量子信息与量子密码

Quantum Information & Quantum Cryptology

[第3次课] 数学、物理预备知识（续）

授课教师：杨理

授课时间：2021年3月21日

内容概要

§2.1 线性代数

一、矩阵的分解；二、矩阵的直积；三、矩阵的酉对角化；四、两矩阵同时酉对角化；五、教材上的其它内容

§2.2 量子力学基础

一、基本假设；二、基本概念；三、量子测量；四、密度算符；五、复合体系；六、Bell定理

四、密度算符

五、复合体系

六、 Bell 定理

四、密度算符

1. 量子态 $\left|\psi(t)\right\rangle$ ，设已归一化：$\left\langle\psi(t)\middle|\psi(t)\right\rangle=1$.

定义：$\rho(t)=\left|\psi(t)\right\rangle\left\langle\psi(t)\right|$ 为密度算符，

易见 $\rho^{+}=\rho$， $\rho^{2}=\rho$.

取某 F 表象，可得密度矩阵，矩阵元为：

$$\begin{aligned}\rho_{nn'}(t)&=\left\langle n\middle|\rho(t)\middle|n'\right\rangle\\&=\left\langle n\middle|\psi(t)\right\rangle\left\langle\psi(t)\middle|n'\right\rangle=C_n(t)C_{n'}^{*}(t),\end{aligned}$$

密度算符（2）

其对角元为 $\rho_{nn}(t)=\left|C_n(t)\right|^2\geq 0$，是 $|\psi\rangle$ 态下测量 F 得 F_n 值的概率（$\hat{F}|n\rangle=F_n|n\rangle$）。由 $|\psi\rangle$ 的归一化条件，可得

$$tr\rho=\sum_n\left|C_n(t)\right|^2=1.$$

密度算符（3）

2. 力学量的平均值

$$\langle G\rangle=\langle\psi|G|\psi\rangle=\sum_{n,n'}\langle\psi|n\rangle\langle n|G|n'\rangle\langle n'|\psi\rangle$$

$$=\sum_{n,n'}C_n^*G_{nn'}C_{n'}=\sum_{n,n'}\rho_{n'n}G_{nn'}$$

$$=\sum_{n'}(\rho G)_{n'n'}=\sum_{n}(G\rho)_{nn}\ ,$$

所以有：$\langle G\rangle=tr(\rho G)=tr(G\rho).$

密度算符（4）

3.　$\rho(t)$ 随时间的演化：

由 $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle$ 可得：

$$\frac{\partial\rho(t)}{\partial t} = \frac{\partial|\psi(t)\rangle}{\partial t}\langle\psi(t)| + |\psi(t)\rangle\frac{\partial}{\partial t}\langle\psi(t)|$$

$$= \frac{H}{i\hbar}|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)| + |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|\frac{H}{-i\hbar}$$

$$= \frac{1}{i\hbar}\left(H\rho(t) - \rho(t)H\right)$$

密度算符（5）

所以有

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(t)=\frac{1}{i\hbar}\left[H,\rho(t)\right]. \qquad (3)$$

问：（1）这一方程与海森堡表象中力学量随时间演化的方程

$$\frac{d}{dt}F=\frac{1}{i\hbar}[F,H]+\frac{\partial F}{\partial t}$$

如何联系起来？

（2）这一方程的适用范围。

密度算符（6）

- 作业：电子自旋 $\vec{s}=\frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$，沿空间方向 $\vec{n}\left(\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta\right)$ 的分量 $\vec{\sigma}\cdot\vec{n}$，矩阵表示为 $\vec{\sigma}\cdot\vec{n}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta e^{-i\varphi}\\ \sin\theta e^{i\varphi} & -\cos\theta\end{pmatrix}$，求密度矩阵 $\rho\left(\sigma_n=1\right)$ 和 $\rho\left(\sigma_n=-1\right)$，并在 $\left|\sigma_n=1\right\rangle$ 态下证明：

$$\begin{cases}\left\langle\sigma_x\right\rangle=tr\left(\rho\sigma_x\right)=\sin\theta\cos\varphi\,,\\ \left\langle\sigma_y\right\rangle=tr\left(\rho\sigma_y\right)=\sin\theta\sin\varphi\,,\\ \left\langle\sigma_z\right\rangle=tr\left(\rho\sigma_z\right)=\cos\theta\,,\end{cases}$$

即 $\left\langle\vec{\sigma}\right\rangle=\vec{n}$

密度算符（7）

4. 混合态的密度算符：刻画不能用单纯的波函数来描述的状态。例如：$|\psi_i\rangle (i=1,2,3,\cdots)$ 表示体系一组力学量完全集 L 的共同本征态，正交归一， $\sum_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| = I$,（完备）， t 时刻体系处于 $|\psi_k\rangle$ 的概率为 p_k， $\sum_k p_k = 1$, 即体系处于一系列纯态的某种统计混合态。

密度算符（8）

- 此时的密度算符为 $\rho=\sum_k p_k|\psi_k\rangle\langle\psi_k|=\sum_k p_k\rho_k$ ，

  式中 $\rho_k=|\psi_k\rangle\langle\psi_k|$.

  性质： ① $\rho^{+}=\rho$

  ② $tr\rho=\sum_k p_k tr\rho_k=\sum p_k=1$

  ③ $\frac{\partial}{\partial t}\rho=\sum_k p_k\frac{\partial\rho_k}{\partial t}=\frac{1}{i\hbar}\sum_k p_k[H,\ \rho_k]$

  $$=\frac{1}{i\hbar}\left[H,\ \sum_k p_k\rho_k\right]=\frac{1}{i\hbar}[H,\ \rho]$$

密度算符（9）

④ $$\rho^2 = \sum_{k,k'} p_k p_{k'} |\psi_k\rangle\langle\psi_k|\psi_{k'}\rangle\langle\psi_{k'}|$$

$$= \sum_{k,k'} p_k p_{k'} |\psi_k\rangle \delta_{kk'} \langle\psi_{k'}| = \sum_k p_k^2 |\psi_k\rangle\langle\psi_k|$$

而 $\sum_k p_k |\psi_k\rangle\langle\psi_k| = \rho$，

故 $tr\rho^2 \le tr\rho = 1.$

⑤ $$\langle G\rangle = \sum_k p_k \langle\psi_k|G|\psi_k\rangle = \sum_k p_k tr(\rho_k G)$$

$$= tr\left(\sum_k p_k \rho_k G\right) = tr(\rho G)$$

密度算符（10）

- 纯态的系综：$\{p_i, |\psi_i\rangle\}$.
- 可用密度算符刻画：$\rho \equiv \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$.

  因而有：

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \xrightarrow{U} \sum_i p_i U |\psi_i\rangle\langle\psi_i| U^+ = U\rho U^+$$

即：$\rho(t) = U(t)\rho(0)U^\dagger(t)$.

密度算符（11）

- 对于纯态 $|\psi_i\rangle$ ，测量结果为 m 的几率

$$p(m|i)=\langle\psi_i|M_m^+M_m|\psi_i\rangle=tr\left(M_m^+M_m|\psi_i\rangle\langle\psi_i|\right);$$

- 对于纯态系综 $\{p_i,|\psi_i\rangle\}$， 测量结果为 m 的几率

$$\begin{aligned}p(m)&=\sum_i p(m|i)p_i\\&=\sum_i p_i\,tr\left(M_m^+M_m|\psi_i\rangle\langle\psi_i|\right)\\&=tr\left(M_m^+M_m\rho\right).\end{aligned}$$

密度算符（12）

对第 i 个纯态进行本征值为 m 的测量后进入状态：

$$\left|\psi_i^m\right\rangle = \frac{M_m\left|\psi_i\right\rangle}{\sqrt{\left\langle\psi_i\right|M_m^+ M_m\left|\psi_i\right\rangle}},$$

此时纯态系综总的密度算符为：

$$\rho_m = \sum_i p(i|m)\left|\psi_i^m\right\rangle\left\langle\psi_i^m\right| = \sum_i p(i|m)\frac{M_m\left|\psi_i\right\rangle\left\langle\psi_i\right|M_m^+}{\left\langle\psi_i\right|M_m^+ M_m\left|\psi_i\right\rangle}.$$

密度算符（13）

因为

$$p\left(i\middle|m\right)=p\left(m,i\right)/p\left(m\right)=p\left(m\middle|i\right)p_i/p\left(m\right),$$

故有

$$\rho_m=\sum_i p_i\frac{M_m\left|\psi_i\right\rangle\left\langle\psi_i\right|M_m^+}{tr\left(M_m^+M_m\rho\right)}$$

$$=\frac{M_m\rho M_m^+}{tr\left(M_m^+M_m\rho\right)}.$$

密度算符（14）

- 考虑测量记录丢失的情形，我们只能说：系统将以概率 $p(m)$ 处于 ρ_m，但因为不知道 m 的值，系统的状态只能由密度算符描述如下：

$$\begin{aligned}\rho &= \sum_m p(m)\rho_m \\ &= \sum_m tr\left(M_m^+ M_m \rho\right)\frac{M_m \rho M_m^+}{tr\left(M_m^+ M_m \rho\right)} \\ &= \sum_m M_m \rho M_m^+\end{aligned}$$

密度算符（15）

定理　一个算符 ρ 是某个纯态系综 $\{p_i,|\psi_i\rangle\}$ 的密度算符，当且仅当它满足如下条件：

(1) 迹条件：ρ 的迹等于1；

(2) 半正定条件：ρ 是一个半正定算符。

密度算符（16）

用密度算符图像描述量子力学：

假设1　任意孤立物理系统的状态由作用在一个带内积的复向量空间上的一个半正定迹为1的密度算符 ρ 完全描述。以概率 p_i 处于状态ρ_i的系统其密度算符为$\sum_i p_i\rho_i$。

密度算符（17）

假设2　封闭量子系统的演化由一个酉变换描述：系统时刻 t_1 的状态 $\rho(t_1)$ 和时刻 t_2 的状态 $\rho(t_2)$ 的关系由一个仅依赖于时刻 t_1 和 t_2 的酉算子 U 给出：

$$\rho(t_2)=U(t_1,t_2)\rho(t_1)U^{\dagger}(t_1,t_2),$$

具体的酉算子可由下述方程导出：

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(t)=\frac{1}{i\hbar}\left[H,\rho(t)\right].$$

密度算符（18）

假设3 量子测量由一组测量算子$\{M_m\}$描述，这些算子作用在被测系统的状态空间上，指标m标识实验中可能出现的测量结果。设量子系统测量前的状态为ρ，则得到结果m的概率由

$p(m)=tr\left(M_m^+M_m\rho\right)$给出，测量后系统状态为

$$M_m\rho M_m^+\Big/tr\left(M_m^+M_m\rho\right).$$

测量算子满足完备性方程$\sum_m M_m^+M_m=I$。

密度算符（19）

假设4　复合物理系统的状态空间是各物理子系统状态空间的张量积。如果有子系统*1*到 n，其中系统 i 处于状态 ρ_i，各子系统状态完全独立，则全系统的状态是 $\rho_1 \otimes \rho_2 \otimes \cdots \rho_n$。

密度算符（20）

定理2.6 当且仅当 $|\tilde{\psi}_i\rangle=\sum_j u_{ij}|\tilde{\varphi}_j\rangle$ 两组向量 $\{|\tilde{\psi}_i\rangle\}$ 和 $\{|\tilde{\varphi}_j\rangle\}$ 生成相同的密度矩阵，其中 u_{ij} 是某酉阵的矩阵元。

另一种表述：当且仅当 $\sqrt{p_i}|\psi_i\rangle=\sum_j u_{ij}\sqrt{q_j}|\varphi_j\rangle$ 对某个酉阵 $\{u_{ij}\}$ 成立， $\rho_\psi=\sum_i p_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i|=\sum_j q_j|\varphi_j\rangle\langle\varphi_j|=\rho_\varphi$ 对归一化状态集 $\{|\psi_i\rangle\}$ 和 $\{|\varphi_j\rangle\}$ 以概率分布 p_i 和 q_j 构成的两个系综成立。

密度算符（21）

定理证明要点：设 ρ_ψ 有谱分解：$\rho_\psi = \sum_k \lambda_k |k\rangle\langle k|, |\tilde{k}\rangle \equiv \sqrt{\lambda_k}|k\rangle.$

令$|\psi\rangle$为由 $\{|\tilde{k}\rangle\}$ 所张成的空间的正交补空间中的任意向量，

于是 $\langle\psi|\tilde{k}\rangle\langle\tilde{k}|\psi\rangle = 0$ 对所有 k 成立，所以

$$0 = \langle\psi|\rho_\psi|\psi\rangle = \sum_i \langle\psi|\tilde{\psi}_i\rangle\langle\tilde{\psi}_i|\psi\rangle = \sum_i |\langle\psi|\tilde{\psi}_i\rangle|^2.$$

故知$|\psi\rangle$也是$\{|\tilde{\psi}_i\rangle\}$的正交补空间中的任意向量，因而

有 $|\tilde{\psi}_i\rangle = \sum_k c_{ik}|\tilde{k}\rangle$， 同理可证 $|\tilde{\varphi}_i\rangle = \sum_k d_{ik}|\tilde{k}\rangle$， 其中$(c_{ik})$ 和 (d_{ik})

为列正交阵，可以补充一些列成为酉矩阵。

五、复合体系

- 子体系 A和B 分别有$\{|i\rangle_A\}$ 和 $\{|\mu\rangle_B\}$，则 $\{|i\rangle_A|\mu\rangle_B\}$ 构成复合体系 $A+B$ 的一组完备基（非耦合表象），$A+B$ 的任意量子态可表为：

$$|\psi\rangle_{AB}=\sum_{i\mu}a_{i\mu}|i\rangle_A|\mu\rangle_B \quad , \quad \sum_{i\mu}|a_{i\mu}|^2=1 .$$

- 相应地，有

$$\rho_{AB}=|\psi\rangle_{AB}\ {}_{AB}\langle\psi|=\sum_{i\mu j\nu}a^*_{j\nu}a_{i\mu}|i\rangle_A|\mu\rangle_B\ {}_A\langle j|\ {}_B\langle\nu|,$$

这里$|\psi\rangle_{AB}$是纯态，因而 ρ_{AB} 是一个纯态的密度算子。

复合体系（2）

- 设 $\hat{Q}_A$ 是子体系 A 的一个可观测量（只依赖于 A 的动力学变量），在体系 $A+B$ 中，相应算子为 $Q=Q_A\otimes I_B$． $|\psi\rangle_{AB}$下 Q 的平均值为：

$$\langle Q\rangle = tr_{AB}\left(\rho_{AB}\hat{Q}\right).$$

- 不完全测量：

  a. 多自由度体系—与部分自由度相关的测量。

  b. 复合体系—子体系力学量的测量。

复合体系（3）

在非耦合表象中：

$$\langle Q\rangle = {}_{AB}\langle\psi|Q_A\otimes I_B|\psi\rangle_{AB}$$
$$=\sum_{j\nu}a^*_{j\nu}\ {}_A\langle j|\ {}_B\langle\nu|Q_A\otimes I_B\sum_{i\mu}a_{i\mu}|i\rangle_A|\mu\rangle_B$$
$$=\sum_{ij\mu}a^*_{j\mu}a_{i\mu}\ {}_A\langle j|Q_A|i\rangle_A\,,$$

即：$\langle Q\rangle = tr(\rho_A Q_A)$，其中 $\rho_A=\sum_{ij\mu}a_{i\mu}a^*_{j\mu}|i\rangle_{A\,A}\langle j| = tr_B(\rho_{AB})$

称为子系统 A 的约化密度矩阵。

复合体系（4）

约化密度矩阵 ρ_A 的性质：

(1) $\rho_A^+ = \rho_A$ （自伴）；(2) $tr_A\rho_A = 1$ ；

(3) ρ_A 可对角化，且本征值为非负实数；

(4) 只有当 $|\psi\rangle_{AB} = |i_0\rangle_A |\mu_0\rangle_B$ 是一个简单的直积态时，才有 $\rho_A^2 = \rho_A$. 这表明即使复合体系处于纯态，子体系也很可能处于混合态，需要用混合态的密度矩阵来描述。

作业：

证明 $tr(\rho_A) = 1$.

复合体系（5）

关于求迹的计算：

$$tr_B\left(\rho_{AB}\right)=tr_B\left|\psi\right\rangle_{AB\ AB}\left\langle\psi\right|$$

$$=\sum_{\mu'}{}_B\left\langle\mu'\right|\sum_{i\mu j\nu}a^*_{j\nu}\,a_{i\mu}\left|i\right\rangle_A\left|\mu\right\rangle_{B\ A}\left\langle j\right|\,{}_B\left\langle\nu\middle|\mu'\right\rangle_B$$

$$=\sum_{ij\mu}a^*_{j\mu}a_{i\mu}\left|i\right\rangle_{A\ A}\left\langle j\right|\left(=\rho_A\right),$$

$$tr\left(\rho_A Q_A\right)=\sum_{i'}{}_A\left\langle i'\right|\sum_{ij\mu}a^*_{j\mu}\,a_{i\mu}\left|i\right\rangle_{A\ A}\left\langle j\right|Q_A\left|i'\right\rangle_A$$

$$=\sum_{ij\mu}a^*_{j\mu}\,a_{i\mu}\ {}_A\left\langle j\right|Q_A\left|i\right\rangle_A\left(=\left\langle Q\right\rangle\right),$$

复合体系（6）

- 混合态的纯化

给定系统 A 的状态 ρ_A， 引入另一系统 R, 定义复合系统 $A+R$ 的纯态 $|AR\rangle$ 满足 $\rho_A = tr_R(|AR\rangle\langle AR|)$.

这种把混合态与纯态联系起来的方法是纯粹的数学方法，系统 R 不必有明确的物理对应。

复合体系（7）

- 引入 R 的具体方法：设 $\rho_A = \sum p_i |A_i\rangle\langle A_i|$，引入系统 R：R 有正交基 $\{|R_i\rangle\}$. 定义复合系统 $A+R$ 有纯态：

$$|A\,R\rangle \equiv \sum_i \sqrt{p_i}\,|A_i\rangle|R_i\rangle\ ,$$

易知：

$$tr_R\left(|AR\rangle\langle AR|\right) = \sum_{ij}\sqrt{p_i p_j}\,|A_i\rangle\langle A_j|\,tr\left(|R_i\rangle\langle R_j|\right)$$

$$= \sum_{ij}\sqrt{p_i p_j}\,|A_i\rangle\langle A_j|\,\delta_{ij} = \sum p_i |A_i\rangle\langle A_i| = \rho_A\ .$$

六、Bell不等式

1. EPR佯谬（Einstein,Podolsky,Rosen;1935）

ⅰ. 定域因果性观点：类空间隔的两事件之间不存在因果关系；

ⅱ. 物理实在要素的观点：任一可观测的物理量，作为物理实在的一个要素，应该在客观上具有确定的数值，与测量无关。

Bell不等式（2）

- 量子物理学是否本质上不同于经典物理学，或更明确地说，量子物理学是否一定不可能被任何形式的经典物理学所表述？

- Bell不等式反映了量子物理学与经典物理学的本质差别，而验证Bell不等式的种种物理学实验表明，自然界只能由量子物理学来刻画。

- 按照量子力学，未被观察的粒子不具有独立于测量的性质，物理性质是作为在系统上进行测量的结果出现的。按照量子力学，一个量子比特不具有“在 z 方向自旋 σ_z”和“在 x 方向自旋σ_x”这样的确定性。这两个描述只是在进行了适当的测量后才能给出。

Bell不等式（3）

考虑 David Bohm 1951年的一个改进的方案：

正负电子对，处于自旋单态：

$$|\Psi\rangle_{AB}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle_A|\downarrow\rangle_B-|\downarrow\rangle_A|\uparrow\rangle_B\right)\left(\equiv\frac{|01\rangle-|10\rangle}{\sqrt{2}}=|\Psi^-\rangle\right)$$

假定 ① A,B 距离足够大 ② 对它们进行独立测量的时间间隔足够小。则基于定域因果性观点，对电子 A 的测量不会对正电子 B 测量前的状态造成影响，即不会影响 B 的测量结果。

Bell不等式（4）

对自旋单态$\left|\Psi^-\right\rangle=\frac{\left|01\right\rangle-\left|10\right\rangle}{\sqrt{2}}$作变换 U：

$$\left|0\right\rangle=\alpha\left|\bar{0}\right\rangle+\beta\left|\bar{1}\right\rangle,$$

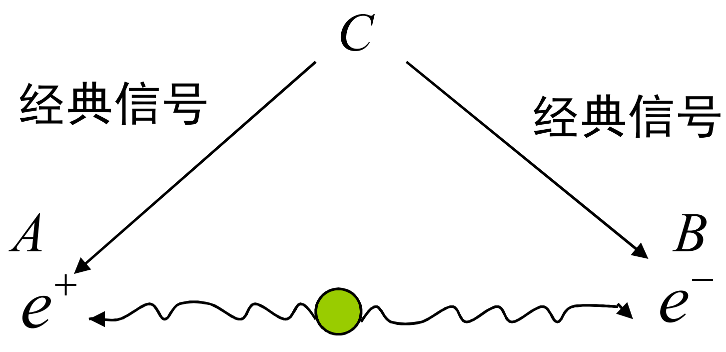
$$\left|1\right\rangle=\gamma\left|\bar{0}\right\rangle+\delta\left|\bar{1}\right\rangle,$$

可得

$$\frac{\left|01\right\rangle-\left|10\right\rangle}{\sqrt{2}}=(\alpha\delta-\beta\gamma)\frac{\left|\overline{01}\right\rangle-\left|\overline{10}\right\rangle}{\sqrt{2}}.$$

但 $\alpha\delta-\beta\gamma$ 是酉矩阵 $\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}$ 的行列式，故存在某个实数 θ，使它等于相因子$e^{i\theta}$，所以 $\left|\Psi^-\right\rangle\xrightarrow{U}e^{i\theta}\left|\Psi^-\right\rangle$ 。

Bell不等式（5）



正负电子对产生

现：依据 C 点出发的经典信号

选择对 $e^{\pm}$ 的测量方案：

①测量 σ_x

②测量 σ_y

③测量 σ_z

例如：对 e^+ 测量 σ_z ，如果得 $\sigma_z^A = +1$, 则必有 $\sigma_z^B = -1$;

如果 $\sigma_z^A = -1$, 则必有 $\sigma_z^B = +1$.

Bell不等式（6）

由于对 A,B 进行测量的间隔是类空的，正电子 B 在被测量之前并未受到对电子 A 测量的影响，因而正电子 B 系统测量前未被扰动。由于物理可观测量 σ_z^B 是一个物理实在要素，因而不论人们是否对正电子 B 进行测量，σ_z^B 的数值在客观上将是确定地存在着。

Bell不等式（7）

- 同样，考虑可观测量σ_x,σ_y：

$$
{}_A\langle\sigma_x=\pm1|\Psi\rangle_{AB}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left({}_A\langle\uparrow|\pm{}_A\langle\downarrow|\right)|\Psi\rangle_{AB}=\frac{1}{2}\left(|\downarrow\rangle_B\mp|\uparrow\rangle_B\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}|\sigma_x=\mp1\rangle_B,
$$

$$
{}_A\langle\sigma_y=\pm1|\Psi\rangle_{AB}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left({}_A\langle\uparrow|\mp i_A\langle\downarrow|\right)|\Psi\rangle_{AB}=\frac{1}{2}\left(|\downarrow\rangle_B\pm i|\uparrow\rangle_B\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}|\sigma_y=\pm1\rangle_B.
$$

- 由于A,B测量的时空间隔是类空的，根据定域因果性观点，对A的测量是不应影响B的状态；因而，σ^B作为物理实在要素，在客观上应当有确定的数值，不应受对A测量的影响。然而，上述分析表明，对σ^A的测量可以确定σ^B的取值。因而，按照EPR的分析，量子力学的波函数描述方法是不完备的。

Bell不等式（8）

以上结论激发了对隐变量理论的探讨。

（由于$\sigma_x^B,\sigma_y^B,\sigma_z^B$ 不可能同时具有确定的数值，它们有确定值的状态是不同的 。因而知：或者对 A 的测量改变了 B 的状态，或者不扰动一个系统时，其可观测物理量在客观上也没有确定的数值）。

从量子力学的观点来看：

上述分析中的问题主要在于 ：$\sigma_x^B,\sigma_y^B,\sigma_z^B$ 同时具有确定值的观点是不能成立的，因为$\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z$ 互相不对易。

Bell不等式（9）

其实对上述系统的分析只是表明：非定域关联是存在的，只是这并不一定意味着非定域因果性，因而与狭义相对论并不一定矛盾。

2. Bell定理

   1964年，Bell从 ①Einstein定域实在论 ②有隐变数存在两点出发，导出一个不等式，其作用在于：

   通过实验可以检验：如果量子力学是正确的，则实验结果将显示Bell不等式被破坏；如果定域隐变量理论是存在的，则实验结果将显示Bell不等式成立。

Bell不等式（10）

考虑：①正负电子对处于自旋单态，

②Alice：沿 $\vec{a}$ 方向测量电子 A 的自旋，

③Bob：沿 $\vec{b}$ 方向测量正电子 B 的自旋，

④ λ 为隐参数，

则各自的测量结果 $A(\vec{a},\lambda)(=\pm 1)$ 和 $B(\vec{b},\lambda)(=\pm 1)$

应满足 $A(\vec{a},\lambda)B(\vec{a},\lambda)=-1$ 。

Bell不等式（11）

定义关联函数： $P\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\int d\lambda\rho(\lambda)\,A(\vec{a},\lambda)\,B\left(\vec{b},\lambda\right),$

则有：

$$\left|P\left(\vec{a},\vec{b}\right)-P\left(\vec{a},\vec{c}\right)\right|$$

$$=\left|\int d\lambda\rho(\lambda)\left[A(\vec{a},\lambda)B\left(\vec{b},\lambda\right)-A(\vec{a},\lambda)B(\vec{c},\lambda)\right]\right|$$

$$\leq\int d\lambda\rho(\lambda)\left|A(\vec{a},\lambda)B\left(\vec{b},\lambda\right)-A(\vec{a},\lambda)B(\vec{c},\lambda)\right|$$

由 $B\left(\vec{b},\lambda\right)=-A\left(\vec{b},\lambda\right)$，上式变为：

Bell不等式（12）

$$\int d\lambda \rho(\lambda) \left| A(\vec{a},\lambda) A\left(\vec{b},\lambda\right)\left[-1 - A\left(\vec{b},\lambda\right) B(\vec{c},\lambda)\right] \right|$$

$$= \int d\lambda \rho(\lambda) \left| A(\vec{a},\lambda) A\left(\vec{b},\lambda\right) \right| \cdot \left| 1 + A\left(\vec{b},\lambda\right) B(\vec{c},\lambda) \right|$$

$$= \int d\lambda \rho(\lambda) \left(1 + A\left(\vec{b},\lambda\right) B(\vec{c},\lambda) \right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\left| P\left(\vec{a},\vec{b}\right) - P(\vec{a},\vec{c}) \right| \leq 1 + P\left(\vec{b},\vec{c}\right)}$$ **Bell不等式**

Bell不等式（13）

另一方面，从量子力学的角度看，$|\psi^-\rangle$ 为自旋单态时，

$$P(\vec{a},\vec{b})=\langle\Psi^-|(\vec{\sigma}^A\cdot\vec{a})(\vec{\sigma}^B\cdot\vec{b})|\Psi^-\rangle=-\cos\theta_{ab},$$

Bell不等式成为：

$$|\cos\theta_{ab}-\cos\theta_{ac}|\le 1-\cos\theta_{bc},$$

取 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面，$\theta_{ab}=\theta_{bc}=\frac{\pi}{3}$,$\theta_{ac}=\frac{2}{3}\pi$，上述不等式成为$1<\frac{1}{2}$ ，

显然不成立。

Bell不等式（14）

$$\sigma_x\left|\uparrow\right\rangle=\left|\downarrow\right\rangle,\ \sigma_x\left|\downarrow\right\rangle=\left|\uparrow\right\rangle$$

$$\sigma_y\left|\uparrow\right\rangle=i\left|\downarrow\right\rangle,\ \sigma_y\left|\downarrow\right\rangle=-i\left|\uparrow\right\rangle$$

$$\sigma_z\left|\uparrow\right\rangle=\left|\uparrow\right\rangle,\ \sigma_z\left|\downarrow\right\rangle=-\left|\uparrow\right\rangle$$

① 证明 $\left(\vec{\sigma}^A+\vec{\sigma}^B\right)\left|\Psi^-\right\rangle=0$:

$$\left(\sigma_x^A+\sigma_x^B\right)\left|\Psi^-\right\rangle=\left(\sigma_x^A+\sigma_x^B\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\uparrow\right\rangle\left|\downarrow\right\rangle-\left|\downarrow\right\rangle\left|\uparrow\right\rangle\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\downarrow\right\rangle\left|\downarrow\right\rangle-\left|\uparrow\right\rangle\left|\uparrow\right\rangle+\left|\uparrow\right\rangle\left|\uparrow\right\rangle-\left|\downarrow\right\rangle\left|\downarrow\right\rangle\right)=0$$

$$\left(\sigma_y^A+\sigma_y^B\right)\left|\Psi^-\right\rangle=\frac{i}{\sqrt{2}}\left(\left|\downarrow\right\rangle\left|\downarrow\right\rangle+\left|\uparrow\right\rangle\left|\uparrow\right\rangle-\left|\uparrow\right\rangle\left|\uparrow\right\rangle-\left|\downarrow\right\rangle\left|\downarrow\right\rangle\right)=0$$

$$\left(\sigma_z^A+\sigma_z^B\right)\left|\Psi^-\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\uparrow\right\rangle\left|\downarrow\right\rangle+\left|\downarrow\right\rangle\left|\uparrow\right\rangle-\left|\uparrow\right\rangle\left|\downarrow\right\rangle-\left|\downarrow\right\rangle\left|\uparrow\right\rangle\right)=0$$

Bell不等式（15）

② $(\vec{\sigma}\cdot\vec{n}_1)(\vec{\sigma}\cdot\vec{n}_2)=\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2+i\vec{\sigma}\cdot(\vec{n}_1\times\vec{n}_2)$

（作业：证明上式。）

③

$$
\begin{aligned}
&{}_{AB}\left\langle\Psi^-\right|(\vec{\sigma}^A\cdot\vec{n}_1)(\vec{\sigma}^B\cdot\vec{n}_2)\left|\Psi^-\right\rangle_{AB}\\
&=-{}_{AB}\left\langle\Psi^-\right|(\vec{\sigma}^A\cdot\vec{n}_1)(\vec{\sigma}^A\cdot\vec{n}_2)\left|\Psi^-\right\rangle_{AB}\\
&=-\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2-i\,{}_{AB}\left\langle\Psi^-\right|\vec{\sigma}^A\left|\Psi^-\right\rangle_{AB}\cdot(\vec{n}_1\times\vec{n}_2)\\
&=-\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=-\cos\theta_{\vec{n}_1\vec{n}_2}
\end{aligned}
$$

（$\sigma_{x,y,z}$ 将 $\left|\Psi^-\right\rangle$变成了$\left|\Psi^+\right\rangle$ 或 $\left|\Phi^+\right\rangle$，$\left|\Phi^-\right\rangle$，所以第二项为零。）

Bell不等式（16）

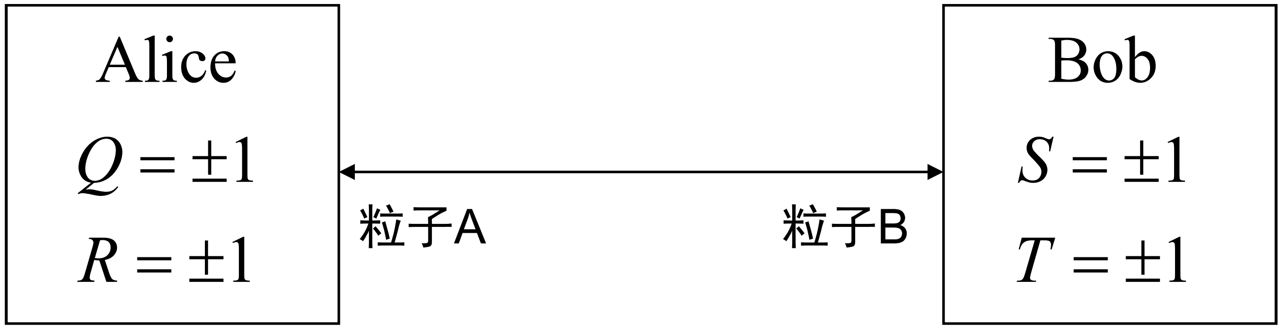
Bell不等式的含义：

$$P\left(\vec{a},\vec{b}\right)\equiv\int d\lambda\rho(\lambda)\,A(\vec{a},\lambda)\,B\left(\vec{b},\lambda\right)$$

① A,B 可以写成有确定值的形式，即是承认“物理实在要素”。

② A,B 独立即是承认定域因果性。

CHSH不等式



Bell不等式实验的安排。Alice 可以选择测量 Q 或 R，而Bob可以选择测量 S 或 T。他们同时进行测量。假定Alice和Bob相距足够远，他们进行的测量不会相互影响。

思考题：教材的下述推导在概念上正确吗？

CHSH不等式（2）

$$QS+RS+RT-QT=(Q+R)S+(R-Q)T$$

因为 $R,Q=\pm 1$, 所以或 $(Q+R)S=0$, 或 $(R-Q)T=0$.

从上式容易看出，对每种情况

$$QS+RS+RT-QT=\pm 2.$$

$$\begin{aligned} E(QS+RS+RT-QT) &= \sum_{qrst} p(q,r,s,t)(qs+rs+rt-qt) \\ &\le \sum_{qrst} p(q,r,s,t)\times 2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

CHSH不等式（3）

由此可得：

$$E(QS)+E(RS)+E(RT)-E(QT)\le 2\cdots\cdots(1)$$

这个不等式称为CHSH不等式。

量子力学中，取 $Q=Z_1$，$S=\dfrac{-Z_2-X_2}{\sqrt{2}}$，

$$R=X_1,\ T=\frac{Z_2-X_2}{\sqrt{2}},$$

有 $\langle QS\rangle=1/\sqrt{2}$，$\langle RS\rangle=1/\sqrt{2}$，$\langle RT\rangle=1/\sqrt{2}$，$\langle QT\rangle=-1/\sqrt{2}$.

于是 $\langle QS\rangle+\langle RS\rangle+\langle RT\rangle-\langle QT\rangle=2\sqrt{2}.$

CHSH不等式（4）

(1) 物理性质 P_Q, P_R, P_S, P_T 具有独立于观测的值 Q, R, S, T 的假设，称为实在性（reality）假定；

(2) Alice的测量不影响Bob测量结果的假设，称为定域性（locality）假定。

这两个假设合称定域实在性假设。实验表明Bell (CHSH) 不等式被破坏， 所以这两个假设至少有一个是不合适的。

CHSH不等式（5）

量子力学中有Tsirelson不等式：

设 $Q = \vec{q} \cdot \vec{\sigma}$, $R = \vec{r} \cdot \vec{\sigma}$, $S = \vec{s} \cdot \vec{\sigma}$, $T = \vec{t} \cdot \vec{\sigma}$,

其中 $\vec{q}$, $\vec{r}$, $\vec{s}$, 和 $\vec{t}$ 是三维空间中的实单位向量，有

下述Tsirelson不等式成立：

$$\langle Q \otimes S \rangle + \langle R \otimes S \rangle + \langle R \otimes T \rangle - \langle Q \otimes T \rangle \leq 2\sqrt{2}.$$

作业：Problem2.3

量子信息与量子密码

[第3次课] 数学、物理预备知识（续）

Q&A