

به نام خدا



درس طراحی الگوریتم

تمرین سری ششم

مدرس درس:

سرکار خانم دکتر ملکی

تهیه شده توسط:

الناز رضایی ۹۸۴۱۱۳۸۷

تاریخ ارسال: ۱۴۰۲/۰۲/۲۰

سوال ۱:

فرض کنید گراف G و درخت فراگیر کمینه آن T را داریم. وزن یکی از یال‌های گراف G را کم می‌کنیم تا گراف G' به دست آید. الگوریتمی ارائه دهید که درخت فراگیر کمینه را در گراف G' پیدا کند. دقت کنید با توجه به اینکه اطلاعات درخت پوشای کمینه در گراف اولیه G را داریم، باید در زمان $O(V+E)$ پاسخ را پیدا کنید.

پاسخ ۱:

الگوریتم برای پیدا کردن درخت پوشای کمینه در گراف G' پس از کاهش وزن یکی از یال‌های آن به صورت زیر است:

۱. با در نظر گرفتن درخت پوشای کمینه T گراف G شروع می‌کنیم.
 ۲. یالی که از G حذف شده دو نقطه انتهایی u و v را دارد و وزن آن w است.
 ۳. مسیر P را در T از u به v پیدا می‌کنیم.
 ۴. P را طی کرده و برای هر یال (x, y) در P ، یال با بیشترین وزن در مسیر از x به y در G پیدا می‌کنیم. این یال با بیشترین وزن M_{xy} باشد.
 ۵. یال M_{xy} را از T حذف کرده و یال (u, v) را به T اضافه می‌کنیم.
 ۶. T را به عنوان درخت پوشای کمینه G' خروجی می‌دهیم.
- این الگوریتم به این دلیل کار می‌کند که درخت پوشای کمینه G تمامی یال‌های مورد نیاز برای اتصال هر دو راس در گراف را دارد. بنابراین با پیدا کردن مسیر در T از u به v و اضافه کردن یال (u, v) ، مطمئن هستیم که یک گراف متصل G' خواهیم داشت. با این حال، ما نیز باید اطمینان حاصل کنیم که G' دارای کمترین مجموع وزن ممکن باشد. برای این کار، یال سنگین‌تر در مسیر از u به v در G را حذف کرده و یال (u, v) را به T اضافه می‌کنیم. این باعث می‌شود T درخت پوشای کمینه بماند، اما حالا برای G' معتبر باشد.
- این الگوریتم در زمان $O(V + E)$ اجرا می‌شود، زیرا شامل یک بار طی کردن درخت پوشای کمینه T است و سپس پیدا کردن یال‌های با بیشترین وزن در حداکثر $V-1$ مسیر در G .