- M 种模式类别的多变量正态类密度函数

具有 M 种模式类别的多变量正态类密度函数为：

$$p(\boldsymbol{x}\mid\omega_i)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\left|\boldsymbol{C}_i\right|^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m}_i)^T\boldsymbol{C}_i^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m}_i)\right\},i=1,2,\cdots,M$$

其中，每一类模式的分布密度都完全被其均值向量 $\boldsymbol{m}_i$ 和协方差矩阵 $\boldsymbol{C}_i$ 所规定，其定义为：

$$\boldsymbol{m}_i=E_i\{\boldsymbol{x}\}$$

$$\boldsymbol{C}_i=E_i\{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m}_i)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m}_i)^T\}$$

$\boldsymbol{m}_i=E_i(\boldsymbol{x})$ 表示对类别属于 ω_i 的模型的数学期望。

在上述公式中，$\boldsymbol{x}$ 是 n 为列向量，$|\boldsymbol{C}_i|$为矩阵 $\boldsymbol{C}_i$ 的行列式，协方差矩阵 $\boldsymbol{C}_i$ 是对称的正定矩阵，其对角线上的元素 C_{kk} 是模式向量第 k 个元素的方差，非对角线上的元素 C_{jk} 是 $\boldsymbol{x}$ 的第 j 个分量 x_j 和第 k 个分量 x_k 的协方差。当 x_j 和 x_k 统计独立时，$C_{jk}=0$。当协方差矩阵的全部非对角线上的元素都为零时，多变量正态类密度函数可简化为 n 个单变量正态类密度函数的乘积。

已知类别 ω_i 的判别函数可写成如下形式：

$$d_i(\boldsymbol{x})=p(\boldsymbol{x}\mid\omega_i)P(\omega_i),i=1,2,\cdots,M$$

对于正态密度函数，可取自然对数的形式以方便计算（因为自然对数是单调递增的，取对数后不影响相应的分类性能），则有：

$$d_i(\boldsymbol{x})=\ln p(\boldsymbol{x}\mid\omega_i)+\ln P(\omega_i),i=1,2,\cdots,M$$

代入正态类密度函数，有：

$$d_i(\boldsymbol{x}) = \ln P(\omega_i) - \frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\ln\left|\boldsymbol{C}_i\right|$$
$$-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m}_i)\boldsymbol{C}_i^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m}_i), i = 1, 2, \cdots, M$$

去掉与 i 无关的项（并不影响分类结果），有：

$$d_i(\boldsymbol{x}) = \ln P(\omega_i) - \frac{1}{2}\ln\left|\boldsymbol{C}_i\right| - \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m}_i)\boldsymbol{C}_i^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m}_i), i = 1, 2, \cdots, M$$

即为正态分布模式的贝叶斯判别函数。