第二次作业 - 1

在一个 10 类的模式识别问题中，有 3 类单独满足多类情况 1，其余的类别满足多类情况 2。问该模式识别问题所需判别函数的最少数目是多少？

解：

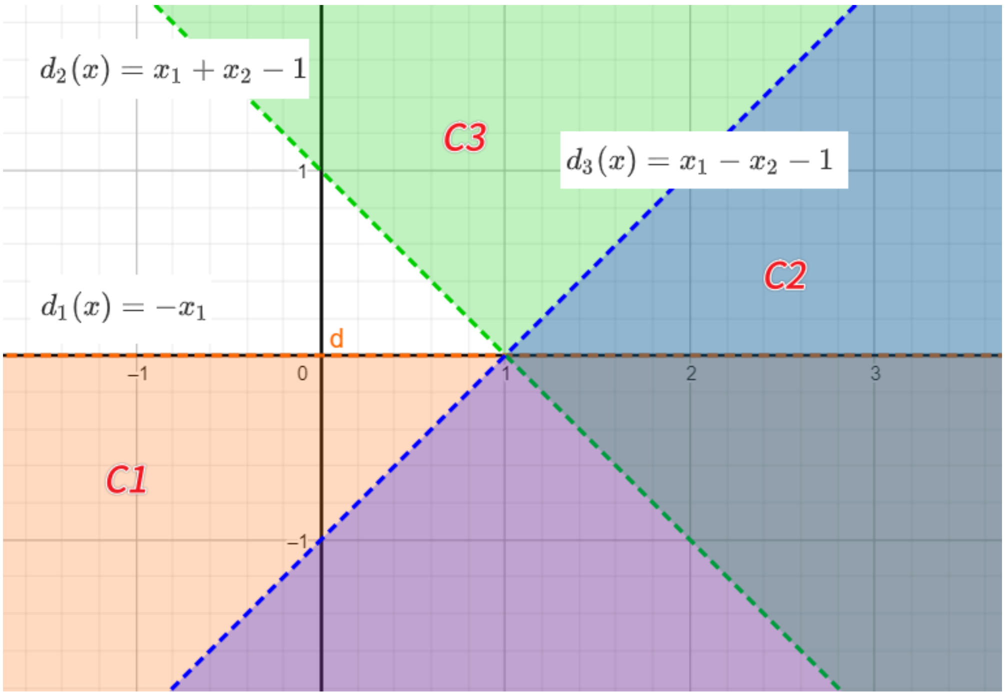
由题目已知：有 3 类单独满足多类情况 1，因此可设置 3 个“一对多”判别函数，此时如果一个待判别的类属于这三类中的一类，可识别出。对于剩下的 $10-3=7$ 类单独满足多类情况 2，可设置 $7(7-1)/2=21$ 个“一对一”判别函数，此时，对于一个待判别的类，首先使用前面设置的 3 个“一对多”判别函数进行判别，如果不属于该 3 类，接着使用 21 个“一对一”判别函数，依次进行判别，至此，余下的 7 个类别也可被识别出。综上，至少需要 3 + 21 = 24 个判别函数。

第二次作业 - 2

一个三类问题，其判别函数如下：

$$d_1(x)=-x_1,\quad d_2(x)=x_1+x_2-1,\quad d_3(x)=x_1-x_2-1$$

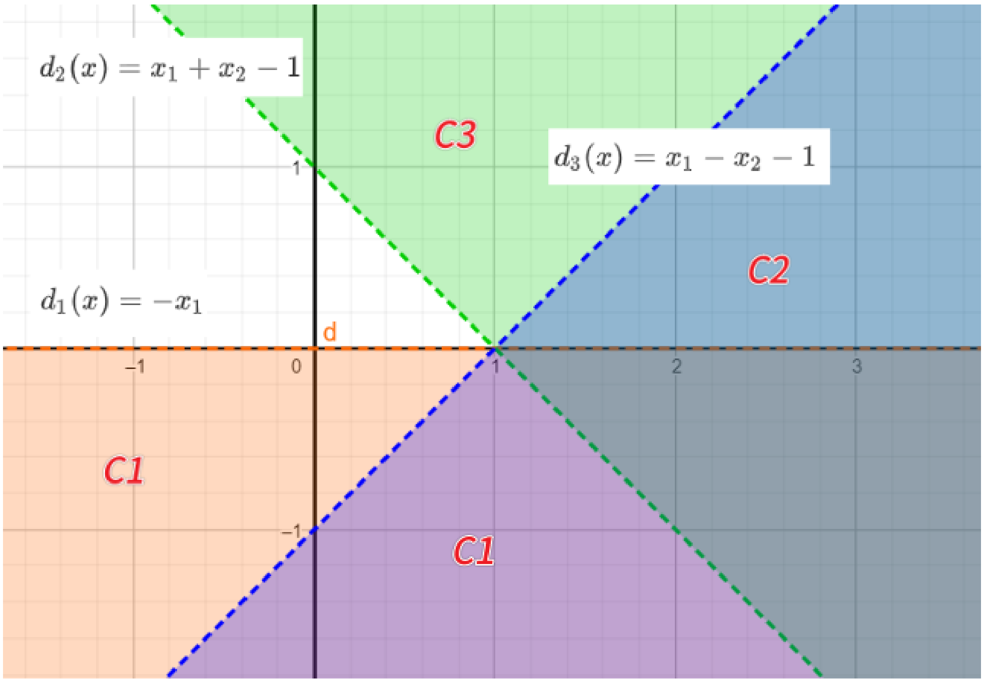
1）设这些函数是在多类情况 1 条件下确定的，绘出其判别界面和每一个模式类别的区域。



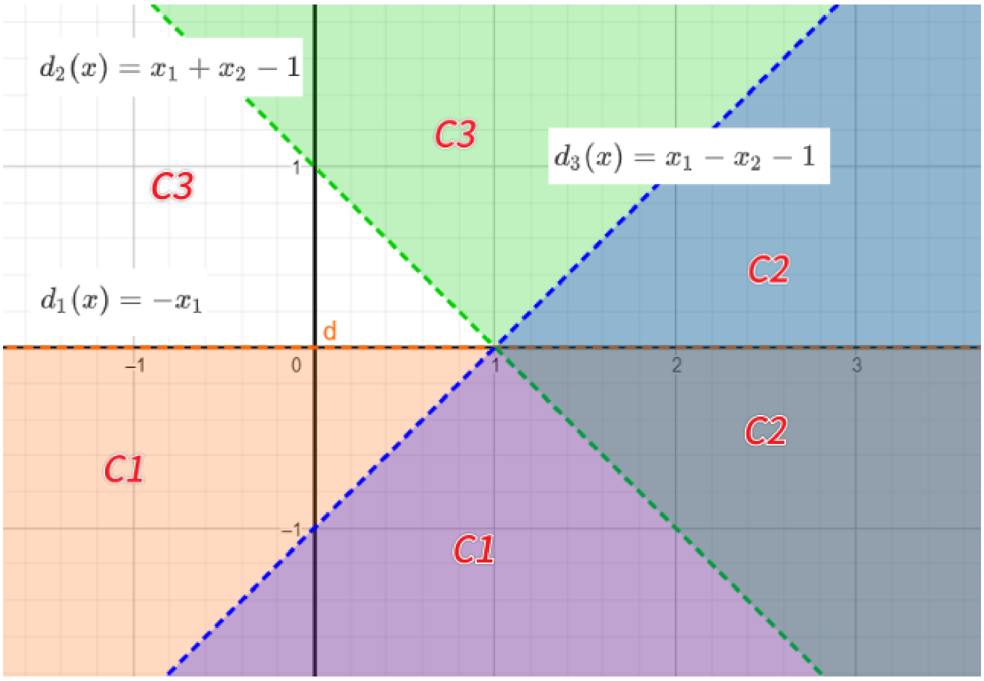
2）设为多类情况 2，并使：

$$d_{12}(x)=d_1(x),\quad d_{13}(x)=d_2(x),\quad d_{23}(x)=d_3(x)$$

绘出其判别界面和多类情况 2 的区域。



3）设 $d_1(x), d_2(x)$ 和 $d_3(x)$ 是在多类情况 3 的条件下确定的，绘出其判别界面和每类的区域。



第二次作业 - 3

两类模式，每类包括 5 个 3 维不同的模式向量，且良好分布。如果它们是线性可分的，问

- 权向量至少需要几个系数分量？

  解：3 + 1 = 4 个。

- 假如要建立二次的多项式判别函数，又至少需要几个系数分量？（设模式的良好分布不因模式变化而改变。）

解：$(3+1)(3+2)/2=10$ 个。

第二次作业 - 4

用感知器算法求下列模式分类的解向量 w.

$$D_1:(0\ 0\ 0)^T,(1\ 0\ 0)^T,(1\ 0\ 1)^T,(1\ 1\ 0)^T$$

$$D_2:(0\ 0\ 1)^T,(0\ 1\ 1)^T,(0\ 1\ 0)^T,(1\ 1\ 1)^T$$

解：

为简洁表示，不妨为模式向量增加一维，并取值为 1，记为 $\hat{x}$。解向量表示为

$$w=(w_1,w_2,w_3,w_4)^T$$

设感知机为

$$sgn(w^T\hat{x})=w_1x_1+w_2x_2+w_3x_3+w_4=\begin{cases}+1, & if\ sgn(w^T\hat{x})\geq 0\\ -1, & else.\end{cases}$$

初始化

$$w^{(0)}=(0,0,0,0)^T$$

依次迭代：

$$w^{(1)}=(0,0,0,0)^T-(1,3,3,4)^T=(-1,-3,-3,-4)^T$$

$$w^{(2)}=(-1,-3,-3,-4)^T+(3,1,1,4)^T=(2,-2,-2,0)^T$$

综上，解向量为

$$w=(2,-2,-2,0)^T$$

第二次作业 - 5

用多类感知器算法求下列模式的判别函数：

$$D_1:(-1\ \ -1)^T$$

$$D_2:(0\ 0)^T$$

$$D_3:(1\ 1)^T$$

将模式样本写成增广形式：

$$x_1=(-1\ \ -1\ 1)^T;\ x_2=(0\ 0\ 1)^T;\ x_3=(1\ 1\ 1)^T;$$

设

$$W_1(1)=(1\ 0\ 0)^T$$

$$W_2(1)=(0\ 1\ 0)^T$$

$$W_3(1)=(0\ 0\ 1)^T$$

第一轮迭代:

$$d_1(1)=(1\ 0\ 0)(-1\ \ -1\ 1)^T=-1$$

$$d_2(1)=(0\ 1\ 0)(-1\ \ -1\ 1)^T=-1$$

$$d_3(1)=(0\ 0\ 1)(-1\ \ -1\ 1)^T=1$$

因为 $d_1(1)\le d_2(1)$，$d_1(1)\le d_3(1)$，所以

$$W_1(2)=W_1(1)+x_1=(0\ \ -1\ 1)^T$$

$$W_2(2)=W_2(1)-x_1=(1\ 2\ \ -1)^T$$

$$W_3(2)=W_3(1)-x_1=(1\ 1\ 0)^T$$

第二轮迭代:

$$d_1(2)=(0\ \ -1\ 1)(0\ 0\ 1)^T=1$$

$$d_2(2)=(1\ 2\ \ -1)(0\ 0\ 1)^T=-1$$

$$d_2(2)=(1\ 1\ 0)(0\ 0\ 1)^T=0$$

因为 $d_2(2)\le d_1(2)$，$d_2(2)\le d_3(2)$，所以

$$W_1(3)=W_1(2)-x_2=(0\ \ -1\ 0)^T$$

$$W_2(3)=W_2(2)+x_2=(1\ 2\ 0)^T$$

$$W_3(3)=W_3(2)-x_2=(1\ 1\ \ -1)^T$$

第三轮迭代:

$$d_1(3)=(0\ \ -1\ 0)(1\ 1\ 1)^T=-1$$

$$d_2(3)=(1\ 2\ 0)(1\ 1\ 1)^T=3$$

$$d_3(3)=(1\ 1\ \ -1)(1\ 1\ 1)^T=1$$

因为 $d_3(3)>d_1(3)$，$d_3(3)\le d_2(3)$，所以

$$W_1(4)=W_1(3)$$

$$W_2(4)=W_2(3)-x_1=(0\ 1\ -1)^T$$

$$W_3(4)=W_3(3)+x_3=(2\ 2\ 0)^T$$

第四轮迭代:

$$d_1(4)=(0\ -1\ 0)(-1\ -1\ 1)^T=1$$

$$d_2(4)=(0\ 1\ -1)(-1\ -1\ 1)^T=-2$$

$$d_3(4)=(2\ 2\ 0)(-1\ -1\ 1)^T=-4$$

因为 $d_1(4)>d_2(4)$，$d_1(4)>d_3(5)$，所以

$$W_1(5)=W_1(4)$$

$$W_2(5)=W_1(4)$$

$$W_3(5)=W_1(4)$$

第五轮迭代:

$$d_1(5)=(0\ -1\ 0)(0\ 0\ 1)^T=0$$

$$d_2(5)=(0\ 1\ -1)(0\ 0\ 1)^T=-1$$

$$d_3(5)=(2\ 2\ 0)(0\ 0\ 1)^T=0$$

因为 $d_2(2)\leq d_1(2)$，$d_2(2)\leq d_3(2)$，所以

$$W_1(6)=W_1(5)-x_2=(0\ -1\ -1)^T$$

$$W_2(6)=W_2(5)+x_2=(0\ 1\ 0)^T$$

$$W_3(6)=W_3(5)-x_2=(2\ 2\ -1)^T$$

第六轮迭代:

$$d_1(6)=(0\ -1\ -1)(1\ 1\ 1)^T=-2$$

$$d_2(6)=(0\ 1\ 0)(1\ 1\ 1)^T=1$$

$$d_3(6)=(2\ 2\ -1)(1\ 1\ 1)^T=3$$

因为 $d_3(6)>d_1(6)$，$d_3(6)>d_2(6)$，所以

所以

$$W_1(7)=W_1(6)$$

$$W_2(7)=W_1(6)$$

$$W_3(7) = W_1(6)$$

第七轮迭代:

$$d_1(6) = (0\ \ -1\ \ -1)(-1\ \ -1\ 1)^T = 0$$

$$d_2(6) = (0\ 1\ 0)(-1\ \ -1\ 1)^T = -1$$

$$d_3(6) = (2\ 2\ \ -1)(-1\ \ -1\ 1)^T = -5$$

因为 $d_1(7) > d_2(7)$，$d_1(7) > d_3(7)$，所以

所以

$$W_1(8) = W_1(7)$$

$$W_2(8) = W_1(7)$$

$$W_3(8) = W_1(7)$$

第八轮迭代:

$$d_1(6) = (0\ \ -1\ \ -1)(0\ 0\ 1)^T = -1$$

$$d_2(6) = (0\ 1\ 0)(0\ 0\ 1)^T = 0$$

$$d_3(6) = (2\ 2\ \ -1)(0\ 0\ 1)^T = -1$$

因为 $d_2(8) > d_1(8)$，$d_2(8) > d_3(8)$，所以

所以

$$W_1(9) = W_1(8)$$

$$W_2(9) = W_1(8)$$

$$W_3(9) = W_1(8)$$

综上，三个判别函数为

$$d_1(x) = -x_2 - 1$$

$$d_2(x) = x_2$$

$$d_3(x) = 2x_1 + 2x_2 - 1$$

第二次作业 - 6

使用梯度法解下式

$$J(w,x,b)=\frac{1}{8\|x\|^2}[(w^Tx-b)-|w^Tx-b|]^2$$

式中实数 $b>0$，试导出两类模式的分类算法。

解：

1、输入一个样本 x，

若 $w^Tx-b\geq 0$，则 $J(w,x,b)=0$，跳过该轮梯度更新。

若 $w^Tx-b<0$，则

$$J(w,x,b)=\frac{1}{2\|x\|^2}(w^Tx-b)^2$$

$$\frac{\partial J(w,x,b)}{\partial w}=\frac{x(w^Tx-b)}{\|x\|^2}$$

$$\frac{\partial J(w,x,b)}{\partial b}=\frac{-(w^Tx-b)}{\|x\|^2}$$

2、更新梯度

$$w:=w-\eta\frac{\partial J(w,x,b)}{\partial w}$$

$$b:=b-\eta\frac{\partial J(w,x,b)}{\partial b}$$

3、不断重复 1 和 2，直到 w、b 收敛。

第二次作业 - 7

用二次埃尔米特多项式的势函数算法求解以下模式的分类问题：

$$D_1:(0\quad 1)^T,(0\quad -1)^T$$

$$D_2:(1\quad 0)^T,(-1\quad 0)^T$$

解：

$$\begin{aligned}
&\varphi_1(x)=\varphi_1\left(x_1, x_2\right)=H_0\left(x_1\right) H_0\left(x_2\right)=1 \\
&\varphi_2(x)=\varphi_2\left(x_1, x_2\right)=H_0\left(x_1\right) H_1\left(x_2\right)=2 x_2 \\
&\varphi_3(x)=\varphi_3\left(x_1, x_2\right)=H_0\left(x_1\right) H_2\left(x_2\right)=4 x_2^2-2 \\
&\varphi_4(x)=\varphi_4\left(x_1, x_2\right)=H_1\left(x_1\right) H_0\left(x_2\right)=2 x_1 \\
&\varphi_5(x)=\varphi_5\left(x_1, x_2\right)=H_1\left(x_1\right) H_1\left(x_2\right)=4 x_1 x_2 \\
&\varphi_6(x)=\varphi_6\left(x_1, x_2\right)=H_1\left(x_1\right) H_2\left(x_2\right)=2 x_1\left(4 x_2^2-2\right) \\
&\varphi_7(x)=\varphi_7\left(x_1, x_2\right)=H_2\left(x_1\right) H_0\left(x_2\right)=4 x_1^2-2 \\
&\varphi_8(x)=\varphi_8\left(x_1, x_2\right)=H_2\left(x_1\right) H_1\left(x_2\right)=2 x_2\left(4 x_1^2-2\right) \\
&\varphi_9(x)=\varphi_9\left(x_1, x_2\right)=H_2\left(x_1\right) H_2\left(x_2\right)=\left(4 x_1^2-2\right)\left(4 x_2^2-2\right)
\end{aligned}$$

按第一类势函数定义，得到势函数

$$K(x,x^{(k)})=\sum_{i=1}^{9}\varphi_(x)\varphi_(x^{(k)})$$

其中 $x=(x_1,x_2)^T$，$x^{(k)}=(x_1^{(k)},x_2^{(k)})^T$

累积位势 $K(x)$ 的迭代算法如下，

第一步：取 $x^{(1)}=(0 \quad 1)^T\in D_1$，故

$$K_1(x)=K(x,x^{(1)})=-15+20x_2+40x_2^2+24x_1^2-32x_1^2x_2-64x_1^2x_2^2$$

第二步：取 $x^{(2)}=(0 \quad -1)^T\in D_1$，故

$$K_1(x)=K(x,x^{(2)})=5$$

因为 $K_1(x^{(2)})>0$ 且 $x^{(2)}\in D_1$，故 $K_2(x)=K_1(x)$

第三步：取 $x^{(3)}=(1 \quad 0)^T\in D_2$，故

$$K_2(x)=K(x,x^{(3)})=9$$

因为 $K_2(x^{(3)})>0$ 且 $x^{(3)}\in D_2$，故
$K_3(x)=K_2(x)-K(x,x^{(3)})=2-(1+4x_1)=1-4x_1$

第四步：取 $x^{(4)}=(-1 \quad 0)^T\in D_2$，故

$$K_3(x)=K(x,x^{(4)})=1+4=5$$

因为 $K_3(x^{(4)})<0$ 且 $x^{(3)}\in D_2$，故

$$K_4(x)=K_3(x)-K(x,x^{(4)})=15+20x_2-56x_1^2-8x_2^2-32x_1^2x_2+64x_1^2x_2^2$$

第五步：取 $x^{(5)}=(0 \quad 1)^T\in D_1$，故

$$K_4(x)=K(x,x^{(5)})=27$$

因为 $K_4(x^{(5)}) > 0$ 且 $x^{(5)} \in D_1$，故 $K_5(x) = K_4(x)$

第六步：取 $x^{(6)} = (0 \quad -1)^T \in D_1$，故

$$K_5(x) = K(x, x^{(6)}) = -13$$

因为 $K_5(x^{(6)}) < 0$ 且 $x^{(6)} \in D_1$，故 $K_6(x) = K_5(x) - K(x, x^{(6)}) = -32x_1^2 + 32x_2^2$

经验证，将所有训练样本输入到 $K_6(x)$ 均能正确分类，因此算法收敛于判别函数

$$d(x) = K_6(x) = -32x_1^2 + 32x_2^2$$

第二次作业 - 8

用下列势函数

$$K(x, x_k) = \exp(-\alpha\|x - x_k\|^2)$$

求解以下模式的分类问题：

$$D_1 : (0 \quad 1)^T, (0 \quad -1)^T$$

$$D_2 : (1 \quad 0)^T, (-1 \quad 0)^T$$

解：

取 $\alpha = 1$，势函数为

$$K(x, x_k) = \exp(-\|x - x_k\|^2) = \exp(-[(x_1 - x_{k_1})^2 + (x_2 - x_{k_2})^2])$$

迭代步骤如下，

第一步：取 $x^{(1)} = (0 \quad 1)^T \in D_1$，故

$$K_1(x) = K(x, x^{(1)}) = \exp\{-x_1^2 - (x_2 - 1)^2\}$$

第二步：取 $x^{(2)} = (0 \quad -1)^T \in D_1$，故

$$K_1(x) = K(x, x^{(2)}) = \exp(-4) > 0$$

因为 $K_1(x^{(2)}) > 0$ 且 $x^{(2)} \in D_1$，故 $K_2(x) = K_1(x)$

第三步：取 $x^{(3)} = (1 \quad 0)^T \in D_2$，故

$$K_2(x) = K(x, x^{(3)}) = \exp(-2) > 0$$

因为 $K_2(x^{(3)}) > 0$ 且 $x^{(3)} \in D_2$，故

$$K_3(x) = K_2(x) - K(x, x^{(3)}) = \exp\{-x_1^2 - (x_2 - 1)^2\} - \exp\{-(x_1 - 1)^2 - x_2^2\}$$

第四步：取 $x^{(4)} = (-1 \quad 0)^T \in D_2$，故

$$K_3(x) = K(x, x^{(4)}) = \exp(-2) - \exp(-4) > 0$$

因为 $K_3(x^{(4)}) > 0$ 且 $x^{(3)} \in D_2$，故

$$
\begin{aligned}
K_4(x) = K_3(x) - K(x, x^{(4)}) = & \exp\{-x_1^2 - (x_2-1)^2\} - \exp\{-(x_1-1)^2 - x_2^2\} - \\
& \exp\{-(x_1+1)^2 - x_2^2\}
\end{aligned}
$$

第五步：取 $x^{(5)} = (0 \quad 1)^T \in D_1$，故

$$K_4(x) = K(x, x^{(5)}) = 1 - \exp(-2) - \exp(-2) > 0$$

因为 $K_4(x^{(5)}) > 0$ 且 $x^{(5)} \in D_1$，故 $K_5(x) = K_4(x)$

第六步：取 $x^{(6)} = (0 \quad -1)^T \in D_1$，故

$$K_5(x) = K(x, x^{(6)}) = \exp(-42) - \exp(-2) - \exp(-2) < 0$$

因为 $K_5(x^{(6)}) < 0$ 且 $x^{(6)} \in D_1$，故

$$
\begin{aligned}
K_6(x) = K_5(x) + K(x, x^{(6)}) = & \exp\{-x_1^2 - (x_2-1)^2\} - \exp\{-(x_1-1)^2 - x_2^2\} - \\
& \exp\{-(x_1+1)^2 - x_2^2 + \exp\{-x_1^2 - (x_2-1)^2\}
\end{aligned}
$$

经验证，将所有训练样本输入到 $K_6(x)$ 均能正确分类，因此算法收敛于判别函数

$$
\begin{aligned}
d(x) = K_6(x) = & \exp\{-x_1^2 - (x_2-1)^2\} - \exp\{-(x_1-1)^2 - x_2^2\} - \\
& \exp\{-(x_1+1)^2 - x_2^2 + \exp\{-x_1^2 - (x_2-1)^2\}
\end{aligned}
$$

第三次作业 - 1

1、 设有如下三类模式样本集 ω_1，ω_2 和 ω_3，其先验概率相等，求 S_w 和 S_b

$$\omega_1\text{：}\{(1 \quad 0)^T, (2 \quad 0)^T, (1 \quad 1)^T\}$$

$$\omega_2\text{：}\{(-1 \quad 0)^T, (0 \quad 1)^T, (-1 \quad 1)^T\}$$

$$\omega_3\text{：}\{(-1 \quad -1)^T, (0 \quad -1)^T, (0 \quad -2)^T\}$$

解：

> 多类情况的类内散布矩阵，可写成各类的类内散布矩阵的先验概率的加权和，即：
>
> $$S_w = \sum_{i=1}^{N} P(\omega_i) E\left[(x - m_i)(x - m_i)^T \mid \omega_i\right] = \sum_{i=1}^{N} P(C_i) \Sigma_i$$
>
> 其中 Σ_i 是第 i 类的协方差矩阵。
>
> 对三个以上的类别 C_i，类间散布矩阵常写成：
>
> $$
> \begin{aligned}
> \boldsymbol{S}_b &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{M} P(\omega_i) \sum_{j=1}^{M} P(\omega_j) (\boldsymbol{m}_i - \boldsymbol{m}_j)(\boldsymbol{m}_i - \boldsymbol{m}_j)^T \\
> &= \sum_{i=1}^{M} P(\omega_i)(\boldsymbol{m}_i - \boldsymbol{m}_0)(\boldsymbol{m}_i - \boldsymbol{m}_0)^T
> \end{aligned}
> $$

> 其中，$\boldsymbol{m}_0$ 表示总体均值向量（共有 M 个类），N_i 是第 i 个类的样本数量。

每类的均值向量为：

$$m_1 = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad m_2 = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \quad m_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

类内散布矩阵计算如下：

$$\begin{aligned} S_w &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \frac{6}{9} & -\frac{3}{9} \\ -\frac{3}{9} & \frac{6}{9} \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \frac{6}{9} & \frac{3}{9} \\ \frac{3}{9} & \frac{6}{9} \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \frac{6}{9} & -\frac{3}{9} \\ -\frac{3}{9} & \frac{6}{9} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{2}{9} & -\frac{1}{27} \\ -\frac{1}{27} & \frac{2}{9} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

总体均值向量为：

$$m_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

类间散布矩阵计算如下：

$$\begin{aligned} S_b &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \frac{121}{81} & \frac{44}{81} \\ \frac{44}{81} & \frac{16}{81} \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \frac{49}{81} & -\frac{49}{81} \\ -\frac{49}{81} & \frac{49}{81} \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \frac{16}{81} & \frac{44}{81} \\ \frac{44}{81} & \frac{121}{81} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{62}{81} & \frac{13}{81} \\ \frac{13}{81} & \frac{62}{81} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

第三次作业 - 2

2、设有如下两类样本集，其出现的概率相等：

$$\omega_1：\{(0 \quad 0 \quad 0)^T, (1 \quad 0 \quad 0)^T, (1 \quad 0 \quad 1)^T, (1 \quad 1 \quad 0)^T\}$$

$$\omega_2：\{(0 \quad 0 \quad 1)^T, (0 \quad 1 \quad 0)^T, (0 \quad 1 \quad 1)^T, (1 \quad 1 \quad 1)^T\}$$

用 K-L 变换，分别把特征空间维数降到二维和一维，并画出样本在该空间中的位置。

解：

$$m = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

零均值处理，有

$$\omega_1：\{(-\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2})^T, (\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2})^T, (\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2})^T, (\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2})^T\}$$

$$\omega_2：\{(-\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2})^T, (-\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2})^T, (-\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2})^T, (\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2})^T\}$$

由题意，$P(\omega_1)=P(\omega_2)=0.5$，接下来求自相关矩阵，

$$R=\sum_{i=1}^{2}P(\omega_i)E(xx^T)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1/4&0&0\\0&1/4&0\\0&0&1/4\end{bmatrix}$$

易求得特征值 λ 和特征向量 α，

$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1/4,\quad \alpha_1=[1,0,0]^T,\quad \alpha_2=[0,1,0]^T,\quad \alpha_3=[0,0,1]^T$$

选 λ_1 和 λ_2 对应的变换向量作为变换矩阵，KL 变换后的二维特征为：

$$\omega_1\text{：}\{(-\frac{1}{2}\quad -\frac{1}{2})^T,(\frac{1}{2}\quad -\frac{1}{2})^T,(\frac{1}{2}\quad -\frac{1}{2})^T,(\frac{1}{2}\quad \frac{1}{2})^T\}$$

$$\omega_2\text{：}\{(-\frac{1}{2}\quad -\frac{1}{2})^T,(-\frac{1}{2}\quad \frac{1}{2})^T,(-\frac{1}{2}\quad \frac{1}{2})^T,(\frac{1}{2}\quad \frac{1}{2})^T\}$$

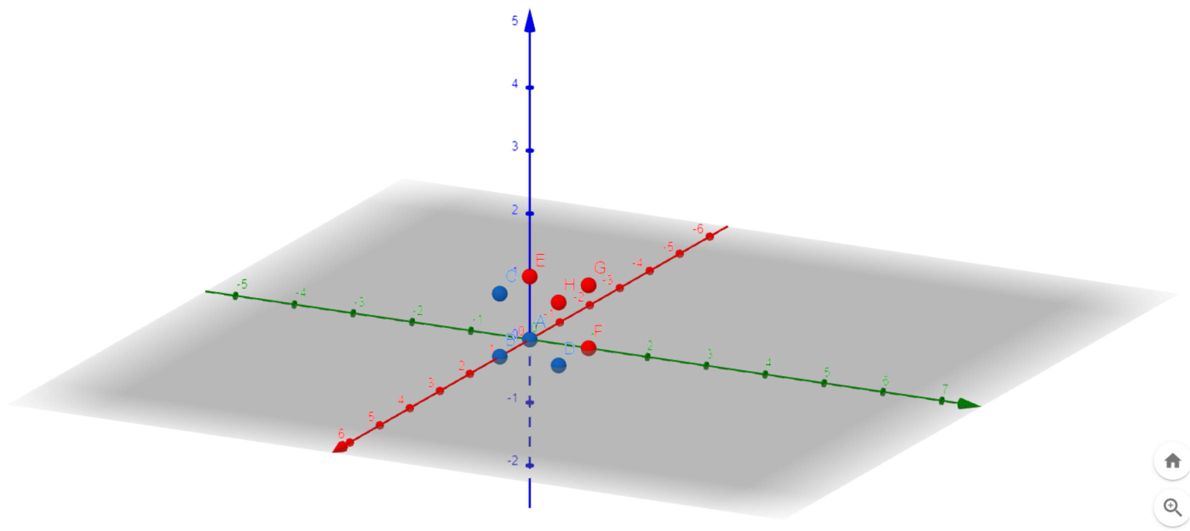
选 λ_1 对应的变换向量作为变换矩阵，KL 变换后的一维特征为：

$$\omega_1\text{：}\{(-\frac{1}{2})^T,(\frac{1}{2})^T,(\frac{1}{2})^T,(\frac{1}{2})^T\}$$

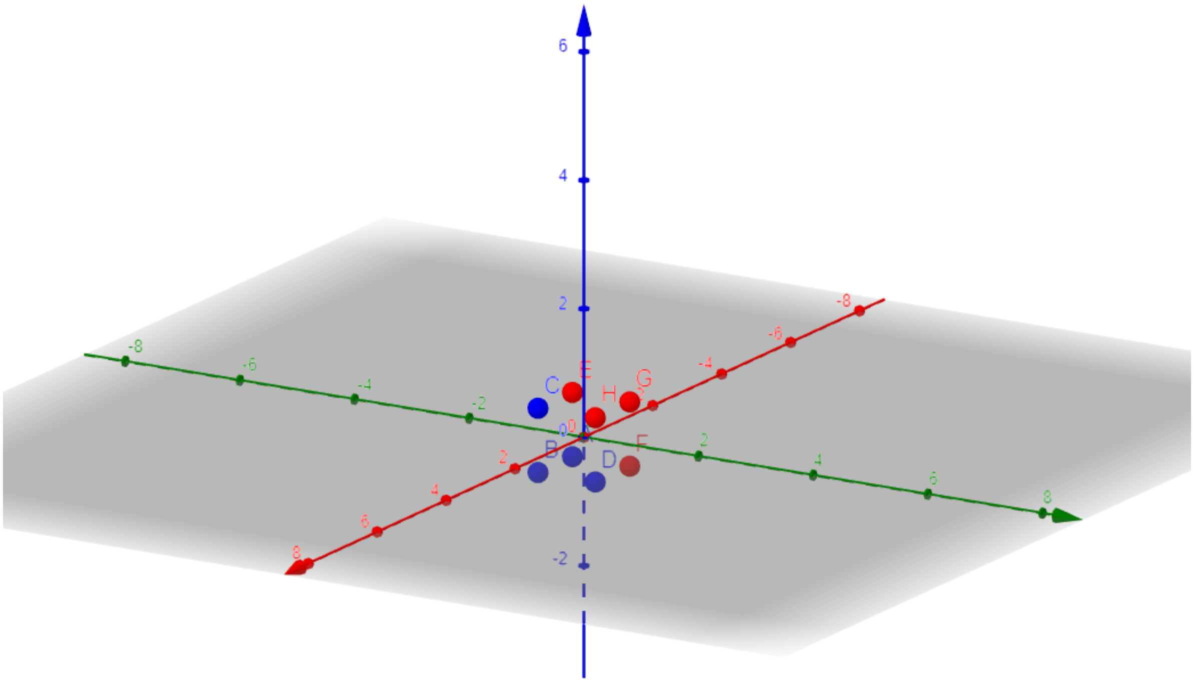
$$\omega_2\text{：}\{(-\frac{1}{2})^T,(-\frac{1}{2})^T,(-\frac{1}{2})^T,(\frac{1}{2})^T\}$$

下面给出上述过程的可视化结果。

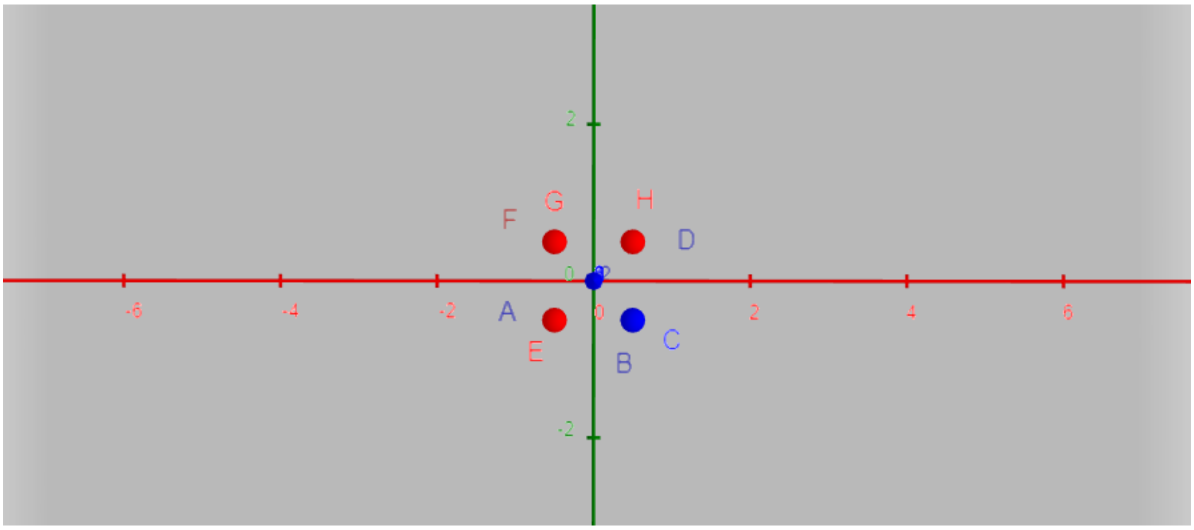
首先，原来的三维数据的分布如下，其中蓝色点代表 ω_1，红色点代表 ω_2。



零均值处理，得到



经过 KL 变换后，二维数据分布如下，



经过 KL 变换后，一维数据分布如下，