فصل دوم: مقدمات سیگنال

در این فصل مروری مختصر بر مفاهیم اولیه مخابرات داده و بلوک‌های تشکیل‌دهنده یک سامانه مخابراتی خواهیم داشت.

درس انتقال داده

ابوالفضل دیانت

آخرین ویرایش: ۱۶ آبان ۱۴۰۰ در ساعت ۱۴ و ۲۴ دقیقه

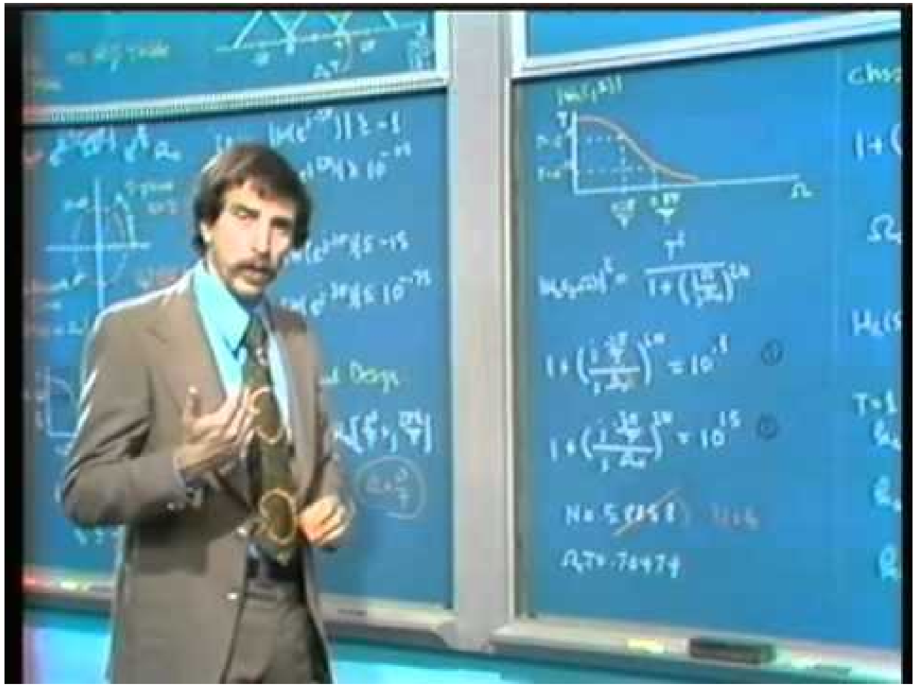
فهرست مطالب

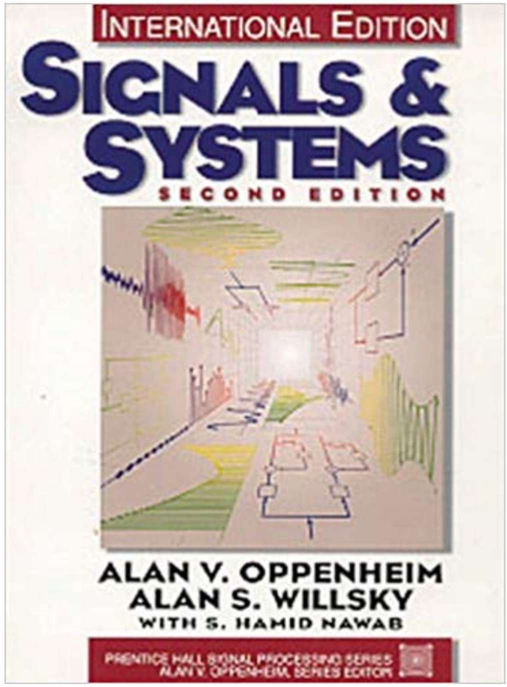
معرفی سیگنال ۲
تبدیل فوریه ۱۹
نمونه‌برداری ۴۱
انرژی و توان سیگنال ۴۶
پاسخ ضربه کانال ۵۹
مراجع ۷۸
فهرست اختصارات ۷۹

واژه نامه انگلیسی به فارسی ۸۲
واژه نامه فارسی به انگلیسی ۸۶

مرجع مناسب

[1] A. V Oppenheim, A. S. Willsky, and S. H. Nawab, *Signals and systems.* Prentice Hall, 1997.





معرفی سیگنال

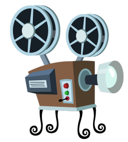
معرفی سیگنال

تعریف ۱ به هر تابع ریاضی، اصطلاحا سیگنال گفته می‌شود. هر تابع ریاضیاتی (سیگنال)، یک سری متغیرهای وابسته (Dependent Variable) و متغیرهای مستقل (Independent Variable) دارد.

$$y = f(x_1, x_2)$$

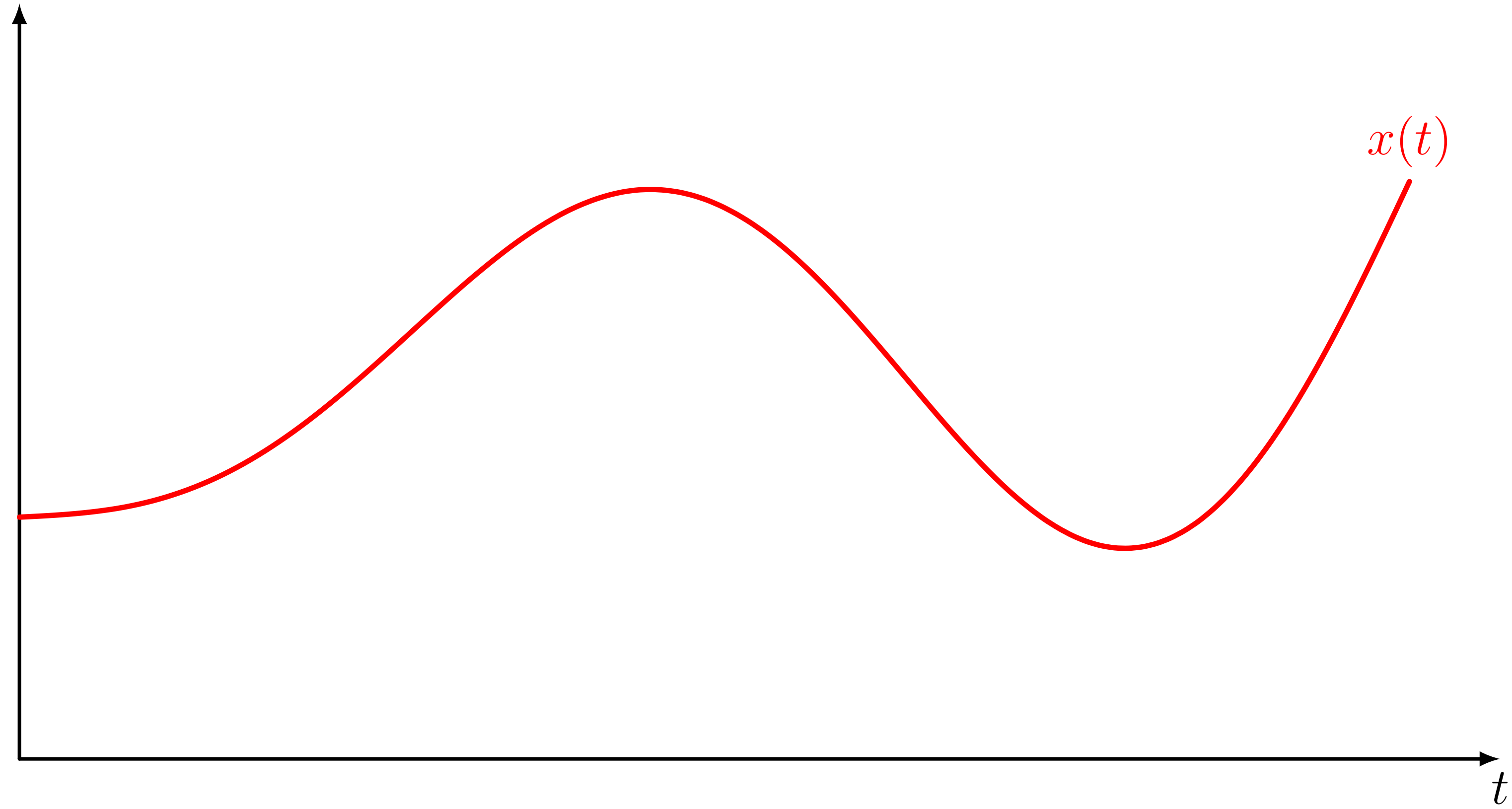

صوت یک سیگنال زمانی یک بعدی است، که متغیر مستقل آن زمان و متغیر وابسته آن سطح صدا


تصویر یک سیگنال دوبعدی است. هر پیکسل متغیر مستقل و رنگ متغیر وابسته $f(x, y)$


ویدئو یک سیگنال سه بعدی است، که دو بعد آن را مکان و بعد سوم آن نیز زمان است. یعنی $f(x, y, t)$

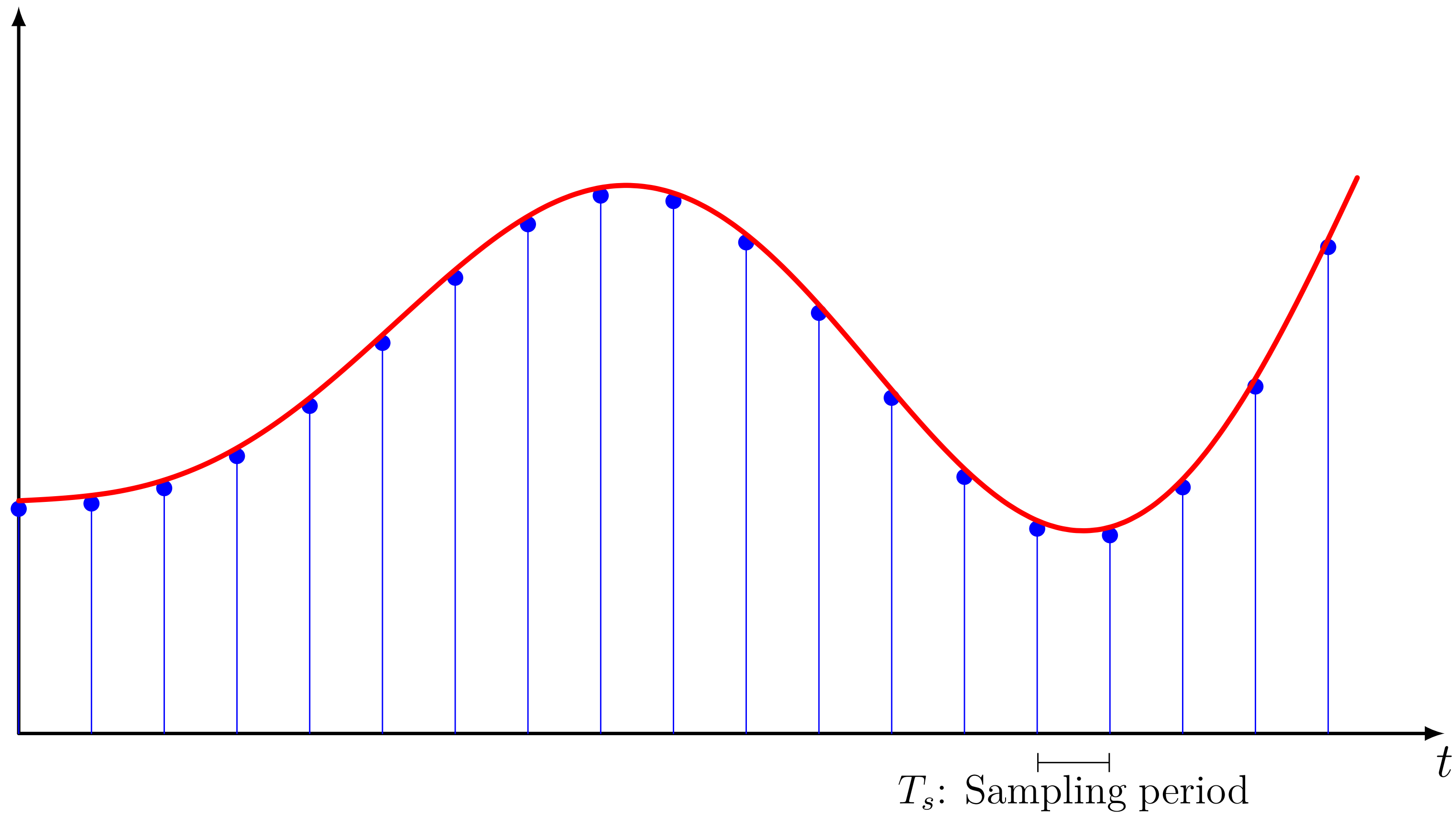
انواع سیگنال

✍ **سیگنال پیوسته** $x(t)$: این سیگنال‌ها، در مقدار و زمان پیوسته هستند. سیگنال‌هایی که در طبیعت وجود دارند، همگی از نوع پیوسته هستند: به طور مثال سرعت ماشین، صدای انسان و لرزش‌های زمین.

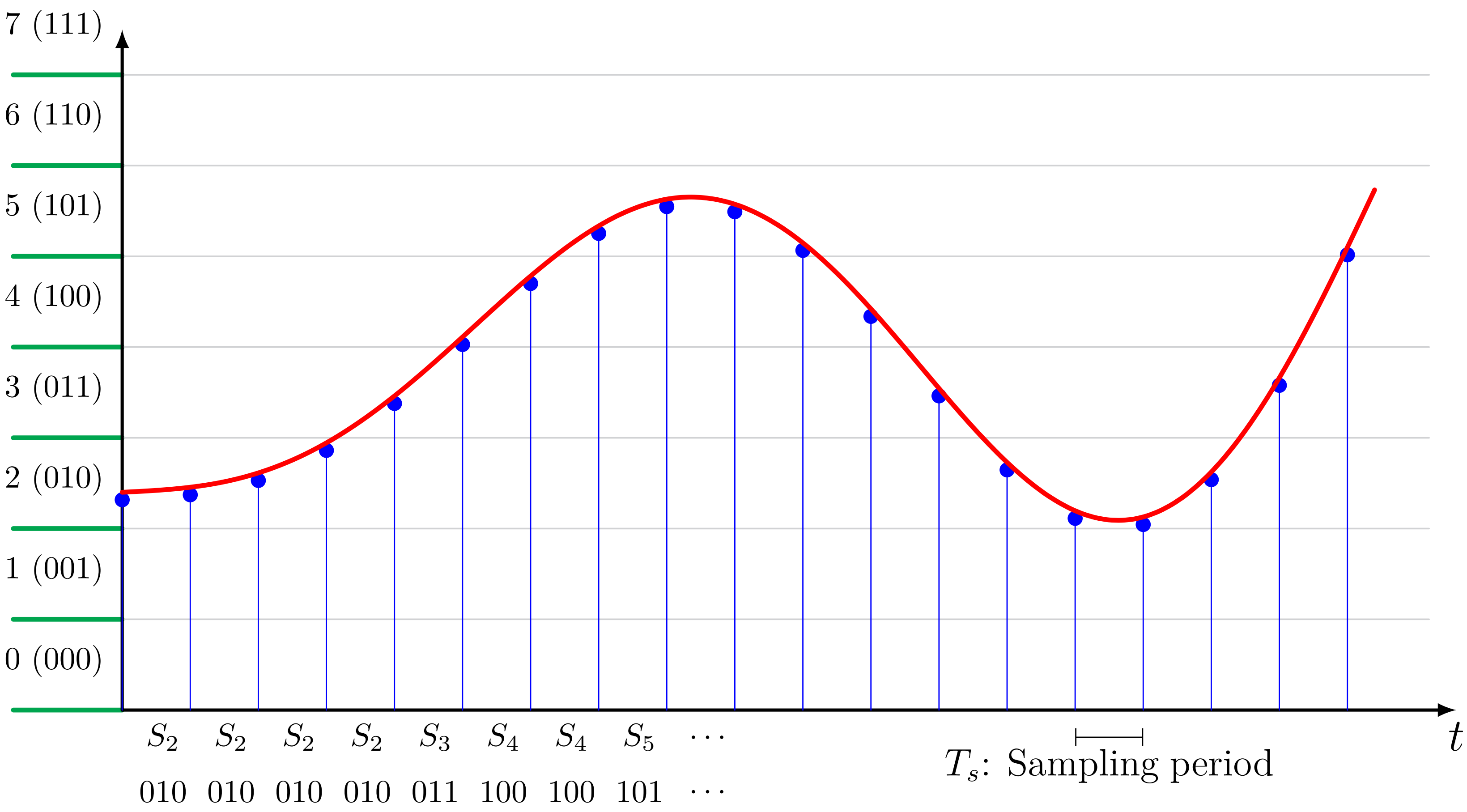


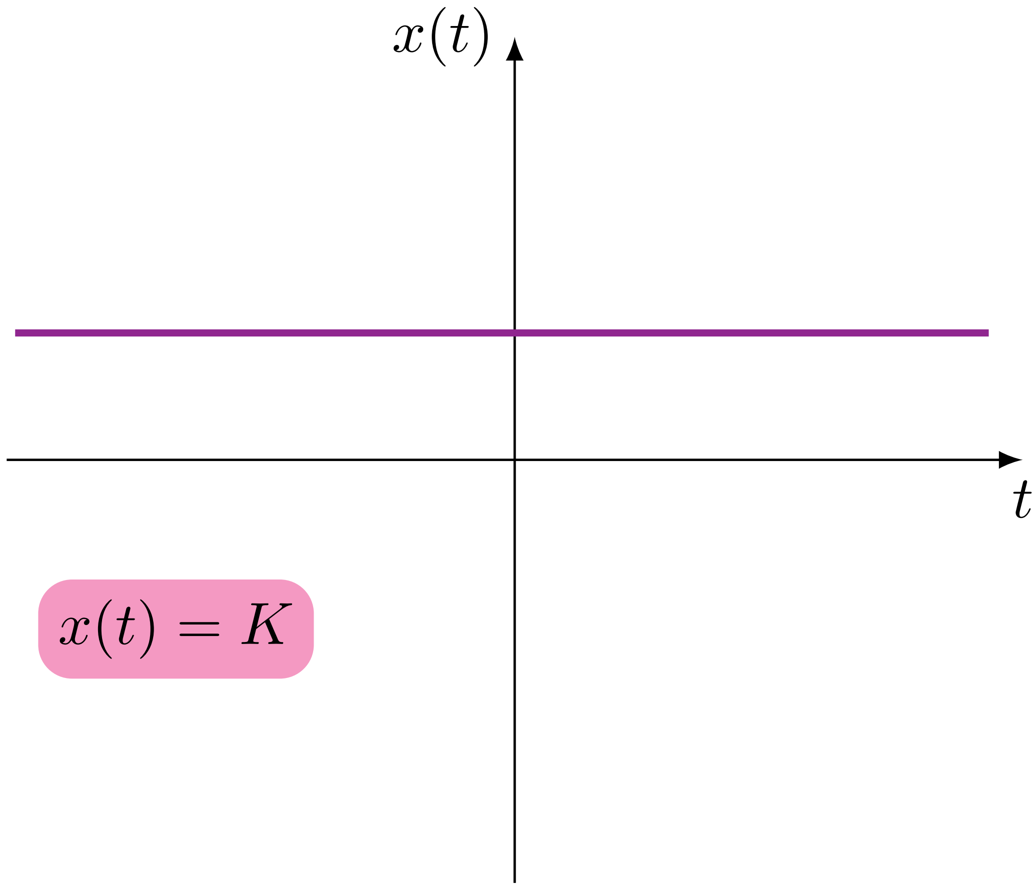
انواع سیگنال (ادامه)

✍ **سیگنال گسسته** $x[n]$: سیگنال‌های گسسته از نظر مقدار پیوسته هستند، ولی از جهت زمانی گسسته، یعنی فقط در زمان‌های خاصی، مقدار سیگنال تعریف شده است (فرکانس نمونه‌برداری $f_s = \frac{1}{T_s}$).



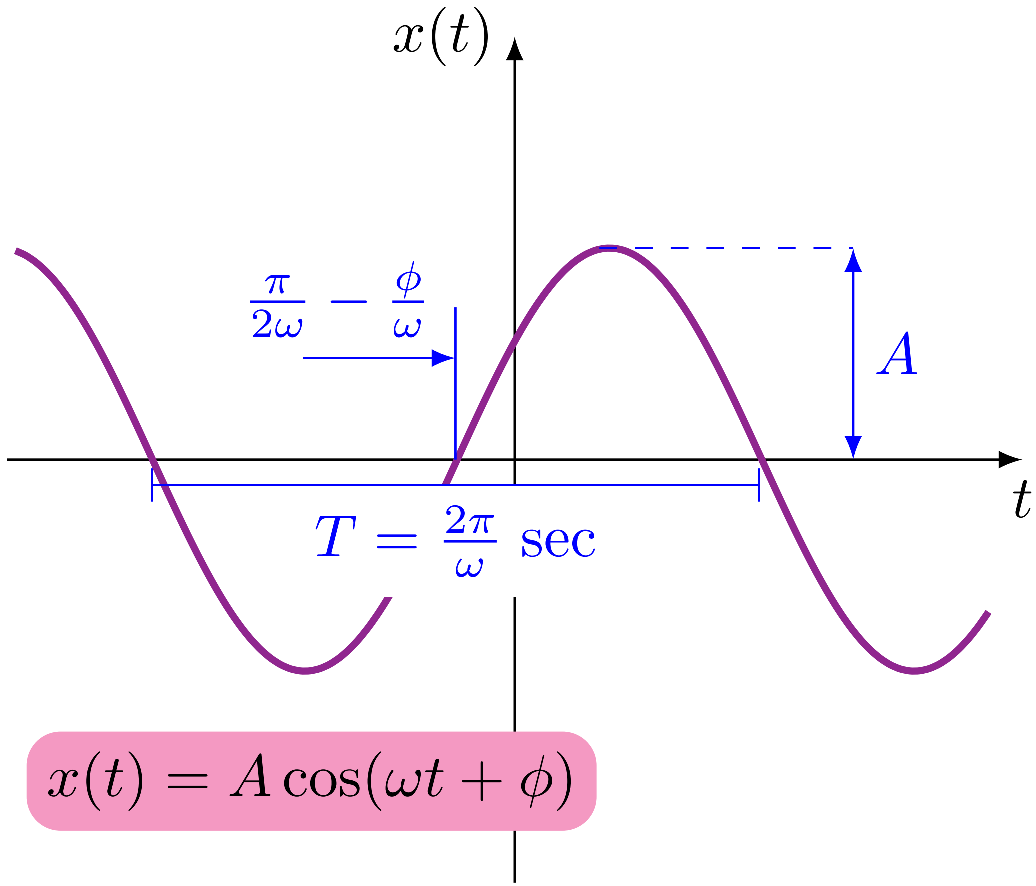
✍ **سیگنال رقمی** $x[n]$: سیگنال‌های رقمی از نظر مقدار و زمان، گسسته هستند. بسیاری از سیگنال‌هایی که در پردازش‌های رایانه‌ای با آن مواجه هستیم، از این دست سیگنال‌ها هستند.





$x(t) = K$

✍ مقدار ثابت، ساده‌ترین سیگنال است.



$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

✍ ویژگی‌های سیگنال سینوسی:

- A: دامنه (Amplitude)
- ω: فرکانس زاویه‌ای برحسب رادیان بر ثانیه ($2\pi f$).
- ϕ: ثابت فاز سیگنال.

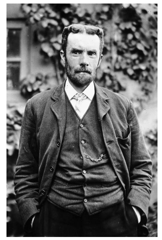
✍ برق AC یک موج سینوسی با فرکانس 50Hz.

سیگنال‌ها - تابع پله واحد

تابع پله واحد (Unit Step Function):

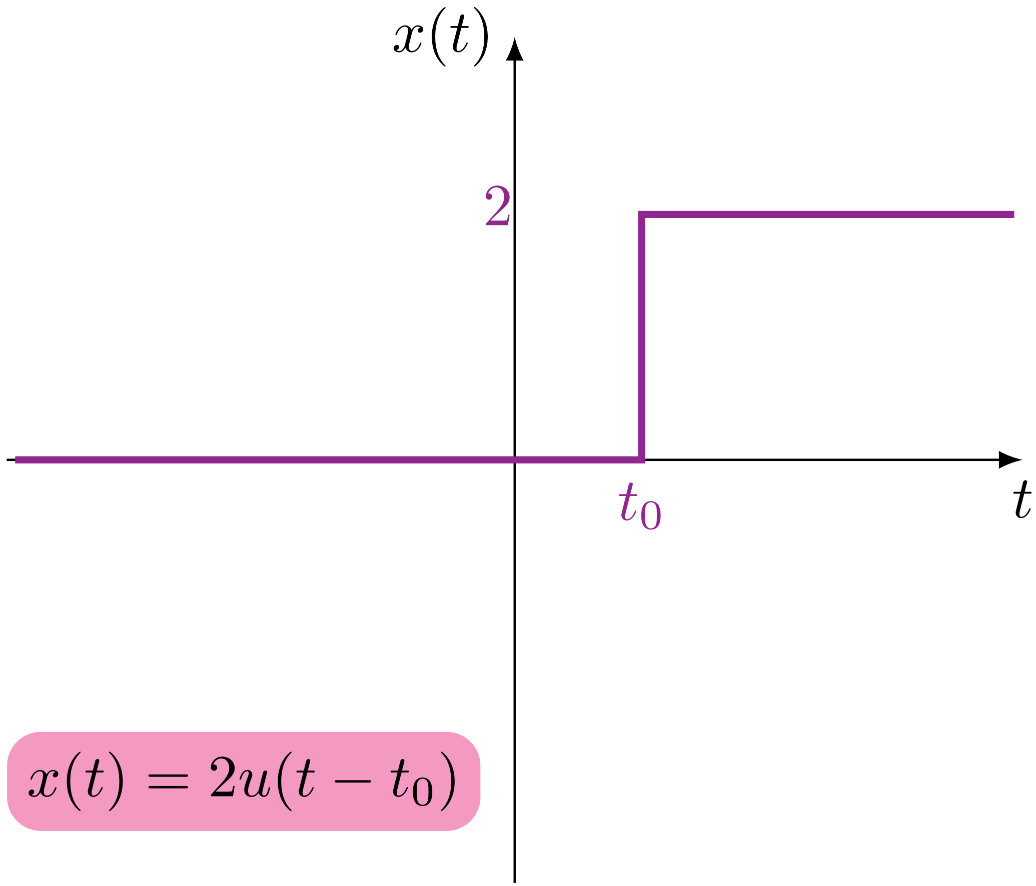
$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

در $t = 0$، مقدار تابع را می‌توان 0، $\frac{1}{2}$ و 1 در نظر گرفت. ولی بهتر است $u(0) = \frac{1}{2}$ را در نظر بگیریم.



به این تابع گاه Heaviside نیز گفته می‌شود به یاد بود مبدع $\mathbf{1}(t)$.

تفاوت بین Discontinuous و Discrete.



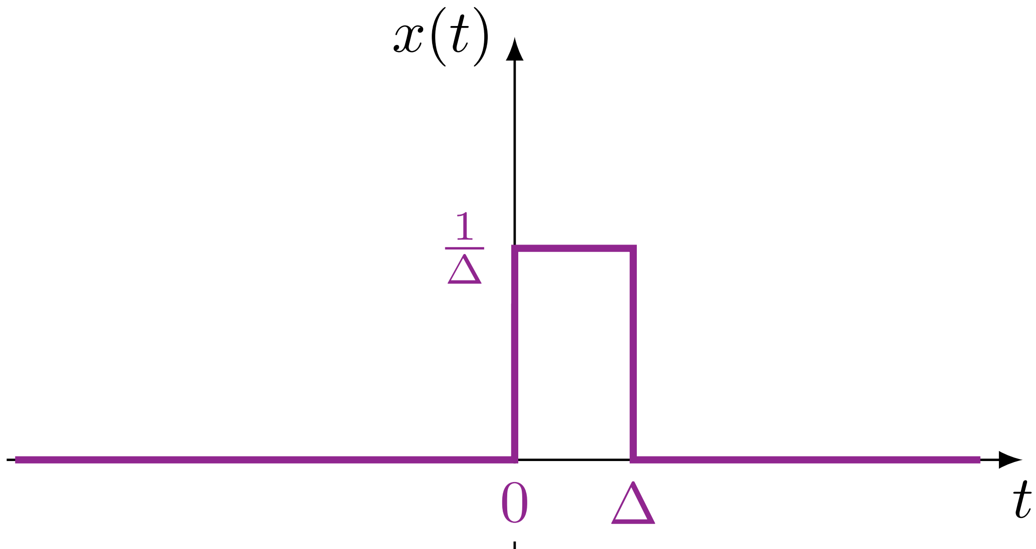
$$x(t) = 2u(t - t_0)$$

تابع پیوسته f در نقطه t تابعی است که در نقطه t تعریف شده، و هم چنین حد تابع در آن نقطه موجود و برابر $f(t)$ باشد. در تعریف هندسی می گوییم، تابعی پیوسته است که بتوان نمودار آن را بدون برداشتن قلم از روی کاغذ رسم کرد. موضوع پیوستگی و ناپیوستگی یک مفهوم در بحث توابع ریاضیاتی است و نباید با مفهوم سیگنال پیوسته و سیگنال گسسته اشتباه گرفته شود.

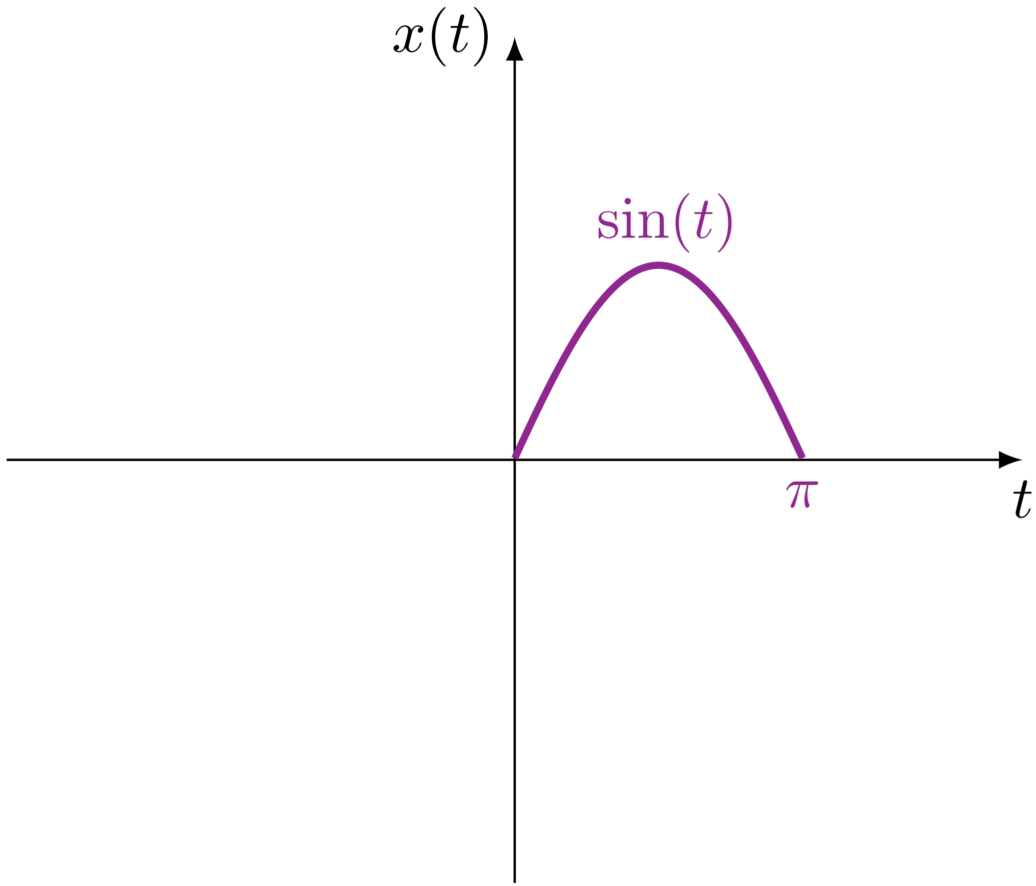
تابع پالس تابع پالس واحد (Unit Pulse Function):

$$p_{\Delta}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{\Delta} & 0 < t < \Delta \\ 0 & t > \Delta \end{cases}$$

به ازای تمام مقادیر t سطح زیر نمودار برابر با یک است.

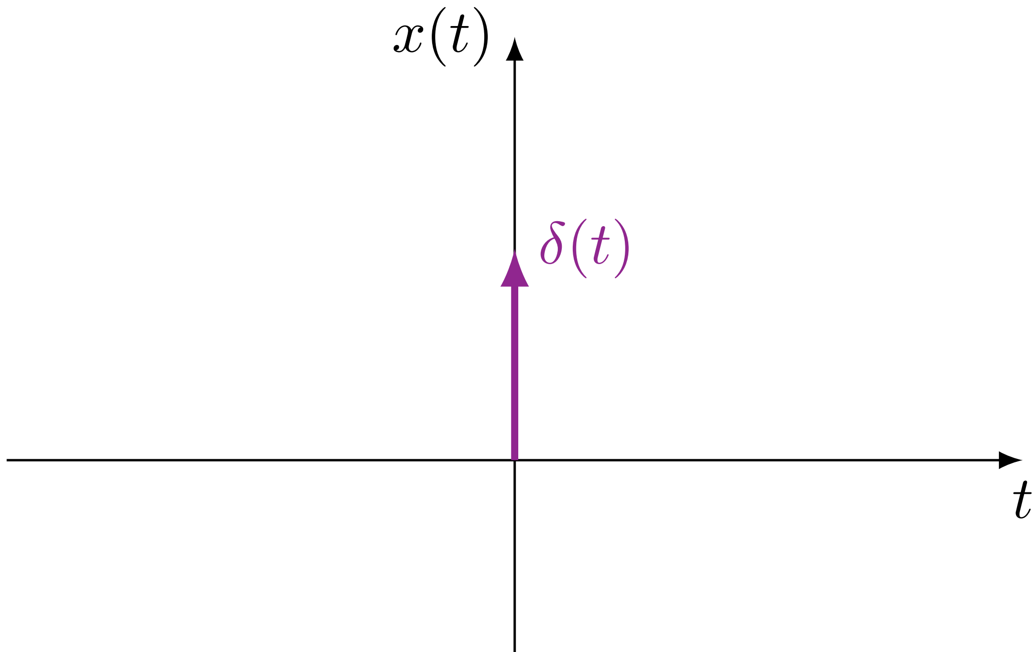


$$p_{\Delta}(t) = \frac{u(t)-u(t-\Delta)}{\Delta}$$



✍ به مانند یک سیگنال سینوسی که در یک سیگنال دیگر ضرب شده:

$$f(t) = \sin(t) \times (u(t) - u(t - \pi))$$



$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \text{Special} & t = 0 \end{cases}$$

- تابع ضربه واحد (Unit Impulse Function) یا

همان تابع دلتا دیراک (Dirac Delta Function):

تابع پالس واحد که در آن $\Delta \longrightarrow 0$ میل کرده.

$$\int_{-\xi}^{+\xi} \delta(t)\mathrm{d}t = 1$$

- ویژگی‌ها:

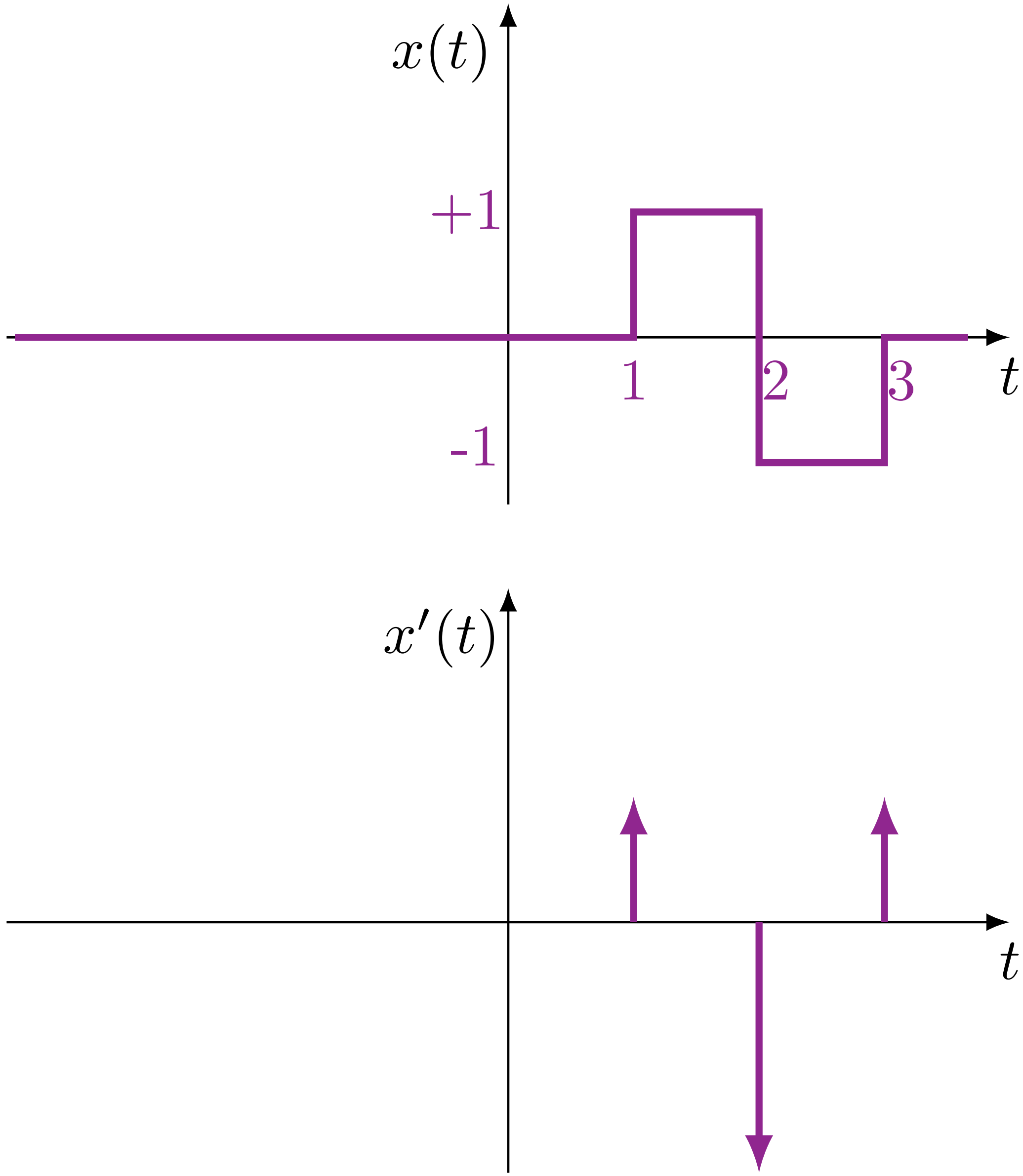
$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(t')\mathrm{d}t' \qquad \delta(t) = \frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$x(0) = \int_{-\xi}^{+\xi} x(t)\delta(t)\mathrm{d}t$$

به ویژگی

$$x(0) = \int_{-\xi}^{+\xi} x(t)\delta(t)\mathrm{d}t$$

اصطلاحا خاصیت غربالی (Sifting Property) گفته می‌شود.



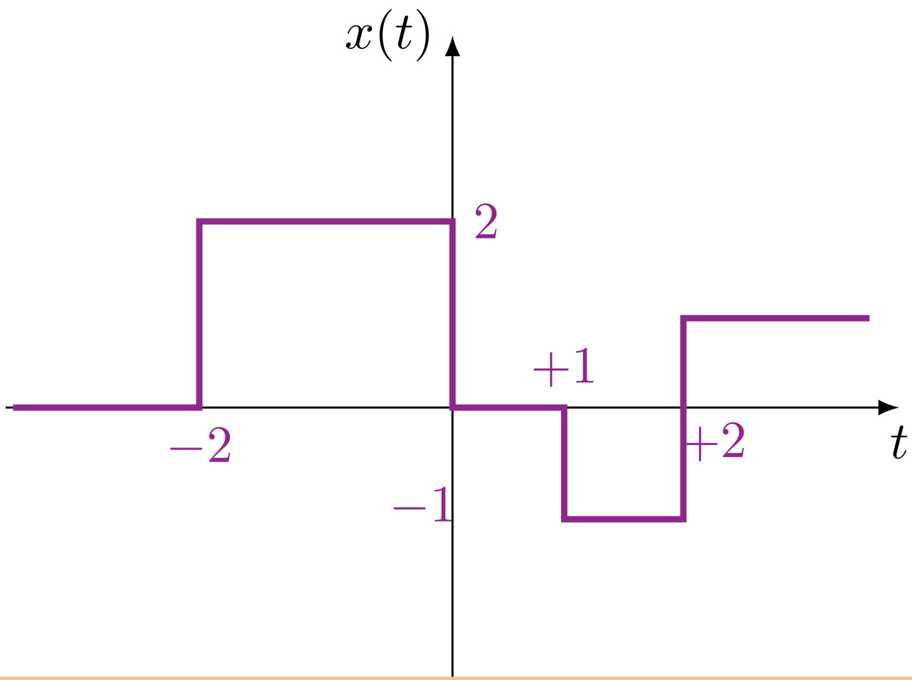
✍ تابع سمت چپ:

$$x(t) = u(t-1) - 2u(t-2) + u(t-3)$$

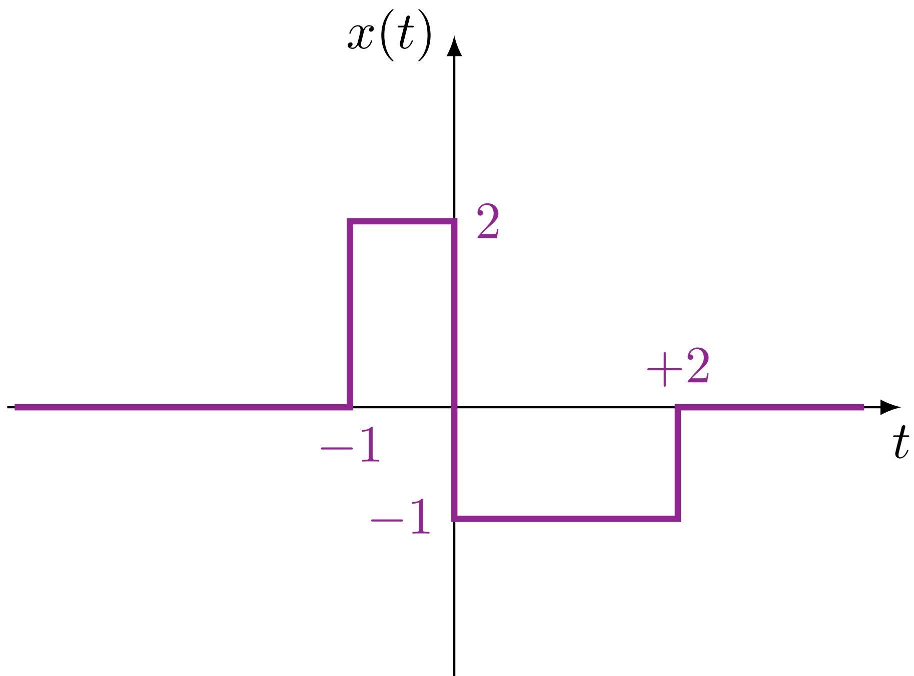
✍ مشتق $x(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \delta(t-1) - 2\delta(t-2) + \delta(t-3)$$

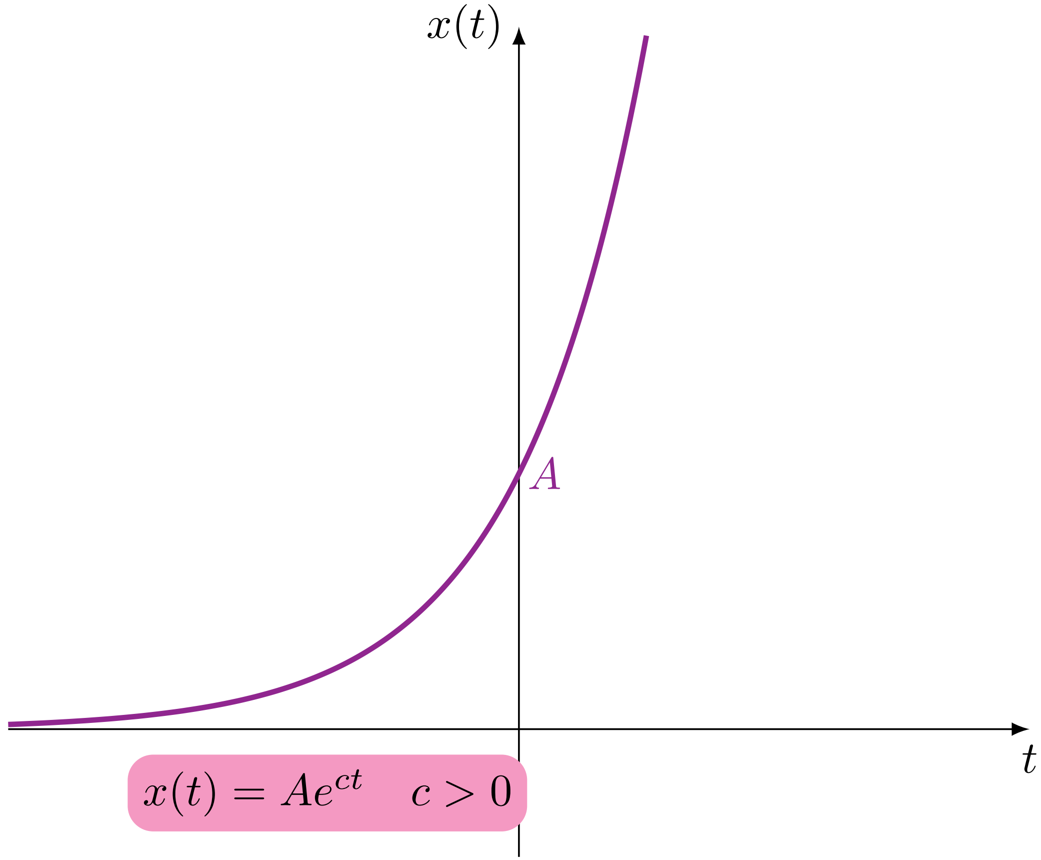
تمرین در خانه



$$x(t) = 2u(t+2) - 2u(t) - u(t-1) + 2u(t-2)$$



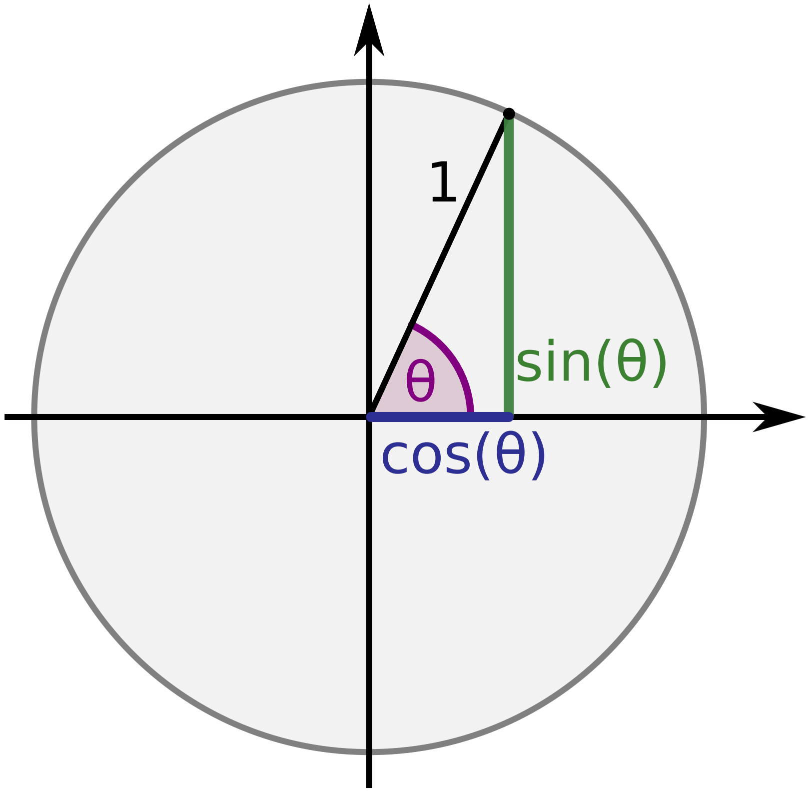
$$x(t) = 2u(t+1) - 3u(t) + u(t-2)$$



✍ سیگنال نمایی به دو صورت حقیقی ومختلط می‌تواند باشد.

✍ در سیگنال نمایی حقیقی c یک عدد حقیقی خواهد بود و در نمایی مختلط یک عدد مختلط.

✍ می‌دانیم که در نمایی حقیقی اگر $c > 0$ باشد، سیگنال یک سیگنال اکیدا صعودی (Strictly Increasing) و اگر $c < 0$ باشد، اکیدا نزولی (Strictly Decreasing) خواهد بود.



✍ سینوس و کسینوس از مجموع دو تابع نمایی مختلط تشکیل شده‌اند.

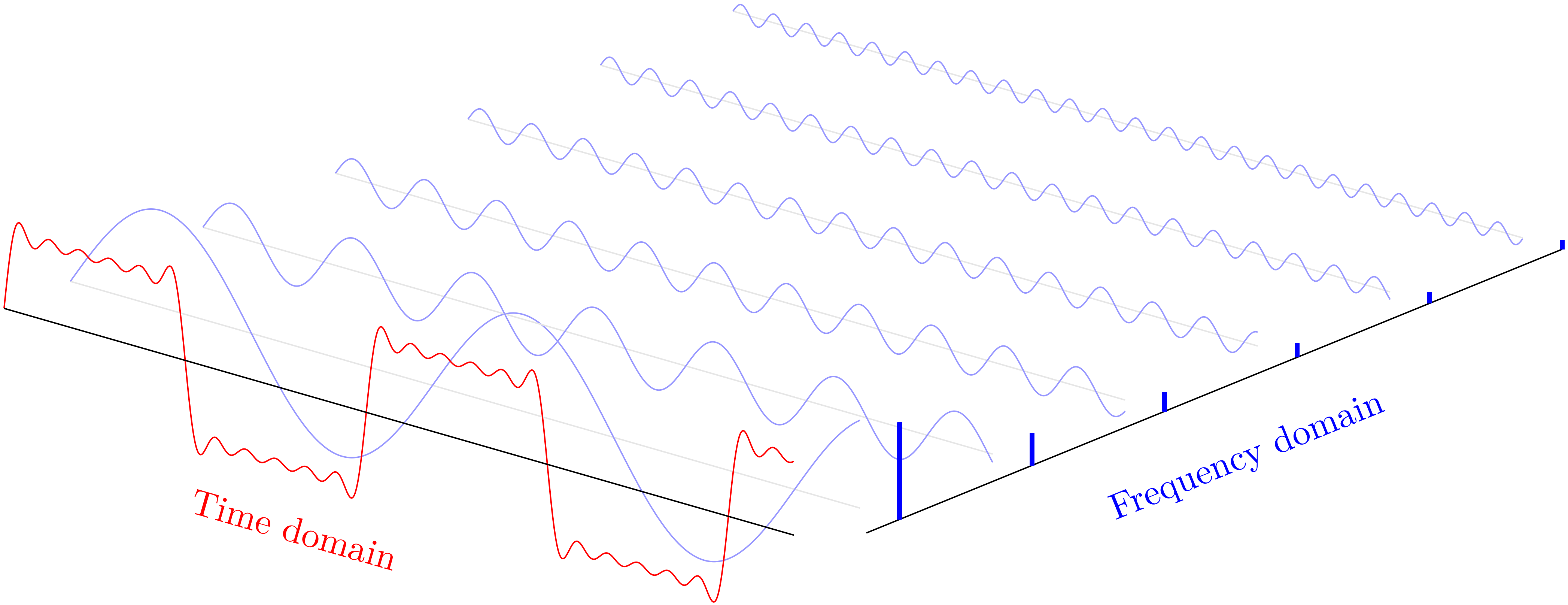
$$\sin(t) = \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j}$$

$$\cos(t) = \frac{e^{jt} + e^{-jt}}{2}$$

تبدیل فوریه

تبدیل فوریه

Joseph Fourier ریاضیدان و فیزیکدان فرانسوی متولد ۱۷۶۸م. پدرش در ۸ سالگی، از دنیا رفت. در مدرسه نظامیِ زادگاه‌اش تحصیل کرد. او در زمینه فیزیک بر روی انتقال گرما تحقیق و کاربردهای سری فوریه در این زمینه و نیز ارتعاشات را معرفی کرد.



یکی از مهم‌ترین کارهای فوریه، مبحث سری‌های فوریه بود. فوریه معتقد بود که یک تابع پیچیده در حوزه زمان را می‌توان با برهم‌نهی بی‌نهایت تابع سینوسی و کسینوسی ساده با ضرایب مختلف به صورت کامل ایجاد کرد. ضرایب تولیدکننده تشکیل حوزه فرکانس یک تابع را می‌دهند. بدیهی است که انتظار داریم با داشتن اطلاعات در حوزه فرکانس به صورت یکتا به تابع در حوزه زمان دست پیدا نماییم.

✍ تبدیل فوریه به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \boxed{X(f)}\, e^{+2\pi f t j} \mathrm{d}f$$

$$\boxed{X(f)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2\pi f t j} \mathrm{d}t$$

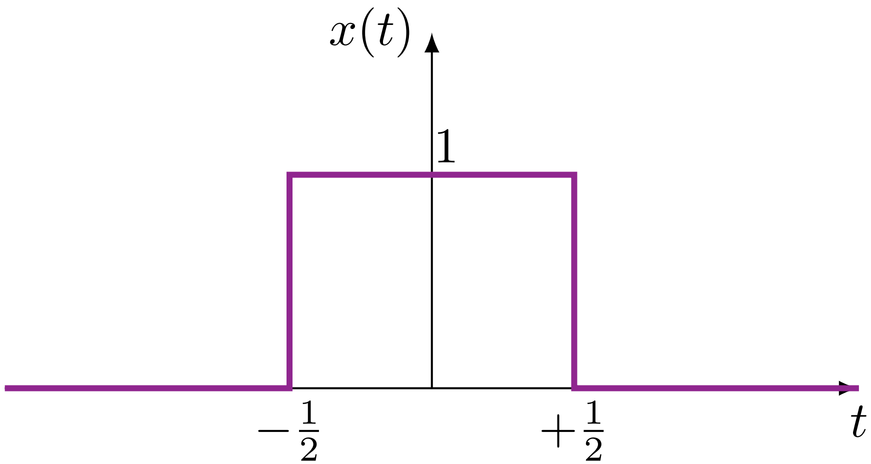
- $x(t)$ سیگنال در حوزه زمان
- $X(f)$ سیگنال در حوزه فرکانس

مثال ۱

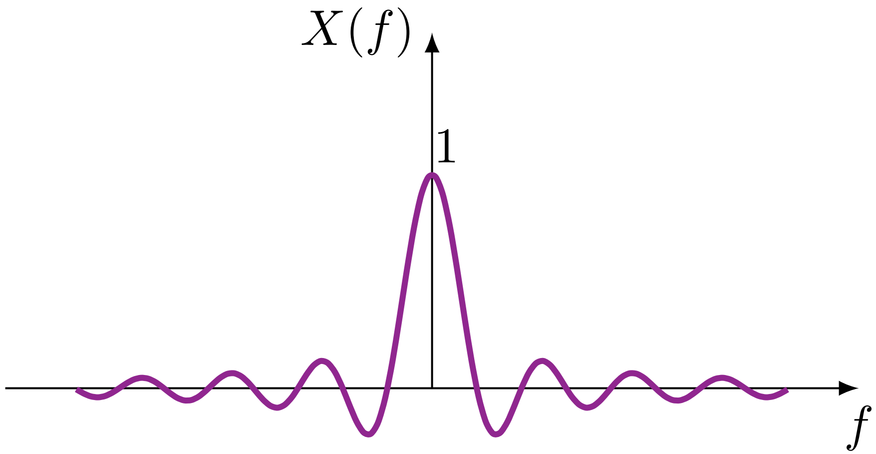
تبدیل فوریه سیگنال $x(t) = \mathrm{rect}(t)$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2\pi f t j} \mathrm{dt} = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} e^{-2\pi f t j} \mathrm{dt}$$

$$= \frac{1}{2\pi f j}\left(e^{2\pi f j \frac{1}{2}} - e^{-2\pi f j \frac{1}{2}}\right) = \frac{sin(\pi f)}{\pi f} = \mathrm{sinc}(f)$$



$x(t) = \mathrm{rect}(t) = u(t + \frac{1}{2}) - u(t - \frac{1}{2})$

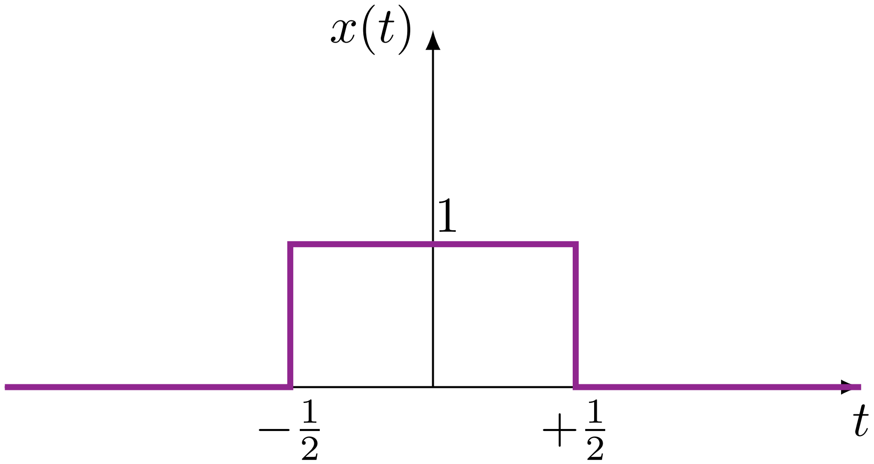


$X(f) = \frac{sin(\pi f)}{\pi f} = \mathrm{sinc}(f)$

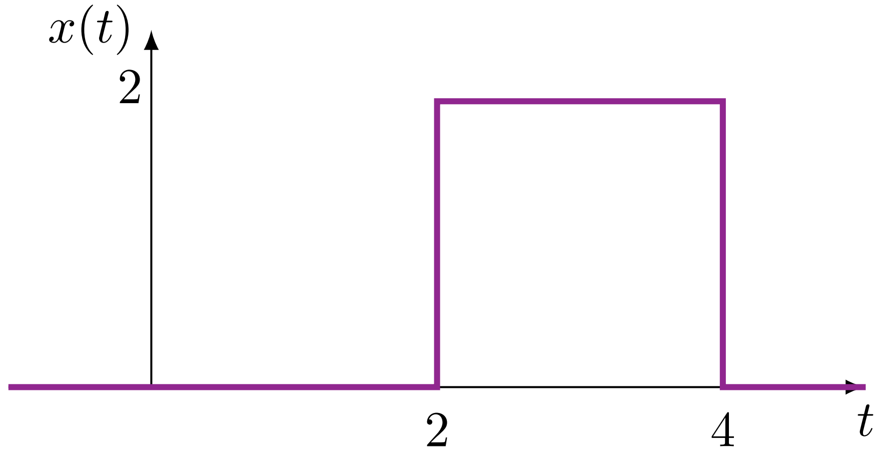
مثال ۲

تبدیل فوریه سیگنال $x(t) = \boxed{2}\,\mathrm{rect}(\boxed{\frac{1}{2}}t - \boxed{\frac{3}{2}})$ را بدست آورید؟

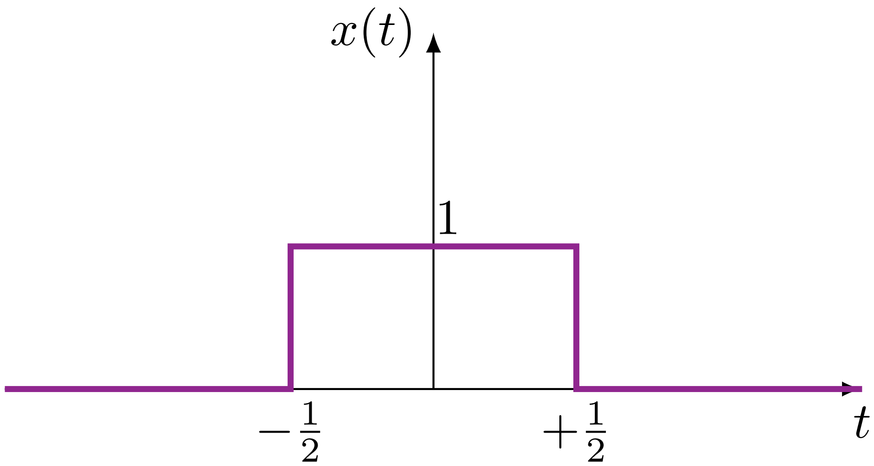
اول Shift دهیم و یا اول Scale کنیم؟



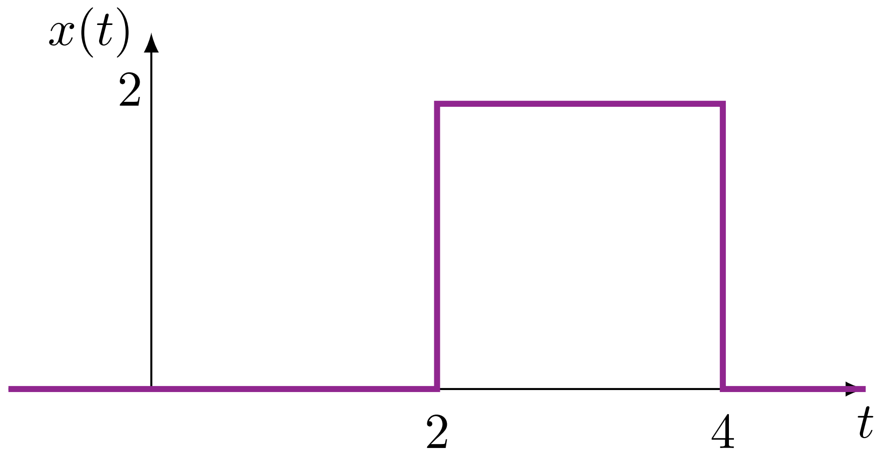
$x(t) = \mathrm{rect}(t)$



$x(t) = 2\mathrm{rect}(\frac{1}{2}t - \frac{3}{2})$



$x(t) = \mathrm{rect}(t)$



$x(t) = 2\mathrm{rect}(\frac{1}{2}t - \frac{3}{2})$

✍ برای محاسبه تبدیل فوریه این تابع می‌توانید از ویژگی‌های تبدیل فوریه استفاده کرد:

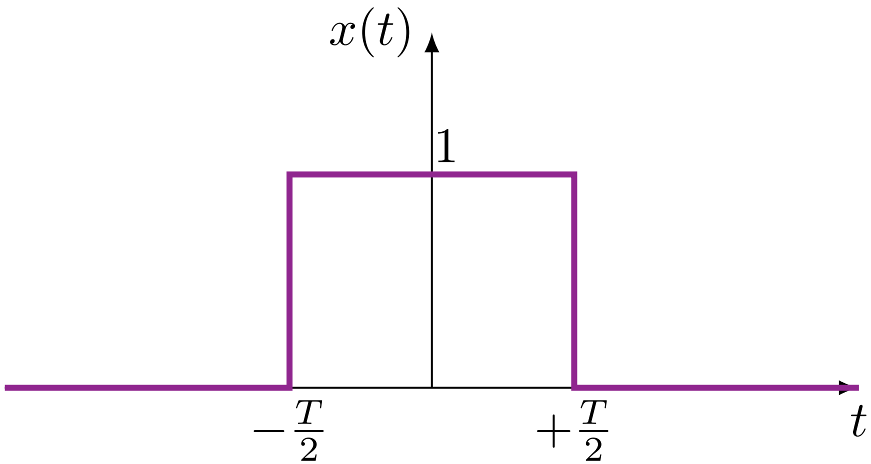
$$\mathcal{F}\{kx(at+b)\} = k\frac{e^{2\pi jf\frac{b}{a}}}{|a|}X\left(\frac{f}{a}\right) \implies \mathcal{F}\{2\mathrm{rect}(\frac{1}{2}t - \frac{3}{2})\} = 4e^{-6\pi jf}X(2f)$$

اگر یک سیگنال به مانند $x(t)$ در اختیار داشته‌باشیم و بخواهیم سیگنال $x(at+b)$ را رسم کنیم، می‌بایست نخست سیگنال $x(t)$ را به اندازه b شیفت دهیم و سپس به اندازه a scale کنیم.

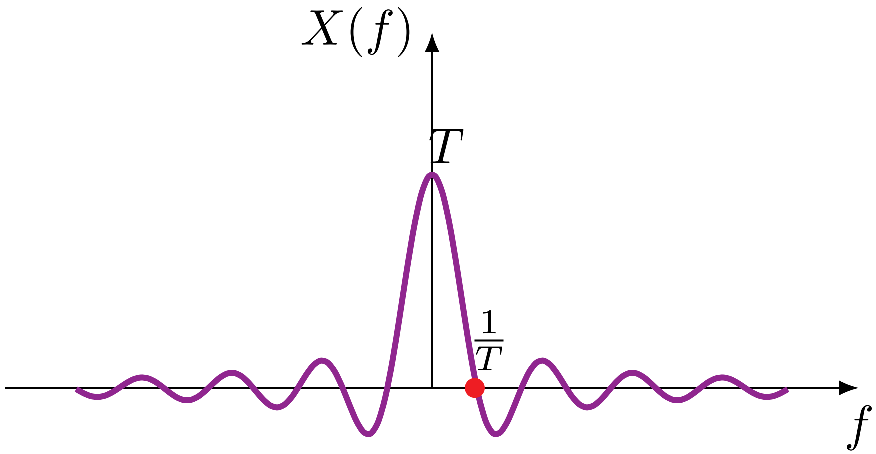
مثال ۳ تبدیل فوریه سیگنال ثابت $x(t) = 1$؟

این تبدیل فوریه را می‌توان از حد تبدیل فوریه $x(t) = \mathrm{rect}(\frac{t}{T})$ بدست آورد:

$$x(t) = 1 \qquad \xrightarrow{\mathcal{F}} \qquad X(f) = \delta(f)$$



$x(t) = \mathrm{rect}(\frac{t}{T})$



$X(f) = T\mathrm{sinc}(Tf)$

لازم به ذکر است که سعی می‌شود به جای محاسبه انتگرال در تبدیل فوریه بیشتر از ویژگی‌های تبدیل فوریه استفاده شود. برخی از ویژگی‌های آن تبدیل:

- خاصیت خطی‌بودن در تبدیل فوریه:

$$\text{If} \quad x_1(t), x_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X_1(f), X_2(f) \qquad \text{Then} \quad \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \alpha X_1(f) + \beta X_2(f)$$

- تبدیل فوریه یک سیگنال زوج همواره سیگنالی زوج و تبدیل فوریه یک سیگنال فرد همواره فرد خواهد بود.

$x(t)$	$X(f)$
Even & Real	Even & Real
Odd & Real	Odd & Imaginary
Even & Imaginary	Even & Imaginary
Odd & Imaginary	Odd & Real

- خاصیت دوگانی در تبدیل فوریه:

$$\text{If} \quad x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f) \qquad\qquad \text{Then} \quad X(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} x(-f)$$

- خاصیت Shift در تبدیل فوریه:

$$\text{If} \quad x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f) \qquad\qquad \text{Then} \quad x(t-t_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-2\pi f t_0} X(f)$$

- خاصیت Scale در تبدیل فوریه:

$$\text{If} \quad x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f) \qquad\qquad \text{Then} \quad x(at) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|a|} X(\frac{1}{a})$$

- خاصیت مشتق در تبدیل فوریه:

$$\text{If} \quad x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f) \qquad\qquad \text{Then} \quad \frac{\mathrm{d}^n x(t)}{\mathrm{d}t^n} \xrightarrow{\mathcal{F}} (j2\pi f)^n X(f)$$

مثال ۴

تبدیل فوریه سیگنال $x(t) = e^{-at}u(t)$ به صورت زیر خواهد شد.

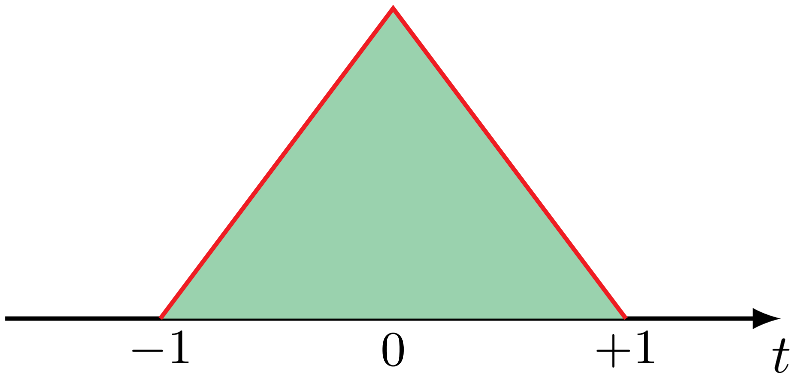
$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-2\pi ftj}\mathrm{d}t = \int_{0}^{+\infty} e^{-at}e^{-2\pi ftj}\mathrm{d}t = \frac{1}{a+2\pi fj} = \frac{a-2\pi fj}{a^2+(2\pi f)^2}$$

✍ در حالت کلی $X(f)$ یک تابع مختلط است. پس دارای اندازه $|X(f)|$ و فاز $\angle X(f)$ خواهد بود.

$$|X(f)| = \left|\frac{1}{a+2\pi fj}\right| = \frac{1}{\sqrt{a^2+(2\pi f)^2}}$$

$$\angle X(f) = \mathrm{atan}(\frac{-2\pi f}{a})$$

تمرینات خانگی



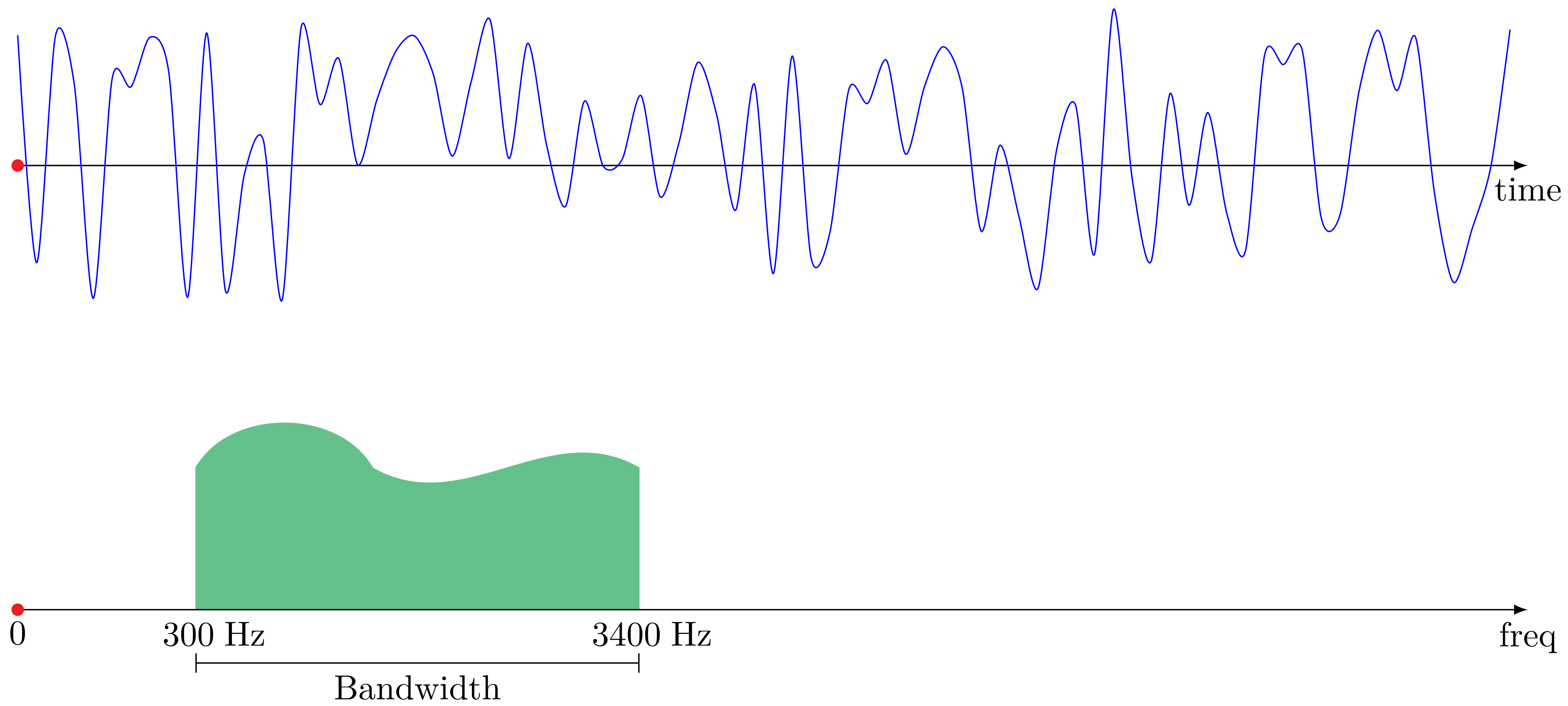
✍ تبدیل فوریه تابع مثلثی را بدست آورید؟

$$\operatorname{tri}(x) = \Lambda(x) = \operatorname{rect}(x) * \operatorname{rect}(x) \overset{\text{def}}{=} \max\big(1 - |x|, 0\big)$$

$$= \begin{cases} 1 - |x|, & |x| < 1; \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

تبدیل فوریه -ویژگی

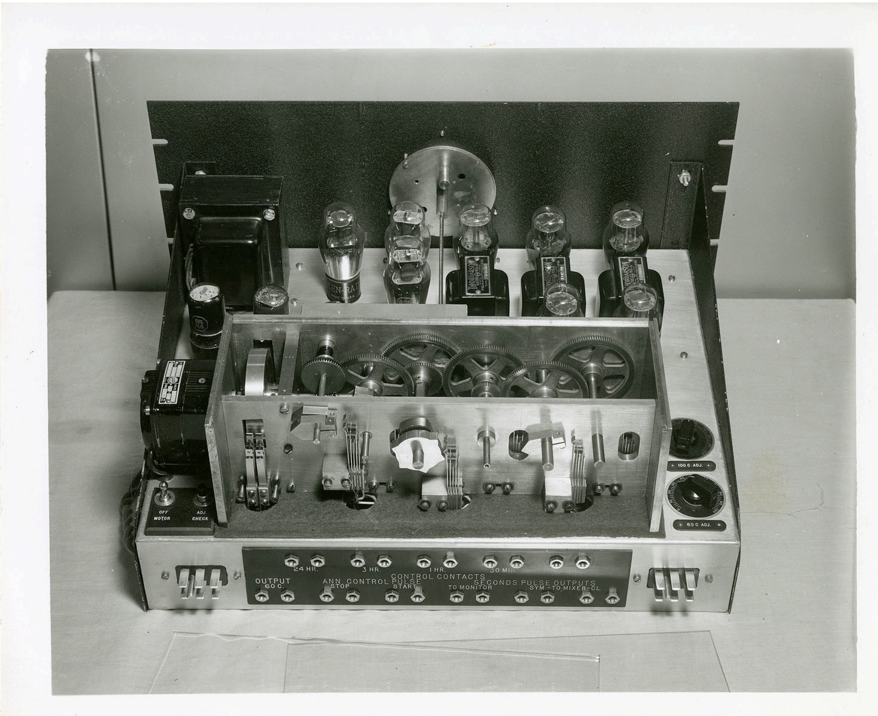
✍ شرط لازم برای این‌که تبدیل فوریه یک سیگنال محدود شود این است که سیگنال در حوزه زمان نامحدود باشد. یعنی تبدیل فوریه یک سیگنال محدود در زمان، حتما نامحدود در فرکانس خواهد شد.



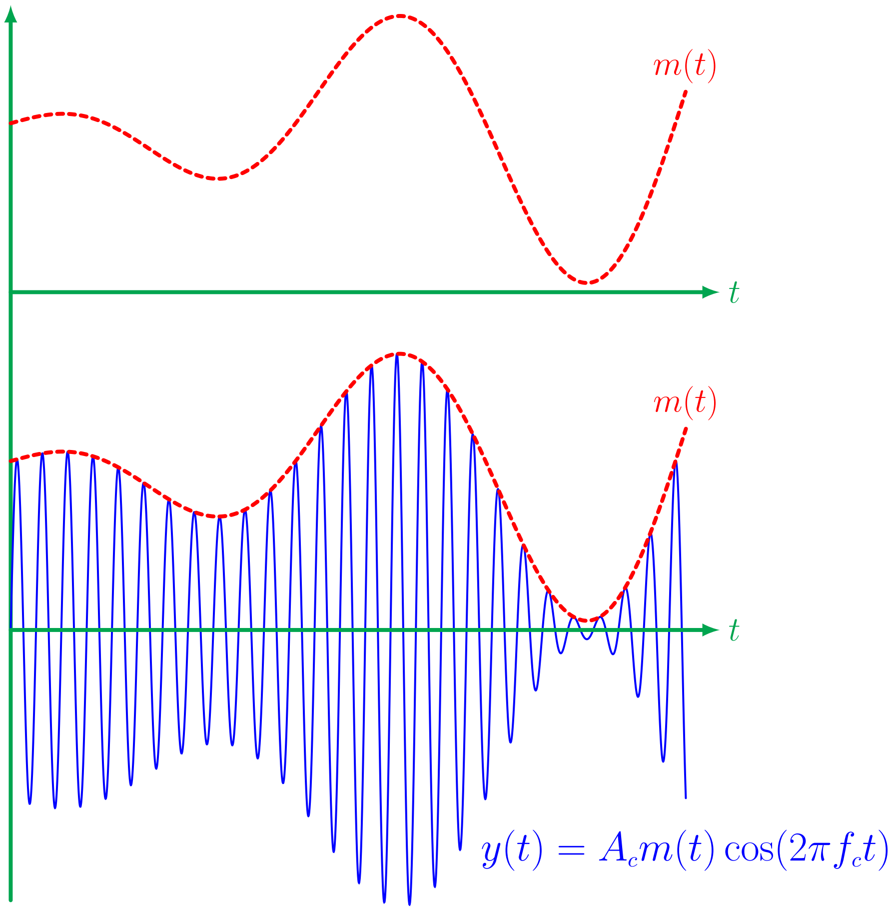
تبدیل فوریه -رادیو AM

✍ رادیو AM (Amplitude Modulation) جزو اولین سامانه‌های همه پخشی (Broadcasting).

✍ نقطه تولد آن به دهه ۱۹۰۰ باز می‌گردد، گرچه گسترده شدن آن تا زمان اختراع Vacuum tube در دهه ۱۹۲۰ به تعویق افتاد.



✍ ایده کار ساده است. سیگنال $m(t)$ به عنوان پیام در یک سیگنال سینوسی با فرکانس f_c ضرب می‌شود.



✍ وقتی $m(t)$ در سیگنال $c(t) = A_c\cos(2\pi f_c t)$ ضرب می‌شود در حوزه فرکانس چه اتفاقی می‌افتد؟

$$y(t) = A_c m(t)\cos(2\pi f_c t), \qquad Y(f) = ?$$

- اول باید بفهمیم که تبدیل فوریه سیگنال حامل (Carrier Signal) ($C(f)$) چیست؟

$$C(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} A_c\cos(2\pi f_c t)e^{-2\pi j f t}\mathrm{d}t = \frac{A_c}{2}\delta(f-f_c) + \frac{A_c}{2}\delta(f+f_c)$$

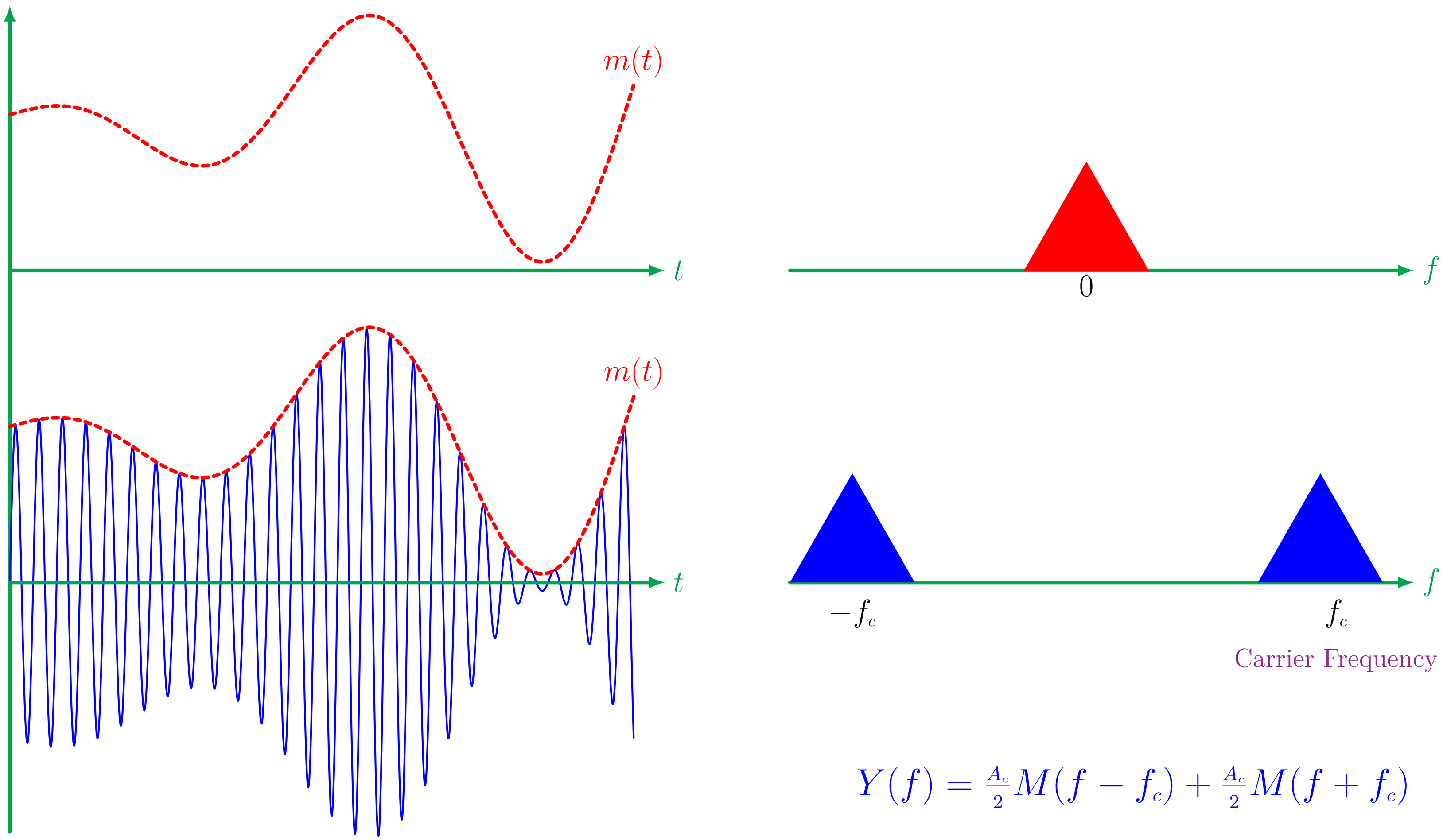
- استفاده از خاصیت ضرب در تبدیل فوریه

$$\text{If}\ \ x_1(t), x_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X_1(f), X_2(f) \qquad\qquad \text{Then}\ \ x_1(t)x_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X_1(f) * X_2(f)$$

- در نهایت:

$$Y(f) = M(f)*C(f) = M(f)*\left(\frac{A_c}{2}\delta(f-f_c) + \frac{A_c}{2}\delta(f+f_c)\right) = \frac{A_c}{2}M(f-f_c)+\frac{A_c}{2}M(f+f_c)$$

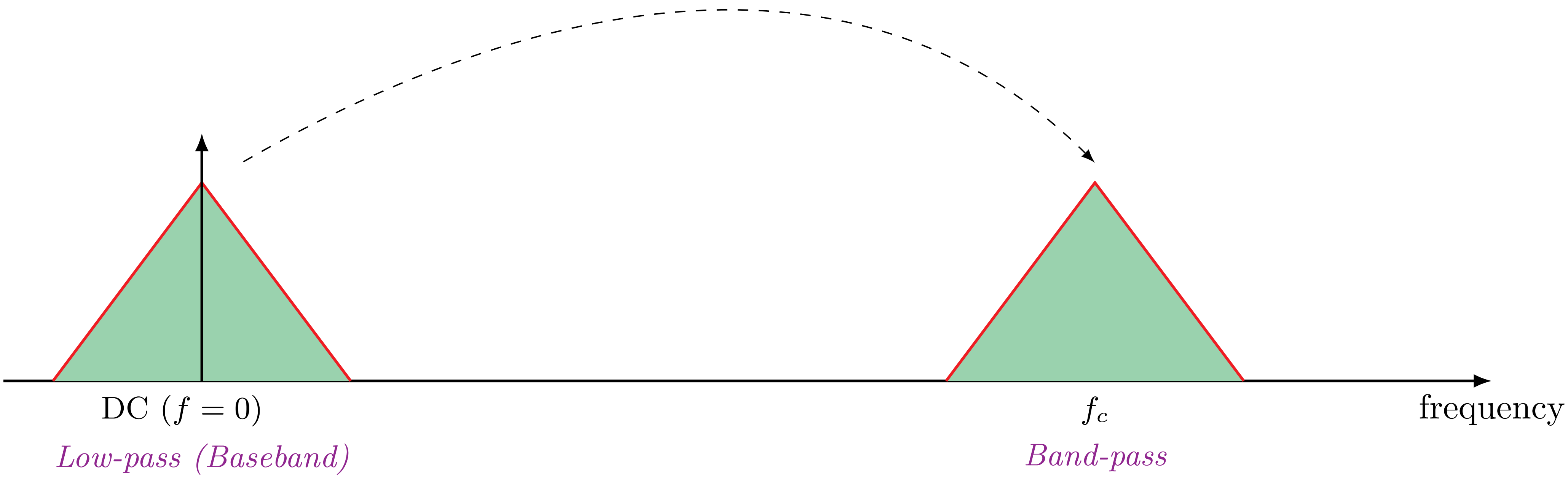
✍ سیگنال $m(t)$ به عنوان پیام و $c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t)$ به عنوان سیگنال حامل.



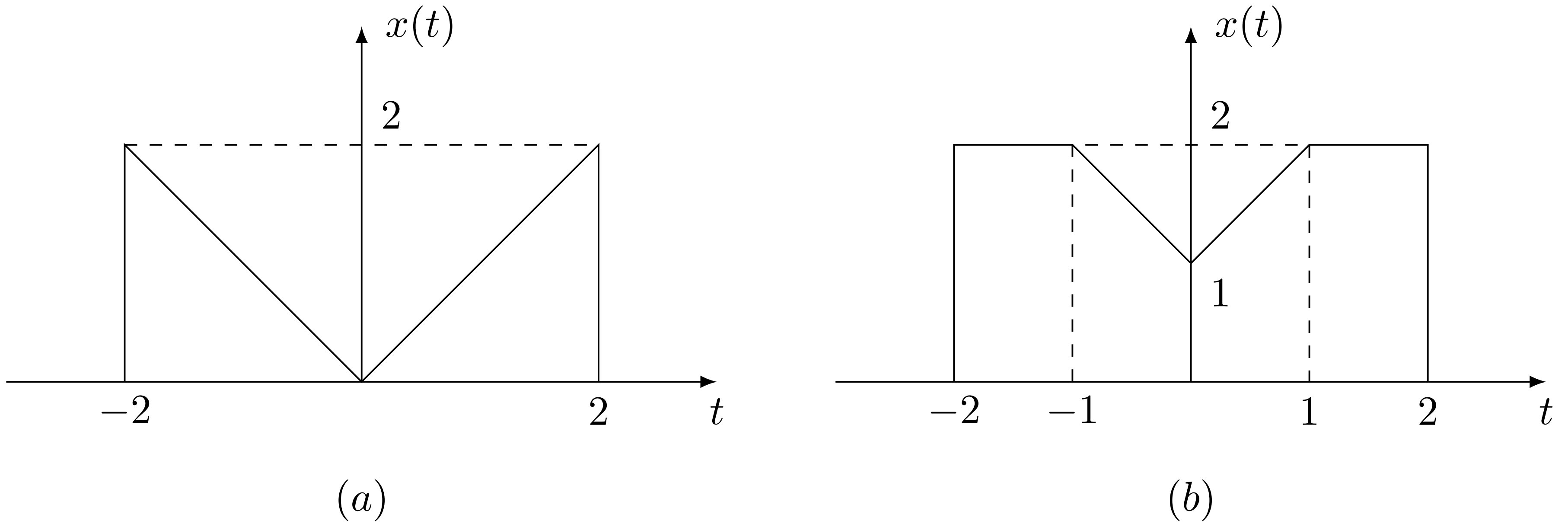
$y(t) = A_c m(t) \cos(2\pi f_c t)$

$Y(f) = \frac{A_c}{2} M(f - f_c) + \frac{A_c}{2} M(f + f_c)$

مفاهیم Baseband و Bandpass



مثال ۵ تبدیل فوریه دو تابع زیر را بدست آورید؟



پاسخ: نخست لازم به ذکر است که تابع $x(t) = \Lambda\left(t\right)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$x(t) = \Lambda\left(t\right) = \begin{cases} 1 - |x| & |x| < 1 \\ 0 & ow \end{cases}$$

تبدیل فوریه این تابع براحتی با استفاده از ویژگی‌های تبدیل فوریه قابل حصول است، چراکه می‌دانیم در حقیقت این تابع از کانولوشن دو تابع $\mathrm{rect}(t)$ بدست آمده است.

$$x(t) = \Lambda\left(t\right) = \mathrm{rect}(t) * \mathrm{rect}(t)$$

از سوی‌دیگر برطبق ویژگی‌های تبدیل فوریه می‌دانیم که کانولوشن در حوزه زمان معادل ضرب در حوزه فرکانس است، پس خواهیم داشت:

$$\mathcal{F}\left\{\Lambda\left(t\right)\right\} = \left\{\mathrm{rect}(t) * \mathrm{rect}(t)\right\} = \mathrm{sinc}(f) \times \mathrm{sinc}(f) = \mathrm{sinc}^2(f)$$

با دانستن این نکته به سراغ مثال یاد شده می‌رویم، برای شکل (a) داریم:

$$x(t) = 2\Pi\left(\frac{t}{4}\right) - 2\Lambda\left(\frac{t}{2}\right) = 2(4sinc(4f) - 2sinc^2(2f))$$

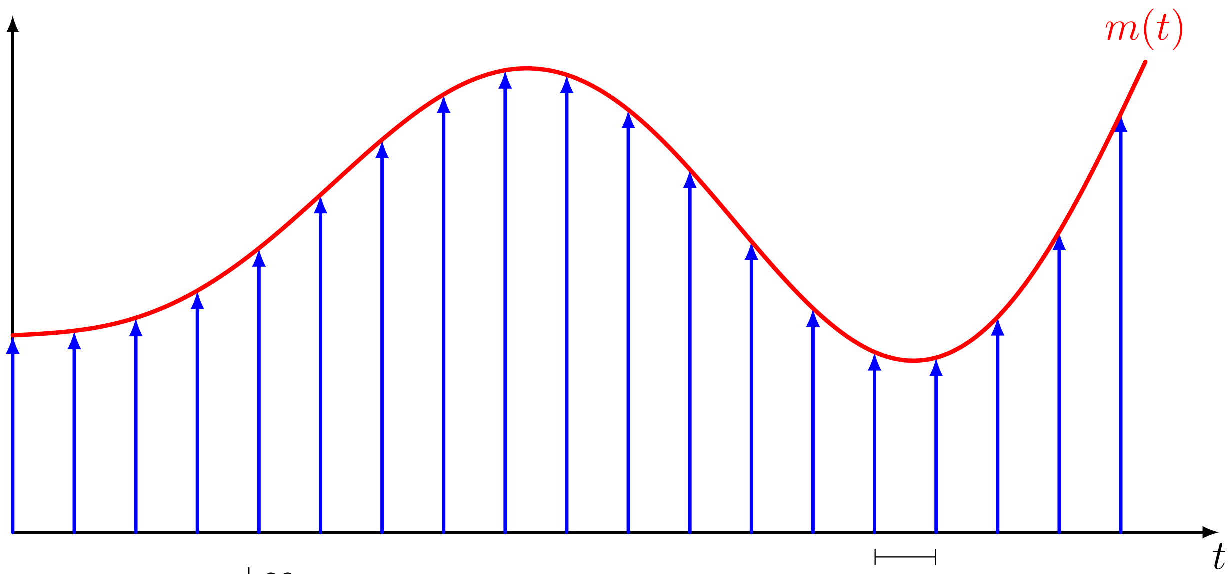
برای شکل (b) داریم:

$$x(t) = 2\Pi\left(\frac{t}{4}\right) - \Lambda\left(t\right) = 8sinc(4f) - sinc^2(f)$$

نمونه‌برداری

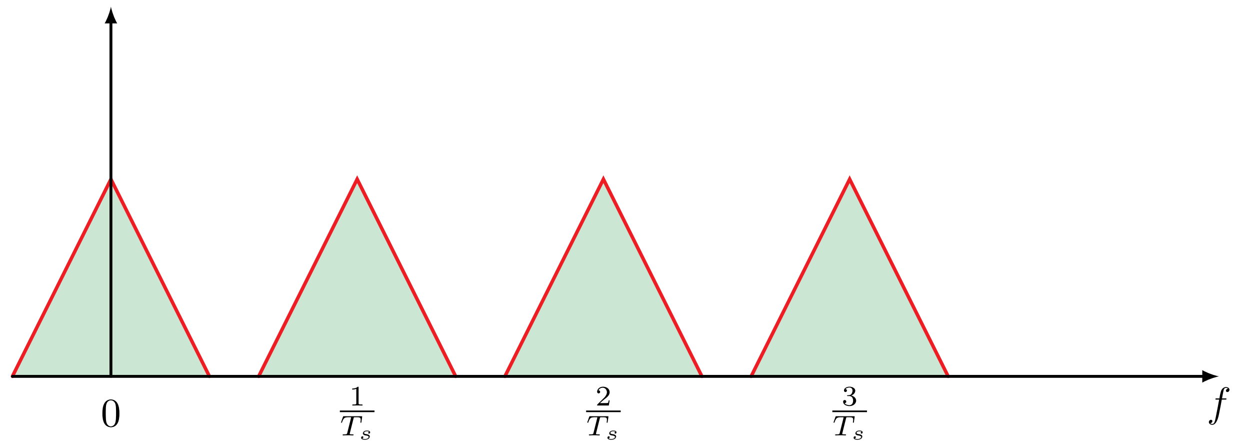
نمونه‌برداری

✍ در نمونه‌برداری (Sampling) ابتدا سیگنال پیوسته در یک قطار ضربه ضرب خواهد شد.

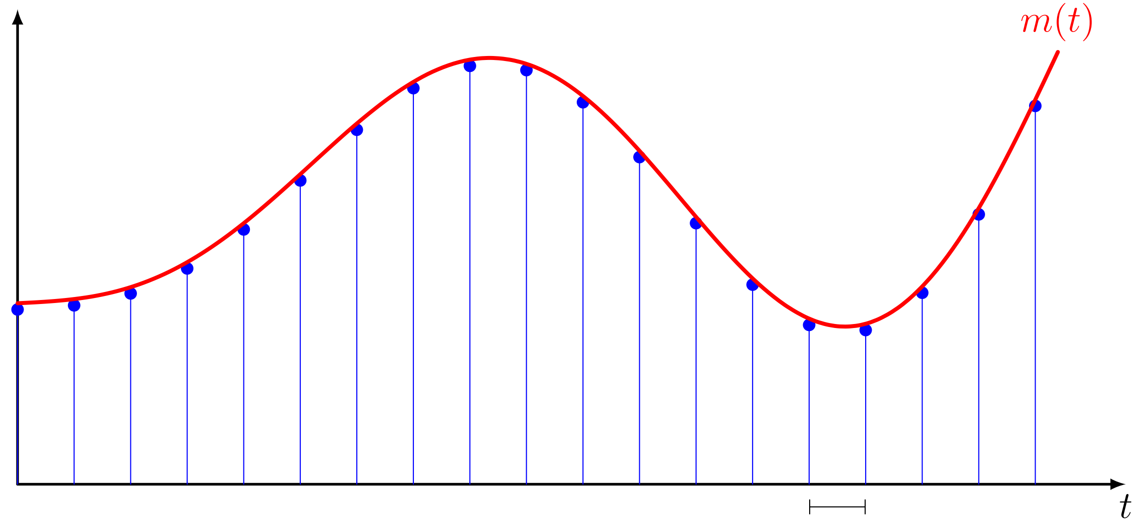


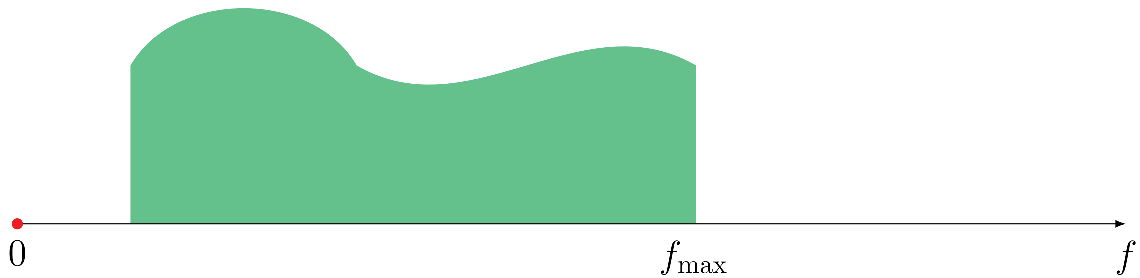
$$m_s(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} m(t)\delta(t - nT_s)$$

T_s: Sampling period



نرخ نمونه‌برداری باید چقدر باشد؟ اگر از یک سیگنال باند محدود، با دو برابر نرخ نایکویست نمونه‌برداری کنیم، می‌توانیم به طور کامل از روی نمونه‌ها سیگنال پیوسته را بازیابی کنیم.



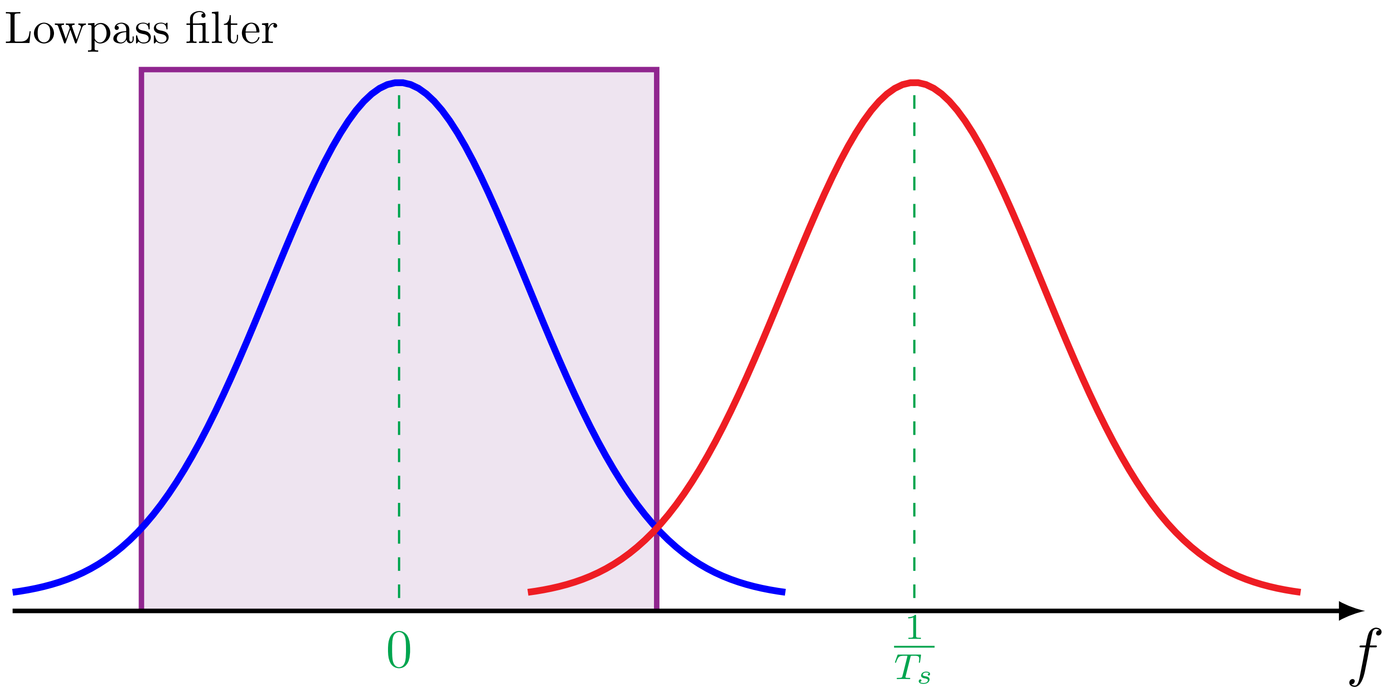



Harry Nyquist

$$f_s > 2 \times f_{\max}$$

$$f_s = \frac{1}{T_s}$$

✍ پیش‌شرط قضیه نایکویست، باند محدود بودن (Band limited) سیگنال است؟؟!! پس عملا راه فراری از Aliasing نیست.



✍ شکل ۴آ، یک تصویر با مشکل Aliasing را نشان می دهد. شکل ۴ب نیز همان تصویر را بعد از گذر از یک فیلتر پایین‌گذر (Low Pass Filter) نشان می‌دهد.

(آ)

(ب)

شکل ۴

انرژی و توان سیگنال

انرژی و توان سیگنال

✍ انرژی سیگنال $x(t)$:

$$\mathcal{E}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \mathrm{d}t \qquad (۱)$$

✍ توان یک سیگنال $x(t)$:

$$\mathcal{P}\{x(t)\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |x(t)|^2 \mathrm{d}t \qquad (۲)$$

- سیگنال‌های انرژی: سیگنال‌هایی هستند که انرژی محدود دارند (یعنی انتگرال (۱) مقدار محدودی دارد) و توان آن ها برابر صفر می‌باشد (یعنی انتگرال (۲) مقدارش برابر صفر می‌باشد).
- سیگنال توان: سیگنال‌هایی هستند که انرژی آن ها نامحدود می‌باشد (یعنی مقدارانتگرال (۱) برابر با بی نهایت می‌باشد) و توان آن‌ها محدود.
- سیگنال نه توان و نه انرژی: سیگنال‌هایی هستند که هم انرژی و هم توان آن ها نامحدود هستند.

مثال ۶ هر کدام از سیگنال‌های زیر جزو کدام دسته می‌باشد:

$x(t) = \sin(5t)$، $x(t) = u(t)$، $x(t) = rect(t)$، $x(t) = t^2u(t)$ و $x(t) = e^{-2t}u(t)$.

مثال ۷ به نظر شما تمامی سیگنال‌های متناوب جزو کدام دسته می‌باشند؟

مثال ۸ به نظر شما تمامی سیگنال‌های محدود در زمان با دامنه محدود، جزو کدام دسته می‌باشند؟

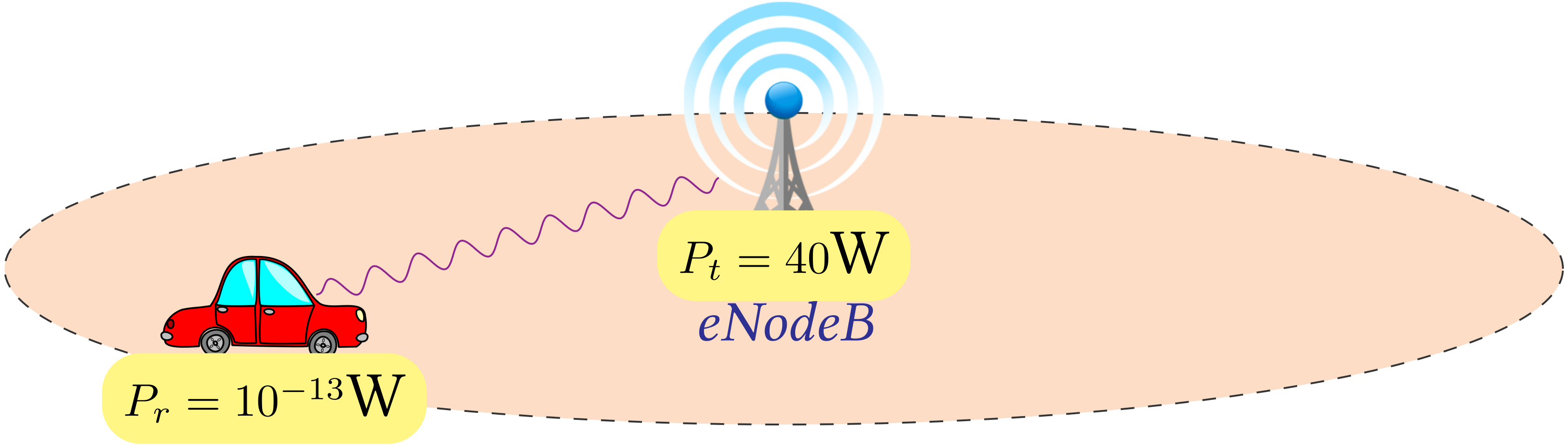
- برای محاسبه میزان انرژی و توان یک سیگنال می‌توان از روابط (۱) و (۲) استفاده کرد. به عنوان مثال سیگنال $x(t) = e^{-2t}u(t)$ را در نظر بگیرید. بدین‌سان برای محاسبه انرژی خواهیم داشت:

$$\mathcal{E}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \mathrm{d}t = \int_{0}^{+\infty} e^{-4t} \mathrm{d}t = \frac{e^{-4\times 0}}{4} - \frac{e^{-\infty}}{4} = \frac{1}{4} < \infty$$

پس سیگنال مذکور یک سیگنال انرژی است.

- یک سیگنال متناوب (به مانند $x(t) = \sin(5t)$)، حتما یک سیگنال توان می باشد. همچنین، برای محاسبه توان کافی است تنها یک دوره تناوب سیگنال، در نظر گرفته شود.

- یک سیگنال محدود در زمان (به مانند $x(t) = rect(t)$) همواره یک سیگنال انرژی خواهد بود. البته باید دقت داشت که $|x(t)| < \infty$.



✍ فرض کنید که توان ارسال شده توسط یک eNodeB (P_t) برابر با 40 وات است یک UE (User Equipment)

سیگنال با توان $P_r = 10^{-13}\text{W}$ را از شبکه دریافت می‌کند. کار کردن با این اعداد کمی سخت است.

✍ در حوزه مخابرات دسی‌بل یک واحد لگاریتمی است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

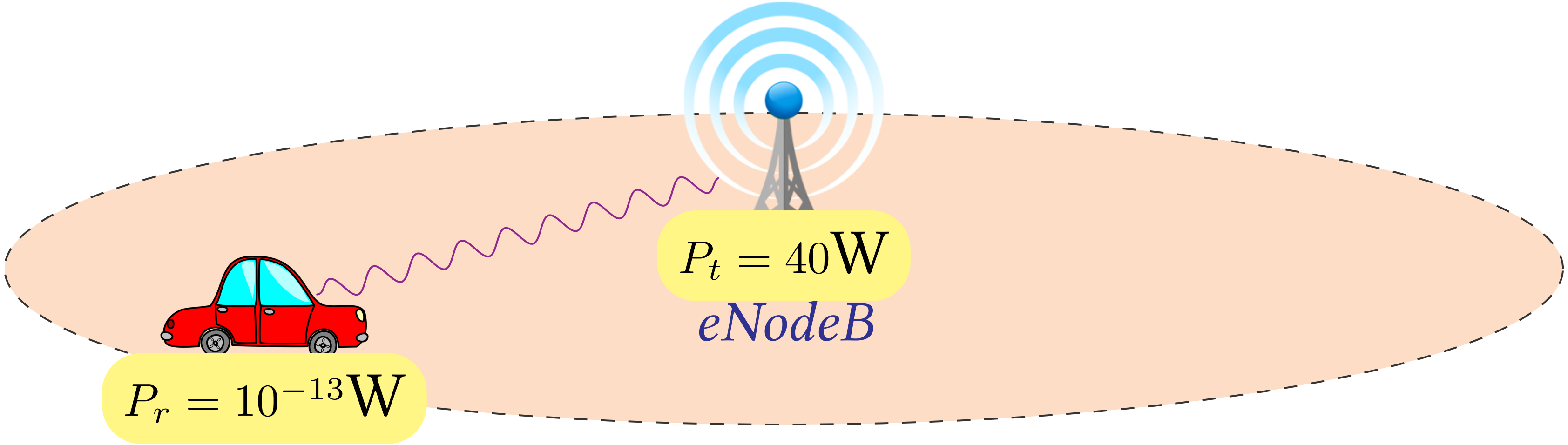
$$P[\mathrm{dB}] = 10\log_{10}\left(\frac{P[\mathrm{W}]}{1\mathrm{W}}\right), \qquad P[\mathrm{W}] = 10^{\frac{P[\mathrm{dB}]}{10}} \tag{۳}$$

✍ واحد dBm نیز به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$P[\mathrm{dBm}] = 10\log_{10}\left(\frac{P[\mathrm{mW}]}{1\mathrm{mW}}\right) \qquad P[\mathrm{mW}] = 10^{\frac{P[\mathrm{dBm}]}{10}} \tag{۴}$$

✍ رابطه بین dB و dBm:

$$P[\mathrm{dBm}] = 30 + P[\mathrm{dB}] \tag{۵}$$



$$P_t[\mathrm{dB}] = 10\log_{10}(\frac{P_t[\mathrm{W}]}{1\mathrm{W}}) = 10\log_{10}(40) = 16.02\ \mathrm{dB}$$

$$P_r[\mathrm{dB}] = 10\log_{10}(\frac{P_r[\mathrm{W}]}{1\mathrm{W}}) = 10\log_{10}(10^{-13}) = -130\ \mathrm{dB}$$

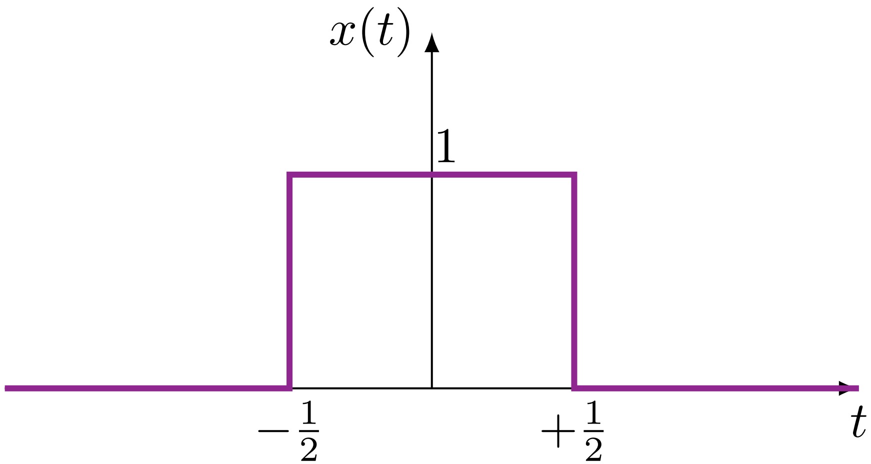
$$P_t[\mathrm{dBm}] = 30 + P_t[\mathrm{dB}] = 30 + 16.02 = 46.02\ \mathrm{dBm}$$

$$P_r[\mathrm{dBm}] = 30 + P_r[\mathrm{dB}] = 30 - 130 = -100\ \mathrm{dBm}$$

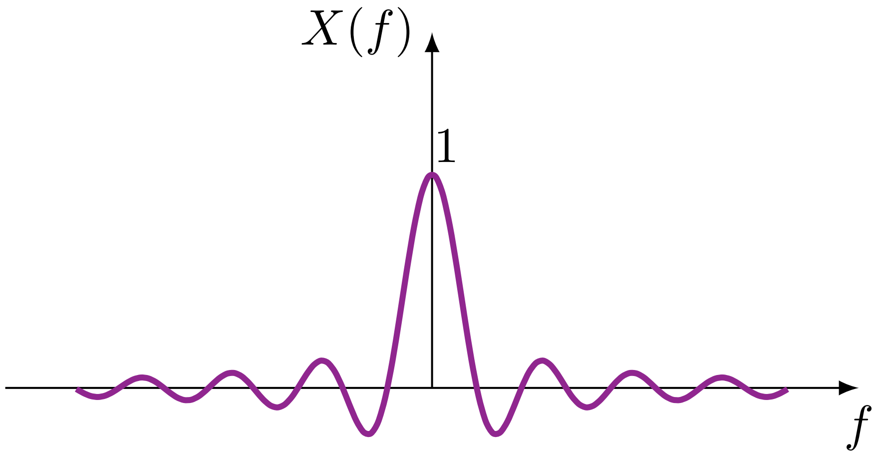
رابطه انرژی و توان سیگنال با تبدیل فوریه

✍ رابطه پارسوال برای تبدیل فوریه، در حقیقت از یک رابطه کلی که توسط Marc-Antoine Parseval کشف شده، استخراج شده است.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 \mathrm{d}f \qquad (۶)$$



$x(t) = \mathrm{rect}(t) = u(t + \frac{1}{2}) - u(t - \frac{1}{2})$



$X(f) = \frac{sin(\pi f)}{\pi f} = \mathrm{sinc}(f)$

مثال ۹ مقدار انرژی سیگنال $x(t) = e^{-t}u(t)$ را پیدا کنید؟

- برای یافتن میزان انرژی این تابع می‌توان از دو طریق عمل کرد. در روش نخست انتگرال زیر را بدست می‌آوریم:

$$\mathcal{E}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \mathrm{d}t = \int_{0}^{+\infty} e^{-2t} \mathrm{d}t = \frac{1}{2}$$

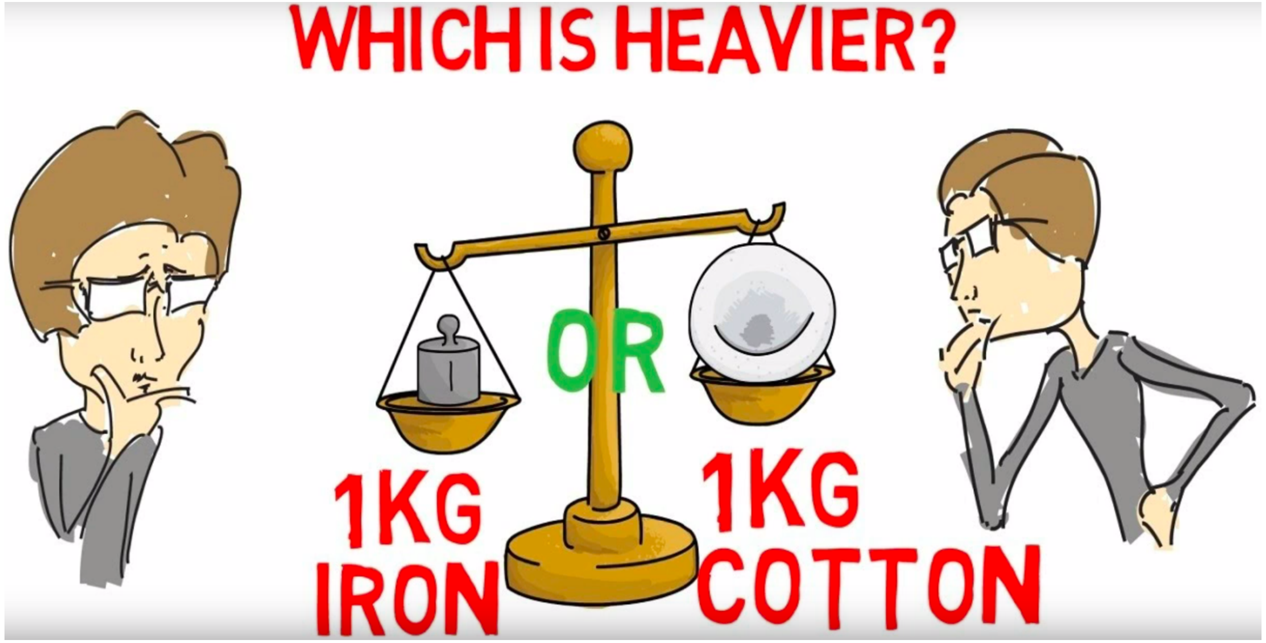
- در راه‌کار دوم از رابطه پارسوال استفاده می‌کنیم. نخست آن‌که می‌دانیم:

$$x(t) = e^{-t}u(t) \qquad \xrightarrow{\mathcal{F}} \qquad X(f) = \frac{1}{1 + 2\pi f j}$$

بدین‌سان داریم:

$$\mathcal{E}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 \mathrm{d}f = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}f}{1 + (2\pi f)^2} = \frac{1}{2\pi} \mathrm{atan}(2\pi f)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{2}$$

چگالی طیف توان (Power Spectral Density)



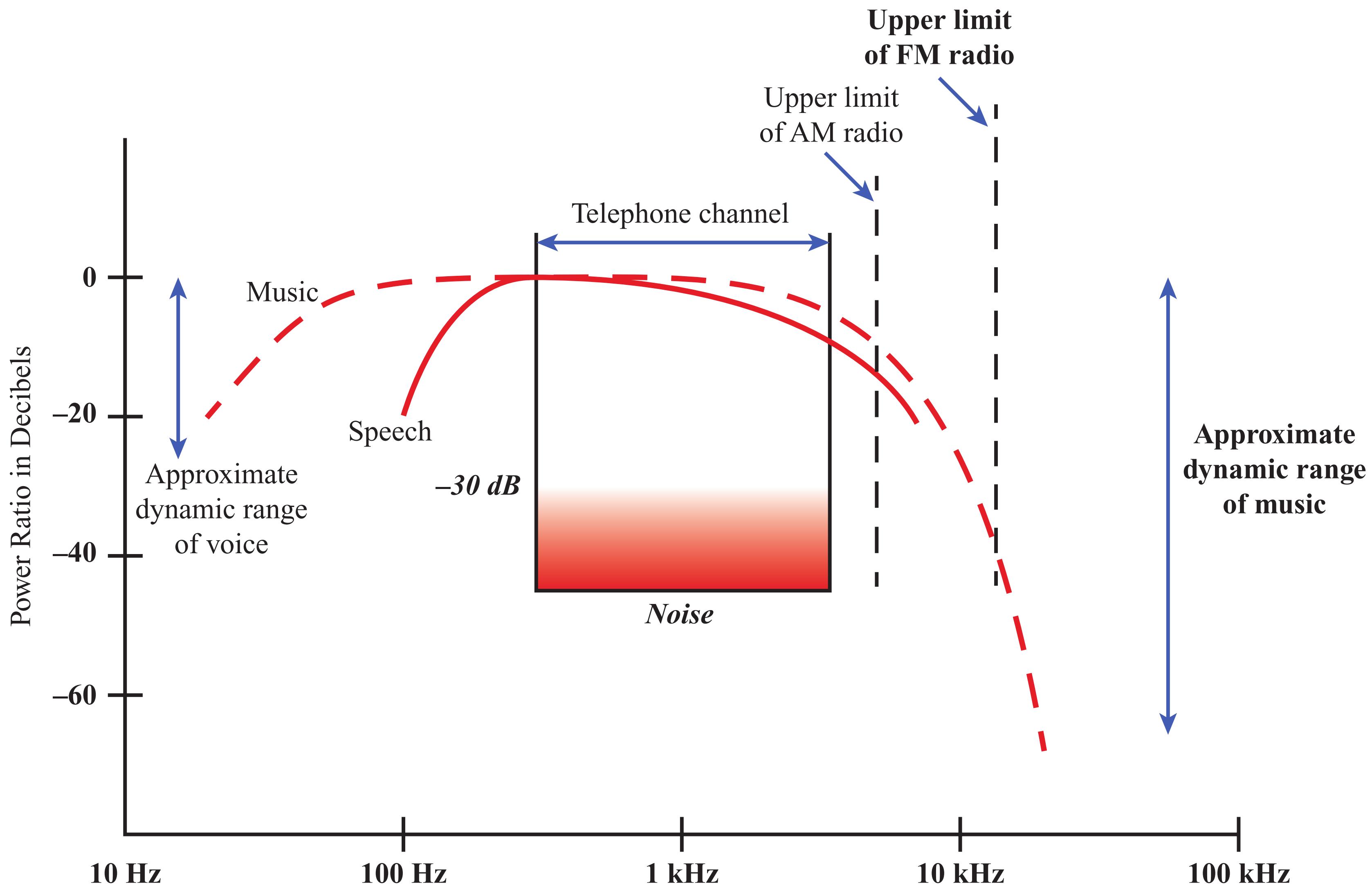
✍ چگالی طیف توان به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S_{xx} = |X(f)|^2$$

✍ با درنظر گرفتن مفهوم چگالی توان خواهیم داشت:

$$\mathcal{E}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(f)\mathrm{d}f$$

چگالی طیف توان (Power Spectral Density) – مثال



طیف چگالی توان سیگنال صحبت و موسیقی [1, Fig. 2.6].

مثال ۱۰ مقدار انرژی سیگنال $x(t)=\mathrm{sinc}(2t)$ را پیدا کنید؟

پاسخ: مطمئن باشید این انتگرال را به روش‌های معمول نمی‌توانید حل کنید. در ابتدا سعی کنید ببینید تبدیل فوریه $\mathrm{sinc}(2t)$ چه تابعی می‌شود.

$$\textit{If}\ \mathrm{rect}(t)\xrightarrow{\mathcal{F}}\mathrm{sinc}(f) \qquad \textit{Then}\ \mathrm{sinc}(2t)\xrightarrow{\mathcal{F}}\frac{1}{2}\mathrm{rect}(\frac{f}{2})$$

سپس کافی است در رابطه پارسوال جایگزین کنید.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}|X(f)|^2\mathrm{d}f \quad\Longrightarrow\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{sinc}^2(2t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{rect}(\frac{f}{2})^2\mathrm{d}f=\frac{1}{2}$$

مثال ۱۱ انرژی سیگنال زیر را محاسبه کنید:

$$X(t) = \frac{2}{1 + 4\pi^2 t^2}$$

راهنمایی: بازهم مطمئن باشید که با یک انتگرال مواجه هستید که حل آن بسیار دشوار است. برای حل سوال ابتدا به جداول تبدیلات فوریه رجوع کنید. ببینید که تبدیل فوریه چه تابعی تابع داده شده می‌شود. سپس به سراغ رابطه پارسوال بروید. یعنی:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |X(t)|^2 \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} |\frac{2}{1 + 4\pi^2 t^2}|^2 \mathrm{d}t = \ldots$$

پاسخ ضربه کانال

سامانه‌های LTI (Linear Time Invariant)

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{LTI Sys}} \longrightarrow y(t)$$

✍ یک سامانه LTI باید دو شرط داشته‌باشد:

- خطی باشد،

$$x_1(t), x_2(t) \longrightarrow y_1(t), y_2(t) \qquad \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \longrightarrow \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$$

- تغییرناپذیر با زمان (Time-invariant) باشد.

$$x(t) \longrightarrow y(t) \qquad x(t-\tau) \longrightarrow y(t-\tau)$$

$$x(t) = \delta(t) \longrightarrow \boxed{\text{LTI Sys}} \longrightarrow y(t) = h(t)$$

تعریف ۲ پاسخ یک سامانه LTI، به ورودی تابع ضربه واحد ($x(t) = \delta(t)$) را پاسخ ضربه کانال (Channel Impulse Response) می‌نامیم، و آن را با $h(t)$ نمایش می‌دهیم.

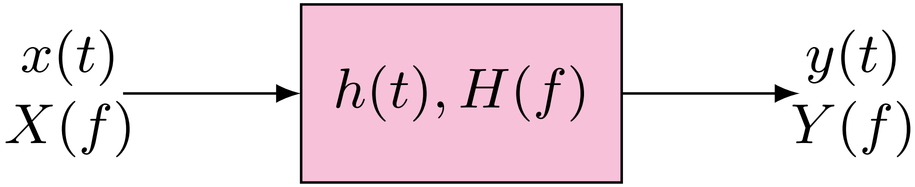
✍ رابطه زیر را براحتی می‌توان بدست آورد:

$$\delta(t) \longrightarrow h(t)$$

$$x(t) \longrightarrow y(t)$$

$$x(t) = x(t) * \delta(t) \longrightarrow y(t) = x(t) * h(t)$$

$$X(f) \longrightarrow Y(f) = X(f)H(f)$$



$$y(t) = x(t) * h(t)$$
$$Y(f) = X(f)H(f)$$

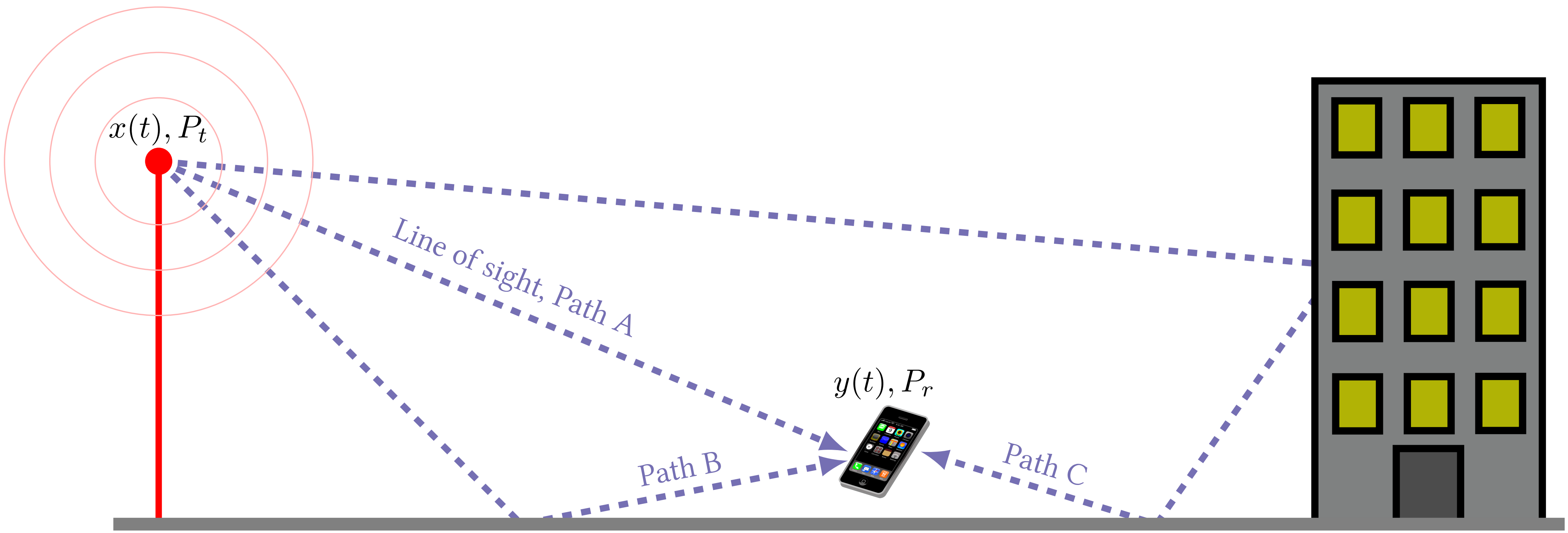
- سیگنال $x(t)$ وارد کانال می‌شود، در صورتی که کانال ایده‌آل باشد، انتظار داریم $h(t) = \alpha_0\delta(t-\tau_0)$ باشد.
- تنها یک نسخه تضعیف‌شده و با تاخیر سیگنال بدست گیرنده خواهد رسید، یعنی

$$y(t) = x(t) * h(t) = x(t) * \alpha_0\delta(t-\tau_0) = \alpha_0 x(t-\tau_0)$$

- $h(t)$ در حوزه فرکانس یک خط صاف خواهد بود.

✍ $y(t)$ برابر با حاصل جمع کپی‌های تضعیف‌شده سیگنال $x(t)$ تا یک آستانه (Threshold) معین.

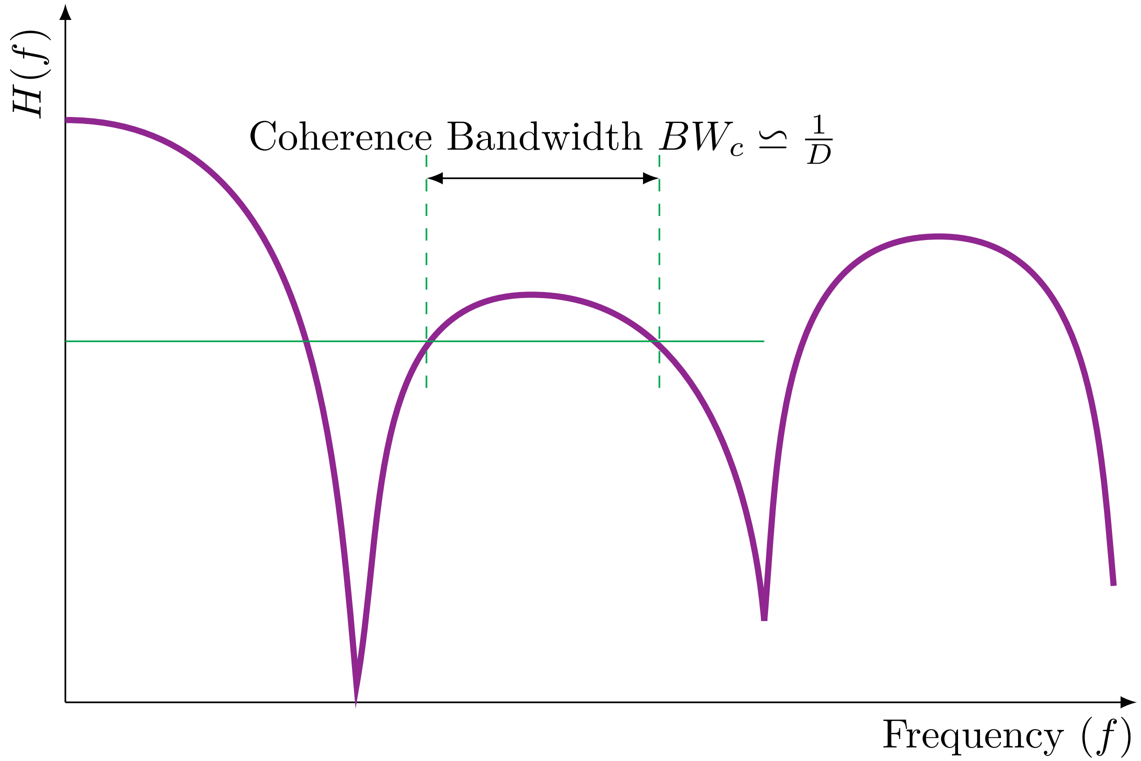
$$y(t) = \alpha_0 x(t-\tau_0) + \alpha_1 x(t-\tau_1) + \ldots + \alpha_N x(t-\tau_N), \quad \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_N$$



✍ اما با آمدن پدیده چندمسیری به میدان، با رابطه زیر سروکار داریم:

$$y(t) = \alpha_0 x(t-\tau_0) + \alpha_1 x(t-\tau_1) + \ldots + \alpha_N x(t-\tau_N), \qquad \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_N$$

$$h(t) = \alpha_0 \delta(t-\tau_0) + \alpha_1 \delta(t-\tau_1) + \ldots + \alpha_N \delta(t-\tau_N)$$



سیگنال $x(t)$ وارد کانال می‌شود، در صورتی که کانال ایده‌آل باشد (بدون وجود اثر چندمسیری)، انتظار داریم $h(t) = \alpha_0\delta(t-\tau_0)$ باشد. در این حالت تنها یک نسخه تضعیف‌شده و با تاخیر سیگنال بدست گیرنده خواهد رسید، یعنی

$$y(t) = x(t) * h(t) = x(t) * \alpha_0\delta(t-\tau_0) = \alpha_0 x(t-\tau_0)$$

در این حالت اگر به حوزه فرکانس $h(t)$ به عنوان پاسخ ضربه کانال نگاهی بیاندازیم، خواهیم دید که با یک خط صاف مواجه هستیم. در این حالت سیگنال با هر پهنای‌باندی، در هر فرکانس یک اثر یکسان از کانال تجربه می‌کند. اما با آمدن پدیده چندمسیری به میدان، با رابطه زیر سروکار داریم:

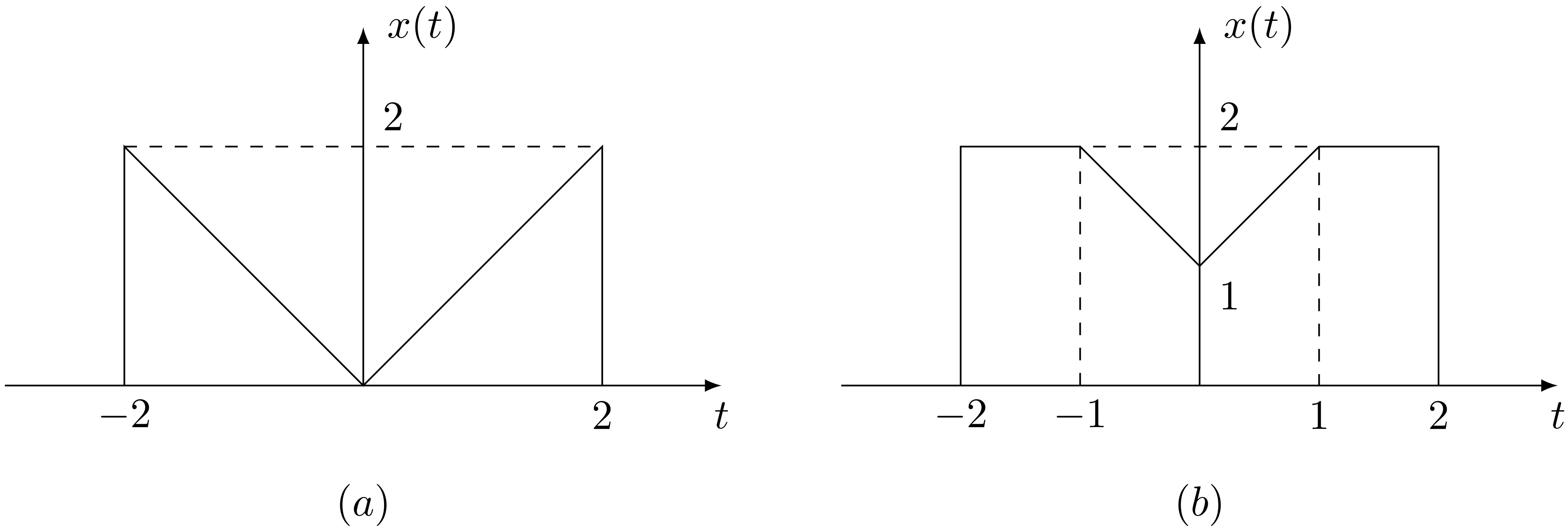
$$y(t) = \alpha_0 x(t-\tau_0) + \alpha_1 x(t-\tau_1) + \ldots + \alpha_N x(t-\tau_N), \quad \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_N$$

$$h(t) = \alpha_0\delta(t-\tau_0) + \alpha_1\delta(t-\tau_1) + \ldots + \alpha_N\delta(t-\tau_N)$$

در این حالت پاسخ ضربه کانال، به مانند شکلی است که در اسلاید قبلی مشاهده کردید. در این حالت دیگر همه فرکانس‌ها به یک میزان تحت تاثیر محوشدگی قرار نمی‌گیرند. برای درک بهتر این پدیده، مفهومی به نام پهنای

باند همدوسی (Coherence Bandwidth) را تعریف می‌کنیم. بدون این‌که وارد رابطه ریاضی دقیق پهنای باند همدوسی شویم، باتوجه به خواص تبدیل فوریه می‌دانیم که این پارامتر رابطه عکس با میزان گستردگی تاخیر (Delay Spread) ناشی از چندمسیری خواهد داشت، یعنی $BW_c \simeq \frac{1}{D}$.

سوال اول: تبدیل فوریه سیگنال‌های نشان داده شده در شکل زیر را بدست آورید. راهنمایی: نیازی نیست سراغ انتگرال‌های سخت تبدیل فوریه بروید، کافی است از ویژگی‌های تبدیل فوریه استفاده کنید.



(a) (b)

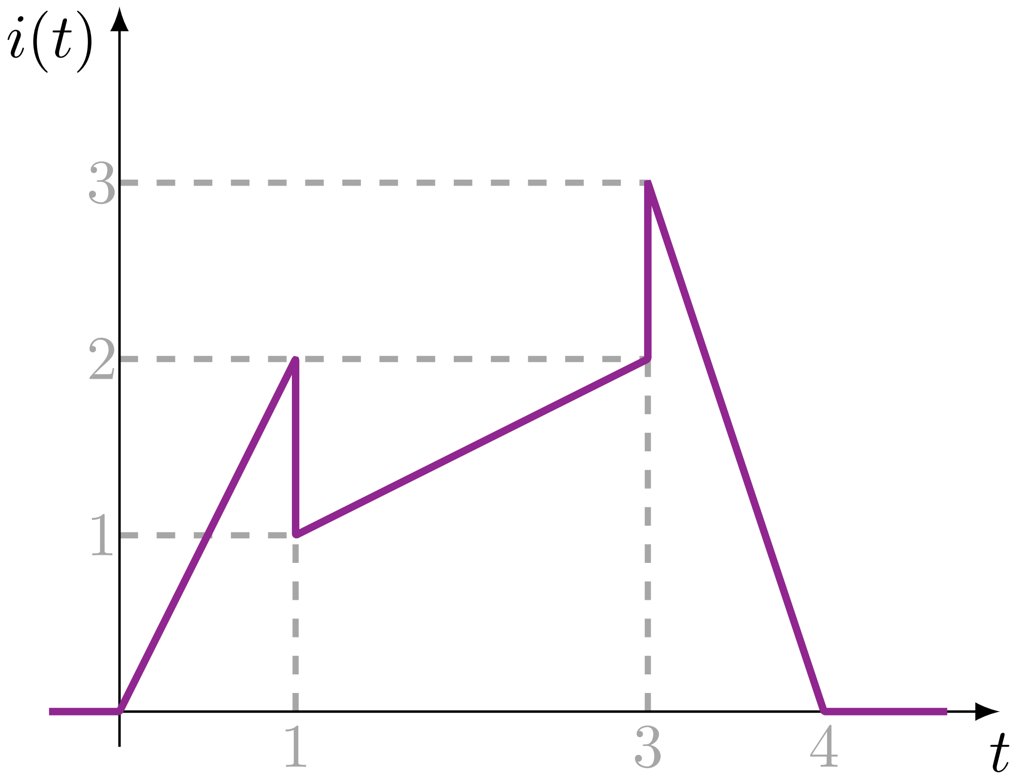
سوال دوم: تبدیل فوریه تابع $4\Lambda\left(-2t+3\right)+\mathrm{sinc}(2t-3)$ را با استفاده از ویژگی‌های تبدیل فوریه بدست آورید؟

سوال سوم: فرض کنید که ورودی یک سامانه به صورت $x(t) = e^{-2t}u(t)$ و تابع پاسخ ضربه سامانه مذکور نیز برابر $h(t) = \mathrm{rect}(2t+4)$ است. مطلوب است محاسبه $y(t)$؟

سوال چهارم: کدام یک از سیگنال‌های زیر انرژی، توان و یا نه انرژی و نه توان است؟

$x_1(t) = \tan(\pi t + \frac{\pi}{2}),\ x_2(t) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\delta(t-2k),\ x_3(t) = e^{2\pi jt}.$

سوال پنجم: سیگنال $i(t)$ را برحسب توابع $u(t)$ و $r(t)$ توصیف کنید؟ سپس مشتق سیگنال مذکور را بدست آورید؟ راهنمایی: تابع $r(t) = tu(t)$.


$i(t)$
3
2
1
1
3
4
t

پروژه اول

در این پروژه از شما خواسته شده است که یک فایل تصویری را وارد نرم‌افزار MATLAB کرده، به آن نویز اضافه کنید، و سپس تلاش کنید تا نویز را حذف کنید. بدین‌سان گام‌های زیر را برای اجرای این پروژه بردارید:

✍ **گام اول**: نرم‌افزار MATLAB را نصب بر روی سیستم‌عامل خود نصب کنید. دقت کنید که این نرم‌افزار را براحتی می‌توانید در انواع سیستم‌عامل‌ها از Windows گرفته تا Linux و macOS نصب کنید. سعی کنید نسخه جدید این نرم‌افزار را نصب کنید و یا حداقل نسخه MATLAB 2018b.

✍ **گام دوم**: یک تصویر به صورت رنگی را وارد نرم‌افزار MATLAB کنید. دقت کنید که Help این نرم‌افزار واقعا کامل و جامع است. اما برای استفاده از Help آن به صورت برخط (Online) باید فیلترشکن نصب کنید و یا از شکن استفاده کنید. به عنوان مثال این صفحه را نگاه کنید.

✍ **گام سوم**: فایل وارد شده را از دنیای RGB به یک فایل Gray-Scale 8 bit تبدیل کنید. دستور rgb2gray می‌تواند در این زمینه شما را یاری برساند.

نکته ۱ در این زمینه حتما تلاش کنید تا با انواع تصاویر و تفاوت‌های آن‌ها با یکدیگر آشنا شوید، به ویژه تصاویر از نوع RGB و تصاویر Gray-Scale 8 bit.

(آ) تصویر رنگی

(ب) تصویر خاکستری

✍ **گام چهارم**: با دستور imshow و imwrite سعی کنید تصویر Gray-Scale 8 bit تولید شده در گام قبلی را مشاهده و در کامپیوتر خود ذخیره کنید.

نکته ۲ اگر بخواهید این تصویر به صورت کامل و بدون هیچ‌گونه فشرده‌سازی با اتلاف در کامپیوتر شما ذخیره شود از چه فرمتی (.jpg, .png, .bmp, ...) باید استفاده کنید؟

✍ **گام پنجم**: تصویر rgb ذخیره شده را دوباره با دستور imread بخوانید و به یک تصویر خاکستری تبدیل کنید. این تصویر چه نوع سیگنالی است؟ سیگنال انرژی است یا توان؟ انرژی یا قدرت این سیگنال را بدست آورید. اگر کمی جستجو کنید پاسخ به این سوالات را خیلی راحت می‌توانید بیابید.

✍ **گام ششم**: سعی کنید به تصویر یک نویز گاوسی با میانگین صفر و پراش (Variance) دلخواه مثلا 0.01 اضافه کنید. برای این‌کار می‌توانید از دستور imnoise استفاده کنید. در ضمن میزان SNR (Signal Noise Ratio) تصویر را قبل و بعد از اضافه شدن نویز بدست آورید؟

نکته ۳ سعی کنید درک خوبی راجع به مفهوم SNR پیدا کنید.


(آ) تصویر خاکستری


(ب) تصویر نویزی شده

✍ **گام هفتم**: تصویر Gray-Scale 8 bit نویزی شده را به حوزه فرکانس برده و آن را نمایش دهید. به عنوان مثال برای همان تصویر قبلی براحتی من با استفاده از کد زیر حوزه فرکانس تصویر را رسم کردم.

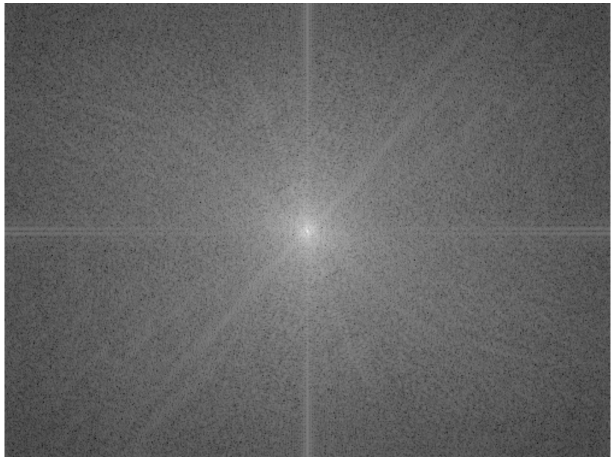
```
clc
clear

% Read an image
grayImage = rgb2gray(imread('rgb.png'));

% Frequency domain
ft = fftshift(log(abs(fft2(grayImage))));
imshow(ft, []);
```

نکته ۴ در این گام حتما باید با مفاهیمی به مانند تبدیل FFT (Fast Fourier Transform) آشنا شوید. باید بتوانیم عکس حاصل شده را توصیف کنید. مرکز تصویر چرا از همه نقاط دیگر نورانی‌تر است؟ چرا هرچه از مرکز دور می‌شویم نقاط کم‌نور تر می‌شوند؟ بالاترین و پایین‌ترین فرکانس‌ها در کدام بخش تصویر فرکانسی وجود دارد؟

(آ) تصویر خاکستری



(ب) تبدیل فوریه تصویر

✍ **گام هشتم**: روش‌های مختلفی برای حذف نویز از یک تصویر وجود دارد. در این تمرین از شما خواسته شده است با استفاده مفاهیمی که از حوزه فرکانس تصویر در می‌یابید و همچنین دانشی که در مورد نویز می‌دانید، سعی کنید تصویر نویزدار شده را رفع نویز کنید. با کمی جستجو در دنیای اینترنت مفاهیم و مطالب خوبی را راجع به این موضوع می‌توانید پیدا کنید.

نکته ۵ می‌توانید با یک معیار کمی نشان دهید چه چقدر در این روند خوب عمل کردید؟ مفهوم PSNR (Peak Signal to Noise Ratio) شاید در این زمینه بتواند به شما کمک کند.

✍ چند نکته تکمیلی:

- محتوای فایل‌های پروژه:

الف تصاویر rgb، grayscale، تصویر نویزی شده و همچنین تصویر بعد از حذف نویز

ب کدهای MATLAB

ج یک گزارش تفصیلی که در آن به تمامی سوالات مطرح شده پاسخ داده شده باشد.

- به کسانی که گزارش تحویلی آن‌ها با LaTeX باشد نمره اضافی تعلق می‌گیرد.
- حتما تصاویر انتخابی دانشجویان با یکدیگر متفاوت باشد.
- محل بارگذاری پروژه نیز در سایت `lms.iust.ac.ir` است.
- ممکن است پروژه تحویل برخط (Online) نیز داشته باشد.

مراجع

[1] W. Stallings and C. Beard. *Wireless Communication Networks and Systems.* Pearson, 2016.

فهرست اختصارات

A

AM . . . . Amplitude Modulation

F

FFT . . . . Fast Fourier Transform

L

LTI . . . . Linear Time Invariant

P

PSNR . . . . Peak Signal to Noise Ratio

S

SNR . . . . Signal Noise Ratio

U

UE . . . . User Equipment

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

A

Amplitude . . . . دامنه

B

Bandwidth . . . . پهنای‌باند

Broadcasting . . . . همه پخشی

C

Carrier Signal . . . . سیگنال حامل

Channel Impulse Response . . . پاسخ ضربه کانال

Coherence Bandwidth . . . . پهنای باند همدوسی

Continuous Signal . . . . سیگنال پیوسته

D

Delay Spread . . . . گستردگی تاخیر

Dependent Variable . . . . متغیر وابسته

Digital Signal . . . . سیگنال رقمی

Dirac Delta Function . . . . تابع دلتا دیراک

Discrete Signal . . . . سیگنال گسسته

F

Fading . . . . محوشدگی

I

Independent Variable . . . . متغیر مستقل

L

Low Pass Filter . . . . فیلتر پایین‌گذر

Lossy Compression . . . . فشرده‌سازی با اتلاف

M

Message . . . . پیام

Multipath . . . . چندمسیری

O

Online . . . . برخط

Operating System . . . . سیستم‌عامل

P

Power Spectral Density . . . . . چگالی طیف توان

S

Sampling . . . . نمونه‌برداری

Strictly Decreasing . . . . اکیدا نزولی

Strictly Increasing . . . . اکیدا صعودی

T

Threshold . . . . آستانه

Time-invariant . . . . تغییرناپذیر با زمان

U

Unit Impulse Function . . . . تابع ضربه واحد

Unit Pulse Function . . . . تابع پالس واحد

Unit Step Function . . . . تابع پله واحد

V

Variance . . . . پراش

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

ا

آستانه .... Threshold

اکیدا صعودی .... Strictly Increasing

اکیدا نزولی .... Strictly Decreasing

ب

برخط .... Online

پ

پاسخ ضربه کانال ... Channel Impulse Response

پراش .... Variance

پهنای باند همدوسی .... Coherence Bandwidth

پهنای‌باند .... Bandwidth

پیام .... Message

ت

تابع پالس واحد .... Unit Pulse Function

تابع پله واحد .... Unit Step Function

تابع دلتا دیراک .... Dirac Delta Function

تابع ضربه واحد .... Unit Impulse Function

تغییرناپذیر با زمان .... Time-invariant

چ

چگالی طیف توان ..... Power Spectral Density

چندمسیری .... Multipath

د

دامنه .... Amplitude

س

سیستم‌عامل .... Operating System

سیگنال پیوسته .... Continuous Signal

سیگنال حامل .... Carrier Signal

سیگنال رقمی .... Digital Signal

سیگنال گسسته .... Discrete Signal

ف

فشرده‌سازی با اتلاف .... Lossy Compression

فیلتر پایین‌گذر .... Low Pass Filter

گ

گستردگی تاخیر .... Delay Spread

م

متغیر مستقل .... Independent Variable

متغیر وابسته .... Dependent Variable

محوشدگی .... Fading

ن

نمونه‌برداری .... Sampling

ه

همه پخشی .... Broadcasting