

به نام خدا



## درس تحلیل و طراحی الگوریتم ها

تمرین ششم

دانشکده مهندسی کامپیوتر

دانشگاه علم و صنعت ایران

استاد مرضیه ملکی مجد

نیم سال دوم ۱۴۰۱-۱۴۰۲

مهلت ارسال :

۱۴۰۲ / ۲ / ۱۸

مبحث :

درخت پوشای کمینه

مسئول تمارین :

آریا شهنسوار

## فهرست

۳	❖ آداب نامه تمرینات
۴	❖ نکات تمرین سری ششم
۵	❖ تمرین ۱. سوال تئوری
۶	❖ تمرین ۲. درخت پوشای کمینه Kruskal
۸	❖ تمرین ۳. درخت پوشای کمینه Prim
۹	❖ تمرین ۴. شهردار زوتوپیا
۱۲	❖ تمرین ۵. مخالفان حاکم
۱۵	❖ تمرین ۶. عوارضی ( امتیازی )

## آداب نامه تمرینات

- پاسخ تمامی سوالات تنها به زبان های C# و C++ قابل قبول می باشد
- علیرغم اعتماد کامل تیم تی ای به شما دانشجویان عزیز، تمامی کد های شما با سایر دانشجویان بصورت خودکار و توسط برنامه مقایسه خواهند شد . همچنین در طول ترم ، از تمامی پاسخ های شما ارائه گرفته خواهد شد و نحوه کار تمامی بخش های هر سوال از شما پرسیده خواهد شد، لذا از کپی نمودن کد دوستانتان خودداری کنید و تمامی پاسخ ها، کد خودتان باشد . همچنین از آنجایی که مشورت و هم فکری با سایر دوستان بسیار کار پسندیده و مفیدی است - برخلاف کپی کردن کد (: - در صورت هم فکری با دانشجوی دانشجویان ، نام وی را بصورت کامنت شده در ابتدای کد خود بنویسید.
- برای ارسال تمرین در طول ترم، در مجموع ۲۰ روز می توانید تاخیر داشته باشید و در صورتی که جمع تاخیر دانشجویی بیشتر از ۲۰ روز شود، تمرین وی قابل قبول نخواهد بود لذا تلاش کنید تمرینات را در زمان مقرر در سامانه آپلود کنید.
- در تمامی تمرینات سعی شده است که سوالات ساده تر در ابتدا و سوالات دشوار تر در انتهای فایل قرار گیرند ( از ساده به دشوار مرتب شده اند ) .
- در صورت وجود هرگونه سوال در مورد تمرینات ، سعی کنید تا جایی که امکان دارد سوال خود را در گروه بپرسید چرا که شاید سوال شما، سوال دوستان نیز باشد و دوستانتان نیز بتوانند از پاسخ سوال شما بهره ببرند.

## نکات تمرین سری ششم

- سوالات را در سامانه کوئرا و در قسمت تمرین سری ششم آپلود نمایید .
- از آنجایی که هر سوال توسط یک تی ای طرح شده است ، تنها تی ای طراح آن سوال می تواند شما را بصورت دقیق راهنمایی کند به همین منظور طراح هر سوال در زیر نوشته شده است تا در صورت ابهام و پرسش در مورد هر سوال، در صورتی که نیاز به پرسش سوال بصورت انفرادی در پیوی هست ، به تی ای مربوطه مراجعه بفرمایید

- سوال ۱ . آقای کمیجانی
- سوال ۲ . آقای کمیجانی
- سوال ۳ . آقای عباسپور
- سوال ۴ . خانم جعفری - آقای شهسوار
- سوال ۵ . آقای مرادیان
- سوال ۶ . آقای اعلا

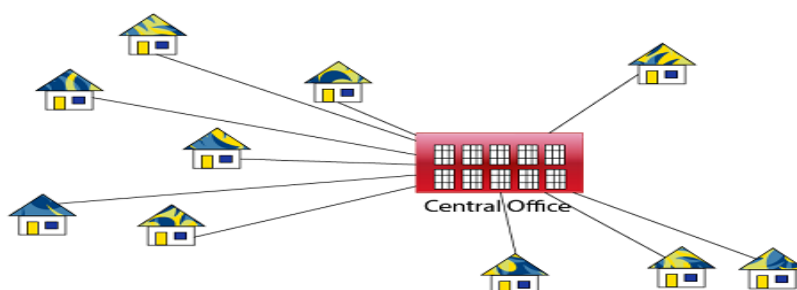
## تمرین ۱. سوال تئوری

فرض کنید گراف  $G$  و درخت فراگیر کمینه آن  $T$  را داریم. وزن یکی از یال های گراف  $G$  را کم میکنیم تا گراف  $G'$  به دست آید. الگوریتمی ارائه دهید که درخت فراگیر کمینه را در گراف  $G'$  پیدا کند. دقت کنید با توجه به اینکه اطلاعات درخت پوشای کمینه در گراف اولیه  $G$  را داریم، باید در زمان  $O(V+E)$  پاسخ را پیدا کنید.

## تمرین ۲. پیدا کردن MST (الگوریتم Kruskal)

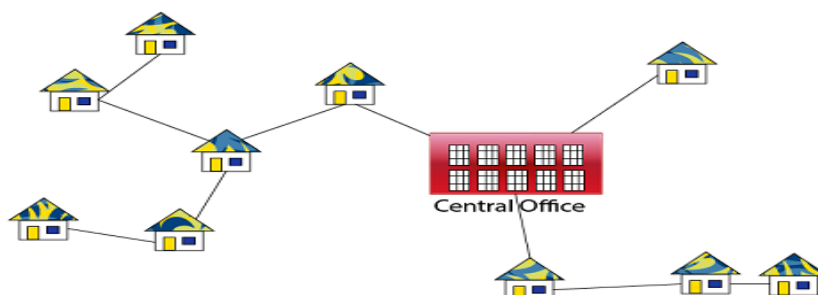
یکی از مفاهیم مهم در گراف، پیدا کردن Minimum Spanning Tree می باشد. MST یک گراف وزن دار، connected و بدون جهت، یک درختیست که تمام رئوس گراف را با کمترین وزن ممکن به هم متصل میکند. به عبارتی دیگر، MST یک زیرمجموعه از تمام یال های گراف میباشد که تمام راس ها را به هم متصل میکند ( تمام رئوس به هم قابل دسترس باشند ) و کمترین وزن کلی ممکن را دارد. از کاربرد های آن میتوان در خطوط تلفن نام برد.

Wiring : Naive Approach



Expensive!

Wiring : Better Approach



دو الگوریتم مهم برای پیدا کردن MST یک گراف وجود دارند، Prim و Kruskal. در این بخش می خواهیم الگوریتم Kruskal برای پیدا کردن MST گراف را پیاده سازی کنیم.

**ورودی:**

در خط اول تعداد راس ها ( $v$ ) و سپس تعداد یال های گراف ( $e$ ) می آید.  
در  $e$  خط بعدی یال های گراف به همراه وزن به صورت  $v_i \ v_j \ w$  می آیند. یعنی یال  $v_i \ v_j$  وزن  $w$  را دارد.

$$v \leq 2000$$

$$w \leq 1000$$

**خروجی:**

یک گراف همواره یک MST منحصر به فرد ندارد ولی وزن کلی آنها یکسان است. در خروجی باید وزن کلی MST گراف را چاپ کنید.

**Example 1 :**

**Input :**

4 4

1 2 1

1 3 4

3 4 2

1 4 3

**Output :**

6

## تمرین ۳. پیدا کردن MST (الگوریتم Prim)

در بخش قبل الگوریتم Kruskal را پیاده سازی کردید. حال در این بخش می خواهیم MST گراف را با استفاده از الگوریتم Prim پیدا کنیم.

( دقت کنید که کد شما برای هر دو بخش چک میشود و در صورتی که الگوریتم مد نظر پیاده سازی نشده باشد نمره ای به شما تعلق نمیگیرد )

ورودی :

در خط اول تعداد راس ها ( $v$ ) و سپس تعداد یال های گراف ( $e$ ) می آید.

در  $e$  خط بعدی یال های گراف به همراه وزن به صورت  $v_i \ v_j \ w$  می آیند. یعنی یال  $v_i \ v_j$  وزن  $w$  را دارد.

$$v \leq 2000$$

$$w \leq 1000$$

خروجی :

در خروجی باید وزن کلی MST گراف را چاپ کنید .



## تمرین ۴. شهردار زوتوپیا

شهردار زوتوپیا به دنبال پیدا کردن کمترین هزینه برای وصل کردن جاده های شهر به یکدیگر هستش و اکنون با وصل کردن جاده های مختلف به نتایج متفاوتی دست پیدا کرده است. او به این فکر افتاد که اگر یک کدام از این جاده ها دیگر وجود نداشته باشند آیا تاثیری در نتیجه کمترین هزینه او دارد یا خیر؟ به همین دلیل او سعی کرد که یک هزینه جایگزین کمترین هزینه پیدا کند. در واقع او سعی دارد دومین کمترین هزینه برای وصل کردن جاده های شهر به یکدیگر پیدا کند و او از شما می خواهد در این کار به او کمک کنید باید به این نکته هم توجه داشت امکان دارد دومین کمترین هزینه وجود نداشته باشد در این صورت باید مقدار ۱- را خروجی دهید.

**ورودی :**

در خط اول ورودی تعداد شهر ها  $v$  و تعداد جاده ها  $e$  با فاصله از یکدیگر آمده اند. در  $e$  خط بعدی, در هر خط سه عدد  $u, v, w$  با فاصله از یکدیگر آمده اند که بیانگر آن است که برای ایجاد یک جاده میان دو شهر  $u$  و  $v$  به اندازه  $w$  هزینه لازم است.

$$v \leq 500$$

**خروجی :**

در صورت وجود دومین کمترین هزینه لازم برای اتصال تمام شهر ها آن را چاپ کنید و در غیر این صورت ۱- را خروجی دهید.

### Example 1 :

#### Input :

4 4

1 2 1

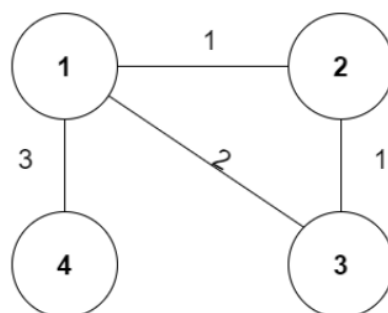
4 1 3

2 3 1

1 3 2

#### Output :

6



توضیح :

کمترین هزینه وصل کردن تمام راس ها ۵ می باشد و دومین هزینه آن برابر ۶ می باشد که با حذف کردن یال ۱ به ۲ این به دست می آید

### Example 2 :

#### Input :

4 3

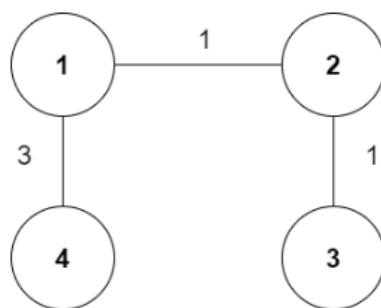
1 2 1

4 1 3

2 3 1

#### Output :

-1



#### توضیح :

چون به ازای حذف کردن هر کدام از یال ها دیگر نمیتوان تمام شهر ها را به هم متصل کرد پس خروجی برابر با -1 خواهد بود .

## تمرین ۵. مخالفان حاکم

عده ای از مخالفان حاکم ایالتی در ایران قدیم، برای ناکارآمد جلوه دادن او، هر ماه اقدام به راهزنی کرده و طال و نقره کاروان هایی که در این ایالت به بازرگانی می پردازند را غارت میکنند. کاروان ها میتوانند در مسیر بازرگانی خود از دو یا چند شهر بگذرند و یا تنها در شهر خود بازرگانی را انجام دهند. حاکم که از این راهزنی ها خسته شده بود، مذاکرات با مخالفان را آغاز کرد. پس از گفت و گو های فراوان میان سردسته مخالفان و حاکم ایالت، سرانجام به توافقی دست یافتند که میزان خسارت وارده به بازرگانان را به حداقل برسانند.

سردسته راهزنها برای هر جاده موجود در نقشه یک  $g_i$  و یک  $s_i$  مشخص کرد و قول داد که اگر هر ماه به میزان  $g_e$  طال و  $s_e$  نقره از طرف ایالت دریافت کند، به هیچ کدام از مسیر هایی که  $g_e \geq g_i$  و  $s_e \geq s_i$  باشد، حمله نخواهد کرد.

مشکل دیگری که وجود دارد، این است که خزانه های ایالت، تنها پول های برره ای دارد و هیچ طال و نقره ای در آن نیست. فرض کنید که ارزش هر طلا برابر با  $G$  برره و ارزش هر نقره برابر با  $S$  برره است. پادشاه که به فکر حل این مشکل است، قصد دارد با پرداخت کمترین میزان پول برره ای، از هر شهر  $a$  به هر شهر  $b$  یک مسیر امن برای کاروان وجود داشته باشد.

ورودی:

در خط اول دو عدد  $N$  و  $M$  به ترتیب نشان دهنده تعداد شهر های کوروش توپیا و تعداد راه های ارتباطی است.

$$2 \leq N \leq 200, \quad 1 \leq M \leq 50000$$

در خط دوم مقادیر  $G$  و  $S$  داده میشود که ارزش طلا و نقره را در برابر کوروش کوین تعیین خواهد کرد.

$$1 \leq G, S \leq 10^9$$

در  $M$  خط بعدی مسیرهای بین شهرها داده میشود که به ترتیب مبدا، مقصد، میزان مینیمم طلا و میزان مینیمم نقره داده خواهد شد.

$$1 \leq x_i, y_i \leq N$$

$$1 \leq g_i, s_i \leq 10^9$$

**خروجی:**

در تنها خط خروجی باید مینیمم میزان کوروش کوین برای اینکه ارتباط بین شهرها امن باشد را چاپ کنید.

در صورتی که امکان این کار وجود نداشته باشد، باید 1- چاپ شود.

**Example 1 :****Input :**

3 3

2 1

1 2 10 15

1 2 4 20

1 3 5 1

**Output :**

30

اگر ۳۰ کوروش کوبین به راهزن ها بدهیم و آن را تبدیل به ۵ طلا و ۲۰ نقره کنیم دو مسیر زیر امن خواهند بود . چون هم طلا و هم نقره مورد نیازشان از این میزان کمتر است .

1 2 4 20

1 3 5 1

## تمرین ۶. عوارضی ( امتیازی )

یک گراف  $n$  راسی همبند با  $m$  یال وزن دار داریم. در راس  $i$  ام  $p_i$  نفر زندگی میکنند. وزن های این  $m$  یال متفاوت است.

تیزی  $k$  یال دیگر بجز این  $m$  یال دارد که وزن های آنها هنوز تعیین نشده است. او می تواند وزن این یال ها را هر عددی بگذارد. (حتی برابر با وزن یکی از  $m$  یال ابتدایی)

تیزی پس از تعیین وزن یال های جدیدش، باید یک MST از گراف انتخاب کند. اگر چند حالت برای انتخاب این MST وجود دارد او میتواند هر کدام از حالت ها را بردارد.

سپس هر نفر در هر یک از راس ها به سمت راس ۱ حرکت می کند. هر نفر برای عبور از یک یال باید به اندازه وزن آن یال به تیزی پول بدهد.

طبعن افراد فقط میتوانند از یال های MST انتخاب شده ی تیزی استفاده کنند!

تیزی میخواهد ماکزیمم پول را کسب کند. به او بگویید این مقدار چقدر است اگر او وزن  $k$  یال را به بهترین حالت تعیین کند.

**ورودی:**

در خط اول ورودی  $n$  و  $m$  و  $k$  به شما داده میشود که به ترتیب تعداد راس های گراف و تعداد یال های ابتدایی و تعداد یال هایی است که تیزی وزن آنها را تعیین خواهد کرد. در هر یک از  $m$  خط بعدی ۳ عدد  $a$  و  $b$  و  $c$  به شما داده میشود که نشان دهنده وجود یالی بین  $a$  و  $b$  با وزن  $c$  است. تضمین میشود همه  $c$  ها متفاوتند. در هر یک از  $k$  خط بعدی ۲ عدد  $a$  و  $b$  به شما داده میشود که نشان دهنده یک یال بین  $a$  و  $b$  است که وزن این یال را تیزی تعیین خواهد کرد. در خط آخر  $n$  عدد  $p_1, p_2, \dots, p_n$  به شما داده میشود.

$$1 \leq n \leq 10^5$$

$$1 \leq m \leq 3 * 10^5$$

$$1 \leq k \leq 20$$

$$1 \leq p_i, c \leq 10^6$$

خروجی:

در تنها خط خروجی ماکزیمم پولی که تیزی میتواند کسب کند را بدهید.

**Example 1 :**

**Input :**

5 5 1

3 5 2

1 2 3

2 3 5

2 4 4

4 3 6

1 3

10 20 30 40 50

**Output :**

400

تیزی میتواند وزن یال بین ۱ و ۳ را ۵ قرار دهد و ۴۰۰ تا سود کند.