

به نام خدا



درس طراحی الگوریتم

---

## تمرین سری اول

---

مدرس درس:

سرکار خانم دکتر ملکی

تهیه شده توسط:

الناز رضایی ۹۸۴۱۱۳۸۷

تاریخ ارسال: ۱۴۰۱/۱۲/۲۳

## سوال ۱:

فرض کنید شما یک آرایه شامل مقادیر مختلفی سکه دارید و قصد دارید عدد  $x$  را با جمع تعدادی از این سکه ها بسازید. (دقت کنید که از هر نوع سکه تعداد بی نهایت در دسترس است) الگوریتمی مبتنی بر برنامه نویسی پویا ارائه دهید تا تعداد روش های منحصر به فرد انتخاب این سکه ها که مجموع آنها برابر عدد  $x$  شود را خروجی دهد. برای مثال اگر آرایه سکه های ما به شکل  $\{1, 2, 5\}$  باشد و مقدار  $x=5$  باشد تعداد حالت های مورد نظر ما برابر ۴ می شود.

$\{1, 1, 1, 1, 1\}, \{5\}, \{2, 2, 1\}, \{2, 1, 1, 1\}$

الف) الگوریتم خود را به طور کامل شرح دهید و پیچیدگی زمانی و حافظه آن را مشخص کنید.  
ب) الگوریتم را بر روی مقادیر سکه  $\{10, 5, 25, 30\}$  و  $x =$  پیاده سازی کنید. (جدول dp مورد نظر را کشیده و پر کنید. شیوه پیمایش آن را شرح دهید و جواب نهایی را ارائه دهید).

## پاسخ ۱:

برای حل این سوال، یک جدول به طول مقدار جمع خواسته شده در صورت سوال + ۱ درست می کنیم. هر خانه از جدول، نشان دهنده مقدار جمع سکه ها از صفر تا مقدار خواسته شده می باشد. سپس خانه اول آرایه را برابر با یک قرار می دهیم. زیرا تنها راهی که می توان به جمع صفر رسید، این است که از هیچ سکه ای استفاده نکنیم.

0	1	2	...	sum
1				

برای پر کردن مابقی خانه ها، از سکه اول داده شده شروع کرده و به ازای تک تک مقادیر index خانه های آرایه که نشان دهنده جمع است، چک می کنیم و اگر مقدار سکه کمتر از index زام بود، مقدار خانه مربوط به آن index را با خانه ای که index اش با این index منهای سکه مورد نظر برابر است، جمع می کنیم. پاسخ در خانه آخر جدول قرار دارد. پیچیدگی زمانی:  $O(n * \text{sum})$ ، زیرا دو حلقه for تودرتو با طول  $n$  (تعداد سکه ها) و  $\text{sum}$  مقدار جمع خواسته شده دارد.

پیچیدگی حافظه:  $O(n * \text{sum})$

ب) مطابق بخش الف، ابتدا یک آرایه با طول مقدار جمع خواسته شده  $1 + 30 = 31$  در نظر می‌گیریم و مقدار خانه صفرم را یک قرار می‌دهیم (طبق توضیحات بخش الف)

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1																														

سپس از سکه اول داده شده توسط ورودی، یعنی ۲۵ شروع می‌کنیم. مقدار سکه ۲۵، از index ۲۵ به بعد آرایه بزرگتر است. بنابراین مقدار آن‌ها را طبق رابطه گفته شده در بخش الف، به دست می‌آوریم:

$$dp[0] = 1, \quad dp[1] = 0, \quad dp[2] = 0, \quad dp[3] = 0, \quad dp[4] = 0$$

$$dp[5] = 0, \quad dp[6] = 0, \quad dp[7] = 0, \quad dp[8] = 0, \quad dp[9] = 0$$

$$dp[10] = 0, \quad dp[11] = 0, \quad dp[12] = 0, \quad dp[13] = 0, \quad dp[14] = 0$$

$$dp[15] = 0, \quad dp[16] = 0, \quad dp[17] = 0, \quad dp[18] = 0, \quad dp[19] = 0$$

$$dp[20] = 0, \quad dp[21] = 0, \quad dp[22] = 0, \quad dp[23] = 0, \quad dp[24] = 0$$

$$dp[25] = dp[25] + dp[0] = 0 + 1 = 1, \quad dp[26] = dp[26] + dp[1] = 0 + 0 = 0$$

$$dp[27] = dp[27] + dp[2] = 0 + 0 = 0, \quad dp[28] = dp[28] + dp[3] = 0 + 0 = 0$$

$$dp[29] = dp[29] + dp[4] = 0 + 0 = 0, \quad dp[30] = dp[30] + dp[5] = 0 + 0 = 0$$

جدول پس از سکه ۲۵ به شکل زیر درمی‌آید:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0

حال خانه‌های جدول را با سکه ۵ مطابق الگوریتم بخش الف، آپدیت می‌کنیم. مقدار سکه ۵، از index ۵ به بعد آرایه بزرگتر است. بنابراین داریم:

$$dp[0] = 1, \quad dp[1] = 0, \quad dp[2] = 0, \quad dp[3] = 0, \quad dp[4] = 0$$

$$dp[5] = dp[5] + dp[0] = 0 + 1 = 1, \quad dp[6] = dp[6] + dp[1] = 0 + 0 = 0$$

$$\begin{aligned}
dp[7] &= dp[7] + dp[2] = 0 + 0 = 0 \quad , \quad dp[8] = dp[8] + dp[3] = 0 + 0 = 0 \\
dp[9] &= dp[9] + dp[4] = 0 + 0 = 0 \quad , \quad dp[10] = dp[10] + dp[5] = 0 + 1 = 1 \\
dp[11] &= dp[11] + dp[6] = 0 + 0 = 0 \quad , \quad dp[12] = dp[12] + dp[7] = 0 + 0 = 0 \\
dp[13] &= dp[13] + dp[8] = 0 + 0 = 0 \quad , \quad dp[14] = dp[14] + dp[9] = 0 + 0 = 0 \\
dp[15] &= dp[15] + dp[10] = 0 + 1 = 1 \quad , \quad dp[16] = dp[16] + dp[11] = 0 + 0 = 0 \\
dp[17] &= dp[17] + dp[12] = 0 + 0 = 0 \quad , \quad dp[18] = dp[18] + dp[13] = 0 + 0 = 0 \\
dp[19] &= dp[19] + dp[14] = 0 + 0 = 0 \quad , \quad dp[20] = dp[20] + dp[15] = 0 + 1 = 1 \\
dp[21] &= dp[21] + dp[16] = 0 + 0 = 0 \quad , \quad dp[22] = dp[22] + dp[17] = 0 + 0 = 0 \\
dp[23] &= dp[23] + dp[18] = 0 + 0 = 0 \quad , \quad dp[24] = dp[24] + dp[19] = 0 + 0 = 0 \\
dp[25] &= dp[25] + dp[20] = 1 + 1 = 2 \quad , \quad dp[26] = dp[26] + dp[21] = 0 + 0 = 0 \\
dp[27] &= dp[27] + dp[22] = 0 + 0 = 0 \quad , \quad dp[28] = dp[28] + dp[23] = 0 + 0 = 0 \\
dp[29] &= dp[29] + dp[24] = 0 + 0 = 0 \quad , \quad dp[30] = dp[30] + dp[25] = 0 + 2 = 2
\end{aligned}$$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	2	0	0	0	0	2

حال سکه ۱۰ را نیز اضافه می‌کنیم. برای این سکه، مطابق شرط الگوریتم، مقادیر خانه‌های ۱۰ به بعد جدول تغییر می‌کنند.

$$\begin{aligned}
dp[0] &= 1 \quad , \quad dp[1] = 0 \quad , \quad dp[2] = 0 \quad , \quad dp[3] = 0 \quad , \quad dp[4] = 0 \\
dp[5] &= 1 \quad , \quad dp[6] = 0 \quad , \quad dp[7] = 0 \quad , \quad dp[8] = 0 \quad , \quad dp[9] = 0 \\
dp[10] &= dp[10] + dp[0] = 1 + 1 = 2 \quad , \quad dp[11] = dp[11] + dp[1] = 0 + 0 = 0 \\
dp[12] &= dp[12] + dp[2] = 0 + 0 = 0 \quad , \quad dp[13] = dp[13] + dp[3] = 0 + 0 = 0 \\
dp[14] &= dp[14] + dp[4] = 0 + 0 = 0 \quad , \quad dp[15] = dp[15] + dp[5] = 1 + 1 = 2
\end{aligned}$$

$$dp[16] = dp[16] + dp[6] = 0 + 0 = 0 \quad , \quad dp[17] = dp[17] + dp[7] = 0 + 0 = 0$$

$$dp[18] = dp[18] + dp[8] = 0 + 0 = 0 \quad , \quad dp[19] = dp[19] + dp[9] = 0 + 0 = 0$$

$$dp[20] = dp[20] + dp[10] = 1 + 2 = 3 \quad , \quad dp[21] = dp[21] + dp[11] = 0 + 0 = 0$$

$$dp[22] = dp[22] + dp[12] = 0 + 0 = 0 \quad , \quad dp[23] = dp[23] + dp[13] = 0 + 0 = 0$$

$$dp[24] = dp[24] + dp[14] = 0 + 0 = 0 \quad , \quad dp[25] = dp[25] + dp[15] = 2 + 2 = 4$$

$$dp[26] = dp[26] + dp[16] = 0 + 0 = 0 \quad , \quad dp[27] = dp[27] + dp[17] = 0 + 0 = 0$$

$$dp[28] = dp[28] + dp[18] = 0 + 0 = 0 \quad , \quad dp[29] = dp[29] + dp[19] = 0 + 0 = 0$$

$$dp[30] = dp[30] + dp[20] = 2 + 3 = 5$$

بنابراین جدول نهایی به شکل زیر درمی آید.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	2	0	0	0	0	2	0	0	0	0	3	0	0	0	0	4	0	0	0	0	5

پاسخ نهایی با  $dp[sum]$  که برابر  $dp[30] = 5$  می باشد. حالت های ممکن برای این سوال، به شرح زیر است:

$$\{5, 5, 5, 5, 5, 5\} \quad , \quad \{5, 5, 5, 5, 10\} \quad , \quad \{5, 5, 10, 10\}$$

$$\{5, 25\} \quad , \quad \{10, 10, 10\}$$