

به نام خدا



درس تحلیل و طراحی الگوریتم ها

تمرین پنجم

دانشکده مهندسی کامپیوتر

دانشگاه علم و صنعت ایران

استاد مرضیه ملکی مجد

نیم سال دوم ۱۴۰۱-۱۴۰۲

مهلت ارسال :

۱۴۰۲/۲/۷

مبحث :

گراف پیشرفته

مسئول تمارین :

آریا شهنسوار

فهرست

۳	❖ آداب نامه تمرینات
۴	❖ نکات تمرین سری پنجم
۵	❖ تمرین ۱. سوال تئوری
۶	❖ تمرین ۲. قطر گراف
۷	❖ تمرین ۳. LCA
۹	❖ تمرین ۴. Pipping
۱۲	❖ تمرین ۵. مولفه های همبندی خاص

آداب نامه تمرینات

- پاسخ تمامی سوالات تنها به زبان های C# و C++ قابل قبول می باشد
- علیرغم اعتماد کامل تیم تی ای به شما دانشجویان عزیز، تمامی کد های شما با سایر دانشجویان بصورت خودکار و توسط برنامه مقایسه خواهند شد . همچنین در طول ترم ، از تمامی پاسخ های شما ارائه گرفته خواهد شد و نحوه کار تمامی بخش های هر سوال از شما پرسیده خواهد شد، لذا از کپی نمودن کد دوستانتان خودداری کنید و تمامی پاسخ ها، کد خودتان باشد . همچنین از آنجایی که مشورت و همفکری با سایر دوستان بسیار کار پسندیده و مفیدی است - برخلاف کپی کردن کد (: - در صورت همکاری با دانشجوی دانشجویان ، نام وی را بصورت کامنت شده در ابتدای کد خود بنویسید.
- برای ارسال تمرین در طول ترم، در مجموع ۲۰ روز می توانید تاخیر داشته باشید و در صورتی که جمع تاخیر دانشجویی بیشتر از ۲۰ روز شود، تمرین وی قابل قبول نخواهد بود لذا تلاش کنید تمرینات را در زمان مقرر در سامانه آپلود کنید.
- در تمامی تمرینات سعی شده است که سوالات ساده تر در ابتدا و سوالات دشوار تر در انتهای فایل قرار گیرند (از ساده به دشوار مرتب شده اند) .
- در صورت وجود هرگونه سوال در مورد تمرینات ، سعی کنید تا جایی که امکان دارد سوال خود را در گروه بپرسید چرا که شاید سوال شما، سوال دوستان نیز باشد و دوستانتان نیز بتوانند از پاسخ سوال شما بهره ببرند.

نکات تمرین سری پنجم

- سوالات را در سامانه کوئرا و در قسمت تمرین سری پنجم آپلود نمایید .
 - سوالات دوم و سوم تمرین شامل دو بخش می باشند که برای هر بخش به طور مجزا در کوئرا محل مناسب برای آپلود پاسخ ایجاد شده است .
 - از آنجایی که هر سوال توسط یک تی ای طرح شده است ، تنها تی ای طراح آن سوال می تواند شما را بصورت دقیق راهنمایی کند به همین منظور طراح هر سوال در زیر نوشته شده است تا در صورت ابهام و پرسش در مورد هر سوال، در صورتی که نیاز به پرسش سوال بصورت انفرادی در پیوی هست ، به تی ای مربوطه مراجعه بفرمایید
- سوال ۱ . آقای فراهانی
 - سوال ۲ . آقای فراهانی
 - سوال ۳ . خانم شاهرخیان
 - سوال ۴ . خانم شاهرخیان
 - سوال ۵ . آقای اعلا

تمرین ۱ . سوال تئوری

دور شکم گراف، طول کوتاهترین دور در گراف است . برای مثال دور شکم گرافی که به مثلث است، سه است ؛ دور شکم گرافی که یک مربع با قطرهایش است نیز ۳ است. توجه کنید اگر گراف هیچ دوری نداشته باشد، دور شکم آن گراف را ۰ فرض می کنیم . الگوریتمی با پیچیدگی زمانی $O(V*(V+E))$ ارائه دهید که دور شکم را برای گراف های بدون جهت و بی وزن پیدا کند. اثبات درستی الگوریتم خود را نیز بیان کنید.

تمرین ۲ . قطر گراف

فرض کنید G یک درخت همبند n راسی با $n-1$ یال باشد . قطر گراف را بیابید . (منظور از قطر گراف طول بزرگترین مسیر داخل گراف می باشد.)

ورودی :

در سطر اول ورودی تعداد راس های گراف n بیان می شوند ؛ سپس در $n-1$ خط بعدی ، در هر سطر دو عدد با فاصله از یکدیگر می آیند که نشان دهنده ی یال های گراف می باشند.

$$1 \leq n \leq 2 \times 10^5$$

خروجی :

در خروجی قطر گراف یا همان طول بزرگترین مسیر داخل گراف را چاپ کنید.

Example 1 :

Input :

3

1 2

1 3

Output :

2

Example 2 :

Input :

4

1 2

3 1

4 2

Output :

3

تمرین ۳ . LCA

درخت یک گراف بدون جهت است که در آن هر دو راس دقیقا توسط یک مسیر ساده به هم متصل می‌شوند. به عبارت دیگر، هر گراف متصل بدون cycle یک درخت است.

پایین ترین جد مشترک (LCA) یک مفهوم در نظریه گراف و علوم کامپیوتر است. اگر T یک درخت ریشه دار با N گره باشد پایین ترین جد مشترک بین دو گره v و w به عنوان پایین ترین گره در T تعریف می‌شود که هر دو v و w را به عنوان نوادگان دارد (جایی که به یک گره اجازه می‌دهیم نوادگاه خودش باشد)

وظیفه شما در این سوال یافتن LCA هر دو گره داده شده v و w در یک درخت T داده شده است.

ورودی :

در خط اول ورودی دو عدد طبیعی n و q آمده است که تعداد رئوس گراف و تعداد query ها است. در خط بعدی $n-1$ عدد آمده است که نشان دهندهی parent رأس های ۲ تا n است.

$$1 \leq n, q \leq 10^5 \quad 1 \leq p[i] < i$$

در q خط بعدی در هر خط دو عدد u و v داده می‌شود.

$$1 \leq v, u \leq n$$

خروجی :

خروجی برنامه‌ی شما باید شامل q خط باشد که در هر خط شماره رأس $LCA(u, v)$ آمده است.

Example 1 :

Input :

6 4

1 1 2 2 5

1 5

4 6

5 3

6 2

Output :

1

2

1

2

تمرین ۴ . Piping

N شهر در کشوری وجود دارد که از ۱ تا n شماره گذاری شده‌اند. به لطف تحقیقات آقای کیتابوتا سرانجام ساخت لوله های تله پورت بین دو شهر ممکن شد. یک لوله تله پورت دو شهر را به صورت یک طرفه به هم وصل می‌کند یعنی نمی‌توان از یک لوله تله پورت از شهر X به شهر Y برای سفر از شهر Y به شهر X استفاده کرد. حمل و نقل در هر شهر بسیار توسعه یافته است بنابراین اگر یک لوله از شهر X به شهر Y و یک لوله از شهر Y به شهر Z ساخته شود مردم می‌توانند از شهر X به شهر Z سفر کنند.

آقای کیتابوتا در سیاست ملی نیز دخالت دارد. او حمل و نقل بین m جفت شهر $(a_i, b_i) (1 \leq i \leq m)$ را مهم می‌داند. او در حال برنامه ریزی برای ساخت لوله های تله پورت است به طوری که برای هر جفت مهم (a_i, b_i) ، امکان سفر از شهر a_i به شهر b_i با استفاده از یک یا چند لوله دوربری (اما نه لزوماً از شهر b_i به شهر a_i) وجود داشته باشد. حداقل تعداد لوله های تله پورت را که باید ساخته شوند را پیدا کنید. تاکنون هیچ لوله انتقالی ساخته نشده است و حمل و نقل موثر دیگری بین شهرها وجود ندارد.

ورودی :

خط اول شامل دو عدد صحیح n, m است که به ترتیب تعداد شهرهای پادشاهی شوسکی و تعداد جفت های مهم را نشان می دهد.

$$2 \leq n \leq 10^5, 1 \leq m \leq 10^5$$

M خط بعدی جفت های مهم را توصیف می کنند. i ام آنها حاوی دو عدد صحیح a_i و b_i است که نشان دهنده این است که باید از شهر a_i به شهر b_i سفر کرد. با استفاده از یک یا چند لوله دوربری (اما نه لزوماً از شهر b_i به شهر a_i). تضمین شده است که همه جفت ها (a_i, b_i) متمایز هستند.

$$1 \leq i \leq m, 1 \leq a_i, b_i \leq n, a_i \neq b_i$$

خروجی :

حداقل تعداد مورد نیاز لوله های انتقال از راه دور را برای تحقق هدف آقای کیتایوتا چاپ کنید.

Example 1 :

Input :

4 5

1 2

1 3

1 4

2 3

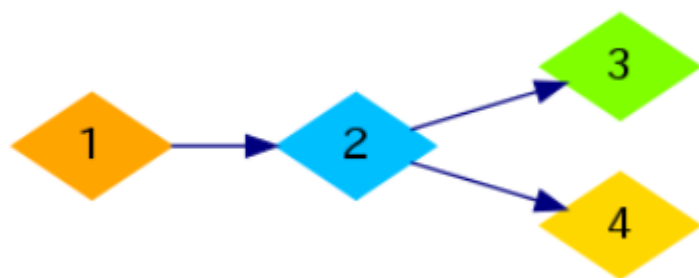
2 4

Output :

3

توضیحات ۱ :

یکی از روش های بهینه ساخت لوله در تصویر زیر نشان داده شده است:



Example 2 :

Input :

4 6

1 2

1 4

2 3

2 4

3 2

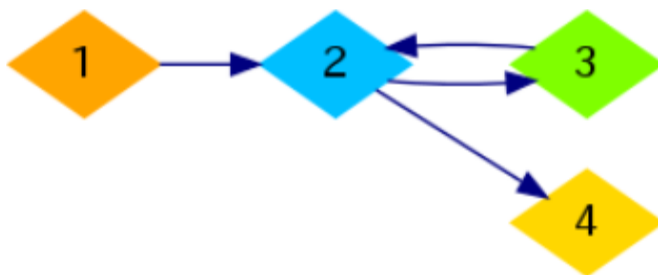
3 4

Output :

4

توضیحات ۲ :

یکی از روش های بهینه ساخت لوله در تصویر زیر نشان داده شده است:



تمرین ۵. مولفه همبندی خاص

درختی (گراف همبند بدون دور) n راسی داریم. به ازای هر k بین یک تا n یک گراف ساخته و آن را G_k می نامیم به گونه ای که به ازای هر دو راس u و v در درخت داده شده اگر فاصله آن دو راس حداقل k باشد یالی بین دو راس u و v در G_k قرار می دهیم. حال از شما خواسته میشود که به ازای هر k تعداد مولفه های همبند در G_k را نمایش دهید.

ورودی :

در خط اول ورودی عدد n آمده است که بیانگر تعداد راس های گراف می باشد. $2 \leq n \leq 10^5$
در $n-1$ خط بعدی در هر خط دو عدد u و v با فاصله از هم آمده اند که معادل یک یال بین دو راس u و v می باشد. $1 \leq u, v \leq n$

خروجی :

به ازای هر k تعداد مولفه های همبند در G_k را نمایش دهید.

Example 1 :

Input :

1 2

1 3

2 4

2 5

3 6

Output :

1 1 2 4 6 6