计算机算法设计与分析

第 4 次作业

刘炼

202128013229021

Problem 1

根据题目的描述，假设第 i 小时第 j 盏灯的开关情况为 $x_{i,j}$, 即 $x_{i,j} = 0\ or 1$ 分别代表关灯和开灯。根据所给的约束和基本目标，可以将该问题描述为：

$$
\begin{aligned}
minimize \quad & \sum_{i=1}^{24}\sum_{j=1}^{m} c x_{i,j} \\
s.t. \quad & -\sum_{j=1}^{m} a_{ij} p_j x_{k,j} \leq I_i^*,\ \forall i, \forall k \in \{1, ..., ..., 24\} \\
& \sum_{i=1}^{24} x_{i,j} \leq 23,\ \forall j \\
& x_{i,j} \in \{0, 1\}
\end{aligned} \tag{1}
$$

Problem 2

根据题目的描述，假设制造 A,B,C 三种产品分别的数量为 x_1, x_2, x_3，可以将该问题描述为一个 LP 问题，基本描述方式如下：

$$
\begin{aligned}
minimize \quad & -(10x_1 + 8x_2 + 16x_3) \\
s.t. \quad & 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 200 \\
& 4x_1 + 3x_2 + 7x_3 \leq 300 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned} \tag{2}
$$

根据所给出的描述，其对偶形式为：

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 200y_1 + 300y_2 \\
s.t. \quad & 3y_1 + 4y_2 \geq -10 \\
& 3y_1 + 3y_2 \geq -8 \\
& 2y_1 + 7Y - 2 \geq -16 \\
& y_1, y_2 \geq 0
\end{aligned} \tag{3}
$$

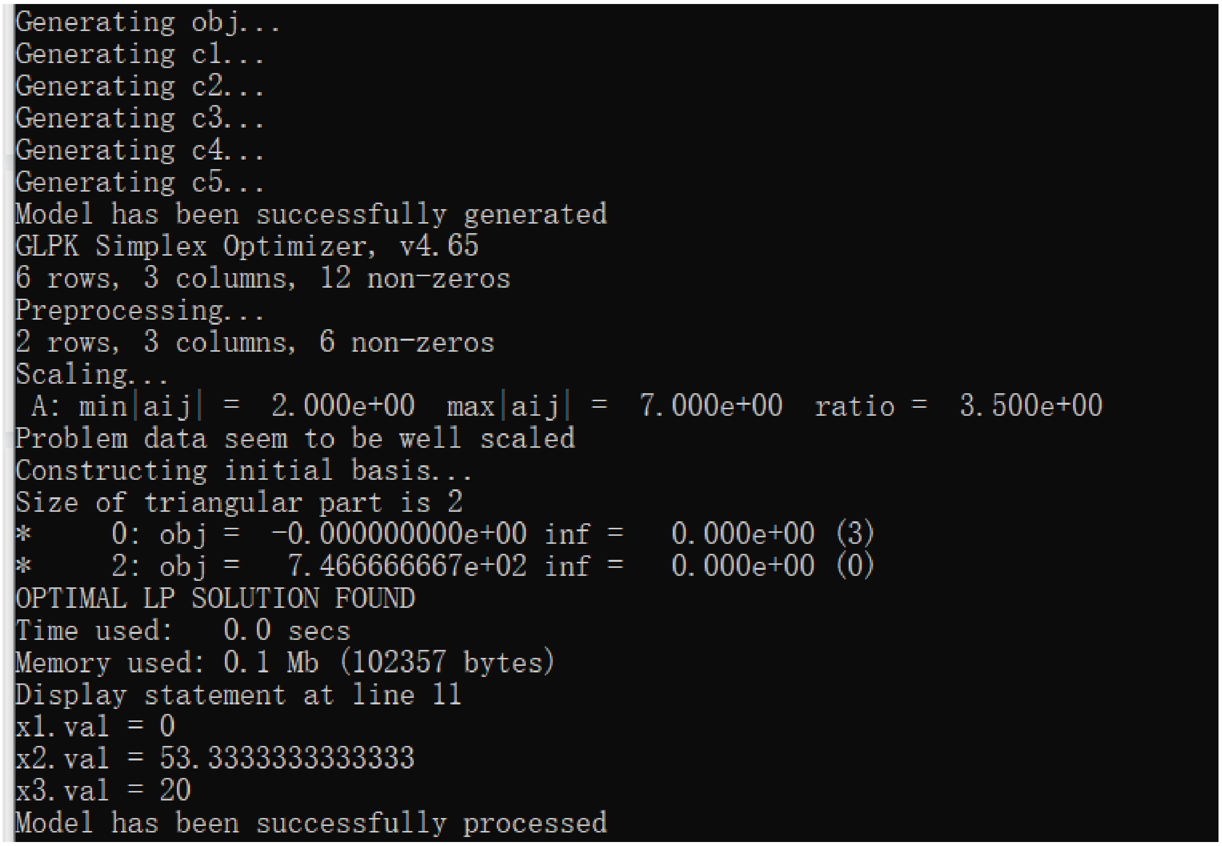
利用 GLPK 进行求解，最终求解结果为图1：

即生产 0 kg 的 A 产品，生产 53.333 kg 的 B 产品并生产 20kg 的 C 产品。

Problem 3

根据题目的描述，不妨假设总的所用纸张数量为 N, 可以保证，所有使用的纸张数目不会超过 $\sum_{i=1}^{m} b_i$. 假设顾客 i 对第 j 张纸的利用为 $x_{i,j}$，其中 $x_{i,j} = 0\ or\ 1$。这里定义一个新的算子为 δ，其具体计算为：

$$
\delta(x) = \begin{cases} 0, x \leq 0 \\ 1, x > 0 \end{cases} \tag{4}
$$



```
Generating obj...
Generating c1...
Generating c2...
Generating c3...
Generating c4...
Generating c5...
Model has been successfully generated
GLPK Simplex Optimizer, v4.65
6 rows, 3 columns, 12 non-zeros
Preprocessing...
2 rows, 3 columns, 6 non-zeros
Scaling...
 A: min|aij| =  2.000e+00  max|aij| =  7.000e+00  ratio =  3.500e+00
Problem data seem to be well scaled
Constructing initial basis...
Size of triangular part is 2
*     0: obj =  -0.000000000e+00 inf =   0.000e+00 (3)
*     2: obj =   7.466666667e+02 inf =   0.000e+00 (0)
OPTIMAL LP SOLUTION FOUND
Time used:   0.0 secs
Memory used: 0.1 Mb (102357 bytes)
Display statement at line 11
x1.val = 0
x2.val = 53.3333333333333
x3.val = 20
Model has been successfully processed
```

Figure 1: 求解结果

所以可以得到 ILP 问题的描述为:

$$
\begin{aligned}
minimize \quad & \sum_{i=0}^{m} \delta(\sum_{j=0}^{N}(x_{i,j})) \\
s.t. \quad & \sum_{i=1}^{m} x_{i,j} w_i \le W, \ \forall j \\
& \sum_{j=1}^{N} x_{i,j} = b_i, \ \forall i \\
& x_{i,j} \in \{0,1\}, \ \forall i,j
\end{aligned} \tag{5}
$$

引入额外变量 t_i 来标准化上述 ILP 问题描述为:

$$
\begin{aligned}
minimize \quad & \sum_{i=0}^{m} \delta(\sum_{j=0}^{N}(x_{i,j})) \\
s.t. \quad & \sum_{i=1}^{m} x_{i,j} w_i \le W, \ \forall j \\
& \sum_{j=1}^{N} x_{i,j} - t_i \le b_i, \ \forall i \\
& x_{i,j} \in \{0,1\}, \ \forall i,j \\
& t_i \ge 0, \ \forall i
\end{aligned} \tag{6}
$$

Problem 4

根据描述，用其它的符号来重新表示 x_1 和 x_2，不妨假设：

$$\begin{aligned} & m_1 - m_2 = |x_1| \\ & m_3 - m_4 = x2 \\ s.t. \quad & m_1 - m_2 \geq 0 \\ & m_i \geq 0 \end{aligned} \tag{7}$$

故根据公式7, 原来的问题可以进一步转化，并且，将其中的 $x_1 + x_2 \geq 4$ 进行替换, 故最终可以表示为：

$$\begin{aligned} minimize \quad & 2(m_1 - m_2) + (m_3 - m_4) \\ s.t. \quad & m_1 - m_2 + m_3 - m_4 \leq 4 \\ & m_2 - m_1 \leq 0 \\ & m_i \geq 0, \ \forall i \end{aligned} \tag{8}$$

在最终的标准形式中，得到 $c^T m$ 中的 c 为 $(2, -2, 1, -1)^T$

Problem 5

根据题目的描述，假设从第 j 个公司中为第 i 个摊位招的厨师人数为 x_{ij}，那么原问题就可以用如下的 ILP 形式进行描述

$$\begin{aligned} minimize \quad & \sum_{j=1}^{F} c_j \sum_{i=1}^{N} x_{ij} \\ s.t. \quad & \sum_{i=1}^{N} x_{ij} \geq n_i \\ & x_{ij} = 0, \ \forall i \notin S_j \\ & x_{ij} \geq 0, \ \forall i, j \end{aligned} \tag{9}$$

根据上述内容，可以引入一个新的变量 t_{ij}，并将上述表达变为一个标准的 ILP 表示：

$$\begin{aligned} minimize \quad & \sum_{j=1}^{F} c_j \sum_{i=1}^{N} x_{ij} \\ s.t. \quad & -\sum_{i=1}^{N} x_{ij} \leq n_i \\ & x_{ij} - t_{ij} \leq 0, \ \forall i \notin S_j \\ & x_{ij} \geq 0, t_{ij} \geq 0, \ \forall i, j \end{aligned} \tag{10}$$