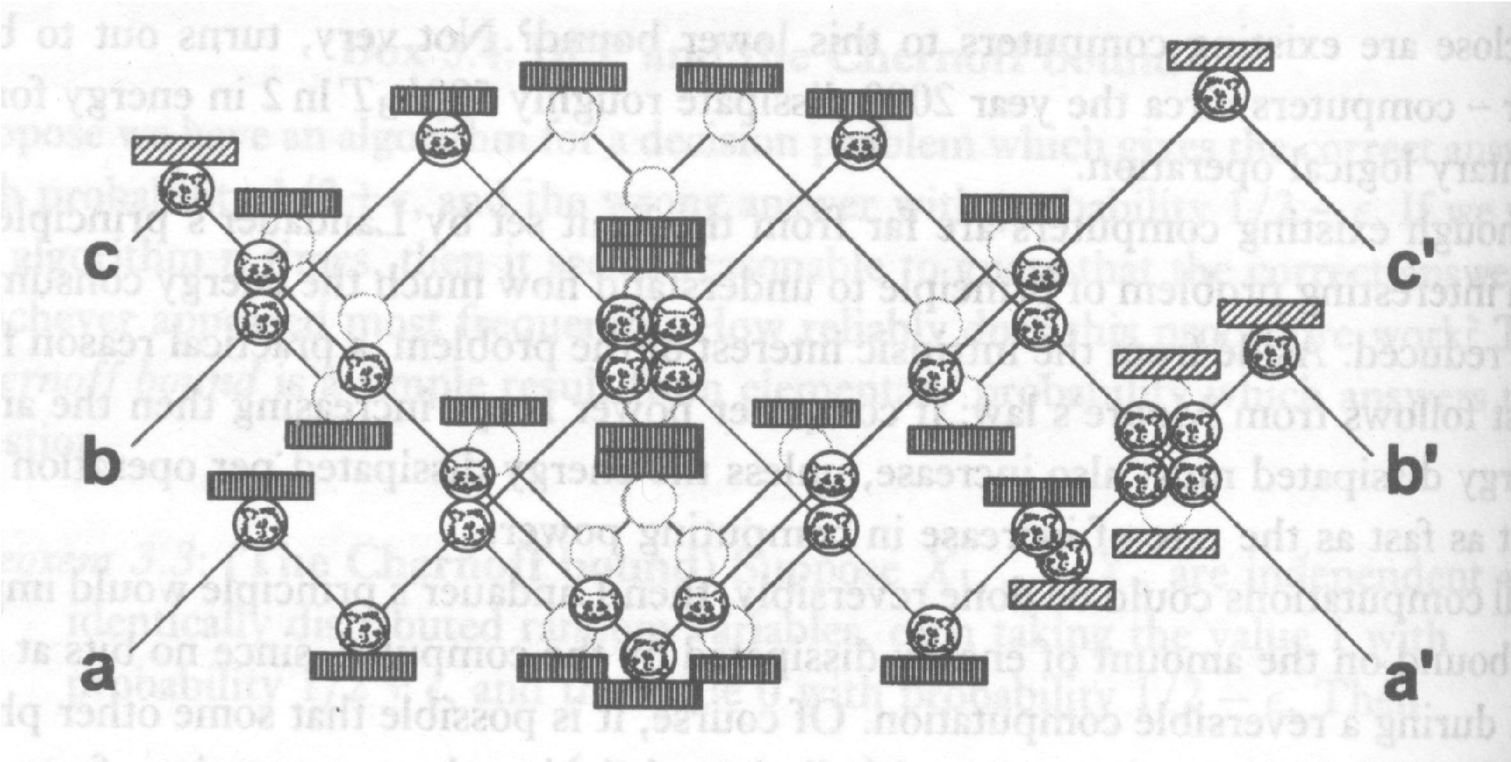


3. 可逆计算的硬球模型（4）

◆A realization of the (anti-)Fredkin gate using 4 switches:



3. 可逆计算的硬球模型（5）

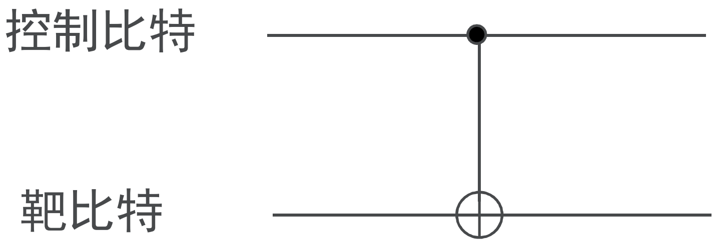


A realization of the Fredkin gate

4. 量子逻辑门

（1）单量子比特门：可作用于量子比特（复二维向量空间）的两维酉变换，$\{I, X \equiv \sigma_x, Y \equiv \sigma_y, Z \equiv \sigma_z\}$ 为一组基。

（2）量子 CNOT门：可作用于量子叠加态的CNOT门。



$$|c\rangle|t\rangle \to |c\rangle|t \oplus c\rangle.$$

矩阵表示：$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

4. 量子逻辑门--单量子比特门的一般形式

◆单量子比特门可以写成如下的一般形式：

$$U=\begin{bmatrix} e^{i\left(\alpha-\frac{\beta}{2}-\frac{\delta}{2}\right)}\cos\frac{\gamma}{2} & -e^{i\left(\alpha-\frac{\beta}{2}+\frac{\delta}{2}\right)}\sin\frac{\gamma}{2} \\ e^{i\left(\alpha+\frac{\beta}{2}-\frac{\delta}{2}\right)}\sin\frac{\gamma}{2} & e^{i\left(\alpha+\frac{\beta}{2}+\frac{\delta}{2}\right)}\cos\frac{\gamma}{2} \end{bmatrix},$$

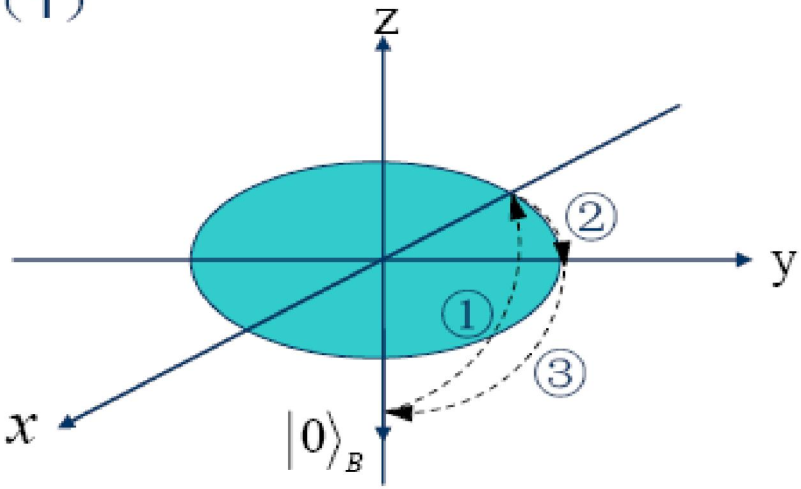
定理：对任意单量子比特的 U 变换，存在实参数 $\alpha,\beta,\gamma,\delta,$

使得 $U=e^{i\alpha}R_z(\beta)R_y(\gamma)R_z(\delta)$, 其中

$$R_{\vec{n}}(\theta)\equiv e^{-i\theta\vec{n}\cdot\vec{\sigma}/2}=\cos\frac{\theta}{2}I-i\sin\frac{\theta}{2}\left(n_xX+n_yY+n_zZ\right).$$

4. 量子逻辑门--CNOT门的物理实现（自旋qubit）

（1）



$$|0\rangle_A|0\rangle_B \rightarrow |0\rangle_A|0\rangle_B$$

A为控制位

CNOT门：

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right)\oplus \tau\text{进动}\oplus x\left(-\frac{\pi}{2}\right),$$

其中：τ 进动沿 $-z$ 方向，

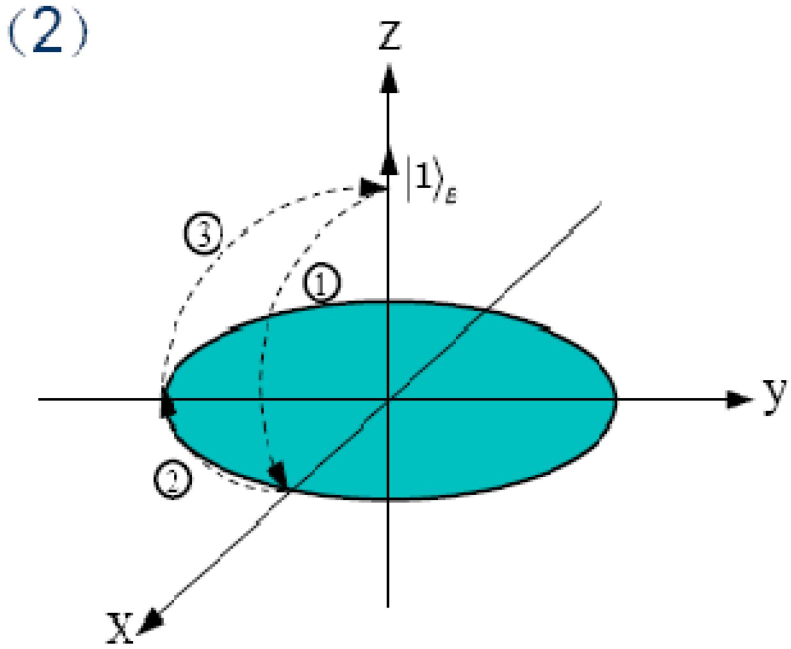
控制位 $=|0\rangle$，进动 $\frac{\pi}{2}$；

控制位 $=|1\rangle$，进动 $\frac{3\pi}{2}$.

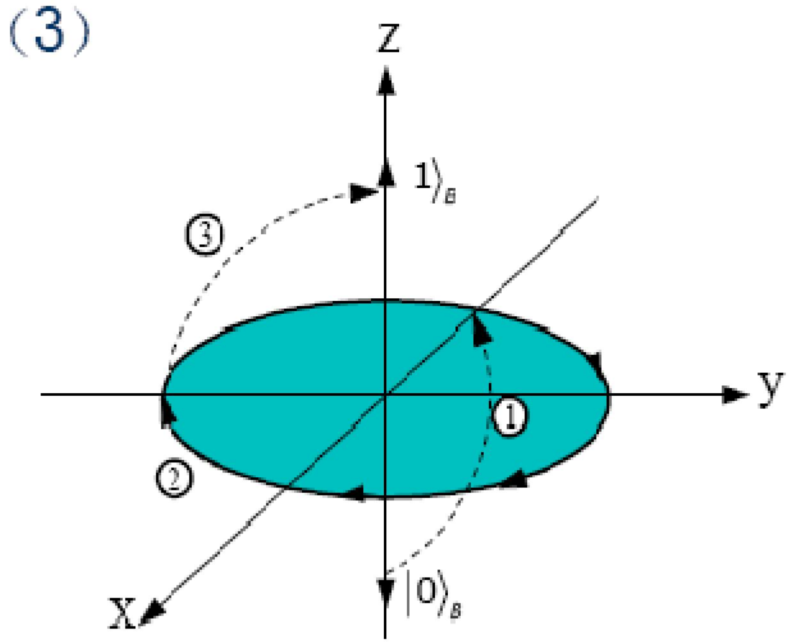
信息位：自旋沿 –Z 方向为 $|0\rangle$，

自旋沿 Z 方向为 $|1\rangle$.

4. 量子逻辑门--CNOT门的物理实现（自旋qubit）



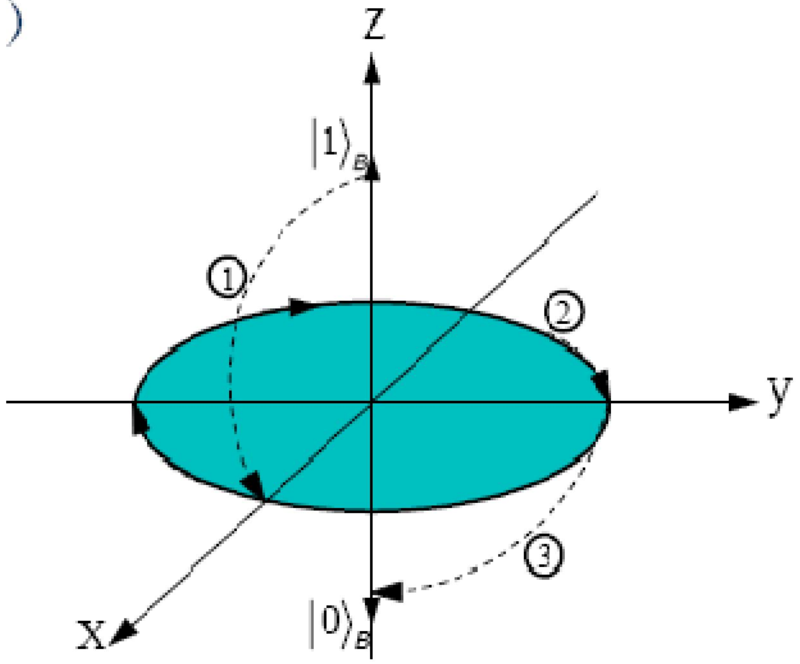
$$|0\rangle_A|1\rangle_B \rightarrow |0\rangle_A|1\rangle_B$$



$$|1\rangle_A|0\rangle_B \rightarrow |1\rangle_A|1\rangle_B$$

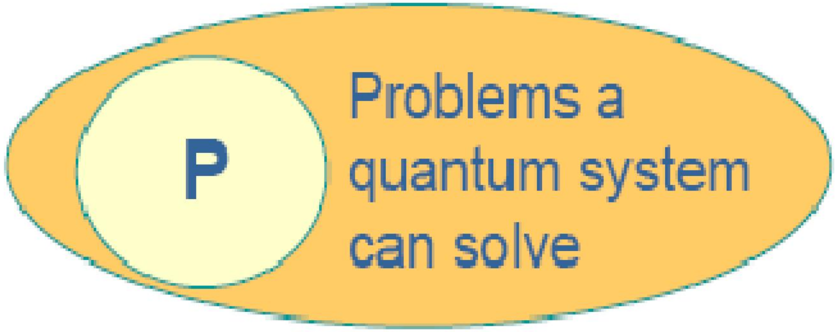
4. 量子逻辑门--CNOT门的物理实现（自旋qubit）

（4）



$$|1\rangle_A |1\rangle_B \to |1\rangle_A |0\rangle_B$$

控制位处于相干叠加态导致控制位和信息位纠缠的物理基础是定域相互作用。



?

量子计算机可以有效求解任何P类问题，但已知其不能有效求解PSPACE类以外的问题。量子计算机可有效求解的问题类在P类和PSPACE类之间的什么位置还不清楚。该问题的解决很可能导致PSPACE类是否等于P类这个计算机科学重要问题的解决。

David Deutsch

Quantum Parallelism

- Quantum parallelism is that feature of quantum computers which makes it possible to evaluate a function $f(x)$ on many different values of x simultaneously

- We will look at an example of quantum parallelism now – how to compute $f(0)$ and $f(1)$ for some function f all in one go!

Circuits for Boolean Functions

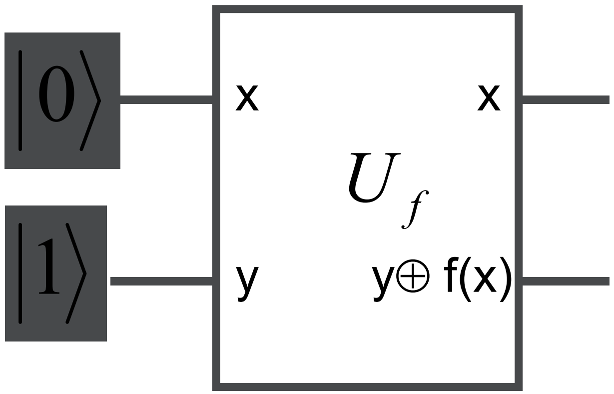
- It is known that, for any Boolean function

$$f:\{0,1\}\mapsto\{0,1\}$$

- it is possible to construct a quantum circuit U_f that computes it
- Specifically, to each binary function f corresponds a quantum circuit:

$$U_f : |x,y\rangle \mapsto |x, \underbrace{y\oplus f(x)}_{\text{binary addition}}\rangle$$

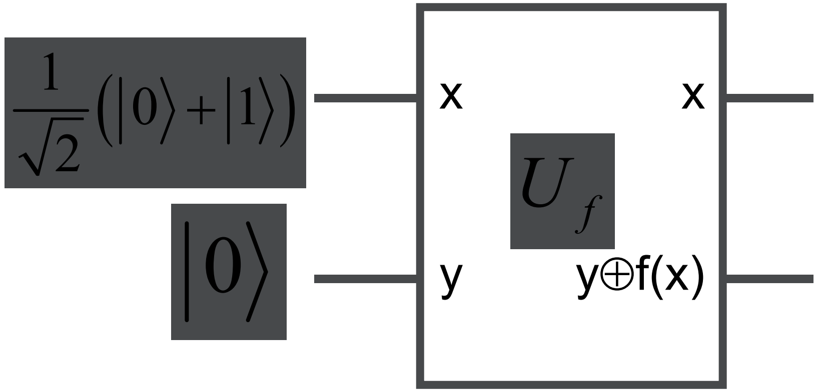
- **What can this circuit U_f do? Example:**



$$
\begin{aligned}
|\psi\rangle &= U_f\left(|0\rangle \otimes |1\rangle\right) \\
&= U_f\,|0,1\rangle \\
&= |0,\ 1 \oplus f(0)\rangle
\end{aligned}
$$

Circuits for Boolean Functions (3)

- **But what if the input is a superposition?**



$$
\begin{aligned}
|\psi\rangle &= U_f\left(\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}\cdot|0\rangle\right) \\
&= U_f\left(\frac{|00\rangle+|10\rangle}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \frac{|0,\ 0\oplus f(0)\rangle+|1,\ 0\oplus f(1)\rangle}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{|0, f(0)\rangle+|1, f(1)\rangle}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

amazing! we've computed f(0) and f(1) at the same time!

Quantum Parallelism Summary

- So, a superposition of inputs will give a superposition of outputs!

- We can perform many computations simultaneously

- This is what makes famous quantum algorithms, such as Shor’s algorithm for factoring, or Grover’s algorithm for searching

- Simple algorithm: Deutsch’s algorithm

Deutsch's Algorithm

- David Deutsch: British physicist
- Deutsch's algorithm allows us to compute, in only one step, the value of

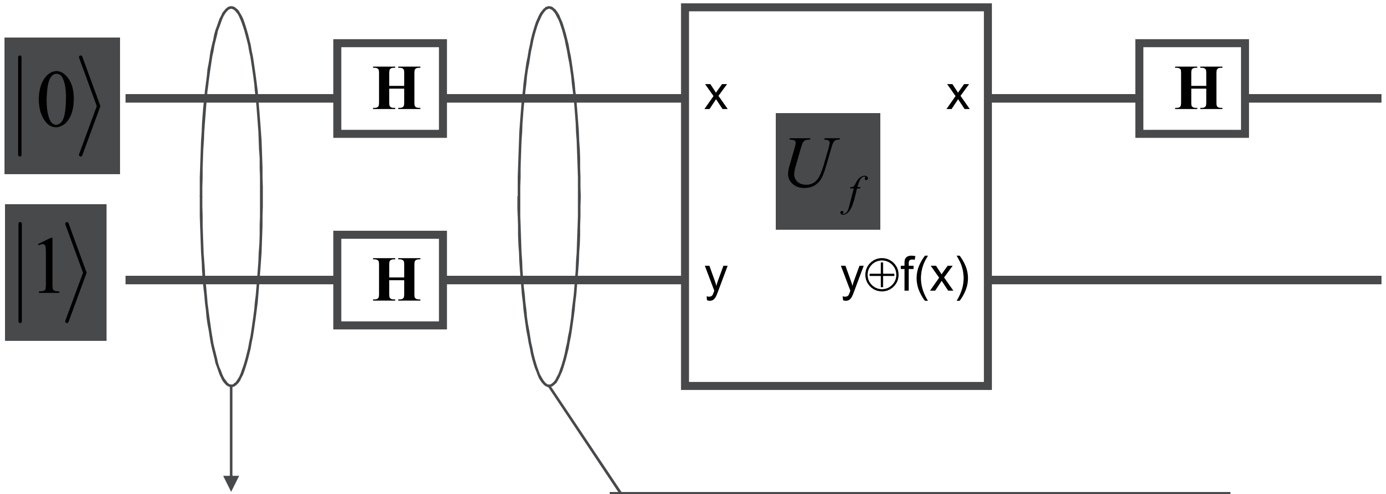
$$f(0) \oplus f(1)$$

- To do this classically, you would have to:
  1. compute $f(0)$
  2. compute $f(1)$
  3. add the two results

– Remember:

$$f : \{0,1\} \mapsto \{0,1\}$$

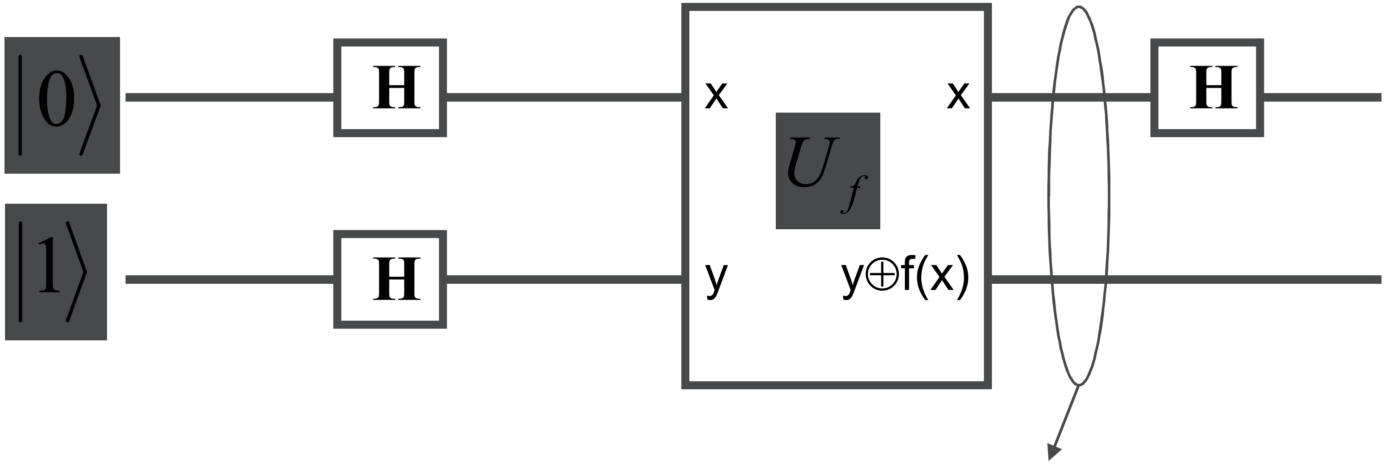
Circuit for Deutsch’s Algorithm



$$|\psi_0\rangle = |01\rangle$$

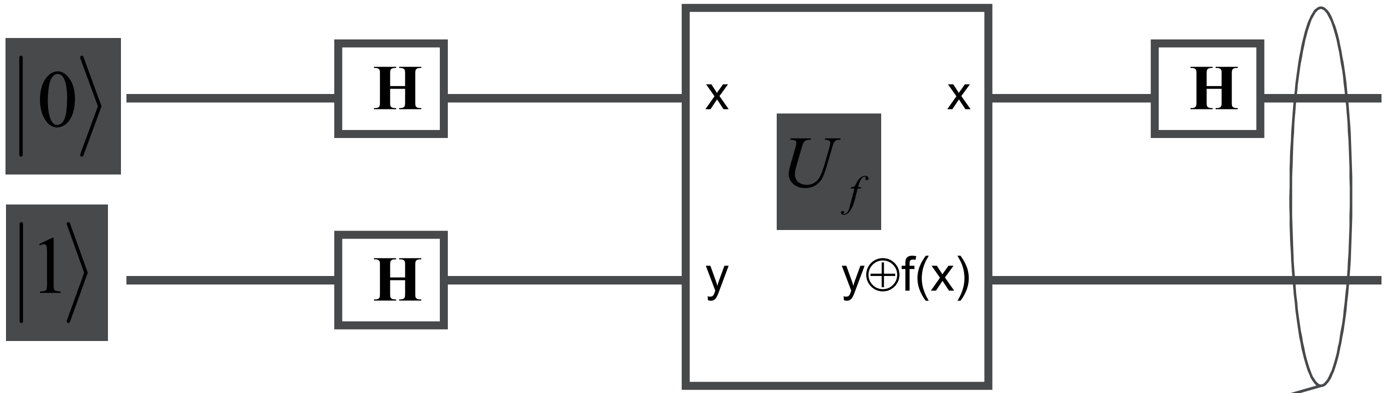
$$|\psi_1\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \cdot \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

Circuit for Deutsch’s Algorithm (2)



$$|\psi_2\rangle = \begin{cases} \text{if } f(0)=f(1), & \pm\dfrac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}} \\ \text{if } f(0)\neq f(1), & \pm\dfrac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Circuit for Deutsch’ s Algorithm (3)



$$|\psi_3\rangle = \begin{cases} \text{if } f(0) = f(1), & \pm|0\rangle \cdot \dfrac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \\ \text{if } f(0) \neq f(1), & \pm|1\rangle \cdot \dfrac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

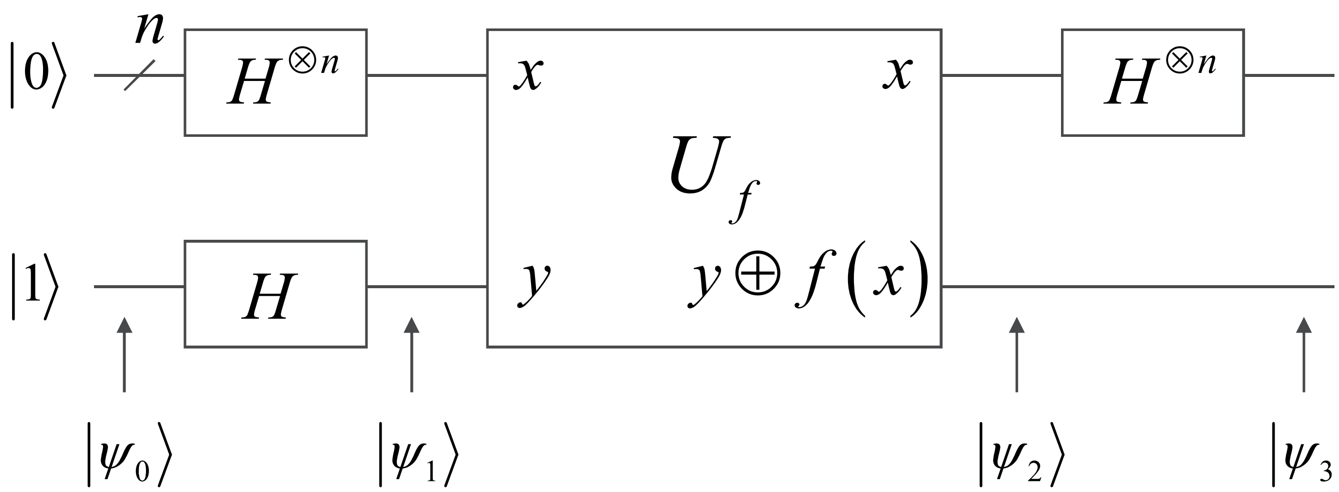
...and so we have computed

$$f(0) \oplus f(1)$$

this simplifies to

$$|\psi_3\rangle = \pm|f(0) \oplus f(1)\rangle \cdot \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

Deutsch-Jozsa算法



◆实现Deutsch-Jozsa算法的量子路线，类似于工程上通用的符号，带有斜杠 / 的线表示：通过此线的是一组量子比特。

$$|\psi_0\rangle = |0\rangle^{\otimes n}|1\rangle$$

$$|\psi_1\rangle = \sum_{x\in\{0,1\}^n} \frac{|x\rangle}{\sqrt{2^n}}\left[\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right]$$

$$|\psi_2\rangle = \sum_{x} \frac{(-1)^{f(x)}|x\rangle}{\sqrt{2^n}}\left[\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right]$$

Deutsch-Jozsa算法（2）

$$H^{\otimes n}\left|x_1,\ldots,x_n\right\rangle = \frac{\sum_{z_1,\ldots,z_n}(-1)^{x_1 z_1+\ldots+x_n z_n}\left|z_1,\ldots,z_n\right\rangle}{\sqrt{2^n}}$$

$$H^{\otimes n}\left|x\right\rangle = \frac{\sum_{z}(-1)^{x\cdot z}\left|z\right\rangle}{\sqrt{2^n}}$$

$$\left|\psi_3\right\rangle = \sum_{z}\sum_{x}\frac{(-1)^{x\cdot z+f(x)}\left|z\right\rangle}{2^n}\left[\frac{\left|0\right\rangle-\left|1\right\rangle}{\sqrt{2}}\right]$$

Deutsch-Jozsa算法（3）

- 考虑对 x 的求和：
- 如果 $f(x)$ 是常数函数，则和为

$$(-1)^{f(x)}\left(\frac{1}{2^n}\sum_{x=0}^{2^n-1}(-1)^{x\cdot z}\right)=(-1)^{f(x)}\delta_{z,o}$$

- 这是因为 $z\neq 0$ 时，$(-1)^{x\cdot z}$ 有半数等于+1，半数等于-1，所以，测量这个 n 位寄存器，将以概率1得到 $z=0$。

Deutsch-Jozsa算法（4）

◆如果 $f(x)$ 是对称函数，对于 $z=0$ 的态，有

$$\frac{1}{2^n}\sum_{x=0}^{2^n-1}(-1)^{f(x)}(-1)^{x\cdot z}=0$$

这是因为函数 $(-1)^{f(x)}$ 对 $x=0$ 到 $x=2^n-1$ 求和时，有一半为+1，一半为-1。所以 $f(x)$ 是对称函数时，测量这个 n 位寄存器，得到 $|z=0\rangle$ 态的概率为零。

Deutsch-Jozsa算法总结

算法　Deutsch-Jozsa

输入　对 $x\in\{0,\ldots,2^n-1\}$ 和 $f(x)\in\{0,1\}$ 进行变换 $|x\rangle|y\rangle\to|x\rangle|y\oplus f(x)\rangle$ 的黑箱 U_f，已知 $f(x)$ 对所有的 x 或者是常数，或者是平衡的（即恰好对于所有可能的 x 的一半取1，另一半取0）

输出　当且仅当 f 是常数，输出为0。

运行时间　计算 U_f 一次，总是成功的。

Deutsch-Jozsa算法总结（2）

过程

$(1)|0\rangle^{\otimes n}|1\rangle$ //状态初始化

$(2)\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{x=0}^{2^n-1}|x\rangle\left[\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\right]$ //用Hadamard门产生叠加

$(3)\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{x}(-1)^{f(x)}|x\rangle\left[\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\right]$ //用 U_f 计算函数 f

$(4)\rightarrow \sum_{z}\sum_{x}\frac{(-1)^{x\cdot z+f(x)}|z\rangle}{2^n}\left[\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\right]$ //进行Hadamard变换

$(5)\rightarrow z$ //测量最终输出 z

Bernstein-Vazirani算法

- **Bernstein-Vazirani问题**

设 a 是一个 n 位串，假设量子黑箱可以计算函数

$f_a:\ f_a(x)=a\cdot x$ 。现在的问题是： $a=?$

经典算法确定 a，必须运行黑箱n 次，通过求解n 元线性方程组得到 a。 Bernstein-Vazirani设计的如下量子算法，只需要运行黑箱一次。

- **问题：如果只有经典黑箱（使用者不知 a），能否构造量子黑箱？——考虑经典计算与量子计算的关系。**

Bernstein-Vazirani算法（2）

$$U_{f_a}:\left[|x\rangle\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle-|1\rangle\right)\right]$$

$$=\left(-1\right)^{f_a(x)}|x\rangle\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle-|1\rangle\right)$$

$$=(-1)^{x\cdot a}|x\rangle\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle-|1\rangle\right)$$

$$U_{f_a}\left[H^{(n+1)}|0\rangle^n|1\rangle\right]$$

$$=\frac{1}{2^{n/2}}\sum_{x=0}^{2^n-1}\left(-1\right)^{a\cdot x}|x\rangle\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle-|1\rangle\right)$$

$$\xrightarrow{\text{前}n\text{位}H^{(n)}}\frac{1}{2^n}\sum_{x=0}^{2^n-1}\left(-1\right)^{a\cdot x}\sum_{y=0}^{2^n-1}\left(-1\right)^{x\cdot y}|y\rangle\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle-|1\rangle\right)$$

Bernstein-Vazirani算法（3）

考虑对变量 x 的求和，由于

$$\frac{1}{2^n}\sum_{x=0}^{2^n-1}(-1)^{a\cdot x}(-1)^{x\cdot y}=\frac{1}{2^n}\sum_{x=0}^{2^n-1}(-1)^{(a\oplus y)\cdot x}=\delta_{a,y}$$

即：

$$\frac{1}{2^n}\sum_{x=0}^{2^n-1}(-1)^{a\cdot x}\sum_{y=0}^{2^n-1}(-1)^{x\cdot y}|y\rangle\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle-|1\rangle)$$

$$=\sum_{y=0}^{2^n-1}\delta_{a,y}|y\rangle\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle-|1\rangle)=|a\rangle\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle-|1\rangle),$$

测量前 n 位寄存器将以概率1得到 a 。

◆**设 f 为量子黑箱可计算函数，**

$f:\{0,1\}^n \to \{0,1\}^m$ 是$2\to 1$的同态，

且对确定的$a \in \{0,\ 1\}^n$，有$f(x \oplus a) = f(x).$

经典方法求解a：最坏情形需要$2^{n-1}+1$次运算。

利用量子黑箱可以通过n 次运算求得a 。

Simon算法（2）

$$U_f\left[\frac{1}{2^{n/2}}\sum_{x=0}^{2^n-1}|x\rangle|0\rangle\right]=\frac{1}{2^{n/2}}\sum_{x=0}^{2^n-1}|x\rangle|f(x)\rangle$$

现在测量第二个寄存器，设结果为 $f(x_0)$,

由于仅 x_0 和 x_0+a 被映射为 $f(x_0)$,

所以知第一个寄存器的态为 $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|x_0\rangle+|x_0\oplus a\rangle\right)$,

Simon算法（3）

$$H^{(n)}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|x_0\right\rangle+\left|x_0\oplus a\right\rangle\right)$$

$$=\frac{1}{2^{(n+1)/2}}\sum_{y=0}^{2^n-1}\left[(-1)^{x_0\cdot y}+(-1)^{(x_0\oplus a)\cdot y}\right]\left|y\right\rangle$$

$$=\frac{1}{2^{(n-1)/2}}\sum_{y\cdot a=0}(-1)^{x_0\cdot y}\left|y\right\rangle$$

测量第一个寄存器，随机得到一个$\left|y\right\rangle$，满足$a\cdot y=0$

Simon算法（4）

◆重复上面算法，可求得n个线性独立的y值，通过解方程组：

$$\begin{cases} y_1 \cdot a = 0, \\ y_2 \cdot a = 0, \\ \quad\vdots \\ y_n \cdot a = 0. \end{cases}$$

可求得a。即使考虑到两次运行黑箱可能得到同一个y值，或者是与已得y值线性相关的值，重复运行黑箱的次数仍是n的多项式，可知量子算法获得了指数加速的效果。

量子信息与量子密码

[第4次课] 量子信息论与早期量子算

Q&A