

به نام خدا



درس تحلیل و طراحی الگوریتم ها

تمرین دوم

دانشکده مهندسی کامپیوتر

دانشگاه علم و صنعت ایران

استاد مرضیه ملکی مجد

نیم سال دوم ۱۴۰۲-۱۴۰۱

مهلت ارسال :

۱۴۰۱/۱۲/۱۷

مبحث:

برنامه نویسی پویا

مسئول تمارین :

آریا شهنسوار

فهرست

| | |
|----|---|
| ۳ | <input type="checkbox"/> آداب نامه تمرینات |
| ۴ | <input type="checkbox"/> نکات تمرین سری دوم |
| ۵ | <input type="checkbox"/> تمرین ۱ . سوال تئوری |
| ۶ | <input type="checkbox"/> تمرین ۲ . مینیمم سکه |
| ۷ | <input type="checkbox"/> تمرین ۳ . کش زیاد |
| ۹ | <input type="checkbox"/> تمرین ۴ . حسن و الغوریتمش |
| ۱۲ | <input type="checkbox"/> تمرین ۵ . سینما برره |
| ۱۴ | <input type="checkbox"/> تمرین ۶ . با من قدم بزن |
| ۱۶ | <input type="checkbox"/> تمرین ۷ . محاسبه طول بزرگترین زیر دنباله مشترک |
| ۱۷ | <input type="checkbox"/> تمرین ۸ . محاسبه طول بزرگترین زیر دنباله اکیدا صعودی |

آداب نامه تمرینات

- پاسخ تمامی سوالات تنها به زبان های C# و C++ قابل قبول می باشد
- علیرغم اعتماد کامل تیم تی ای به شما دانشجویان عزیز، تمامی کد های شما با سایر دانشجویان بصورت خودکار و توسط برنامه مقایسه خواهند شد. همچنین در طول ترم، از تمامی پاسخ های شما ارائه گرفته خواهد شد و نحوه کار تمامی بخش های هر سوال از شما پرسیده خواهد شد، لذا از کپی نمودن کد دوستانتان خودداری کنید و تمامی پاسخ ها، کد خودتان باشد. همچنین از آنجایی که مشورت و هم فکری با سایر دوستان بسیار کار پسندیده و مفیدی است - برخلاف کپی کردن کد (: - در صورت هم فکری با دانشجوی (دانشجویان)، نام وی را بصورت کامنت شده در ابتدای کد خود بنویسید.
- برای ارسال تمرین در طول ترم، در مجموع ۱۵ روز می توانید تاخیر داشته باشید و در صورتی که جمع تاخیر دانشجویی بیشتر از ۱۵ روز شود، تمرین وی قابل قبول نخواهد بود لذا تلاش کنید تمرینات را در زمان مقرر در سامانه آپلود کنید.
- در تمامی تمرینات سعی شده است که سوالات ساده تر در ابتدا و سوالات دشوار تر در انتهای فایل قرار گیرند (از ساده به دشوار مرتب شده اند).
- در صورت وجود هرگونه سوال در مورد تمرینات، سعی کنید تا جایی که امکان دارد سوال خود را در گروه بپرسید چرا که شاید سوال شما، سوال دوستان نیز باشد و دوستانتان نیز بتوانند از پاسخ سوال شما بهره ببرند.

نکات تمرین سری دوم

- سوالات را در سامانه کوئرا و در قسمت تمرین سری دوم آپلود نمایید.
- سوالات هفتم و هشتم تمرین سری دوم، امتیازی می باشند.
- با توجه به مبحث تمرین سری دوم استفاده از هرگونه روشی بجز برنامه نویسی پویا مجاز نیست.
- از آنجایی که هر سوال توسط یک تی ای طرح شده است ، تنها تی ای طراح آن سوال می تواند شما را بصورت دقیق راهنمایی کند به همین منظور طراح هر سوال در زیر نوشته شده است تا در صورت ابهام و پرسش در مورد هر سوال ، در صورتی که نیاز به پرسش سوال بصورت انفرادی در پیوی هست ، به تی ای مربوطه مراجعه بفرمایید

- سوال ۱ . آقای انصاری
- سوال ۲ . آقای انصاری
- سوال ۳ . آقای احمدی
- سوال ۴ . آقای مرادیان
- سوال ۵ . آقای مرادیان
- سوال ۶ . آقای احمدی
- سوال ۷ . آقای اعلا
- سوال ۸ . آقای اعلا

تمرین ۱ . سوال تئوری

فرض کنید شما یک آرایه شامل مقادیر مختلفی سکه دارید و قصد دارید عدد x را با جمع تعدادی از این سکه ها بسازید. (دقت کنید که از هر نوع سکه تعداد بینهایت در دسترس است)

الگوریتمی مبتنی بر برنامه نویسی پویا ارائه دهید تا تعداد روشهای منحصر بفرد انتخاب این سکه ها که مجموع آنها برابر عدد x شود را خروجی دهد.

برای مثال اگر آرایه سکه های ما به شکل $\{1, 2, 5\}$ باشد و مقدار $x=5$ باشد تعداد حالت های مورد نظر ما برابر 4 میشود.

$\{1,1,1,1,1\}, \{5\}, \{2,2,1\}, \{2,1,1,1\}$

الف) الگوریتم خود را به طور کامل شرح دهید و پیچیدگی زمانی و حافظه آن را مشخص کنید.

ب) الگوریتم را بر روی مقادیر سکه $x = \{30, 25, 5, 10\}$ پیاده سازی کنید. (جدول dp مورد نظر را کشیده و پر کنید. شیوه پیمایش آن را شرح دهید و جواب نهایی را ارائه دهید.)

تمرین ۲ . مینیمم سکه

برنامه ای بنویسید که با توجه به مجموعه ای از سکه ها و مقدار V ، در خروجی کمترین تعداد سکه مورد نیاز که جمع آنها برابر V شود را خروجی دهد.

توجه: در صورتی که مقدار مورد نظر توسط سکه های ورودی قابل ساخت نبود مقدار 1- در خروجی چاپ شود.

ورودی:

در خط اول به شما دو مقدار N و V داده میشود که n تعداد سکه های مورد نظر و V مقدار جمع مینیمم سکه ها میباشد.

در خط دوم به شما سکه های مورد نظر داده میشود تا توسط آنها و مقدار V حداقل تعداد سکه های مورد نظر را خروجی دهید.

خروجی:

حداقل تعداد سکه مورد نیاز برای ساخت V .

$$0 \leq V \leq 10^5$$

$$1 \leq N \leq 12$$

Example 1 :

Input :

3 30

25 5 10

Output :

2

توضیح نمونه:

میتوان با دو سکه 25 و 5 مقدار 30 را تولید کرد و جواب 2 می شود.

تمرین ۳. کش زیاد

سپهر بسیار پولدار است ولی به مقدار زیادی خسیس است.

سپهر n کاشی مربعی دارد که طول ضلع i امین کاشی عددی صحیح و برابر a_i است. سپهر میخواهد مجموع مساحت این کاشی ها دقیقاً برابر شود. برای دستیابی به این هدف او میتواند در هر مرحله یک کاشی به ضلع a را به یک کاشی به ضلع b تبدیل کند، که عدد b عددی صحیح و نامنفی است و میتواند کمتر یا بیشتر از عدد a باشد، ولی چون پولدار است، این کار را به کاشی کار می سپارد و $(a - b)^2$ ریال برای انجام این کار به کاشی کار می پردازد (دقت کنید که طول و عرض هر کاشی همیشه یکسان خواهد بود).

به دلیل اینکه تغییر متعدد طول ضلع یک کاشی مقاومت کاشی را کم میکند، طول ضلع هر کاشی را حداکثر یک بار میتوان تغییر داد.

از آنجایی که سپهر بسیار خسیس است، می خواهد کمترین میزان پولی که باید به کاشی کار بپردازد تا مجموع مساحت کاشی ها دقیقاً برابر m شود را به دست آورد.

ورودی:

در خط اول n و m داده شده است.

در خط دوم تا $n + 1$ خط ام در هر خط طول ضلع یکی از کاشی ها داده شده است.

$$1 \leq n \leq 10$$

$$1 \leq m \leq 10\,000$$

$$1 \leq a_i \leq 100$$

تمامی اعداد ورودی عددی صحیح هستند.

خروجی :

در تنها خط خروجی کمترین میزان پولی که سپهر باید به کاشی کار بپردازد تا مجموع مساحت کاشی ها برابر m شود را چاپ کنید.

در صورتی که رسیدن به مجموع مساحت m غیر ممکن بود، عدد 1- را در خروجی چاپ کنید.

Example 1 :

Input :

3 6

3

3

1

Output :

5

توضیح:

سپهر با پرداخت ۴ ریال یکی از کاشی های به طول ۳ را به طول ۱ تبدیل میکند و با پرداخت ۱ ریال کاشی به طول ۳ دیگر را به طول ۲ تبدیل میکند.

تمرین ۴ . حسن و الگوریتمش

حسن به تازگی به الگوریتمی رسیده است که به عقیده او، می تواند با استفاده از آن، مدت زمان اجرای الگوریتم Merge Sort را کاهش دهد. اما علی که از قدیم الایام با حسن سر هر الگوریتمی کل داشته، معتقد است که روش حسن غلط است. بنابراین یک آرایه n تایی از اعداد را به حسن داد تا آن ها را مرتب کند. روش حسن برای مرتب کردن آرایه به این صورت است:

او ابتدا قسمت های صعودی پشت سر هم آرایه را پیدا می کند و طول هر کدام را روی کاغذ می نویسد. برای مثال اگر آرایه 1, 3, 4, 5, 6 باشد، قسمت های صعودی پشت سر هم آرایه دو تا است: 1, 3, 5 و 4, 6 که طول اولی 3 و دومی 2 می باشد. پس علی دو عدد 3 و 2 را روی کاغذ می نویسد. او k عدد روی کاغذ می نویسد. سپس اینگونه شروع به مرتب کردن آرایه می کند که هر دفعه دو قسمت صعودی مجاور از آرایه را انتخاب می کند و آن ها را شبیه Merge sort ادغام (merge) می کند؛ یعنی اینکه بعد از این کار این دو قسمت صعودی تبدیل به یک قسمت صعودی می شوند. به عبارت دیگر او این دو قسمت را به یک قسمت مرتب شده تبدیل می کند. سپس دو عدد مربوط به این دو قسمت را از روی کاغذ پاک می کند و اندازه ی قسمت جدید را جای این دو عدد روی کاغذ می نویسد. همچنین او برای ادغام کردن دو قسمت پشت سر هم به اندازه ی مجموع اندازه شان (یعنی مجموع اعدادی که روی کاغذ برای این دو قسمت نوشته بود) باید زمان صرف کند. حالا حسن برای اینکه گلی علی را بخواباند، می خواهد در سریعترین زمان ممکن آرایه را مرتب کرده و به علی تحویل دهد. مشکلی که حسن دارد آن است که همیشه خسته است. برای همین از شما می خواهد که به او بگویید که این کمترین زمان چقدر است.

ورودی:

در سطر اول ورودی دو عدد n و k آمده است.

سپس در سطر بعدی k عدد می آید که i امین عدد نمایانگر i امین عددی است که علی روی کاغذ نوشته است.

$$1 \leq n \leq 10^9$$

$$1 \leq k \leq 100$$

تضمین می شود که جمع اعداد آمده در سطر دوم ورودی برابر n می باشد و همچنین همه شان اعدادی طبیعی بین ۱ تا n می باشند.

خروجی :

در تنها سطر خروجی کمترین زمان برای مرتب کردن آرایه را خروجی دهید.

Example 1 :

Input :

10 3

1 3 6

Output :

14

توضیح:

روش بهینه این است که ابتدا دو قسمت اول را با هم یکی کنیم و سپس دو قسمت به وجود آمده را با هم یک قسمت کنیم. هزینهی مرج اول ۴ و هزینهی مرج دوم ۱۰ می باشد که در مجموع ۱۴ می شود.

Example 2:

Input :

7 4

1 1 1 4

Output :

12

Example 3:

Input:

2 2

1 1

Output:

2

Example 4:

Input:

4 3

1 2 1

Output:

7

تمرین ۵. سینما برره

سینما برره دو سالن دارد که در هر یک فیلم های متفاوتی نشان داده می شود و هر کدام به اندازه B نفر آدم، ظرفیت دارند.

عادت بد مردم برره در دیدن فیلم این است که هر شخص دوست دارد فیلمی را ببیند که نفر جلویی اش در صف می بیند و به صورت پیش فرض بلیت همان فیلم را می خرد مگر اینکه به او به اندازه جیبش پول بدهیم تا راضی شود فیلم دیگر را ببیند.

ظرفیت جیب نفر i -ام در صف را با a_i نشان می دهیم. برای مدیریت بلیت فروشی این دو سالن به یک مدیر جدید نیاز دارد. طوری این بلیت فروشی بایستی اتفاق بیفتد که:

۱- برای یک سالن بیشتر از B بلیت نفروشد.

۲- کمترین هزینه را صرف پر کردن جیب افراد بکنند.

بنابراین باید به گونه ای، بلیت فروشی انجام شود که کمترین هزینه بدست آید.

تضمین می شود که حتما می توانیم طوری n نفر را بین سالن ها پخش کنیم که در هیچ یک از دو سالن بیشتر از B نفر نرود.

ورودی:

در خط اول n که تعداد افراد صف است و B که ظرفیت سالن هاست به شما داده می شود. در خط بعدی n عدد داده می شود که عدد i -ام اندازه جیب نفر i -ام یا همان a_i است.

$$1 \leq n \leq 3000$$

$$1 \leq a_i \leq 10^9$$

$$n \leq 2 \times B$$

خروجی:

در یک خط کمترین هزینه لازم برای برآورده کردن شرط ها را چاپ کنید.

Example 1:**Input:**`2 1``1000 50`**Output:**`50`**Example 2:****Input:**`3 2``50 10 1000`**Output:**`10`

تمرین ۶ . با من قدم بزن

مهران علاقه زیادی به قدم زدن دارد!

او به طور اتفاقی پارکی را پیدا کرده که به طرز عجیبی شامل فقط یک مسیر افقی است. فرض کنید بلوکی که مهران روی آن قرار دارد بلوک شماره ۰ ام است و بلوک های سمت راست آن به ترتیب با ۱ و ۲ و ... و بلوک های سمت چپ او به ترتیب با ۱- و ۲- و ... نامگذاری شده اند. در n بلوک با شماره های متفاوت a_1, a_2, \dots, a_n گل کاشته شده است. مهران در هر دقیقه به صورت کاملاً تصادفی یا یک بلوک به سمت راست میرود و یا یک بلوک به سمت چپ میرود؛ اگر او روی بلوکی برود که روی آن گل قرار دارد و تاکنون له نشده است بدون آنکه متوجه شود گله ای آن بلوک را له می کند. او مجموعاً k دقیقه پیاده روی میکند. او پس از فهمیدن اینکه گل ها دارند له میشوند، بدون هیچ دلیل خاصی، میخواهد برای تمام حالت حرکت ممکن خود در k دقیقه (از 2^k حالت متفاوت چپ و راست رفتن در هر دقیقه) مجموع تعداد گل های له شده را بشمارد. از آنجا که این عدد ممکن است خیلی بزرگ شود او تصمیم گرفته است باقیمانده این عدد بر $10^9 + 7$ را محاسبه کند. به او کمک کنید تا این کار بیهوده را انجام دهد.

ورودی:

سطر اول ورودی شامل دو عدد صحیح n و k است. سپس در n سطر بعد عدد صحیح متفاوت a_1, a_2, \dots, a_n آمده است.

$$1 \leq n, k \leq 5\,000$$

$$-5\,000 \leq a_i \leq 5\,000$$

$$a_i \neq 0$$

خروجی:

در تنها سطر خروجی، باقیمانده مجموع گل های له شده بر $10^9 + 7$ را چاپ کنید.

Example 1:

Input :

1 2

1

Output :

2

Example 2:

Input:

4 5

-1 3 2 4

Output:

43

تمرین ۷ . محاسبه طول بزرگترین زیر دنباله مشترک (امتیازی)

در تمرین سری قبل با الگوریتم محاسبه طول بزرگترین زیر دنباله مشترک برای دو آرایه آشنا شدید . در این سری از تمرین نیاز است که الگوریتمی مبتنی بر برنامه نویسی پویا بیابید که طول بزرگترین زیر دنباله مشترک را برای سه آرایه محاسبه کند.

ورودی :

در این سوال ابتدا سه عدد n, m, k که به ترتیب از راست به چپ بیانگر تعداد اعضای آرایه اول ، دوم و سوم است داده می شود . در سه خط بعدی ، در هر خط i ام اعضای آرایه i ام - متناسب با تعداد اعضای آن - ذکر می شود ($1 \leq i \leq 3$) .

$$1 \leq n, m, k \leq 110$$

خروجی :

در خروجی تنها باید طول بلند ترین زیر آرایه متوالی مشترک (LCS) سه آرایه را خروجی دهید.

Example 1:

Input :

5 5 7

1 2 3 4 5

5 4 3 2 1

5 4 3 2 1 6 7

Output :

1

تمرین ۸ . محاسبه طول بزرگترین زیر دنباله اکیدا صعودی (امتیازی)

در تمرین سری قبل با الگوریتم محاسبه طول بزرگترین زیر دنباله اکیدا صعودی آشنا شدید . الگوریتم مطرح شده در تمرین سری قبل الگوریتمی از مرتبه زمانی

$O(n^2)$

می باشد .

همانطور که میدانید این الگوریتم برای n های بزرگ در مرتبه 10^6 به زمان بسیار زیادی نیازمند است (چندین ساعت) . در این سوال است نیاز است تا الگوریتمی مبتنی بر برنامه نویسی پویا در مرتبه زمانی

$O(n \log(n))$

ارائه دهید .

ورودی:

در سطر اول n که بیانگر تعداد اعضای آرایه است بیان می شود . در خط بعدی اعضای آرایه با فاصله از هم داده می شوند .

$$1 \leq n \leq 10^6$$

خروجی:

در خروجی تنها یک عدد که بیانگر طول طول بزرگترین زیر دنباله اکیدا صعودی (LIS) باید نشان داده شود .

Example 1:

Input :

5

2 7 4 3 8

Output :

3

موفق باشید :