

PLU 分解 与矩阵求逆

函数主体内容

PLU分解

PLU分解过程主要包含了几基本计算内容：

- 寻找主元并交换行（同时交换 A , L , P 矩阵，其中 P 矩阵初始化为单位矩阵）
- 根据找到的主元，消去该列的其他行，并设置 L 矩阵该行的内容
- 根据原矩阵的行和得到的 L 矩阵的列，求出消去的 A 矩阵
- 重复上述过程，将 A 矩阵变为 U 矩阵
- 最终返回矩阵 P, L, U

矩阵求逆

根据分析，有

$$\begin{aligned} PA &= LU \\ AA^{-1} &= E \\ LUA^{-1} &= P \end{aligned} \tag{1}$$

所以需要求解两个主要的方程，也就是求解

$$\begin{aligned} LM &= P \\ UA^{-1} &= M \end{aligned} \tag{2}$$

根据其结果进行一列一列的求解。

由于 L 是下三角矩阵，而 U 是上三角矩阵，故在求解过程中，可以进一步进行优化，直接利用带入求解的方式求出相应的内容即可。

对于上三角矩阵，应从最后一行开始带入求解

而对于下三角矩阵，应从第一行开始带入求解

输入示例

1.

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 6 & 0 & 3 \\ 3 & 7 & 5 \end{bmatrix} \tag{3}$$

2.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 17 \\ 3 & 6 & -12 & 3 \\ 2 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \end{bmatrix} \tag{4}$$

输出示例

1.

$$\begin{bmatrix} -0.25 & 0.33 & 0 \\ -0.25 & 0.095 & 0.14 \\ 0.5 & -0.33 & 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

2.

$$\begin{bmatrix} 0.35 & 0.35 & -0.2 & -1.1 \\ -0.375 & -0.542 & 1 & 1 \\ -0.075 & -0.242 & 0.4 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & -0.2 & 0.1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

程序正确性比对

这里利用了自己实现的求逆算法和python numpy 中自带的算法进行了比较，由于存在一定的精度误差（ λ ），故这里的比较条件为

$$\text{sum}(A_{inv} - M) < \lambda \quad (7)$$

其中 A_{inv} 代表我们所求出来的 A 的逆矩阵，而 M 表示用 numpy 自带方法求出来的逆矩阵。最终经过多次试验，表明了本程序的正确性。