

## نمرین فصل سوم انتقال

۱۱ الناز رضایی ۹۸۴۱۳۸۷

۱۴۰۰/۱۰/۱

سوال ۱

(الف)

$$\begin{aligned} H(X) &= - \sum_{x \in X} P(x) \log_2 P(x) \\ &= -\frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \log_2 \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \log_2 \frac{1}{8} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = 1.75 \quad [bits/symbol] \end{aligned}$$

(ب)

هیچ تغییری نمی‌کند.

(ج)

به ازای جاب‌جایی احتمالات خروجی‌های مختلف، انتروپی تغییر نمی‌کند.

سوال ۲

$P(Y,X)$	$x=1$	$x=2$	$x=3$	$x=4$	$P(Y)$
$y=1$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{4}$
$y=2$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{4}$
$y=3$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
$y=4$	$\frac{1}{4}$	0	0	0	$\frac{1}{4}$
$P(X)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

(الف)

$P(X Y)$	$x=1$	$x=2$	$x=3$	$x=4$
$y=1$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
$y=2$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
$y=3$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$y=4$	1	0	0	0

$$\begin{aligned}
H(X|Y) &= - \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} P(y, x) \log_2 P(x|y) \\
&= -\frac{1}{8} \log_2 \frac{1}{2} - \frac{1}{16} \log_2 \frac{1}{4} - \frac{1}{32} \log_2 \frac{1}{8} \\
&\quad - \frac{1}{32} \log_2 \frac{1}{8} - \frac{1}{16} \log_2 \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \log_2 \frac{1}{2} \\
&\quad - \frac{1}{32} \log_2 \frac{1}{8} - \frac{1}{32} \log_2 \frac{1}{8} - \frac{1}{16} \log_2 \frac{1}{4} \\
&\quad - \frac{1}{16} \log_2 \frac{1}{4} - \frac{1}{16} \log_2 \frac{1}{4} - \frac{1}{16} \log_2 \frac{1}{4} \\
&\quad - \frac{1}{4} \log_2 1 - 0 \log_2 0 - 0 \log_2 0 \\
&\quad - 0 \log_2 0 = \frac{1}{8} + \frac{2}{16} + \frac{3}{32} + \frac{3}{32} + \frac{2}{16} \\
&\quad + \frac{1}{8} + \frac{3}{32} + \frac{3}{32} + \frac{2}{16} + \frac{2}{16} + \frac{2}{16} + \frac{2}{16} \\
&\quad + 0 + 0 + 0 + 0 = \frac{11}{8} \quad [bits/symbol]
\end{aligned}$$

P(Y X)	x=1	x=2	x=3	x=4
y=1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
y=2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
y=3	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
y=4	$\frac{1}{2}$	0	0	0

$$\begin{aligned}
H(Y|X) &= - \sum_{y \in Y} \sum_{x \in X} P(x, y) \log_2 P(y|x) \\
&= -\frac{1}{8} \log_2 \frac{1}{4} - \frac{1}{16} \log_2 \frac{1}{4} - \frac{1}{32} \log_2 \frac{1}{4} \\
&\quad - \frac{1}{32} \log_2 \frac{1}{4} - \frac{1}{16} \log_2 \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \log_2 \frac{1}{2} \\
&\quad - \frac{1}{32} \log_2 \frac{1}{4} - \frac{1}{32} \log_2 \frac{1}{4} - \frac{1}{16} \log_2 \frac{1}{8} \\
&\quad - \frac{1}{16} \log_2 \frac{1}{4} - \frac{1}{16} \log_2 \frac{1}{2} - \frac{1}{16} \log_2 \frac{1}{2} \\
&\quad - \frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{2} - 0 \log_2 0 - 0 \log_2 0 - 0 \log_2 0 \\
&= \frac{1}{4} + \frac{2}{16} + \frac{2}{32} + \frac{2}{32} + \frac{3}{16} + \frac{1}{8} \\
&\quad + \frac{2}{32} + \frac{2}{32} + \frac{3}{16} + \frac{2}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} \\
&\quad + \frac{1}{4} + 0 + 0 + 0 = \frac{13}{8} \quad [bits/symbol]
\end{aligned}$$

(ب)

$H(Y|X)$  بیانگر ابهام باقی مانده از  $Y$  با فرض دانستن  $X$  می باشد و به طور مشابه،  $H(X|Y)$  نمایانگر ابهام باقی مانده از  $X$  با فرض دانستن  $Y$  است. با توجه به مقادیر به دست آمده در بخش قبل، اگر  $X$  را داشته باشیم، ابهام باقی مانده بیشتر از زمانی است که  $Y$  را داشته باشیم و  $X$  را بخواهیم.

(ج)

$$\begin{aligned}
H(Y) &= - \sum_{y \in Y} P(Y) \log_2 P(Y) \\
&= -\frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4} \\
&= \frac{2}{4} + \frac{2}{4} + \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = 2 \quad [bits/symbol]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H(X) &= - \sum_{x \in X} P(x) \log_2 P(x) \\
&= -\frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \log_2 \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \log_2 \frac{1}{8} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{4} \quad [bits/symbol]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H(X, Y) &= - \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} P(X, Y) \log_2 P(X, Y) \\
&= -\frac{1}{8} \log_2 \frac{1}{8} - \frac{1}{16} \log_2 \frac{1}{16} - \frac{1}{32} \log_2 \frac{1}{32} \\
&\quad - \frac{1}{32} \log_2 \frac{1}{32} - \frac{1}{16} \log_2 \frac{1}{16} - \frac{1}{8} \log_2 \frac{1}{8} \\
&\quad - \frac{1}{32} \log_2 \frac{1}{32} - \frac{1}{32} \log_2 \frac{1}{32} - \frac{1}{16} \log_2 \frac{1}{16} \\
&\quad - \frac{1}{16} \log_2 \frac{1}{16} - \frac{1}{16} \log_2 \frac{1}{16} - \frac{1}{16} \log_2 \frac{1}{16} \\
&\quad - \frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4} - 0 \log_2 0 - 0 \log_2 0 - 0 \log_2 0 \\
&= \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \frac{5}{32} + \frac{5}{32} + \frac{4}{16} + \frac{3}{8} + \frac{5}{32} + \frac{5}{32} + \frac{4}{16} + \frac{4}{16} \\
&\quad + \frac{4}{16} + \frac{4}{16} + \frac{2}{4} + 0 + 0 + 0 = \frac{27}{8} \quad [bits/symbol]
\end{aligned}$$

(د)

نتایج زیر را به دست می آوریم :

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y|X)$$

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y|X)$$

(و)

$$H(X) + H(Y) \geq H(X, Y) \implies \frac{30}{8} \geq \frac{27}{8}$$

که مشخص است عبارت فوق صحیح می باشد.

(9)

$$I(X, Y) = H(X) - H(X|Y) = \frac{7}{4} - \frac{11}{8} = \frac{3}{8}$$

(ز)

طبق قضیه دوم شانون داریم :

$$C = I(Y, X) = I(X, Y) = \frac{3}{8}$$

(ح)

Y/X	1	2	3	4	P(Y)
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{4}$
4	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{4}$
P(X)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

(ط)

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y) - I(X, Y)$$

چون  $P(X)$  و  $P(Y)$  را ثابت فرض کردیم، پس  $H(X)$  و  $H(Y)$  تغییری نمی کنند و تنها متغیر وابسته به آن  $I(X, Y)$  می باشد که بیشترین مقدار  $H(X, Y)$  زمانی رخ می دهد که  $I(X, Y)$  در کمترین حالت خود باشد. (مانند بخش ح)

(ی)

$$P(X, Y) = P(X) \times P(Y)$$

طبق رابطه بالا، متغیرهای تصادفی ما مستقل می باشند و لذا لگاریتم رابطه فوق ۱ می شود که این امر سبب صفر شدن اطلاعات متقابل می شود.

(د

Y/X	1	2	3	4	P(Y)
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$e \frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
P(X)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

(ج

$H(Y)$  ثابت است چرا که  $P(Y)$  تغییری نداشته است.

$$H_2(Y) = H_1(Y) = 2 \quad [bits/symbol]$$

$$H_2(X) = H_1(Y) = -\frac{4}{4}\log_2 \frac{1}{4} = 2 \quad [bits/symbol]$$

$$H_2(X,Y) = -\frac{16}{16}\log_2 \frac{1}{16} = 4 \quad [bits/symbol]$$

∧



سوال ۳

P(X,Y)	y=0	y=1	y=2	P(x)
x=1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{6}$
x=2	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{6}$
x=3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{6}$
x=4	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{6}$
x=5	$\frac{1}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{6}$
x=6	$\frac{1}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{6}$
P(y)	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$	1

$$I(X, Y) = H(Y) + H(X) - H(X, Y)$$

$$\begin{aligned}
 H(X) &= - \sum_{x \in X} P(x) \log_2 P(x) \\
 &= -\frac{1}{6} \log_2 \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \log_2 \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \log_2 \frac{1}{6} \\
 &\quad - \frac{1}{6} \log_2 \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \log_2 \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \log_2 \frac{1}{6} \\
 &= 6 \times 0.43 = 2.584 \quad [bits/symbol]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H(Y) &= - \sum_{y \in Y} P(Y) \log_2 P(Y) \\
 &= -\frac{5}{12} \log_2 \frac{5}{12} - \frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} - \frac{1}{12} \log_2 \frac{1}{12} \\
 &= 0.53 + 0.5 + 0.294 = 1.324 \quad [bits/symbol]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H(X, Y) &= - \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} P(X, Y) \log_2 P(X, Y) \\
&= - \frac{1}{12} \log_2 \frac{1}{12} - \frac{1}{12} \log_2 \frac{1}{12} - 0 \times \log_2 0 \\
&\quad - \frac{1}{12} \log_2 \frac{1}{12} - \frac{1}{12} \log_2 \frac{1}{12} - 0 \times \log_2 0 \\
&\quad - \frac{1}{12} \log_2 \frac{1}{12} - \frac{1}{12} \log_2 \frac{1}{12} - 0 \times \log_2 0 \\
&\quad - \frac{1}{24} \log_2 \frac{1}{24} - \frac{2}{24} \log_2 \frac{2}{24} - \frac{1}{24} \log_2 \frac{1}{24} \\
&\quad - \frac{1}{24} \log_2 \frac{1}{24} - \frac{2}{24} \log_2 \frac{2}{24} - \frac{1}{24} \log_2 \frac{1}{24} \\
&= \frac{10}{12} \times 3.585 + \frac{4}{24} \times 4.585 \\
&= 2.987 + 0.764 = 3.751 \quad [bits/symbol]
\end{aligned}$$

$$I(X, Y) = 2.584 + 1.324 - 3.751 = 0.157 \quad [bits/symbol]$$

سوال ۴

(الف)

$$\begin{aligned} SNR_{dB} = 10\log_{10} SNR &\implies SNR = 10^{\frac{1}{2}} \approx 3.16 \\ C = B\log_2 1 + SNR = 10\log_2 1 + 3.16 &= 20 \quad [Mbps] \end{aligned}$$

(ب)

$$\begin{aligned} C = B\log_2 1 + SNR &\implies 50 = 10\log_2 1 + SNR \\ 32 = 1 + SNR &\implies SNR = 31 \end{aligned}$$