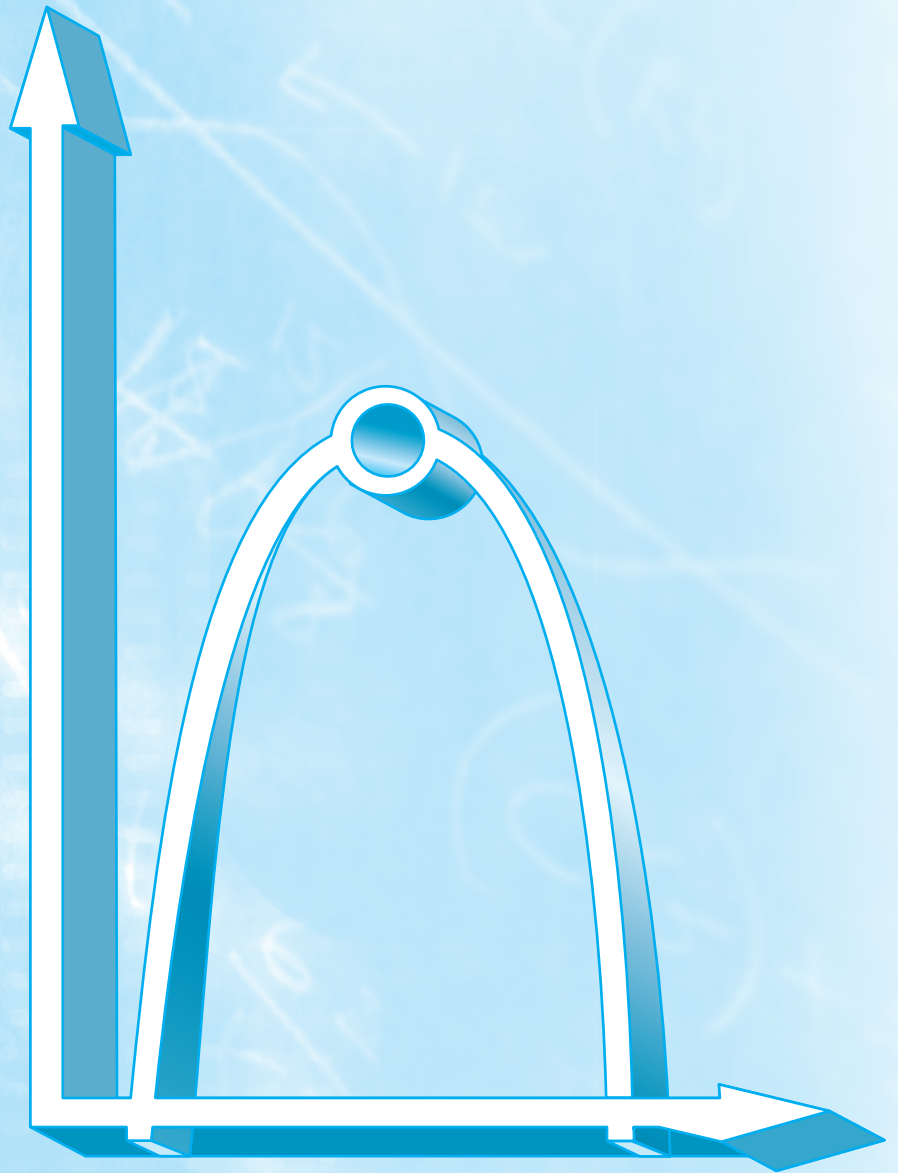


# PARTE CUATRO



# OPTIMIZACIÓN

## PT4.1 MOTIVACIÓN

La localización de raíces (parte dos) y la optimización están relacionadas, en el sentido de que ambas involucran valores iniciales y la búsqueda de un punto en una función. La diferencia fundamental entre ambos tipos de problemas se ilustra en la figura PT4.1. La localización de raíces es la búsqueda de los ceros de una función o funciones. En cambio, la *optimización* es la búsqueda ya sea del mínimo o del máximo.

El óptimo es el punto donde la curva es plana. En términos matemáticos, esto corresponde al valor de  $x$  donde la derivada  $f'(x)$  es igual a cero. Además, la segunda derivada,  $f''(x)$ , indica si el óptimo es un mínimo o un máximo: si  $f''(x) < 0$ , el punto es un máximo; si  $f''(x) > 0$ , el punto es un mínimo.

Si comprendemos ahora la relación entre las raíces y el óptimo, es posible sugerir una estrategia para determinar este último; es decir, se puede derivar a la función y localizar la raíz (el cero) de la nueva función. De hecho, algunos métodos de optimización tratan de encontrar un óptimo resolviendo el problema de encontrar la raíz:  $f'(x) = 0$ . Deberá observarse que tales búsquedas con frecuencia se complican porque  $f'(x)$  no se puede obtener analíticamente. Por lo tanto, es necesario usar aproximaciones por diferencia finita para estimar la derivada.

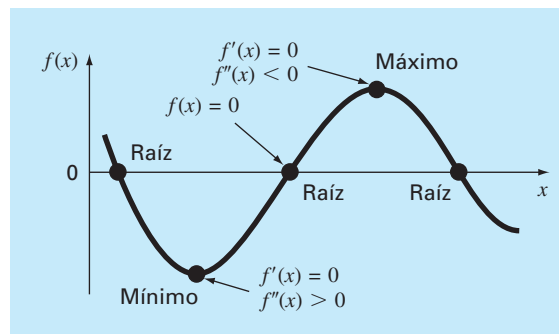
Más allá de ver la optimización como un problema de raíces, deberá observarse que la tarea de localizar el óptimo está reforzada por una estructura matemática extra que no es parte del encontrar una raíz simple. Esto tiende a hacer de la optimización una tarea más fácil de realizar, en particular con casos multidimensionales.

### PT4.1.1 Métodos sin computadora e historia

Como se mencionó antes, los métodos de cálculo diferencial aún se utilizan para determinar soluciones óptimas. Todos los estudiantes de ciencias e ingeniería recuerdan haber resuelto problemas de máximos y mínimos mediante la determinación de las primeras

**FIGURA PT4.1**

Una función de una sola variable ilustra la diferencia entre las raíces y el óptimo.



derivadas de las funciones en sus cursos sobre cálculo. Bernoulli, Euler, Lagrange y otros establecieron los fundamentos del cálculo de variaciones, el cual trata con la minimización de funciones. El método de los multiplicadores de Lagrange se desarrolló para optimizar problemas con restricciones, es decir, problemas de optimización donde las variables están limitadas en alguna forma.

El primer avance de importancia en los procedimientos numéricos ocurrió con el desarrollo de las computadoras digitales después de la Segunda Guerra Mundial. Koopmans, en el Reino Unido, y Kantorovich, en la ex Unión Soviética, trabajaron en forma independiente sobre el problema general de distribución a bajo costo de artículos y productos. En 1947, un alumno de Koopman, Dantzig, inventó el *método simplex* para resolver problemas de programación lineal. Este método abrió el camino a muchos investigadores hacia otros métodos de optimización con restricciones; entre los más notables se encuentran Charnes y sus colegas. Los métodos de optimización restringida también se desarrollaron en forma rápida debido a la disponibilidad tan amplia de computadoras.

### PT4.1.2 Optimización y la práctica en ingeniería

La mayoría de los modelos matemáticos con que hemos tratado hasta ahora han sido *descriptivos*. Es decir, se han obtenido para simular el comportamiento de un dispositivo o sistema en ingeniería. En cambio, la optimización tiene que ver con la determinación del “mejor resultado”, o solución óptima, de un problema. Así, en el contexto del modelado, se les llama con frecuencia modelos *prescriptivos*, puesto que sirven para señalar un curso de acción o el mejor diseño.

Los ingenieros continuamente tienen que diseñar dispositivos y productos que realicen tareas de manera eficiente. Al hacerlo de esta manera, están restringidos por las limitaciones del mundo físico. Además, deben mantener costos bajos. Así, los ingenieros siempre se enfrentan a problemas de optimización que equilibren el funcionamiento y las limitaciones. Algunos ejemplos comunes se mencionan en la tabla PT4.1. El siguiente

**TABLA PT4.1** Algunos ejemplos comunes de problemas de optimización en ingeniería.

- Diseño de un avión con peso mínimo y resistencia máxima.
- Trayectorias óptimas de vehículos espaciales.
- Diseño de estructuras en la ingeniería civil con un mínimo costo.
- Planeación de obras para el abastecimiento de agua, como presas, que permitan disminuir daños por inundación, mientras se obtiene máxima potencia hidráulica.
- Predicción del comportamiento estructural minimizando la energía potencial.
- Determinación del corte de materiales con un mínimo costo.
- Diseño de bombas y equipos de transferencia de calor con una máxima eficiencia.
- Maximización de la potencia de salida de circuitos eléctricos y de maquinaria, mientras se minimiza la generación de calor.
- Ruta más corta de un vendedor que recorre varias ciudades durante un viaje de negocios.
- Planeación y programación óptimas.
- Análisis estadístico y modelado con un mínimo error.
- Redes de tubería óptimas.
- Control de inventario.
- Planeación del mantenimiento para minimizar costos.
- Minimización de tiempos de espera.
- Diseño de sistemas de tratamiento de residuos para cumplir con estándares de calidad del agua a bajo costo.

te ejemplo fue desarrollado para ayudarlo a obtener una visión de la manera en que se pueden formular tales problemas.

### EJEMPLO PT.4.1 Optimización del costo de un paracaídas

**Planteamiento del problema.** A lo largo de este libro, hemos utilizado la caída de un paracaidista para ilustrar diversos temas básicos para la solución de problemas con métodos numéricos. Usted puede haber notado que ninguno de tales ejemplos se ocupó de lo que pasa después de que el paracaídas se abre. En este ejemplo examinaremos un caso donde el paracaídas se abre, y nos interesa predecir la velocidad de impacto con el suelo.

Usted es un ingeniero que trabaja para una institución que lleva abastecimientos a los refugiados en una zona de guerra. Los abastecimientos se arrojarán a baja altitud (500 m), de tal forma que la caída no sea detectada y que los abastecimientos caigan tan cerca como sea posible del campo de refugiados. Los paracaídas se abren en forma inmediata al salir del aeroplano. Para reducir daños, la velocidad vertical de impacto debe ser menor a un valor crítico  $v_c = 20$  m/s.

El paracaídas que se usa para la caída se ilustra en la figura PT4.2. El área de la sección transversal del paracaídas es la de una semiesfera,

$$A = 2\pi r^2 \quad (\text{PT4.1})$$

La longitud de cada una de las 16 cuerdas, que unen al paracaídas con la masa, está relacionada con el radio del paracaídas mediante

$$\ell = \sqrt{2}r \quad (\text{PT4.2})$$

Usted sabe que la fuerza de arrastre del paracaídas es una función lineal del área de su sección transversal descrita con la siguiente fórmula:

$$c = k_c A \quad (\text{PT4.3})$$

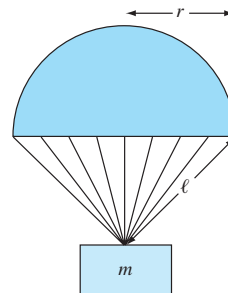
donde  $c$  = coeficiente de arrastre (kg/s) y  $k_c$  = una constante de proporcionalidad que parametriza el efecto del área sobre el arrastre [kg/(s · m<sup>2</sup>)].

También, se puede dividir la carga completa en tantos paquetes como se quiera. Es decir, la masa de cada paquete se calcula así

$$m = \frac{M_t}{n}$$

**FIGURA PT4.2**

Un paracaídas abierto.



donde  $m$  = masa de cada paquete (kg),  $M_t$  = carga total que habrá de arrojarse (kg) y  $n$  = número total de paquetes.

Por último, el costo de cada paracaídas está relacionado con su tamaño en una forma no lineal,

$$\text{Costo por paracaídas} = c_0 + c_1\ell + c_2A^2 \quad (\text{PT4.4})$$

donde  $c_0$ ,  $c_1$  y  $c_2$  son coeficientes de costo. El término constante,  $c_0$ , es el costo base de los paracaídas. La relación no lineal entre costo y área se debe a que la fabricación de los paracaídas de gran tamaño es más complicada que la de los paracaídas pequeños.

Determine el tamaño ( $r$ ) y el número de paracaídas ( $n$ ) que se obtienen a un mínimo costo y que, al mismo tiempo, satisfacen el requerimiento de lograr una velocidad de impacto suficientemente pequeña.

**Solución.** El objetivo aquí consiste en determinar la cantidad y el tamaño de los paracaídas que minimicen el costo de la operación. El problema tiene restricciones, ya que los paquetes deben tener una velocidad de impacto menor al valor crítico.

El costo se calcula al multiplicar el valor de un solo paracaídas [ecuación (PT4.4)] por el número de paracaídas ( $n$ ). Así, la función que usted debe minimizar, llamada formalmente *función objetivo*, se escribe como

$$\text{Minimizar } C = n(c_0 + c_1\ell + c_2A^2) \quad (\text{PT4.5})$$

donde  $C$  = costo (\$) y  $A$  y  $\ell$  se calculan con las ecuaciones (PT4.1) y (PT4.2), respectivamente.

A continuación, se deben especificar las *restricciones*. En este problema existen dos restricciones. Primera, la velocidad de impacto debe ser igual o menor que la velocidad crítica.

$$v \leq v_c \quad (\text{PT4.6})$$

Segunda, el número de paquetes debe ser un entero mayor o igual a 1,

$$n \geq 1 \quad (\text{PT4.7})$$

donde  $n$  es un entero.

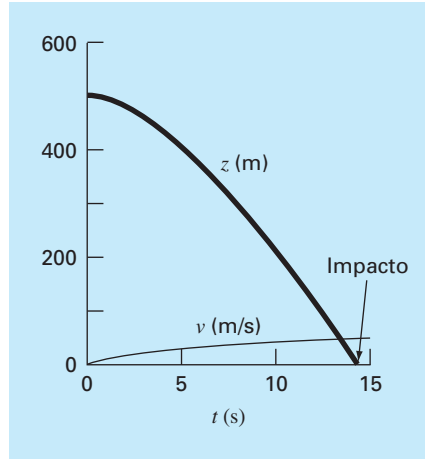
En este momento, ya se ha formulado el problema de optimización. Como se observa, es un problema con restricciones no lineal.

Aunque el problema se ha formulado completamente, se debe tener en cuenta algo más: ¿cómo se determina la velocidad de impacto  $v$ ? Recuerde del capítulo 1 que la velocidad de un objeto que cae se calcula así:

$$v = \frac{gm}{c}(1 - e^{-(c/m)t}) \quad (1.10)$$

donde  $v$  = velocidad (m/s),  $g$  = aceleración de la gravedad ( $\text{m/s}^2$ ),  $m$  = masa (kg) y  $t$  = tiempo (s).

Aunque la ecuación (1.10) proporciona una relación entre  $v$  y  $t$ , lo que se necesita saber en cuánto tiempo cae la masa. Por lo tanto, es necesaria una relación entre la distancia de caída  $z$  y el tiempo de caída  $t$ . La distancia de caída se calcula a partir de la velocidad en la ecuación (1.10) mediante la integración

**FIGURA PT4.3**

La altura  $z$  y la velocidad  $v$  de un paracaídas abierto conforme cae al suelo ( $z = 0$ ).

$$z = \int_0^t \frac{gm}{c} (1 - e^{-(c/m)t}) dt \quad (\text{PT4.8})$$

Esta integral se evalúa para obtener

$$z = z_0 - \frac{gm}{c} t + \frac{gm^2}{c^2} (1 - e^{-(c/m)t}) \quad (\text{PT4.9})$$

donde  $z_0$  = altura inicial (m). Esta función, como muestra la gráfica de la figura PT4.3, ofrece una manera de predecir  $z$  conociendo  $t$ .

Sin embargo, no se necesita  $z$  como función de  $t$  para resolver este problema. Lo que necesitamos es el tiempo requerido por el paquete, al caer, la distancia  $z_0$ . Así, se reconoce que tenemos que reformular la ecuación (PT4.9) como un problema de determinación de raíces. Esto es, se debe encontrar el tiempo en el que  $z$  toma el valor de cero,

$$f(t) = 0 = z_0 - \frac{gm}{c} t + \frac{gm^2}{c^2} (1 - e^{-(c/m)t}) \quad (\text{PT4.10})$$

Una vez que se calcula el tiempo de impacto, se sustituye en la ecuación (1.10) con la finalidad de obtener la velocidad de impacto.

El planteamiento del problema sería entonces

$$\text{Minimizar } C = n(c_0 + c_1 \ell + c_2 A^2) \quad (\text{PT4.11})$$

sujeta a

$$v \leq v_c \quad (\text{PT4.12})$$

$$n \geq 1 \quad (\text{PT4.13})$$

donde

$$A = 2\pi r^2 \quad (\text{PT4.14})$$

$$\ell = \sqrt{2}r \quad (\text{PT4.15})$$

$$c = k_c A \quad (\text{PT4.16})$$

$$m = \frac{M_t}{n} \quad (\text{PT4.17})$$

$$t = \text{raíz} \left[ z_0 - \frac{gm}{c}t + \frac{gm^2}{c^2}(1 - e^{-(c/m)t}) \right] \quad (\text{PT4.18})$$

$$v = \frac{gm}{c}(1 - e^{-(c/m)t}) \quad (\text{PT4.19})$$

Resolveremos este problema en el ejemplo 15.4 al final del capítulo 15. Por ahora reconozca que este problema tiene la mayoría de los elementos fundamentales de otros problemas de optimización, que usted enfrentará en la práctica de la ingeniería. Éstos son

- El problema involucrará una *función objetivo* que se optimizará.
- Tendrá también un número de *variables de diseño*. Éstas pueden ser números reales o enteros. En nuestro ejemplo, dichas variables son  $r$  (real) y  $n$  (entero).
- El problema incluye *restricciones* que consideran las limitaciones bajo las cuales se trabaja.

Plantearemos una reflexión más antes de proceder. Aunque la función objetivo y las restricciones quizá, en forma superficial, parezcan ecuaciones simples [por ejemplo, la ecuación (PT4.12)], de hecho, pueden ser sólo la “punta del iceberg”. Es decir, pueden basarse en modelos y dependencias complicadas. Por ejemplo, como en este caso, llegan a involucrar otros métodos numéricos [ecuación (PT4.18)], lo cual significa que las relaciones funcionales que usted estará usando podrían representar cálculos largos y complicados. Por lo que, las técnicas que permitan encontrar la solución óptima, y que al mismo tiempo simplifiquen las evaluaciones de las funciones, serán valiosas en extremo.

## PT4.2 ANTECEDENTES MATEMÁTICOS

Existen bastantes conceptos matemáticos que son la base de la optimización. Como creemos que para usted éstos serán más relevantes en su forma contextual, se dejará el análisis de los prerrequisitos matemáticos específicos hasta que se ocupen. Por ejemplo, se analizarán los importantes conceptos del gradiente y el hessiano al inicio del capítulo 14, que trata sobre optimización sin restricciones multivariada. Mientras tanto, ahora nos limitaremos al tema más general de cómo se clasifican los problemas de optimización.

Un problema de *programación matemática* u *optimización* generalmente se puede establecer como

Determine  $\mathbf{x}$ , que minimiza o maximiza  $f(\mathbf{x})$   
 sujeto a

$$d_i(\mathbf{x}) \leq a_i \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (\text{PT4.20})$$

$$e_i(\mathbf{x}) = b_i \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (\text{PT4.21})$$

donde  $\mathbf{x}$  es un vector de diseño  $n$ -dimensional;  $f(\mathbf{x})$  es la función objetivo;  $d_i(\mathbf{x})$  son las restricciones de desigualdad;  $e_i(\mathbf{x})$  son las restricciones de igualdad, y  $a_i$  y  $b_i$  son constantes.

Los problemas de optimización se clasifican considerando la forma de  $f(\mathbf{x})$ :

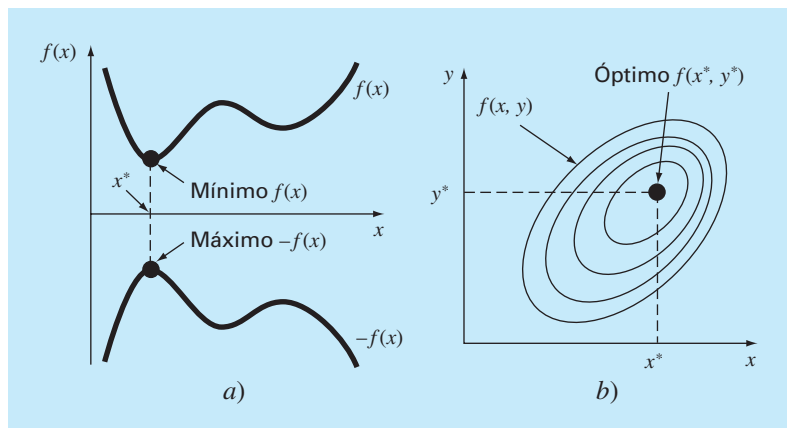
- Si  $f(\mathbf{x})$  y las restricciones son lineales, tenemos un problema de *programación lineal*.
- Si  $f(\mathbf{x})$  es cuadrática y las restricciones son lineales, tenemos un problema de *programación cuadrática*.
- Si  $f(\mathbf{x})$  no es lineal ni cuadrática y/o las restricciones no son lineales, tenemos un problema de *programación no lineal*.

Se dice también que, cuando las ecuaciones (PT4.20) y (PT4.21) se incluyen, se tiene un problema de *optimización restringido*; de otra forma, se trata de un problema de *optimización no restringido*.

Observe que en problemas restringidos, los grados de libertad están dados por  $n-p$ . Generalmente, para obtener una solución,  $p + m$  debe ser  $\leq n$ . Si  $p + m > n$ , se dice que el problema está *sobrerrestringido*.

#### FIGURA PT4.4

a) Optimización unidimensional. Esta figura también ilustra cómo la minimización de  $f(x)$  es equivalente a la maximización de  $-f(x)$ . b) Optimización bidimensional. Observe que esta figura puede tomarse para representar ya sea una maximización (los contornos aumentan de elevación hasta un máximo como en una montaña), o una minimización (los contornos disminuyen de elevación hasta un mínimo como un valle).





Otra forma de clasificar los problemas de optimización es según su dimensionalidad. En general se dividen en *unidimensionales* y *multidimensionales*. Como su nombre lo indica, los primeros involucran funciones que dependen de una sola variable independiente. Como en la figura PT4.4a, la búsqueda consiste, entonces, en ascender o descender picos y valles unidimensionales. Los *problemas multidimensionales* implican funciones que dependen de dos o más variables independientes. En el mismo sentido, la optimización bidimensional, de nuevo, se visualiza como una búsqueda de picos y valles (PT4.4b). Sin embargo, justo como en un paseo campestre, no estamos limitados a caminar en una sola dirección; en lugar de esto se examina la *topografía* para alcanzar el objetivo en forma eficiente.

Finalmente, el proceso de encontrar un máximo o de encontrar un mínimo es, en esencia, idéntico, ya que un mismo valor, por ejemplo  $x^*$ , minimiza  $f(x)$  y maximiza  $-f(x)$ . Esta equivalencia se ilustra en forma gráfica, para una función unidimensional, en la figura PT4.4a.

### PT4.3 ORIENTACIÓN

---

Resulta útil alguna orientación antes de desarrollar los métodos numéricos para la optimización. Lo siguiente lleva la intención de dar una visión general del material en la parte cuatro. Además, se presentan algunos objetivos para ayudarlo a enfocar sus esfuerzos cuando se estudie el material.

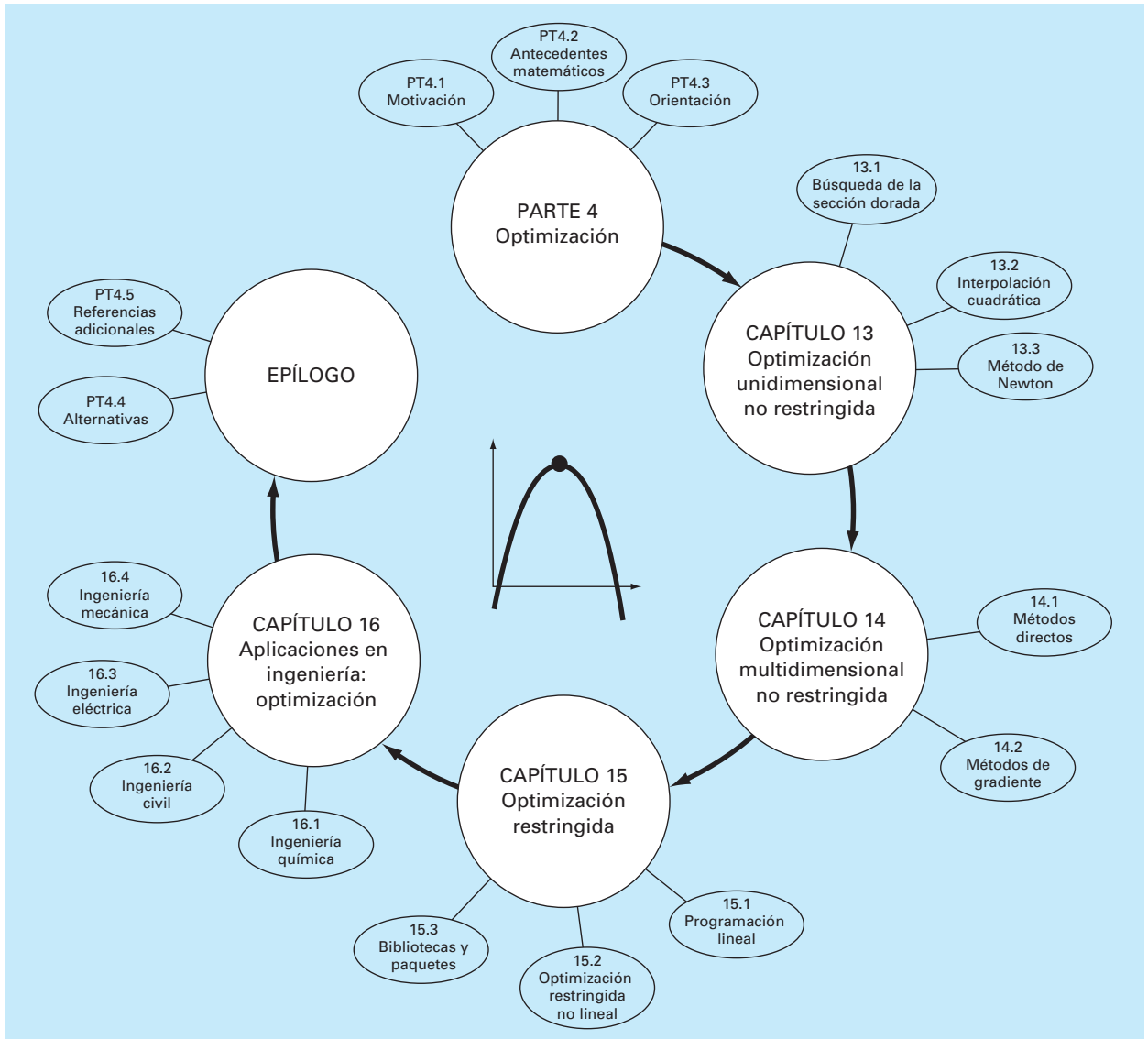
#### PT4.3.1 Alcance y presentación preliminar

La figura PT4.5 es una representación esquemática de la organización de la parte cuatro. Examine esta figura con cuidado, comenzando desde arriba y después yendo en sentido de las manecillas del reloj.

Después de la presente introducción, el *capítulo 13* se dedica a la *optimización unidimensional no restringida*. Se presentan métodos para determinar el mínimo o el máximo de una función con una sola variable. Se examinan tres métodos: *búsqueda de la sección dorada*, *interpolación cuadrática* y el *método de Newton*. Tales métodos tienen también relevancia en la optimización multidimensional.

El *capítulo 14* cubre dos tipos generales de métodos para resolver problemas de *optimización multidimensional no restringida*. Los *métodos directos*, tales como *búsquedas aleatorias*, *búsquedas univariadas* y *búsquedas de patrones*, no requieren la evaluación de las derivadas de la función. Por otro lado, los *métodos de gradiente* utilizan la primera o la segunda derivada para encontrar el óptimo. En este capítulo se introduce el *gradiente* y el *hessiano*, que son las representaciones multidimensionales de la primera y la segunda derivada. El método de *paso ascendente/descendente* se estudia después con detalle. A esto le siguen descripciones de algunos métodos avanzados: el *gradiente conjugado*, el *método de Newton*, el *método de Marquardt* y los *métodos cuasi-Newton*.

En el *capítulo 15* se dedica a la *optimización restringida*. La *programación lineal* se describe con detalle usando tanto la representación gráfica como el *método simplex*. El análisis detallado de *optimización restringida no lineal* está fuera del alcance de este texto; no obstante, se ofrece una visión general de los principales métodos. Además, se ilustra cómo tales problemas (junto con los estudiados en los capítulos 13 y 14) se resuelven con bibliotecas y paquetes de software, como Excel, MATLAB e IMSL.

**FIGURA PT4.5**

Representación de la organización del material en la parte cuatro: Optimización.

En el *capítulo 16* se extienden los conceptos anteriores a problemas que se presentan en la ingeniería. Se utilizan las aplicaciones en ingeniería para ilustrar cómo se formulan los problemas de optimización, y para dar una visión sobre la aplicación de las técnicas de solución en la práctica profesional.

Se incluye un epílogo al final de la parte cuatro. Éste contiene un repaso de los métodos analizados en los capítulos 13, 14 y 15. Dicho repaso da una descripción de las

ventajas y desventajas relacionadas con el uso apropiado de cada técnica. Esta sección también presenta referencias acerca de algunos métodos numéricos que van más allá del alcance de este libro.

### PT4.3.2 Metas y objetivos

**Objetivos de estudio.** Después de estudiar la parte cuatro, usted tendrá suficiente información para abordar con éxito una amplia variedad de problemas que se presentan en la ingeniería, relacionados con la optimización. En general, usted deberá dominar las técnicas, habrá aprendido a evaluar su confiabilidad y será capaz de analizar métodos alternativos para un problema específico. Además, de estas metas generales, deberán asimilarse los conceptos específicos dados en la tabla PT4.2 para un aprendizaje completo del material de la parte cuatro.

**Objetivos de cómputo.** Usted deberá ser capaz de escribir un subprograma que lleve a cabo una búsqueda simple unidimensional (como la búsqueda de la sección dorada o la interpolación cuadrática) y multidimensional (como el método de búsqueda aleatoria). Además, como las bibliotecas de programas IMSL y los paquetes de software Excel o MATLAB tienen varias capacidades para optimización. Usted puede usar esta parte del libro para familiarizarse con todas estas capacidades.

**TABLA PT4.2** Objetivos específicos de estudio de la parte cuatro.

1. Entender por qué y dónde se presenta la optimización al resolver problemas de ingeniería.
2. Comprender los principales elementos del problema de optimización general: función objetivo, variables de decisión y restricciones.
3. Ser capaz de distinguir entre la optimización lineal y la no lineal, y entre problemas con restricciones y sin restricciones.
4. Poder definir la razón dorada y comprender cómo hace que la optimización unidimensional sea eficiente.
5. Localizar el óptimo de una función en una sola variable mediante la búsqueda de la sección dorada, la interpolación cuadrática y el método de Newton. También, reconocer las ventajas y desventajas de tales métodos, especialmente en relación con los valores iniciales y la convergencia.
6. Escribir un programa y encontrar el óptimo de una función multivariada usando la búsqueda aleatoria.
7. Comprender las ideas de los patrones de búsqueda, las direcciones conjugadas y el método de Powell.
8. Definir y evaluar el gradiente y el hessiano de una función multivariada, tanto en forma analítica como numérica.
9. Calcular a mano el óptimo de una función con dos variables, usando el método de paso ascendente-descendente.
10. Comprender las ideas básicas de los métodos del gradiente conjugado, de Newton, de Marquardt y de cuasi-Newton. En particular, entender las ventajas y las desventajas de los diferentes métodos, y reconocer cómo cada uno mejora el de paso ascendente-descendente.
11. Reconocer y plantear un problema de programación lineal para representar problemas aplicables a la ingeniería.
12. Resolver un problema de programación lineal bidimensional con ambos métodos: el gráfico y el simplex.
13. Comprender los cuatro posibles resultados de un problema de programación lineal.
14. Plantear y resolver problemas de optimización restringidos no lineales utilizando un paquete de software.

# CAPÍTULO 13

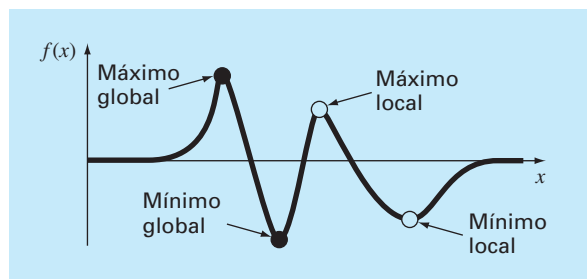
## Optimización unidimensional no restringida

Esta sección describirá técnicas para encontrar el mínimo o el máximo de una función de una sola variable,  $f(x)$ . Una imagen útil que muestra lo anterior es la consideración unidimensional a la “montaña rusa”, como la función representada en la figura 13.1. Recuerde que en la parte dos, la localización de una raíz fue complicada por el hecho de que una sola función puede tener varias raíces. De manera similar, los valores óptimos tanto locales como globales pueden presentarse en problemas de optimización. A tales casos se les llama *multimodales*. En casi todos los ejemplos, estaremos interesados en encontrar el valor máximo o mínimo absoluto de una función. Así, debemos cuidar de no confundir un óptimo local con un óptimo global.

Distinguir un extremo global de un extremo local puede ser generalmente un problema difícil. Existen tres formas comunes de resolver este problema. Primero, una idea del comportamiento de las funciones unidimensionales algunas veces llega a obtenerse en forma gráfica. Segundo, determinar el valor óptimo con base en valores iniciales, los cuales varían ampliamente y son generados quizá en forma aleatoria, para después seleccionar el mayor de éstos como el global. Por último, cambiar el punto de inicio asociado con un óptimo local y observar si la rutina empleada da un mejor punto, o siempre regresa al mismo punto. Aunque estos métodos tienen su utilidad, el hecho es que en algunos problemas (usualmente los más grandes) no existe una forma práctica de asegurarse de que se ha localizado un valor óptimo global. Sin embargo, aunque debe tenerse cuidado se tiene la fortuna de que en muchos problemas de la ingeniería se localiza el óptimo global en forma no ambigua.

### FIGURA 13.1

Una función que se aproxima asintóticamente a cero en más y menos  $\infty$  y que tiene dos puntos máximos y dos puntos mínimos en la vecindad del origen. Los dos puntos a la derecha son los óptimos locales; mientras que los dos de la izquierda son globales.



Como en la localización de raíces, los problemas de optimización unidimensionales se pueden dividir en métodos cerrados y métodos abiertos. Como se describirá en la próxima sección, la búsqueda por sección dorada es un ejemplo de un método cerrado que depende de los valores iniciales que encierran un solo valor óptimo. Éste es seguido por un procedimiento cerrado algo más sofisticado (la interpolación cuadrática).

El método final descrito en este capítulo es un método abierto que está basado en la idea del cálculo para encontrar el mínimo o máximo al resolver  $f'(x) = 0$ . Esto reduce el problema de optimización al encontrar la raíz de  $f'(x)$  mediante las técnicas que se describen en la parte dos. Se mostrará una versión del método de Newton.

### 13.1 BÚSQUEDA DE LA SECCIÓN DORADA

En la búsqueda de la raíz de una ecuación no lineal, el objetivo era encontrar el valor de  $x$  que diera *cero* al sustituir en la función  $f(x)$ . La *optimización en una sola variable* tiene como objetivo encontrar el valor de  $x$  que da un *extremo*, ya sea un máximo o un mínimo de  $f(x)$ .

La búsqueda de la sección dorada es una técnica, de búsqueda para una sola variable, sencilla y de propósito general. Es igual en esencia al método de la bisección para localizar raíces (capítulo 5). Recuerde que la bisección depende de la definición de un intervalo, especificado por los valores iniciales inferior ( $x_l$ ) y superior ( $x_u$ ), que encierran una sola raíz. La presencia de una raíz entre estos límites se verificó determinando que  $f(x_l)$  y  $f(x_u)$  tuvieran signos diferentes. La raíz se estima entonces como el punto medio de este intervalo,

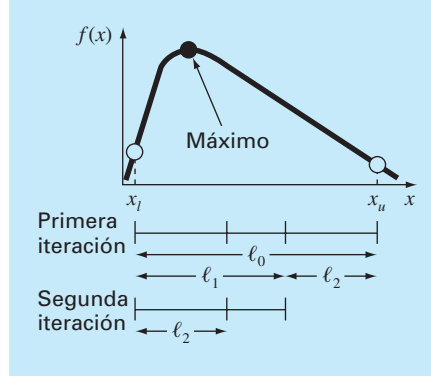
$$x_r = \frac{x_l + x_u}{2}$$

Cualquier paso en una iteración por bisección permite determinar un intervalo más pequeño. Esto se logra al reemplazar cualquiera de los límites,  $x_l$  o  $x_u$ , que tuvieran un valor de la función con el mismo signo que  $f(x_r)$ . Un efecto útil de este método es que el nuevo valor  $x_r$  reemplazará a uno de los límites anteriores.

Es posible desarrollar un procedimiento similar para localizar el valor óptimo de una función unidimensional. Por simplicidad, nos concentraremos en el problema de encontrar un máximo. Cuando se analice el algoritmo de cómputo, se describirán las pequeñas modificaciones necesarias para determinar un mínimo.

Como en el método de la bisección, se puede comenzar por definir un intervalo que contenga una sola respuesta. Es decir, el intervalo deberá contener un solo máximo, y por esto se llama *unimodal*. Podemos adoptar la misma nomenclatura que para la bisección, donde  $x_l$  y  $x_u$  definen los límites inferior y superior, respectivamente, del intervalo. Sin embargo, a diferencia de la bisección se necesita una nueva estrategia para encontrar un máximo dentro del intervalo. En vez de usar solamente dos valores de la función (los cuales son suficientes para detectar un cambio de signo y, por lo tanto, un cero), se necesitarán tres valores de la función para detectar si hay un máximo. Así, hay que escoger un punto más dentro del intervalo. Después, hay que tomar un cuarto punto. La prueba para el máximo podrá aplicarse para determinar si el máximo se encuentra dentro de los primeros tres o de los últimos tres puntos.

La clave para hacer eficiente este procedimiento es la adecuada elección de los puntos intermedios. Como en la bisección, la meta es minimizar las evaluaciones de la

**FIGURA 13.2**

El paso inicial en el algoritmo de búsqueda de la sección dorada consiste en elegir dos puntos interiores de acuerdo con la razón dorada.

función reemplazando los valores anteriores con los nuevos. Esta meta se puede alcanzar especificando que las siguientes dos condiciones se satisfagan (figura 13.2):

$$\ell_0 = \ell_1 + \ell_2 \quad (13.1)$$

$$\frac{\ell_1}{\ell_0} = \frac{\ell_2}{\ell_1} \quad (13.2)$$

La primera condición especifica que la suma de las dos sublongitudes  $\ell_1$  y  $\ell_2$  debe ser igual a la longitud original del intervalo. La segunda indica que el cociente o razón entre las longitudes debe ser igual. La ecuación (13.1) se sustituye en la (13.2),

$$\frac{\ell_1}{\ell_1 + \ell_2} = \frac{\ell_2}{\ell_1} \quad (13.3)$$

Si se toma el recíproco y  $R = \ell_2/\ell_1$ , se llega a

$$1 + R = \frac{1}{R} \quad (13.4)$$

o

$$R^2 + R - 1 = 0 \quad (13.5)$$

de la cual se obtiene la raíz positiva

$$R = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4(-1)}}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 0.61803... \quad (13.6)$$

Este valor, que se conoce desde la antigüedad, se llama *razón dorada* o *razón áurea* (véase el cuadro 13.1). Como permite encontrar el valor óptimo en forma eficiente, es el

### Cuadro 13.1 La razón dorada y los números de Fibonacci

En muchas culturas, a ciertos números se les otorgan algunas cualidades. Por ejemplo, en Occidente se suele decir “el 7 de la suerte” y “el funesto viernes 13”. Los antiguos griegos llamaron al siguiente número la “razón dorada” o áurea:

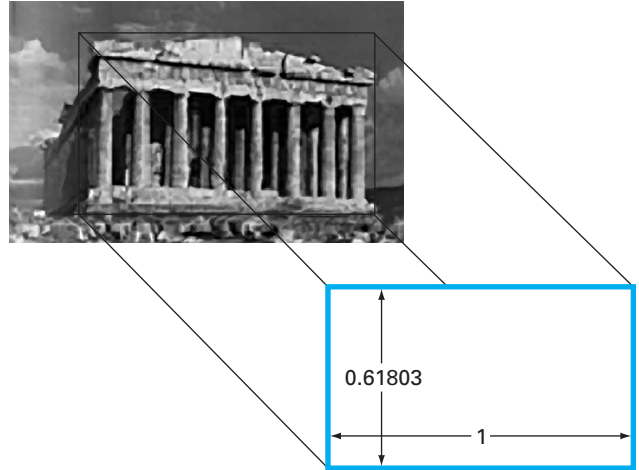
$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.61803\dots$$

Esta razón fue empleada con un gran número de propósitos, incluyendo el desarrollo del rectángulo de la figura 13.3. Tales proporciones fueron consideradas por los griegos como estéticamente agradables. Entre otras cosas, muchos de los templos siguieron esta forma.

La razón dorada se relaciona con una importante sucesión matemática conocida como los *números de Fibonacci*, que son

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$$

Cada número después de los dos primeros representa la suma de los dos precedentes. Esta secuencia aparece en diversas áreas de la ciencia y la ingeniería. En el contexto del presente análisis, una interesante propiedad de la sucesión de Fibonacci relaciona la razón entre números consecutivos de la serie; es decir,  $0/1 = 0$ ,  $1/1 = 1$ ,  $1/2 = 0.5$ ,  $2/3 = 0.667$ ,  $3/5 = 0.6$ ,  $5/8 = 0.625$ ,  $8/13 = 0.615$ , y así sucesivamente. La razón entre números consecutivos se va aproximando a la razón dorada.



**FIGURA 13.3**

El Partenón de Atenas, Grecia, fue construido en el siglo V antes de Cristo. Sus dimensiones frontales se ajustan casi exactamente a un rectángulo dorado.

elemento clave del método de la sección dorada que hemos estado desarrollando. Ahora construyamos un algoritmo para implementar este procedimiento en la computadora.

Como se mencionó antes y se ilustra en la figura 13.4, el método comienza con dos valores iniciales,  $x_l$  y  $x_u$ , que contienen un extremo local de  $f(x)$ . Después, se eligen dos puntos interiores  $x_1$  y  $x_2$  de acuerdo con la razón dorada,

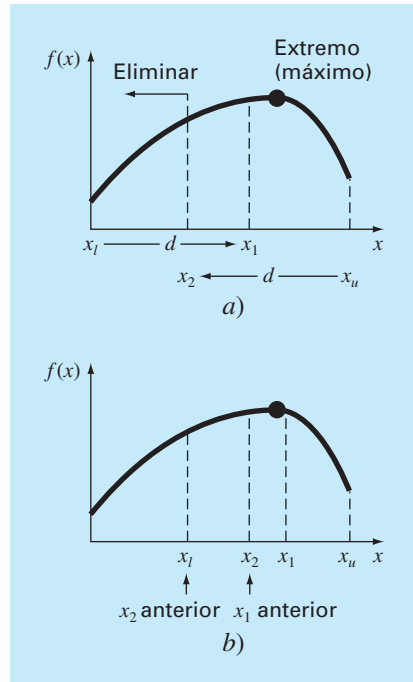
$$d = \frac{\sqrt{5}-1}{2}(x_u - x_l)$$

$$x_1 = x_l + d$$

$$x_2 = x_u - d$$

La función se evalúa en estos dos puntos interiores. Dos casos pueden presentarse:

1. Si, como es el caso en la figura 13.4,  $f(x_1) > f(x_2)$ , entonces el dominio de  $x$  a la izquierda de  $x_2$ , de  $x_l$  a  $x_2$ , se puede eliminar, ya que no contiene el máximo. En este caso,  $x_2$  será el nuevo  $x_l$  en la siguiente vuelta.
2. Si  $f(x_2) > f(x_1)$ , entonces el dominio de  $x$  a la derecha de  $x_1$ , de  $x_1$  a  $x_u$  podrá eliminarse. En este caso,  $x_1$  será el nuevo  $x_u$  en la siguiente iteración.

**FIGURA 13.4**

a) El paso inicial del algoritmo de búsqueda de la sección dorada involucra escoger dos puntos interiores de acuerdo con la razón dorada. b) El segundo paso implica definir un nuevo intervalo que incluya el valor óptimo.

Ahora, ésta es la ventaja real del uso de la razón dorada. Debido a que los  $x_1$  y  $x_2$  originales se han escogido mediante la razón dorada, no se tienen que recalculan todos los valores de la función en la siguiente iteración. Por ejemplo, en el caso ilustrado en la figura 13.4, el anterior  $x_1$  será el nuevo  $x_2$ . Esto significa que ya se tiene el valor para el nuevo  $f(x_2)$ , puesto que es el mismo valor de la función en el anterior  $x_1$ .

Para completar el algoritmo, ahora sólo se necesita determinar el nuevo  $x_1$ . Esto se realiza usando la misma proporcionalidad que antes,

$$x_1 = x_l + \frac{\sqrt{5}-1}{2}(x_u - x_l)$$

Un procedimiento similar podría usarse en el caso en que el óptimo caiga del lado izquierdo del subintervalo.

Conforme las iteraciones se repiten, el intervalo que contiene el extremo se reduce rápidamente. De hecho, en cada iteración el intervalo se reduce en un factor de la razón dorada (aproximadamente 61.8%). Esto significa que después de 10 iteraciones, el intervalo se acorta aproximadamente en  $0.618^{10}$  o 0.008 o 0.8% de su longitud inicial. Después de 20 iteraciones, se encuentra en 0.0066%. Esta reducción no es tan buena como la que se alcanza con la bisección; aunque éste es un problema más difícil.



## EJEMPLO 13.1 Búsqueda de la sección dorada

**Planteamiento del problema.** Use la búsqueda de la sección dorada para encontrar el máximo de

$$f(x) = 2 \operatorname{sen} x - \frac{x^2}{10}$$

dentro del intervalo  $x_l = 0$  y  $x_u = 4$ .

**Solución.** Primero, se utiliza la razón dorada para crear los dos puntos interiores

$$d = \frac{\sqrt{5}-1}{2}(4-0) = 2.472$$

$$x_1 = 0 + 2.472 = 2.472$$

$$x_2 = 4 - 2.472 = 1.528$$

Se evalúa la función en los puntos interiores

$$f(x_2) = f(1.528) = 2 \operatorname{sen}(1.528) - \frac{1.528^2}{10} = 1.765$$

$$f(x_1) = f(2.472) = 0.63$$

Debido a que  $f(x_2) > f(x_1)$ , el máximo está en el intervalo definido por  $x_l$ ,  $x_2$  y  $x_1$ . Así, para el nuevo intervalo, el límite inferior sigue siendo  $x_l = 0$ , y  $x_1$  será el límite superior; esto es,  $x_u = 2.472$ . Además, el primer valor  $x_2$  pasa a ser el nuevo  $x_1$ ; es decir,  $x_1 = 1.528$ . Asimismo, no se tiene que recalcular  $f(x_1)$  ya que se determinó en la iteración previa como  $f(1.528) = 1.765$ .

Todo lo que falta es calcular la nueva razón dorada y  $x_2$ ,

$$d = \frac{\sqrt{5}-1}{2}(2.472-0) = 1.528$$

$$x_2 = 2.472 - 1.528 = 0.944$$

La evaluación de la función en  $x_2$  es  $f(0.944) = 1.531$ . Como este valor es menor que el valor de la función en  $x_1$ , el máximo está en el intervalo dado por  $x_2$ ,  $x_1$  y  $x_u$ .

Si el proceso se repite, se obtienen los resultados tabulados a continuación:

$i$	$x_l$	$f(x_l)$	$x_2$	$f(x_2)$	$x_1$	$f(x_1)$	$x_u$	$f(x_u)$	$d$
1	0	0	1.5279	1.7647	2.4721	0.6300	4.0000	-3.1136	2.4721
2	0	0	0.9443	1.5310	1.5279	1.7647	2.4721	0.6300	1.5279
3	0.9443	1.5310	1.5279	1.7647	1.8885	1.5432	2.4721	0.6300	0.9443
4	0.9443	1.5310	1.3050	1.7595	1.5279	1.7647	1.8885	1.5432	0.5836
5	1.3050	1.7595	1.5279	1.7647	1.6656	1.7136	1.8885	1.5432	0.3607
6	1.3050	1.7595	1.4427	1.7755	1.5279	1.7647	1.6656	1.7136	0.2229
7	1.3050	1.7595	1.3901	1.7742	1.4427	1.7755	1.5279	1.7647	0.1378
8	1.3901	1.7742	1.4427	1.7755	1.4752	1.7732	1.5279	1.7647	0.0851

Observe que el máximo está resaltado en cada iteración. Después de ocho iteraciones, el máximo se encuentra en  $x = 1.4427$  con un valor de la función 1.7755. Así, el resultado converge al valor verdadero, 1.7757, en  $x = 1.4276$ .

Recuerde que en la bisección (sección 5.2.1), se puede calcular un límite superior exacto para el error en cada iteración. Usando un razonamiento similar, un límite superior para la búsqueda de la sección dorada se obtiene como sigue. Una vez que se termina una iteración, el valor óptimo estará en uno de los dos intervalos. Si  $x_2$  es el valor óptimo de la función, estará en el intervalo inferior  $(x_l, x_2, x_1)$ . Si  $x_1$  es el valor óptimo de la función, estará en el intervalo superior  $(x_2, x_1, x_u)$ . Debido a que los puntos interiores son simétricos, se utiliza cualquiera de los casos para definir el error.

Observando el intervalo superior, si el valor verdadero estuviera en el extremo izquierdo, la máxima distancia al valor estimado sería

$$\begin{aligned}\Delta x_a &= x_1 - x_2 \\ &= x_l + R(x_u - x_l) - x_u + R(x_u - x_l) \\ &= (x_l - x_u) + 2R(x_u - x_l) \\ &= (2R - 1)(x_u - x_l)\end{aligned}$$

o  $0.236(x_u - x_l)$

Si el valor verdadero estuviera en el extremo derecho, la máxima distancia al valor estimado sería

$$\begin{aligned}\Delta x_b &= x_u - x_1 \\ &= x_u - x_l - R(x_u - x_l) \\ &= (1 - R)(x_u - x_l)\end{aligned}$$

o  $0.382(x_u - x_l)$ . Por lo tanto, este caso podría representar el error máximo. Este resultado después se normaliza al valor óptimo de esa iteración,  $x_{\text{ópt}}$ , para dar

$$\varepsilon_a = (1 - R) \left| \frac{x_u - x_l}{x_{\text{ópt}}} \right| 100\%$$

Esta estimación proporciona una base para terminar las iteraciones.

En la figura 13.5a se presenta el pseudocódigo del algoritmo para la búsqueda de la sección dorada en la maximización. En la figura 13.5b se muestran las pequeñas modificaciones para convertir el algoritmo en una minimización. En ambas versiones el valor  $x$  para el óptimo se regresa como el valor de la función (*dorado*). Además, el valor de  $f(x)$  óptimo se regresa como la variable  $f(x)$ .

Usted se preguntará por qué hemos hecho énfasis en reducir las evaluaciones de la función para la búsqueda de la sección dorada. Por supuesto, para resolver una sola optimización, la velocidad ahorrada podría ser insignificante. Sin embargo, existen dos importantes casos donde minimizar el número de evaluaciones de la función llega a ser importante. Éstos son:

1. *Muchas evaluaciones.* Hay casos donde el algoritmo de búsqueda de la sección dorada puede ser parte de otros cálculos. Entonces, éste podría ser llamado muchas veces. Por lo tanto, mantener el número de evaluaciones de la función en un mínimo ofrecería dar grandes ventajas en tales casos.

**FIGURA 13.5**

Algoritmo para la búsqueda de la sección dorada.

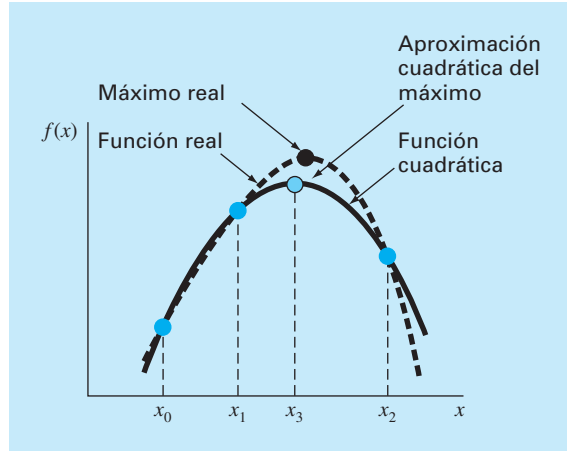
```

FUNCTION Gold (xlow, xhigh, maxit, es, fx)
  R = (50.5 - 1)/2
  xl = xlow; xu = xhigh
  iter = 1
  d = R * (xu - xl)
  x1 = xl + d; x2 = xu - d
  f1 = f(x1)
  f2 = f(x2)
  IF f1 > f2 THEN
    xopt = x1
    fx = f1
  ELSE
    xopt = x2
    fx = f2
  END IF
  DO
    d = R*d
    IF f1 > f2 THEN
      xl = x2
      x2 = x1
      x1 = xl+d
      f2 = f1
      f1 = f(x1)
    ELSE
      xu = x1
      x1 = x2
      x2 = xu-d
      f1 = f2
      f2 = f(x2)
    END IF
    iter = iter+1
    IF f1 > f2 THEN
      xopt = x1
      fx = f1
    ELSE
      xopt = x2
      fx = f2
    END IF
    IF xopt ≠ 0. THEN
      ea = (1.-R) *ABS((xu - xl)/xopt) * 100.
    END IF
    IF ea ≤ es OR iter ≥ maxit EXIT
  END DO
  Gold = xopt
END Gold

```

a) **Maximización**

b) **Minimización**

**FIGURA 13.6**

Descripción gráfica de la interpolación cuadrática.

2. *Evaluaciones que toman mucho tiempo.* Por razones didácticas, se usan funciones simples en la mayoría de nuestros ejemplos. Usted deberá tener en cuenta que una función puede ser muy compleja y consumir mucho tiempo en su evaluación. Por ejemplo, en una parte posterior de este libro, se describirá cómo se utiliza la optimización para estimar los parámetros de un modelo que consiste de un sistema de ecuaciones diferenciales. En tales casos, la “función” comprende la integración del modelo que tomarían mucho tiempo. Cualquier método que minimice tales evaluaciones resultará provechoso.

## 13.2 INTERPOLACIÓN CUADRÁTICA

La interpolación cuadrática aprovecha la ventaja de que un polinomio de segundo grado con frecuencia proporciona una buena aproximación a la forma de  $f(x)$  en las cercanías de un valor óptimo (figura 13.6).

Así como existe sólo una línea recta que pasa por dos puntos, hay únicamente una ecuación cuadrática o parábola que pasa por tres puntos. De esta forma, si se tiene tres puntos que contienen un punto óptimo, se ajusta una parábola a los puntos. Después se puede derivar e igualar el resultado a cero, y así obtener una estimación de la  $x$  óptima. Es posible demostrar mediante algunas operaciones algebraicas que el resultado es

$$x_3 = \frac{f(x_0)(x_1^2 - x_2^2) + f(x_1)(x_2^2 - x_0^2) + f(x_2)(x_0^2 - x_1^2)}{2f(x_0)(x_1 - x_2) + 2f(x_1)(x_2 - x_0) + 2f(x_2)(x_0 - x_1)} \quad (13.7)$$

donde  $x_0$ ,  $x_1$  y  $x_2$  son los valores iniciales, y  $x_3$  es el valor de  $x$  que corresponde al valor máximo del ajuste cuadrático para los valores iniciales.

## EJEMPLO 13.2 Interpolación cuadrática

**Planteamiento del problema.** Use la interpolación cuadrática para aproximar el máximo de

$$f(x) = 2 \operatorname{sen} x - \frac{x^2}{10}$$

con los valores iniciales  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 1$  y  $x_2 = 4$ .

**Solución.** Se evalúa la función en los tres valores iniciales,

$$x_0 = 0 \quad f(x_0) = 0$$

$$x_1 = 1 \quad f(x_1) = 1.5829$$

$$x_2 = 4 \quad f(x_2) = -3.1136$$

y sustituyendo en la ecuación (13.7) se obtiene,

$$x_3 = \frac{0(1^2 - 4^2) + 1.5829(4^2 - 0^2) + (-3.1136)(0^2 - 1^2)}{2(0)(1 - 4) + 2(1.5829)(4 - 0) + 2(-3.1136)(0 - 1)} = 1.5055$$

para la cual el valor de la función es  $f(1.5055) = 1.7691$ .

Después, se emplea una estrategia similar a la de la búsqueda de la sección dorada para determinar qué punto se descartará. Ya que el valor de la función en el nuevo punto es mayor que en el punto intermedio ( $x_1$ ) y el nuevo valor de  $x$  está a la derecha del punto intermedio, se descarta el valor inicial inferior ( $x_0$ ). Por lo tanto, para la próxima iteración,

$$x_0 = 1 \quad f(x_0) = 1.5829$$

$$x_1 = 1.5055 \quad f(x_1) = 1.7691$$

$$x_2 = 4 \quad f(x_2) = -3.1136$$

los valores se sustituyen en la ecuación (13.7) para obtener

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{1.5829(1.5055^2 - 4^2) + 1.7691(4^2 - 1^2) + (-3.1136)(1^2 - 1.5055^2)}{2(1.5829)(1.5055 - 4) + 2(1.7691)(4 - 1) + 2(-3.1136)(1 - 1.5055)} \\ &= 1.4903 \end{aligned}$$

para el cual el valor de la función es  $f(1.4903) = 1.7714$ .

El proceso se puede repetir, dando los resultados tabulados abajo:

$i$	$x_0$	$f(x_0)$	$x_1$	$f(x_1)$	$x_2$	$f(x_2)$	$x_3$	$f(x_3)$
1	0.0000	0.0000	1.0000	1.5829	4.0000	-3.1136	1.5055	1.7691
2	1.0000	1.5829	1.5055	1.7691	4.0000	-3.1136	1.4903	1.7714
3	1.0000	1.5829	1.4903	1.7714	1.5055	1.7691	1.4256	1.7757
4	1.0000	1.5829	1.4256	1.7757	1.4903	1.7714	1.4266	1.7757
5	1.4256	1.7757	1.4266	1.7757	1.4903	1.7714	1.4275	1.7757

Así, con cinco iteraciones, el resultado converge rápidamente al valor verdadero: 1.7757 en  $x = 1.4276$ .

Debemos mencionar que como en el método de la falsa posición, en la interpolación cuadrática puede ocurrir que sólo se retenga un extremo del intervalo. Así, la convergencia puede ser lenta. Como prueba de lo anterior, observe que en nuestro ejemplo, 1.0000 fue un punto extremo en la mayoría de las iteraciones.

Este método, así como otros que usan polinomios de tercer grado, se pueden formular como parte de los algoritmos que contienen tanto pruebas de convergencia, como cuidadosas estrategias de selección para los puntos que habrán de retenerse en cada iteración y formas para minimizar la acumulación del error de redondeo. En particular, consulte el método de Brent en Press y colaboradores (1992).

### 13.3 MÉTODO DE NEWTON

Recuerde que el método de Newton-Raphson del capítulo 6 es un método abierto que permite encontrar la raíz  $x$  de una función de tal manera que  $f(x) = 0$ . El método se resume como

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Se utiliza un método abierto similar para encontrar un valor óptimo de  $f(x)$  al definir una nueva función,  $g(x) = f'(x)$ . Así, como el mismo valor óptimo  $x^*$  satisface ambas funciones

$$f'(x^*) = g(x^*) = 0$$

se emplea lo siguiente

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f'(x_i)}{f''(x_i)} \quad (13.8)$$

como una técnica para encontrar el mínimo o máximo de  $f(x)$ . Se deberá observar que esta ecuación también se obtiene escribiendo una serie de Taylor de segundo orden para  $f(x)$  e igualando la derivada de la serie a cero. El método de Newton es abierto y similar al de Newton-Raphson, pues no requiere de valores iniciales que contengan al óptimo. Además, también tiene la desventaja de que llega a ser divergente. Por último, usualmente es una buena idea verificar que la segunda derivada tenga el signo correcto para confirmar que la técnica converge al resultado deseado.

#### EJEMPLO 13.3 Método de Newton

**Planteamiento del problema.** Con el método de Newton encuentre el máximo de

$$f(x) = 2 \sin x - \frac{x^2}{10}$$

con un valor inicial de  $x_0 = 2.5$ .

**Solución.** La primera y segunda derivadas de la función se calculan para obtener

$$f'(x) = 2 \cos x - \frac{x}{5}$$

$$f''(x) = -2 \sin x - \frac{1}{5}$$

las cuales se sustituyen en la ecuación (13.8) para llegar a

$$x_{i+1} = x_i - \frac{2 \cos x_i - x_i / 5}{-2 \sin x_i - 1 / 5}$$

Al sustituir el valor inicial se obtiene

$$x_1 = 2.5 - \frac{2 \cos 2.5 - 2.5 / 5}{-2 \sin 2.5 - 1 / 5} = 0.99508$$

para la cual el valor de la función es 1.57859. La segunda iteración da

$$x_1 = 0.995 - \frac{2 \cos 0.995 - 0.995 / 5}{-2 \sin 0.995 - 1 / 5} = 1.46901$$

que tiene como valor de la función 1.77385.

El proceso se repite, dando los resultados abajo tabulados:

$i$	$x$	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	2.5	0.57194	-2.10229	-1.39694
1	0.99508	1.57859	0.88985	-1.87761
2	1.46901	1.77385	-0.09058	-2.18965
3	1.42764	1.77573	-0.00020	-2.17954
4	1.42755	1.77573	0.00000	-2.17952

Así, después de cuatro iteraciones, el resultado converge en forma rápida al valor verdadero.

Aunque el método de Newton funciona bien en algunos casos, no es práctico en otros donde las derivadas no se pueden calcular fácilmente. En tales casos, hay otros procedimientos que no implican la evaluación de la derivada. Por ejemplo, usando una versión semejante al método de la secante, se pueden desarrollar aproximaciones en diferencias finitas para las evaluaciones de la derivada.

Una desventaja importante de este método es que llega a diverger según sea la naturaleza de la función y la calidad del valor inicial. Así, usualmente se emplea sólo cuando se está cerca del valor óptimo. Las técnicas híbridas que usan métodos cerrados lejos del óptimo y los *métodos abiertos* cercanos al óptimo intentan aprovechar las fortalezas de ambos procedimientos.

Esto concluye nuestro tratamiento de los métodos para encontrar el valor óptimo de funciones en una sola variable. Algunos ejemplos de la ingeniería se presentan en el capítulo 16. Por otra parte, las técnicas descritas aquí son un importante elemento de algunos procedimientos para optimizar funciones multivariantes, como se verá en el siguiente capítulo.

## PROBLEMAS

### 13.1 Dada la fórmula

$$f(x) = -x^2 + 8x - 12$$

- Determine en forma analítica (esto es, por medio de derivación) el valor máximo y el correspondiente de  $x$  para esta función.
- Verifique que la ecuación (13.7) produce los mismos resultados con base en los valores iniciales de  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 2$  y  $x_2 = 6$ .

### 13.2 Dada la función

$$f(x) = -1.5x^6 - 2x^4 + 12x$$

- Grafique la función.
- Utilice métodos analíticos para probar que la función es cóncava para todos los valores de  $x$ .
- Derive la función y después use algún método de localización de raíces para resolver cuál es el máximo  $f(x)$  y el valor correspondiente de  $x$ .

**13.3** Encuentre el valor de  $x$  que maximiza  $f(x)$  en el problema 13.2 con el uso de la búsqueda de la sección dorada. Emplee valores iniciales de  $x_l = 0$  y  $x_u = 2$  y realice tres iteraciones.

**13.4** Repita el problema 13.3, pero utilice interpolación cuadrática. Emplee valores iniciales de  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 1$  y  $x_2 = 2$  y ejecute tres iteraciones.

**13.5** Repita el problema 13.3 pero use el método de Newton. Utilice un valor inicial de  $x_0 = 2$  y lleve a cabo tres iteraciones.

**13.6** Analice las ventajas y desventajas de la búsqueda de la sección dorada, interpolación cuadrática y el método de Newton, para localizar un valor óptimo en una dimensión.

**13.7** Emplee los métodos siguientes para encontrar el máximo de

$$f(x) = 4x - 1.8x^2 + 1.2x^3 - 0.3x^4$$

- Búsqueda de la sección dorada ( $x_l = -2$ ,  $x_u = 4$ ,  $\varepsilon_s = 1\%$ ).
- Interpolación cuadrática ( $x_0 = 1.75$ ,  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 2.5$ , iteraciones = 4).
- Método de Newton ( $x_0 = 3$ ,  $\varepsilon_s = 1\%$ ).

### 13.8 Considere la función siguiente:

$$f(x) = -x^4 - 2x^3 - 8x^2 - 5x$$

Use los métodos analítico y gráfico para demostrar que la función tiene un máximo para algún valor de  $x$  en el rango  $-2 \leq x \leq 1$ .

**13.9** Emplee los métodos siguientes para encontrar el máximo de la función del problema 13.8:

- Búsqueda de la sección dorada ( $x_l = -2$ ,  $x_u = 1$ ,  $\varepsilon_s = 1\%$ ).
- Interpolación cuadrática ( $x_0 = -2$ ,  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 1$ , iteraciones = 4).
- Método de Newton ( $x_0 = -1$ ,  $\varepsilon_s = 1\%$ ).

### 13.10 Considere la función siguiente:

$$f(x) = 2x + \frac{3}{x}$$

Ejecute 10 iteraciones de interpolación cuadrática para localizar el mínimo. Haga comentarios acerca de la convergencia de sus resultados. ( $x_0 = 0.1$ ,  $x_1 = 0.5$ ,  $x_2 = 5$ ).

**13.11** Considere la función que sigue:

$$f(x) = 3 + 6x + 5x^2 + 3x^3 + 4x^4$$

Localice el mínimo por medio de encontrar la raíz de la derivada de dicha función. Utilice el método de bisección con valores iniciales de  $x_l = -2$  y  $x_u = 1$ .

**13.12** Determine el mínimo de la función del problema 13.11 con los métodos siguientes:

- Método de Newton ( $x_0 = -1$ ,  $\varepsilon_s = 1\%$ ).
- Método de Newton, pero con el uso de una aproximación en diferencias finitas para las estimaciones de las derivadas:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i + \delta x_i) - f(x_i - \delta x_i)}{2\delta x_i}$$

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i + \delta x_i) - 2f(x_i) - f(x_i - \delta x_i)}{\delta x_i^2}$$

donde  $\delta$  = fracción de perturbación (= 0.01). Use un valor inicial de  $x_0 = -1$  y haga iteraciones hasta que  $\varepsilon_s = 1\%$ .

**13.13** Desarrolle un programa con el empleo de un lenguaje de programación o de macros, para implantar el algoritmo de la



búsqueda de la sección dorada. Diseñe el programa expresamente para que localice un máximo. La subrutina debe tener las características siguientes:

- Iterar hasta que el error relativo esté por debajo de un criterio de detención o exceda un número máximo de iteraciones.
- Dar los valores óptimos tanto de  $x$  como de  $f(x)$ .
- Minimice el número de evaluaciones de la función.

Pruebe su programa con el mismo problema del ejemplo 13.1.

**13.14** Desarrolle un programa como el que se describe en el problema 13.13, pero haga que ejecute una minimización o una maximización en función de la preferencia del usuario.

**13.15** Desarrolle un programa por medio de un lenguaje de programación o de macros, para implantar el algoritmo de la interpolación cuadrática. Diseñe el programa de tal forma que esté expresamente orientado para localizar un máximo. La subrutina debe tener las características siguientes:

- Estar basada en dos valores iniciales, y hacer que el programa genere el tercer valor inicial en el punto medio del intervalo.
- Comprobar si los valores iniciales comprenden un máximo. Si no fuera así, la subrutina no debe ejecutar el algoritmo, sino enviar un mensaje de error.
- Iterar hasta que el error relativo esté por debajo de un criterio de terminación o exceda un número máximo de iteraciones.
- Dar los valores óptimos tanto de  $x$  como de  $f(x)$ .
- Minimizar el número de evaluaciones de la función.

Pruebe su programa con el mismo problema del ejemplo 13.2.

**13.16** Desarrolle un programa por medio de un lenguaje de programación o de macros para implantar el método de Newton. La subrutina debe tener las características siguientes:

- Iterar hasta que el error relativo esté por debajo de un criterio de terminación o supere un número máximo de iteraciones.
- Obtener los valores óptimos tanto de  $x$  como de  $f(x)$ .

Pruebe su programa con el mismo problema del ejemplo 13.3.

**13.17** En ciertos puntos atrás de un aeroplano se hacen mediciones de la presión. Los datos tienen el mejor ajuste con la curva

$y = 6 \cos x - 1.5 \sin x$ , desde  $x = 0$  hasta 6 s. Utilice cuatro iteraciones del método de la búsqueda de la sección dorada para encontrar la presión mínima. Elija  $x_l = 2$  y  $x_u = 4$ .

**13.18** La trayectoria de una pelota se calcula por medio de la ecuación

$$y = (\tan \theta_0)x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta_0}x^2 + y_0$$

donde  $y$  = altura (m),  $\theta_0$  = ángulo inicial (radianes),  $v_0$  = velocidad inicial (m/s),  $g$  = constante gravitacional = 9.81 m/s<sup>2</sup>, y  $y_0$  = altura inicial (m). Use el método de la búsqueda de la sección dorada para determinar la altura máxima dado que  $y_0 = 1$  m,  $v_0 = 25$  m/s y  $\theta_0 = 50^\circ$ . Haga iteraciones hasta que el error aproximado esté por debajo de  $\varepsilon_s = 1\%$ , con el uso de valores iniciales de  $x_l = 0$  y  $x_u = 60$  m.

**13.19** La deflexión de una trabe uniforme sujeta a una carga con distribución creciente en forma lineal, se calcula con

$$y = \frac{w_0}{120EL}(-x^5 + 2L^2x^3 - L^4x)$$

Dado que  $L = 600$  cm,  $E = 50\,000$  kN/cm<sup>2</sup>,  $I = 30\,000$  cm<sup>4</sup>, y  $w_0 = 2.5$  kN/cm, determine el punto de deflexión máximo con los métodos a) gráfico, b) de la búsqueda de la sección dorada hasta que el error aproximado esté por debajo de  $\varepsilon_s = 1\%$  con valores iniciales de  $x_l = 0$  y  $x_u = L$ .

**13.20** Desde la superficie de la tierra, se lanza hacia arriba un objeto con masa de 100 kg a una velocidad de 50 m/s. Si el objeto está sujeto a un arrastre lineal ( $c = 15$  kg/s), use el método de la búsqueda de la sección dorada para determinar la altura máxima que alcanza el objeto. Recomendación: repase la sección PT4.1.2.

**13.21** La distribución normal es una curva con forma de campana definida por la ecuación

$$y = e^{-x^2}$$

Utilice el método de la búsqueda de la sección dorada para determinar la ubicación del punto de deflexión de esta curva para un valor positivo de  $x$ .

# CAPÍTULO 14

## Optimización multidimensional no restringida

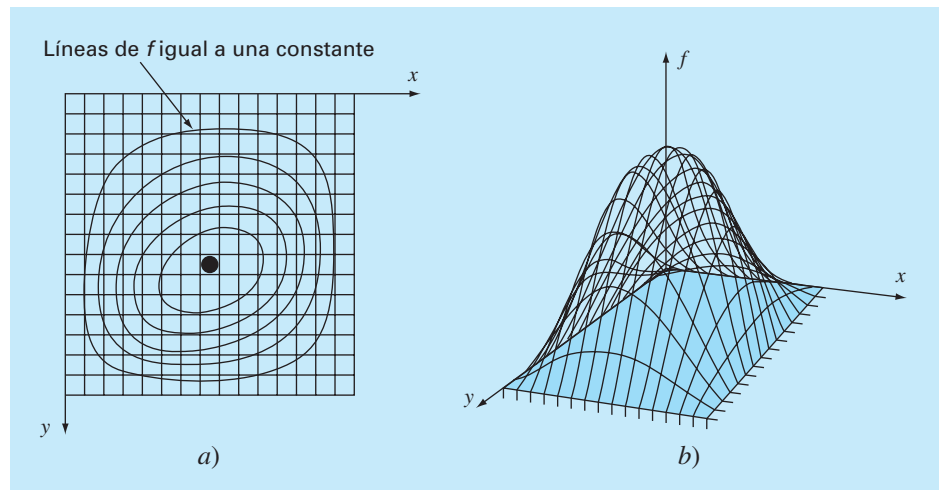
Este capítulo describe las técnicas para encontrar el mínimo o el máximo de una función en varias variables. Recuerde que en el capítulo 13 nuestra imagen visual de una búsqueda unidimensional fue como una montaña rusa. En el caso de dos dimensiones, la imagen es como de montañas y valles (figura 14.1). Para problemas de más dimensiones, no es posible implementar imágenes.

Se ha optado por limitar este capítulo al caso de dos dimensiones. Esto se debe a que las características esenciales de las búsquedas multidimensionales se comunican mejor de forma visual.

Las técnicas para la optimización multidimensional no restringida se clasifican de varias formas. Para propósitos del presente análisis, se dividirán dependiendo de si se requiere la evaluación de la derivada. Los procedimientos que no requieren dicha evaluación se llaman *métodos sin gradiente* o *directos*. Aquellos que requieren derivadas se conocen como *métodos de gradientes* o *métodos de descenso* (o *ascenso*).

### FIGURA 14.1

La forma más fácil de visualizar las búsquedas en dos dimensiones es en el contexto del ascenso de una montaña (maximización) o del descenso a un valle (minimización). a) Mapa topográfico bidimensional (2-D) de la montaña que corresponde a la gráfica tridimensional (3-D) de la montaña en el inciso b).



## 14.1 MÉTODOS DIRECTOS

Estos métodos van desde procedimientos muy burdos hasta técnicas más elegantes que intentan aprovechar la naturaleza de la función. Se empezará el análisis con un método burdo.

### 14.1.1 Búsqueda aleatoria

Un simple ejemplo de los métodos burdos es el *método de la búsqueda aleatoria*. Como su nombre lo indica, dicho método evalúa en forma repetida la función con los valores seleccionados aleatoriamente de la variable independiente. Si el método se lleva a cabo con un número suficiente de muestras, el óptimo eventualmente se localizará.

#### EJEMPLO 14.1 Método de la búsqueda aleatoria

**Planteamiento del problema.** Utilice un generador de números aleatorios para localizar el máximo de

$$f(x, y) = y - x - 2x^2 - 2xy - y^2 \quad (\text{E14.1.1})$$

en el dominio acotado por  $x = -2$  a  $2$ , y  $y = 1$  a  $3$ . El dominio se muestra en la figura 14.2. Observe que un solo máximo de 1.5 se encuentra en  $x = -1$  y  $y = 1.5$ .

**Solución.** Por lo común, los generadores de números aleatorios proporcionan valores entre 0 y 1. Si se designa a tal número como  $r$ , la siguiente fórmula se usa para generar valores de  $x$  aleatorios en un rango entre  $x_l$  y  $x_u$ :

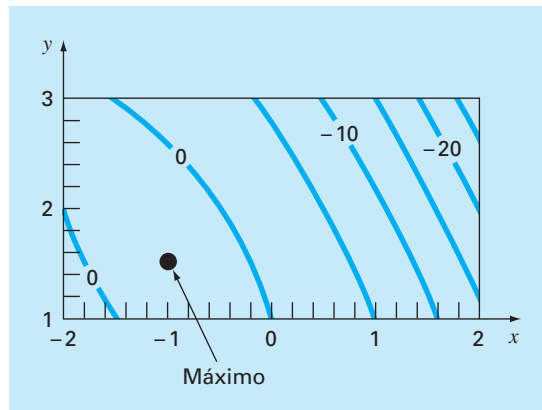
$$x = x_l + (x_u - x_l)r$$

En el presente ejemplo,  $x_l = -2$  y  $x_u = 2$ , y la fórmula es

$$x = -2 + (2 - (-2))r = -2 + 4r$$

**FIGURA 14.2**

Ecuación (E14.1.1) que muestra el máximo en  $x = -1$  y  $y = 1.5$ .



Esto se prueba al sustituir 0 y 1 para obtener  $-2$  y  $2$ , respectivamente.

De manera similar para  $y$ , una fórmula para el mismo ejemplo se desarrolla como

$$y = y_l + (y_u - y_l)r = 1 + (3 - 1)r = 1 + 2r$$

El siguiente macrocódigo VBA de Excel utiliza la función número aleatorio Rnd de VBA, para generar un par de valores  $(x, y)$  que se sustituyen en la ecuación (E.14.1.1). El valor máximo obtenido en estos ensayos aleatorios se guarda en la variable *maxf*, y los valores correspondientes de  $x$  y  $y$  en *maxx* y *maxy*, respectivamente.

```
maxf = -1E9
For j = 1 To n
    x = -2 + 4 * Rnd
    y = 1 + 2 * Rnd
    fn = y - x - 2 * x ^ 2 - 2 * x * y - y ^ 2
    If fn > maxf Then
        maxf = fn
        maxx = x
        maxy = y
    End If
Next j
```

Después de varias iteraciones se obtiene

Iteraciones	$x$	$y$	$f(x, y)$
1 000	-0.9886	1.4282	1.2462
2 000	-1.0040	1.4724	1.2490
3 000	-1.0040	1.4724	1.2490
4 000	-1.0040	1.4724	1.2490
5 000	-1.0040	1.4724	1.2490
6 000	-0.9837	1.4936	1.2496
7 000	-0.9960	1.5079	1.2498
8 000	-0.9960	1.5079	1.2498
9 000	-0.9960	1.5079	1.2498
10 000	-0.9978	1.5039	1.2500

Los resultados indican que la técnica permite encontrar rápidamente el máximo verdadero.

Este simple procedimiento burdo funciona aun en discontinuidades y funciones no diferenciables. Además, siempre encuentra el óptimo global más que el local. Su principal deficiencia es que como crece el número de variables independientes, la implementación requerida llega a ser costosa. Además, no es eficiente, ya que no toma en cuenta el comportamiento de la función. Los procedimientos siguientes descritos en este capítulo sí toman en cuenta el comportamiento de la función, así como los resultados de las iteraciones previas para mejorar la velocidad de convergencia. En consecuencia, aunque la búsqueda aleatoria puede probar ser útil en un contexto de problemas específico, los siguientes métodos tienen una utilidad más general y casi siempre tienen la ventaja de lograr una convergencia más eficiente.

Debemos hacer notar que se dispone de técnicas de búsqueda más sofisticadas. Éstas constituyen procedimientos heurísticos que fueron desarrollados para resolver problemas no lineales y/o discontinuos, que la optimización clásica usualmente no maneja bien. La simulación de recocido, la búsqueda tabú, las redes neuronales artificiales y los algoritmos genéticos son unos pocos ejemplos. El más ampliamente utilizado es el *algoritmo genético*, en un número considerable de paquetes comerciales. En Holland (1975), iniciador del procedimiento del algoritmo genético, y Davis (1991) y Goldberg (1989) se encuentra un buen repaso de la teoría y la aplicación del método.

### 14.1.2 Búsquedas univariadas y búsquedas patrón

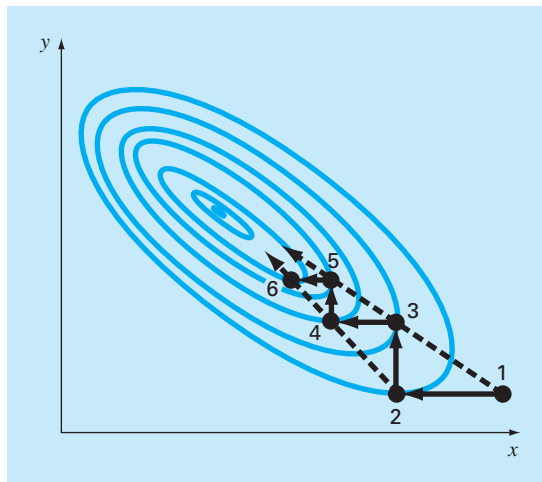
Es muy agradable tener un procedimiento de optimización eficiente que no requiera evaluar las derivadas. El método de búsqueda aleatoria, previamente descrito, no requiere la evaluación de la derivada, pero no es muy eficiente. En esta sección se describe un procedimiento, el método de búsqueda univariada, que es más eficiente y además no requiere la evaluación de la derivada.

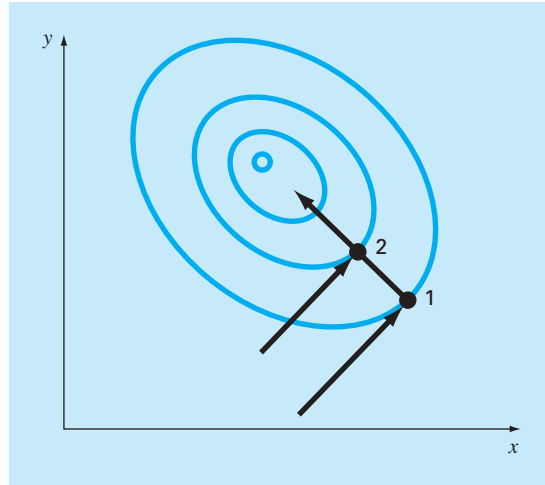
La estrategia básica del *método de búsqueda univariada* consiste en trabajar sólo con una variable a la vez, para mejorar la aproximación, mientras las otras se mantienen constantes. Puesto que únicamente cambia una variable, el problema se reduce a una secuencia de búsquedas en una dimensión, que se resuelven con una diversidad de métodos (dentro de ellos, los descritos en el capítulo 13).

Realicemos una búsqueda univariada por medio de una gráfica, como se muestra en la figura 14.3. Se comienza en el punto 1, y se mueve a lo largo del eje  $x$  con  $y$  constante hacia el máximo en el punto 2. Se puede ver que el punto 2 es un máximo, al observar que la trayectoria a lo largo del eje  $x$  toca justo una línea de contorno en ese punto. Luego, muévase a lo largo del eje  $y$  con  $x$  constante hacia el punto 3. Continúa este proceso generándose los puntos 4, 5, 6, etcétera.

**FIGURA 14.3**

Descripción gráfica de cómo se presenta una búsqueda univariada.



**FIGURA 14.4**

Direcciones conjugadas.

Aunque se está moviendo en forma gradual hacia el máximo, la búsqueda comienza a ser menos eficiente al moverse a lo largo de una cresta angosta hacia el máximo. Sin embargo, también observe que las líneas unen puntos alternados tales como 1-3, 3-5 o 2-4; 4-6 que van en la dirección general del máximo. Esas trayectorias presentan una oportunidad para llegar directamente a lo largo de la cresta hacia el máximo. Dichas trayectorias se denominan *direcciones patrón*.

Hay algoritmos formales que capitalizan la idea de las direcciones patrón para encontrar los valores óptimos de manera eficiente. El más conocido de tales algoritmos es el *método de Powell*, el cual se basa en la observación (véase la figura 14.4) de que si los puntos 1 y 2 se obtienen por búsquedas en una dimensión en la misma dirección, pero con diferentes puntos de partida, entonces la línea formada por 1 y 2 estará dirigida hacia el máximo. Tales líneas se llaman *direcciones conjugadas*.

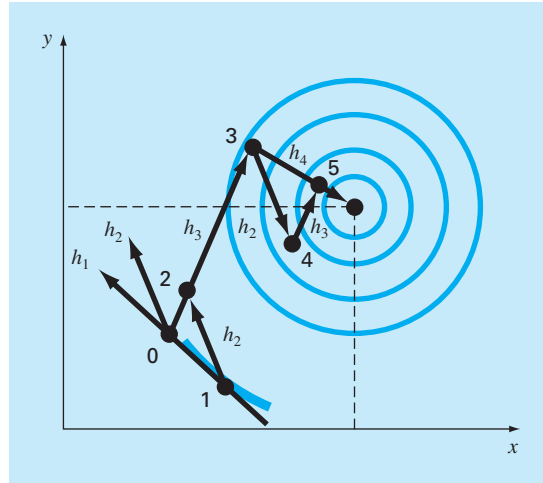
En efecto, se puede demostrar que si  $f(x, y)$  es una función cuadrática, las búsquedas secuenciales a lo largo de las direcciones conjugadas convergerán exactamente en un número finito de pasos, sin importar el punto de partida. Puesto que una función no lineal a menudo llega a ser razonablemente aproximada por una función cuadrática, los métodos basados en direcciones conjugadas son, por lo común, bastante eficientes y de hecho son convergentes en forma cuadrática conforme se aproximan al óptimo.

Se implementará en forma gráfica una versión simplificada del método de Powell para encontrar el máximo de

$$f(x, y) = c - (x - a)^2 - (y - b)^2$$

donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son constantes positivas. Esta ecuación representa contornos circulares en el plano  $x, y$ , como se muestra en la figura 14.5.

Se inicia la búsqueda en el punto cero con las direcciones iniciales  $h_1$  y  $h_2$ . Observe que  $h_1$  y  $h_2$  no son necesariamente direcciones conjugadas. Desde cero, se mueve a lo



**FIGURA 14.5**  
Método de Powell.

largo de la dirección  $h_1$  hasta un máximo que se localiza en el punto 1. Después se busca el punto 1 a lo largo de la dirección  $h_2$  para encontrar el punto 2. Luego, se forma una nueva dirección de búsqueda  $h_3$  a través de los puntos 0 y 2. Se busca a lo largo de esta dirección hasta que se localice el máximo en el punto 3. Después la búsqueda va del punto tres en la dirección  $h_2$  hasta que se localice el máximo en el punto 4. Del punto 4 se llega al punto 5, buscando de nuevo  $h_3$ . Ahora, observe que ambos puntos, 5 y 3, se ha localizado por búsqueda en la dirección  $h_3$ , desde dos puntos diferentes. Powell ha demostrado que  $h_4$  (formado por los puntos 3 y 5) y  $h_3$  son direcciones conjugadas. Así, buscando desde el punto 5 a lo largo de  $h_4$ , nos llevará directamente al máximo.

El método de Powell se puede refinar para volverse más eficiente; pero los algoritmos formales van más allá del alcance de este texto. Sin embargo, es un método eficiente que converge en forma cuadrática sin requerir evaluación de la derivada.

## 14.2 MÉTODOS CON GRADIENTE

Como su nombre lo indica, los *métodos con gradiente* utilizan en forma explícita información de la derivada para generar algoritmos eficientes que localicen el óptimo. Antes de describir los procedimientos específicos, primero se repasarán algunos conceptos y operaciones matemáticas clave.

### 14.2.1 Gradientes y hessianos

Recuerde del cálculo que la primera derivada de una función unidimensional proporciona la pendiente de la recta tangente a la función que se analiza. Desde el punto de vista de la optimización, ésta es una información útil. Por ejemplo, si la pendiente es positiva,

nos indica que al incrementar el valor de la variable independiente nos conducirá a un valor más alto de la función que se está analizando.

Del cálculo, también recuerde que la primera derivada puede indicarnos cuándo se ha encontrado un valor óptimo, puesto que éste es el punto donde la derivada toma el valor de cero. Además, el signo de la segunda derivada puede indicarnos si se ha alcanzado un mínimo (positivo en la segunda derivada) o un máximo (negativo en la segunda derivada).

Esas ideas fueron útiles en los algoritmos de búsqueda en una dimensión que se estudiaron en el capítulo anterior. No obstante, para entender por completo las búsquedas multidimensionales, se debe primero entender cómo se expresan la primera y la segunda derivada en un contexto multidimensional.

**El gradiente.** Suponga que se tiene una función en dos dimensiones  $f(x, y)$ . Un ejemplo podría ser su altura sobre una montaña como una función de su posición. Suponga que usted está en un lugar específico sobre la montaña  $(a, b)$  y quiere conocer la pendiente en una dirección arbitraria. Una forma de definir la dirección es a lo largo de un nuevo eje  $h$  que forma un ángulo  $\theta$  con el eje  $x$  (figura 14.6). La elevación a lo largo de un nuevo eje puede entenderse como una nueva función  $g(h)$ . Si usted define su posición como el origen de este eje (es decir,  $h = 0$ ), la pendiente en esta dirección podría designarse como  $g'(0)$ . Esta pendiente, que se llama *derivada direccional*, se puede calcular a partir de las derivadas parciales a lo largo de los ejes  $x$  y  $y$  mediante

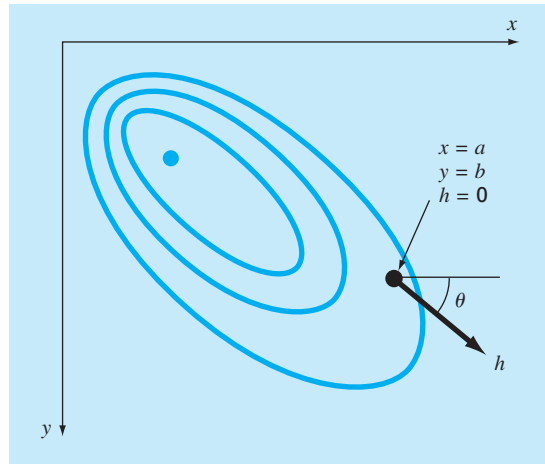
$$g'(0) = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta \quad (14.1)$$

donde las derivadas parciales son evaluadas en  $x = a$  y  $y = b$ .

Suponiendo que su objetivo es obtener la mayor elevación con el siguiente paso, ahora la pregunta lógica sería: ¿En qué dirección está el mayor paso de ascenso? La

**FIGURA 14.6**

El gradiente direccional se define a lo largo de un eje  $h$  que forma un ángulo  $\theta$  con el eje  $x$ .





respuesta a esta pregunta es proporcionada mediante lo que matemáticamente se conoce como el *gradiente*, el cual se define así:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} \quad (14.2)$$

Este vector también se conoce como “nabla  $f$ ”, el cual se relaciona con la derivada direccional de  $f(x, y)$  en el punto  $x = a$  y  $y = b$ .

La notación vectorial ofrece un medio conciso para generalizar el gradiente a  $n$  dimensiones,

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

¿Cómo se usa el gradiente? Para el problema de subir la montaña, si lo que interesa es ganar elevación tan rápidamente como sea posible, el gradiente nos indica, de manera local, qué dirección tomar y cuánto ganaremos al hacerlo. Observe, sin embargo, que dicha estrategia ¡no necesariamente nos lleva en una trayectoria directa a la cima! Más tarde, en este capítulo, se analizarán estas ideas con mayor profundidad.

#### EJEMPLO 14.2 Utilización del gradiente para evaluar la trayectoria de máxima pendiente

**Planteamiento del problema.** Con el gradiente evalúe la dirección de máxima pendiente para la función

$$f(x, y) = xy^2$$

en el punto  $(2, 2)$ . Se considera que la  $x$  positiva está dirigida hacia el este y la  $y$  positiva hacia el norte.

**Solución.** Primero, la elevación se determina así

$$f(4, 2) = 2(2)^2 = 8$$

Ahora, se evalúan las derivadas parciales,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 = 2^2 = 4$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy = 2(2)(2) = 8$$

las cuales se usan para determinar el gradiente como

$$\nabla f = 4\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$$

Este vector puede bosquejarse en un mapa topográfico de la función, como en la figura 14.7. Esto inmediatamente nos indica que la dirección que debe tomarse es

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{8}{4}\right) = 1.107 \text{ radianes } (= 63.4^\circ)$$

respecto al eje  $x$ . La pendiente en esta dirección, que es la magnitud de  $\nabla f$ , se calcula así

$$\sqrt{4^2 + 8^2} = 8.944$$

Así, durante el primer paso, inicialmente se ha ganado 8.944 unidades de aumento de elevación por unidad de distancia recorrida a lo largo de esta trayectoria con la mayor pendiente. Observe que la ecuación (14.1) da el mismo resultado,

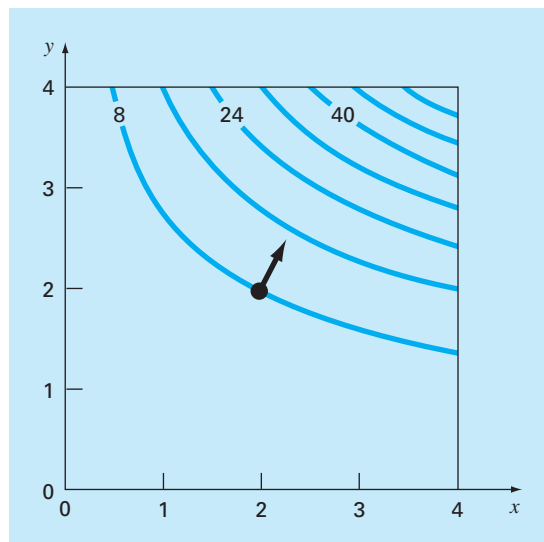
$$g'(0) = 4 \cos(1.107) + 8 \sin(1.107) = 8.944$$

Observe que para cualquier otra dirección, digamos  $\theta = 1.107/2 = 0.5235$ ,  $g'(0) = 4 \cos(0.5235) + 8 \sin(0.5235) = 7.608$ , que es menor.

Conforme se mueve hacia adelante, cambiarán tanto la dirección como la magnitud de la trayectoria de mayor pendiente. Estos cambios se pueden cuantificar a cada paso mediante el gradiente y la dirección del ascenso se modificará de acuerdo con ello.

**FIGURA 14.7**

La flecha sigue la dirección del ascenso de mayor pendiente calculado con el gradiente.



Se puede obtener una mejor comprensión al inspeccionar la figura 14.7. Como se indica, la dirección de ascenso con mayor pendiente es perpendicular, u *ortogonal*, al contorno en la elevación en la coordenada  $(2, 2)$ . Ésta es una propiedad del gradiente.

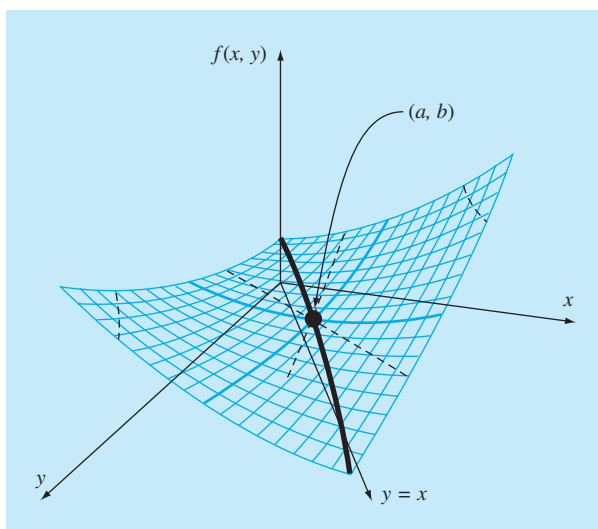
Además de definir la trayectoria de mayor pendiente, también se utiliza la primera derivada para determinar si se ha alcanzado un óptimo. Como en el caso para una función de una dimensión, si las derivadas parciales con respecto a  $x$  y  $y$  son cero, se ha alcanzado el óptimo en dos dimensiones.

**El hessiano.** En problemas de una dimensión, tanto la primera como la segunda derivada ofrecen información valiosa en la búsqueda del óptimo. La primera derivada  $a)$  proporciona una trayectoria de máxima inclinación de la función y  $b)$  indica que se ha alcanzado el óptimo. Una vez en el óptimo, la segunda derivada indicará si es un máximo [ $f''(x)$  negativo] o un mínimo [ $f''(x)$  positivo]. En los párrafos anteriores, se ilustró cómo el gradiente proporciona la mejor trayectoria en problemas multidimensionales. Ahora, se examinará cómo se usa la segunda derivada en este contexto.

Puede esperarse que si las segundas derivadas parciales respecto de  $x$  y  $y$  son negativas ambas, entonces se ha alcanzado un máximo. La figura 14.8 muestra una función en la que esto no es cierto. El punto  $(a, b)$  de esta gráfica parece ser un mínimo cuando se observa a lo largo ya sea de la dimensión  $x$  o de la  $y$ . En ambos casos, las segundas derivadas parciales son positivas. Sin embargo, si la función se observa a lo largo de la

### FIGURA 14.8

Un punto silla ( $x = a$  y  $y = b$ ). Observe que al ser vista la curva a lo largo de las direcciones  $x$  y  $y$ , parece que la función pasa por un mínimo (la segunda derivada es positiva); mientras que al verse a lo largo del eje  $x = y$ , es cóncava hacia abajo (la segunda derivada es negativa).



línea  $y = x$ , puede verse que se presenta un máximo en el mismo punto. Éste se conoce como punto *silla* y, claramente, no se presentan ni un máximo ni un mínimo en ese punto.

Ya sea que ocurra un máximo o un mínimo, esto involucra no sólo a las primeras derivadas parciales con respecto a  $x$  y  $y$ , sino también a la segunda derivada parcial respecto a  $x$  y  $y$ . Suponiendo que las derivadas parciales sean continuas en  $y$  cerca del punto que se habrá de evaluar, se puede calcular la siguiente cantidad:

$$|H| = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 \quad (14.3)$$

Pueden presentarse tres casos:

- Si  $|H| > 0$  y  $\partial^2 f / \partial x^2 > 0$ , entonces  $f(x, y)$  tiene un mínimo local.
- Si  $|H| > 0$  y  $\partial^2 f / \partial x^2 < 0$ , entonces  $f(x, y)$  tiene un máximo local.
- Si  $|H| < 0$ , entonces  $f(x, y)$  tiene un punto silla.

La cantidad  $|H|$  es igual al determinante de una matriz formada con las segundas derivadas,<sup>1</sup>

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} \quad (14.4)$$

donde a esta matriz se le conoce formalmente como la *hessiana* de  $f$ .

Además de proporcionar un medio para discriminar si una función multidimensional ha alcanzado el óptimo, el hessiano tiene otros usos en optimización (por ejemplo, en la forma multidimensional del método de Newton). En particular, permite búsquedas que incluyen curvatura de segundo orden para obtener mejores resultados.

**Aproximaciones por diferencias finitas.** Se debe mencionar que en los casos donde es difícil o inconveniente calcular analíticamente tanto el gradiente como el determinante hessiano, éstos se pueden evaluar numéricamente. En la mayoría de los casos se emplea el método que se presentó en la sección 6.3.3 para el método de la secante modificado. Es decir, las variables independientes se modifican ligeramente para generar las derivadas parciales requeridas. Por ejemplo, si se adopta el procedimiento de diferencias centrales, éstas se calculan así

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x + \delta x, y) - f(x - \delta x, y)}{2\delta x} \quad (14.5)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{f(x, y + \delta y) - f(x, y - \delta y)}{2\delta y} \quad (14.6)$$

<sup>1</sup> Observe que  $\partial^2 f / (\partial x \partial y) = \partial^2 f / (\partial y \partial x)$ .

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f(x + \delta x, y) - 2f(x, y) + f(x - \delta x, y)}{\delta x^2} \quad (14.7)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{f(x, y + \delta y) - 2f(x, y) + f(x, y - \delta y)}{\delta y^2} \quad (14.8)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{f(x + \delta x, y + \delta y) - f(x + \delta x, y - \delta y) - f(x - \delta x, y + \delta y) + f(x - \delta x, y - \delta y)}{4\delta x \delta y} \quad (14.9)$$

donde  $\delta$  es un valor fraccional muy pequeño.

Observe que los métodos empleados en paquetes de software comerciales también usan diferencias hacia adelante. Además, son usualmente más complicados que las aproximaciones enlistadas en las ecuaciones (14.5) a la (14.9). Por ejemplo, la biblioteca IMSL basa la perturbación en el  $\epsilon$  de la máquina. Dennis y Schnabel (1996) dan más detalles sobre este método.

Sin importar cómo se implemente la aproximación, la cuestión importante es que se pueda tener la opción de evaluar el gradiente y/o el hessiano en forma analítica. Esto algunas veces puede resultar una tarea ardua; pero el comportamiento del algoritmo puede ser benéfico para que el esfuerzo valga la pena. Las derivadas de forma cerrada serán exactas; pero lo más importante es que se reduce el número de evaluaciones de la función. Este último detalle tiene un impacto significativo en el tiempo de ejecución.

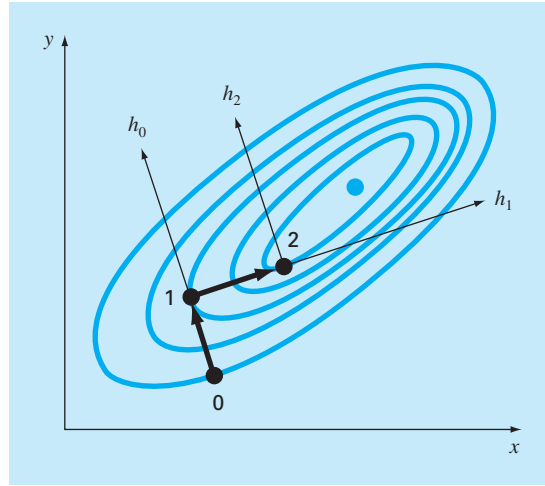
Por otro lado, usted practicará con frecuencia la opción de calcular estas cantidades internamente mediante procedimientos numéricos. En muchos casos, el comportamiento será el adecuado y se evitará el problema de numerosas derivaciones parciales. Tal podría ser el caso de los optimizadores utilizados en ciertas hojas de cálculo y paquetes de software matemático (por ejemplo, Excel). En dichos casos, quizá no se le dé la opción de introducir un gradiente y un hessiano derivados en forma analítica. Sin embargo, para problemas de tamaño pequeño o moderado esto no representa un gran inconveniente.

### 14.2.2 Método de máxima inclinación

Una estrategia obvia para subir una colina sería determinar la pendiente máxima en la posición inicial y después comenzar a caminar en esa dirección. Pero claramente surge otro problema casi de inmediato. A menos que usted realmente tenga suerte y empiece sobre una cuesta que apunte directamente a la cima, tan pronto como se mueva su camino diverge en la dirección de ascenso con máxima inclinación.

Al darse cuenta de este hecho, usted podría adoptar la siguiente estrategia. Avance una distancia corta a lo largo de la dirección del gradiente. Luego deténgase, reevalúe el gradiente y camine otra distancia corta. Mediante la repetición de este proceso podrá llegar a la punta de la colina.

Aunque tal estrategia parece ser superficialmente buena, no es muy práctica. En particular, la evaluación continua del gradiente demanda mucho tiempo en términos de cálculo. Se prefiere un método que consista en moverse por un camino fijo, a lo largo

**FIGURA 14.9**

Descripción gráfica del método de máxima inclinación.

del gradiente inicial hasta que  $f(x, y)$  deje de aumentar; es decir, tienda a nivelarse en su dirección de viaje. Este punto se convierte en el punto inicial donde se reevalúa  $\nabla f$  y se sigue una nueva dirección. El proceso se repite hasta que se alcance la cima. Este procedimiento se conoce como *método de máxima inclinación*.<sup>2</sup> Es la más directa de las técnicas de búsqueda con gradiente. La idea básica detrás del procedimiento se describe en la figura 14.9.

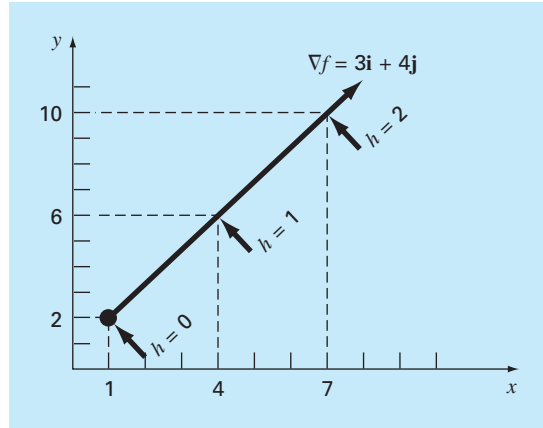
Comenzaremos en un punto inicial  $(x_0, y_0)$  etiquetado como “0” en la figura. En este punto, se determina la dirección de ascenso con máxima inclinación; es decir, el gradiente. Entonces se busca a lo largo de la dirección del gradiente,  $h_0$ , hasta que se encuentra un máximo, que se marca como “1” en la figura. Después el proceso se repite.

Así, el problema se divide en dos partes: 1. se determina la “mejor” dirección para la búsqueda y 2. se determina “el mejor valor” a lo largo de esa dirección de búsqueda. Como se verá, la efectividad de los diversos algoritmos descritos en las siguientes páginas depende de qué tan hábiles seamos en ambas partes.

Por ahora, el método del ascenso con máxima inclinación usa el gradiente como su elección para la “mejor” dirección. Se ha mostrado ya cómo se evalúa el gradiente en el ejemplo 14.1. Ahora, antes de examinar cómo se construye el algoritmo para localizar el máximo a lo largo de la dirección de máxima inclinación, se debe hacer una pausa para explorar el modo de transformar una función de  $x$  y  $y$  en una función de  $h$  a lo largo de la dirección del gradiente.

Comenzando en  $x_0$  y  $y_0$  las coordenadas de cualquier punto en la dirección del gradiente se expresan como

<sup>2</sup>Debido a nuestro énfasis sobre maximización, aquí se utiliza la terminología de *ascenso de máxima inclinación*. El mismo enfoque se puede utilizar también para la minimización; en este caso se usará la terminología de *descenso de máxima inclinación*.

**FIGURA 14.10**

Relación entre una dirección arbitraria  $h$  y las coordenadas  $x$  y  $y$ .

$$x = x_0 + \frac{\partial f}{\partial x} h \quad (14.10)$$

$$y = y_0 + \frac{\partial f}{\partial y} h \quad (14.11)$$

donde  $h$  es la distancia a lo largo del eje  $h$ . Por ejemplo, suponga que  $x_0 = 1$  y  $y_0 = 2$  y  $\nabla f = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ , como se muestra en la figura 14.10. Las coordenadas de cualquier punto a lo largo del eje  $h$  están dadas por

$$x = 1 + 3h \quad (14.12)$$

$$y = 2 + 4h \quad (14.13)$$

El siguiente ejemplo ilustra la forma en que se emplean tales transformaciones para convertir una función bidimensional de  $x$  y  $y$  en una función unidimensional de  $h$ .

### EJEMPLO 14.3 Desarrollo de una función 1-D a lo largo de la dirección del gradiente

**Planteamiento del problema.** Suponga que se tiene la siguiente función en dos dimensiones:

$$f(x, y) = 2xy + 2x - x^2 - 2y^2$$

Desarrolle una versión unidimensional de esta ecuación a lo largo de la dirección del gradiente en el punto donde  $x = -1$  y  $y = 1$ .

**Solución.** Las derivadas parciales se evalúan en  $(-1, 1)$ ,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2y + 2 - 2x = 2(1) + 2 - 2(-1) = 6$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x - 4y = 2(-1) - 4(1) = -6$$

Por lo tanto, el vector gradiente es

$$\nabla f = 6\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$$

Para encontrar el máximo, se busca en la dirección del gradiente; es decir, a lo largo de un eje  $h$  que corre en la dirección de este vector. La función se expresa a lo largo de este eje como

$$\begin{aligned} f\left(x_0 + \frac{\partial f}{\partial x}h, y_0 + \frac{\partial f}{\partial y}h\right) &= f(-1 + 6h, 1 - 6h) \\ &= 2(-1 + 6h)(1 - 6h) + 2(-1 + 6h) - (-1 + 6h)^2 - 2(1 - 6h)^2 \end{aligned}$$

donde las derivadas parciales se evalúan en  $x = -1$  y  $y = 1$ .

Al combinar términos, se obtiene una función unidimensional  $g(h)$  que transforma  $f(x, y)$  a lo largo del eje  $h$ ,

$$g(h) = -180h^2 + 72h - 7$$

Ahora que se ha obtenido una función a lo largo de la trayectoria de ascenso de máxima inclinación, es posible explorar cómo contestar la segunda pregunta. Esto es, ¿qué tan lejos se llega a lo largo de este camino? Un procedimiento sería moverse a lo largo de este camino hasta encontrar el máximo de la función. Identificaremos la localización de este máximo como  $h^*$ . Éste es el valor del paso que maximiza  $g$  (y, por lo tanto,  $f$ ) en la dirección del gradiente. Este problema es equivalente a encontrar el máximo de una función de una sola variable  $h$ . Lo cual se realiza mediante diferentes técnicas de búsqueda unidimensional como las analizadas en el capítulo 13. Así, se pasa de encontrar el óptimo de una función de dos dimensiones a realizar una búsqueda unidimensional a lo largo de la dirección del gradiente.

Este método se llama *ascenso de máxima inclinación* cuando se utiliza un tamaño de paso arbitrario  $h$ . Si se encuentra que un valor de un solo paso  $h^*$  nos lleva directamente al máximo a lo largo de la dirección del gradiente, el método se llama *ascenso optimal de máxima inclinación*.

#### EJEMPLO 14.4 Ascenso optimal de máxima inclinación

**Planteamiento del problema.** Maximice la siguiente función:

$$f(x, y) = 2xy + 2x - x^2 - 2y^2$$

usando los valores iniciales,  $x = -1$  y  $y = 1$ .

**Solución.** Debido a que esta función es muy simple, se obtiene primero una solución analítica. Para hacerlo, se evalúan las derivadas parciales

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2y + 2 - 2x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2x - 4y = 0 \end{aligned}$$



De este par de ecuaciones se puede encontrar el valor óptimo, en  $x = 2$  y  $y = 1$ . Las segundas derivadas parciales también se determinan y evalúan en el óptimo,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2$$

y el determinante de la matriz hessiana se calcula [ecuación (14.3)],

$$|H| = -2(-4) - 2^2 = 4$$

Por lo tanto, debido a que  $|H| > 0$  y  $\partial^2 f / \partial x^2 < 0$ , el valor de la función  $f(2, 1)$  es un máximo.

Ahora se usará el método del ascenso de máxima inclinación. Recuerde que al final del ejemplo 14.3 ya se habían realizado los pasos iniciales del problema al generar

$$g(h) = -180h^2 + 72h - 7$$

Ahora, ya que ésta es una simple parábola, se puede localizar, de manera directa, el máximo (es decir,  $h = h^*$ ) resolviendo el problema,

$$g'(h^*) = 0$$

$$-360h^* + 72 = 0$$

$$h^* = 0.2$$

Esto significa que si se viaja a lo largo del eje  $h$ ,  $g(h)$  alcanza un valor mínimo cuando  $h = h^* = 0.2$ . Este resultado se sustituye en las ecuaciones (14.10) y (14.11) para obtener las coordenadas  $(x, y)$  correspondientes a este punto,

$$x = -1 + 6(0.2) = 0.2$$

$$y = 1 - 6(0.2) = -0.2$$

Este paso se describe en la figura 14.11 conforme el movimiento va del punto 0 al 1.

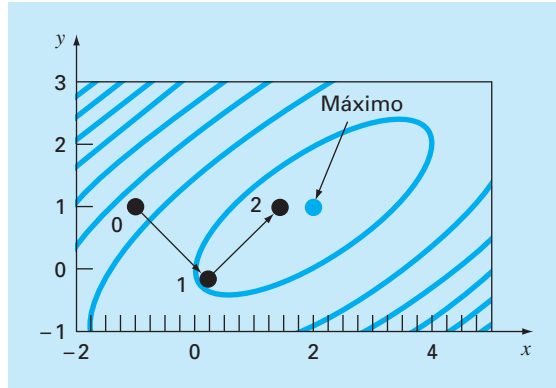
El segundo paso se implementa tan sólo al repetir el procedimiento. Primero, las derivadas parciales se evalúan en el nuevo punto inicial  $(0.2, -0.2)$  para obtener

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(-0.2) + 2 - 2(0.2) = 1.2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2(0.2) - 4(-0.2) = 1.2$$

Por lo tanto, el vector gradiente es

$$\nabla f = 1.2\mathbf{i} + 1.2\mathbf{j}$$

**FIGURA 14.11**

El método del ascenso optimal de máxima inclinación.

Esto significa que la dirección de máxima inclinación está ahora dirigida hacia arriba y hacia la derecha en un ángulo de  $45^\circ$  con el eje  $x$  (véase la figura 14.11). Las coordenadas a lo largo de este nuevo eje  $h$  se expresan ahora como

$$x = 0.2 + 1.2h$$

$$y = -0.2 + 1.2h$$

Al sustituir estos valores en la función se obtiene

$$f(0.2 + 1.2h, -0.2 + 1.2h) = g(h) = -1.44h^2 + 2.88h + 0.2$$

El paso  $h^*$  que nos lleva al máximo a lo largo de la dirección marcada ahora se calcula directamente como

$$g'(h^*) = -2.88h^* + 2.88 = 0$$

$$h^* = 1$$

Este resultado se sustituye en las ecuaciones (14.10) y (14.11) para obtener las coordenadas  $(x, y)$  correspondientes a este nuevo punto,

$$x = 0.2 + 1.2(1) = 1.4$$

$$y = -0.2 + 1.2(1) = 1$$

Como se describe en la figura 14.11, nos movemos a las nuevas coordenadas, marcadas como punto 2 en la gráfica, y al hacer esto nos acercamos al máximo. El procedimiento se puede repetir y se obtiene un resultado final que converge a la solución analítica,  $x = 2$  y  $y = 1$ .

Es posible demostrar que el método del descenso de máxima inclinación es linealmente convergente. Además, tiende a moverse de manera muy lenta, a lo largo de crestas largas y angostas. Esto porque el nuevo gradiente en cada punto máximo será

perpendicular a la dirección original. Así, la técnica da muchos pasos pequeños cruzando la ruta directa hacia la cima. Por lo tanto, aunque es confiable, existen otros métodos que convergen mucho más rápido, particularmente en la vecindad de un valor óptimo. En el resto de la sección se examinan esos métodos.

### 14.2.3 Métodos avanzados del gradiente

**Método de gradientes conjugados (Fletcher-Reeves).** En la sección 14.1.2, se ha visto cómo en el método de Powell las direcciones conjugadas mejoran mucho la eficiencia de la búsqueda univariada. De manera similar, se puede también mejorar el ascenso de máxima inclinación linealmente convergente usando gradientes conjugados. En efecto, se puede demostrar que un método de optimización, que usa gradientes conjugados para definir la dirección de búsqueda, es cuadráticamente convergente. Esto también asegura que el método optimizará una función cuadrática exactamente en un número finito de pasos sin importar el punto de inicio. Puesto que la mayoría de las funciones que tienen buen comportamiento llegan a aproximarse en forma razonable bien mediante una función cuadrática en la vecindad de un óptimo, los métodos de convergencia cuadrática a menudo resultan muy eficientes cerca de un valor óptimo.

Se ha visto cómo, empezando con dos direcciones de búsqueda arbitrarias, el método de Powell produce nuevas direcciones de búsqueda conjugadas. Este método es cuadráticamente convergente y no requiere la información del gradiente. Por otro lado, si la evaluación de las derivadas es práctica, se pueden buscar algoritmos que combinen las ideas del descenso de máxima inclinación con las direcciones conjugadas, para lograr un comportamiento inicial más sólido y de convergencia rápida conforme la técnica conduzca hacia el óptimo. El *algoritmo del gradiente conjugado* de *Fletcher-Reeves* modifica el método de ascenso de máxima inclinación al imponer la condición de que sucesivas direcciones de búsqueda del gradiente sean mutuamente conjugadas. La prueba y el algoritmo están más allá del alcance del texto, pero se describen en Rao (1996).

**Método de Newton.** El método de Newton para una sola variable (recuerde la sección 13.3) se puede extender a los casos multivariados. Escriba una serie de Taylor de segundo orden para  $f(\mathbf{x})$  cerca de  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_i$ ,

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_i) + \nabla f^T(\mathbf{x}_i)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)^T H_i(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$$

donde  $H_i$  es la matriz hessiana. En el mínimo,

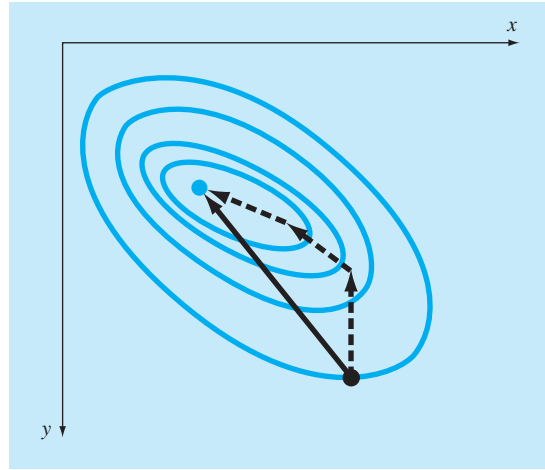
$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_j} = 0 \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, n$$

Así,

$$\nabla f = \nabla f(\mathbf{x}_i) + H_i(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) = 0$$

Si  $H$  es no singular,

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i - H_i^{-1} \nabla f \quad (14.14)$$

**FIGURA 14.12**

Cuando el punto inicial está cerca del punto óptimo, seguir el gradiente puede resultar ineficiente. Los métodos de Newton intentan la búsqueda a lo largo de una trayectoria directa hacia el óptimo (línea continua).

la cual, se puede demostrar, converge en forma cuadrática cerca del óptimo. Este método, de nuevo, se comporta mejor que el método del ascenso de máxima inclinación (véase la figura 14.12). Sin embargo, observe que este método requiere tanto del cálculo de las segundas derivadas como de la inversión matricial, en cada iteración. Por lo que el método no es muy útil en la práctica para funciones con gran número de variables. Además, el método de Newton quizá no converja si el punto inicial no está cerca del óptimo.

**Método de Marquardt.** Se sabe que el método del ascenso de máxima inclinación aumenta el valor de la función, aun si el punto inicial está lejos del óptimo. Por otro lado, ya se describió el método de Newton, que converge con rapidez cerca del máximo. El *método de Marquardt* usa el método del descenso de máxima inclinación cuando  $\mathbf{x}$  está lejos de  $\mathbf{x}^*$ , y el método de Newton cuando  $\mathbf{x}$  está cerca de un óptimo. Esto se puede lograr al modificar la diagonal del hessiano en la ecuación (14.14),

$$\tilde{H}_i = H_i + \alpha_i I$$

donde  $\alpha_i$  es una constante positiva e  $I$  es la matriz identidad. Al inicio del procedimiento, se supone que  $\alpha_i$  es grande y

$$\tilde{H}_i^{-1} \approx \frac{1}{\alpha_i} I$$

la cual reduce la ecuación (14.14) al método del ascenso de máxima inclinación. Conforme continúan las iteraciones,  $\alpha_i$  se aproxima a cero y el método se convierte en el de Newton.

Así, el método de Marquardt ofrece lo mejor de los procedimientos: comienza en forma confiable a partir de valores iniciales pobres y luego acelera en forma rápida

cuando se aproxima al óptimo. Por desgracia, el método también requiere la evaluación del hessiano y la inversión matricial en cada paso.

Debe observarse que el método de Marquardt es, ante todo, útil para problemas no lineales de mínimos cuadrados. Por ejemplo, la biblioteca IMSL contiene una subrutina con este propósito.

**Métodos de cuasi-Newton.** Los métodos cuasi-Newton, o métodos de métrica variable, buscan estimar el camino directo hacia el óptimo en forma similar al método de Newton. Sin embargo, observe que la matriz hessiana en la ecuación (14.14) se compone de las segundas derivadas de  $f$  que varían en cada paso. Los métodos cuasi-Newton intentan evitar estas dificultades al aproximar  $H$  con otra matriz  $A$ , sólo las primeras derivadas parciales de  $f$ . El procedimiento consiste en comenzar con una aproximación inicial de  $H^{-1}$  y actualizarla y mejorarla en cada iteración. Estos métodos se llaman de cuasi-Newton porque no usan el hessiano verdadero, sino más bien una aproximación. Así, se tienen dos aproximaciones simultáneas: 1. la aproximación original de la serie de Taylor y 2. la aproximación del hessiano.

Hay dos métodos principales de este tipo: los algoritmos de *Davidon-Fletcher-Powell* (DFP) y de *Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno* (BFGS). Éstos son similares excepto en detalles concernientes a cómo manejan los errores de redondeo y su convergencia. BFGS es, por lo general, reconocido como superior en la mayoría de los casos. Rao (1996) proporciona detalles y declaraciones formales sobre ambos algoritmos, el DFP y el BFGS.

## PROBLEMAS

**14.1** Repita el ejemplo 14.2 para la función siguiente, en el punto (0.8, 1.2).

$$f(x, y) = 2xy + 1.5y - 1.25x^2 - 2y^2 + 5$$

**14.2** Encuentre la derivada direccional de

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2$$

Si  $x = 2$ ,  $y = 2$ , en la dirección de  $h = 2i + 3j$ .

**14.3** Encuentre el vector gradiente y la matriz Hessiana para cada una de las funciones siguientes:

- a)  $f(x, y) = 3xy^2 + 2e^{xy}$
- b)  $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2$
- c)  $f(x, y) = \ln(x^2 + 3xy + 2y^2)$

**14.4** Dada

$$f(x, y) = 2.25xy + 1.75y - 1.5x^2 - 2y^2$$

Construya y resuelva un sistema de ecuaciones algebraicas lineales que maximice  $f(x)$ . Observe que esto se logra por medio de igualar a cero las derivadas parciales de  $f$  con respecto tanto de  $x$  como de  $y$ .

**14.5**

- a) Comience con un valor inicial de  $x = 1$  y  $y = 1$ , y realice dos aplicaciones del método de ascenso de máxima inclinación para  $f(x, y)$ , como en el problema 14.4.

- b) Haga una gráfica de los resultados del inciso a), en la que se muestre la trayectoria de la búsqueda.

**14.6** Encuentre el valor mínimo de

$$f(x, y) = (x - 3)^2 + (y - 2)^2$$

comience con  $x = 1$  y  $y = 1$ , utilice el método de descenso de máxima inclinación con un criterio de detención de  $\epsilon_s = 1\%$ . Explique sus resultados.

**14.7** Efectúe una iteración del método de ascenso de máxima inclinación para localizar el máximo de

$$f(x, y) = 4x + 2y + x^2 - 2x^4 + 2xy - 3y^2$$

con los valores iniciales de  $x = 0$  y  $y = 0$ . Emplee bisección para encontrar el tamaño óptimo de paso en la dirección de búsqueda del gradiente.

**14.8** Realice una iteración del método de descenso de máxima inclinación del gradiente óptimo, para localizar el mínimo de

$$f(x, y) = -8x + x^2 + 12y + 4y^2 - 2xy$$

utilice valores iniciales de  $x = 0$  y  $y = 0$ .

**14.9** Con un lenguaje de programación o de macros, desarrolle un programa para implantar el método de búsqueda aleatoria. Diseñe el subprograma de modo que esté diseñado en forma expresa para localizar un máximo. Pruebe el programa con  $f(x, y)$  del problema 14.7. Utilice un rango de  $-2$  a  $2$  tanto para  $x$  como para  $y$ .

**14.10** La búsqueda por malla es otro procedimiento burdo para optimizar. En la figura P14.10 se ilustra la versión para dos dimensiones. Las dimensiones  $x$  y  $y$  se dividen en incrementos a fin de formar una malla. Después, se evalúa la función en cada nodo de la malla. Entre más densa sea la malla más probable será la localización del óptimo.

Con un lenguaje de programación o de macros, desarrolle un programa para implantar el método de búsqueda por malla. Diseñe el programa expresamente para que localice un máximo. Pruébelo con el mismo problema del ejemplo 14.1.

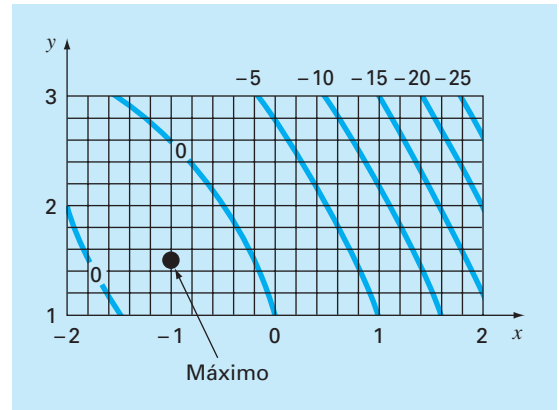
**14.11** Desarrolle una ecuación unidimensional en la dirección del gradiente de presión en el punto  $(4, 2)$ . La función de presión es

$$f(x, y) = 6x^2y - 9y^2 - 8x^2$$

**14.12** Una función de temperatura es

$$f(x, y) = 2x^3y^2 - 7xy + x^2 + 3y$$

Desarrolle una función unidimensional en la dirección del gradiente de temperatura en el punto  $(1, 1)$ .



**Figura P14.10**

La búsqueda por malla.

# CAPÍTULO 15

## Optimización restringida

Este capítulo aborda problemas de optimización en los cuales entran en juego las restricciones. Primero, se analizarán problemas donde la función objetivo y las restricciones son lineales. Para tales casos, hay métodos especiales que aprovechan la linealidad de las funciones, llamados métodos de programación lineal. Los algoritmos resultantes resuelven con gran eficiencia problemas muy grandes con miles de variables y restricciones. Dichos métodos se utilizan en una gran variedad de problemas en ingeniería y en administración.

Después, se verá en forma breve el problema más general de optimización restringida no lineal. Finalmente, se proporcionará una visión general de cómo se emplean los paquetes de software y las bibliotecas en la optimización.

### 15.1 PROGRAMACIÓN LINEAL

La *programación lineal* (o PL, por simplicidad) es un método de optimización que se ocupa del cumplimiento de un determinado objetivo, como maximizar las utilidades o minimizar el costo, en presencia de restricciones como recursos limitados. El término *lineal* denota que las funciones matemáticas que representan el objetivo y las restricciones son lineales. El término *programación* no significa “programación en computadora”; más bien denota “programar” o “fijar una agenda” (Revelle y colaboradores, 1997).

#### 15.1.1 Forma estándar

El problema básico de la programación lineal consiste en dos partes principales: la función objetivo y un conjunto de restricciones. En un problema de maximización, la función objetivo, por lo general, se expresa como

$$\text{Maximizar } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \quad (15.1)$$

donde  $c_j$  es la contribución de cada unidad de la  $j$ -ésima actividad realizada y  $x_j$  es magnitud de la  $j$ -ésima actividad. Así, el valor de la función objetivo,  $Z$ , es la contribución total debida al número total de actividades,  $n$ .

Las restricciones se representan, en forma general, como

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i \quad (15.2)$$

donde  $a_{ij}$  es cantidad del  $i$ -ésimo recurso que se consume por cada unidad de la  $j$ -ésima actividad, y  $b_i$  es cantidad del  $i$ -ésimo recurso que está disponible. Es decir, los recursos son limitados.

El segundo tipo general de restricción, especifica que todas las actividades deben tener un valor positivo:

$$x_i \geq 0 \tag{15.3}$$

En el presente contexto, lo anterior expresa la noción realista de que, en algunos problemas, la actividad negativa es físicamente imposible (por ejemplo, no se pueden producir bienes negativos).

Juntas, la función objetivo y las restricciones, especifican el problema de programación lineal. Éstas indican que se trata de maximizar la contribución de varias actividades, bajo la restricción de que en estas actividades se utilizan cantidades finitas de recursos. Antes de mostrar cómo se puede obtener este resultado, primero se desarrollará un ejemplo.

EJEMPLO 15.1 Planteamiento del problema de la PL

**Planteamiento del problema.** Se desarrolla el siguiente problema del área de la ingeniería química o petrolera. Aunque, éste, es relevante para todas las áreas de la ingeniería relacionadas con la generación de productos con recursos limitados.

Suponga que una planta procesadora de gas recibe cada semana una cantidad fija de materia prima. Esta última se procesa para dar dos tipos de gas: calidad regular y prémium. Estas clases de gas son de gran demanda (es decir, se tiene garantizada su venta) y dan diferentes utilidades a la compañía. Sin embargo, su producción involucra restricciones de tiempo y de almacenamiento. Por ejemplo, no se pueden producir las dos clases a la vez, y las instalaciones están disponibles solamente 80 horas por semana. Además, existe un límite de almacenamiento para cada uno de los productos. Todos estos factores se enlistan abajo (observe que una tonelada métrica, o *ton*, es igual a 1 000 kg):

Recurso	Producto		Disponibilidad del recurso
	Regular	Prémium	
Materia prima	7 m <sup>3</sup> /ton	11 m <sup>3</sup> /ton	77 m <sup>3</sup> /semana
Tiempo de producción	10 hr/ton	8 hr/ton	80 hr/semana
Almacenamiento	9 ton	6 ton	
Aprovechamiento	150/ton	175/ton	

Desarrolle una formulación de programación lineal para maximizar las utilidades de esta operación.

**Solución.** El ingeniero que opera esta planta debe decidir la cantidad a producir de cada tipo de gas para maximizar las utilidades. Si las cantidades producidas cada semana de gas regular y prémium se designan como  $x_1$  y  $x_2$ , respectivamente, la ganancia total se calcula mediante

$$\text{Ganancia total} = 150x_1 + 175x_2$$

o se escribe como una función objetivo en programación lineal:

$$\text{Maximizar } Z = 150x_1 + 175x_2$$



Las restricciones se desarrollan en una forma similar. Por ejemplo, el total de gas crudo (materia prima) utilizado se calcula como:

$$\text{Total de gas utilizado} = 7x_1 + 11x_2$$

Este total no puede exceder el abastecimiento disponible de 77 m<sup>3</sup>/semana, así que la restricción se representa como

$$7x_1 + 11x_2 \leq 77$$

Las restricciones restantes se desarrollan en una forma similar: la formulación completa resultante de PL está dada por

$$\text{Maximizar } Z = 150x_1 + 175x_2 \quad (\text{maximizar la ganancia})$$

Sujeta a

$7x_1 + 11x_2 \leq 77$	(restricciones de material)
$10x_1 + 8x_2 \leq 80$	(restricción de tiempo)
$x_1 \leq 9$	(restricción de almacenaje de gas “regular”)
$x_2 \leq 6$	(restricción de almacenaje de gas “prémium”)
$x_1, x_2 \geq 0$	(restricciones positivas)

Observe que el conjunto de ecuaciones anterior constituye la formulación completa de PL. Las explicaciones en los paréntesis de la derecha se han incluido para aclarar el significado de cada expresión.

### 15.1.2 Solución gráfica

Debido a que las soluciones gráficas están limitadas a dos o tres dimensiones, tienen una utilidad práctica limitada. Sin embargo, son muy útiles para demostrar algunos conceptos básicos de las técnicas algebraicas generales, utilizadas para resolver problemas multidimensionales en la computadora.

En un problema bidimensional, como el del ejemplo 15.1, el espacio solución se define como un plano con  $x_1$  medida a lo largo de la abscisa; y  $x_2$ , a lo largo de la ordenada. Como las restricciones son lineales, se trazan sobre este plano como líneas rectas. Si el problema de PL se formuló adecuadamente (es decir, si tiene una solución), estas líneas restrictivas describen una región, llamada el *espacio de solución factible*, que abarca todas las posibles combinaciones de  $x_1$  y  $x_2$ , las cuales obedecen las restricciones y, por lo tanto, representan soluciones factibles. La función objetivo de un valor particular de  $Z$  se puede trazar como otra línea recta y superponerse en este espacio. El valor de  $Z$ , entonces, se ajusta hasta que esté en el valor máximo, y toque aún el espacio factible. Este valor de  $Z$  representa la solución óptima. Los valores correspondientes de  $x_1$  y  $x_2$ , donde  $Z$  toca el espacio de solución factible, representan los valores óptimos de las actividades. El siguiente ejemplo deberá ayudar a aclarar el procedimiento.

#### EJEMPLO 15.2 Solución gráfica

**Planteamiento del problema.** Desarrolle una solución gráfica para el problema del procesamiento de gas del ejemplo 15.1:

$$\text{Maximizar } Z = 150x_1 + 175x_2$$

sujeta a

$$7x_1 + 11x_2 \leq 77 \quad (1)$$

$$10x_1 + 8x_2 \leq 80 \quad (2)$$

$$x_1 \leq 9 \quad (3)$$

$$x_2 \leq 6 \quad (4)$$

$$x_1 \geq 0 \quad (5)$$

$$x_2 \geq 0 \quad (6)$$

Se numeraron las restricciones para identificarlas en la siguiente solución gráfica.

**Solución.** Primero, se trazan las restricciones sobre el espacio solución. Por ejemplo, se reformula la primera restricción como una línea al reemplazar la desigualdad por un signo igual, y se despeja  $x_2$ :

$$x_2 = -\frac{7}{11}x_1 + 7$$

Así, como en la figura 15.1a, los valores posibles de  $x_1$  y  $x_2$  que obedecen dicha restricción se hallan por debajo de esta línea (en la gráfica, la dirección se indica con la pequeña flecha). Las otras restricciones se evalúan en forma similar, se sobreponen en la figura 15.1a. Observe cómo éstas encierran una región donde todas se satisfacen. Éste es el espacio solución factible (el área *ABCDE* en la gráfica).

Además de definir el espacio factible, la figura 15.1a también ofrece una mejor comprensión. En particular, se percibe que la restricción 3 (almacenamiento de gas regular) es “redundante”. Es decir, el espacio solución factible no resulta afectado si fuese suprimida.

Después, se agrega la función objetivo a la gráfica. Para hacerlo, se debe escoger un valor de  $Z$ . Por ejemplo, para  $Z = 0$ , la función objetivo es ahora

$$0 = 150x_1 + 175x_2$$

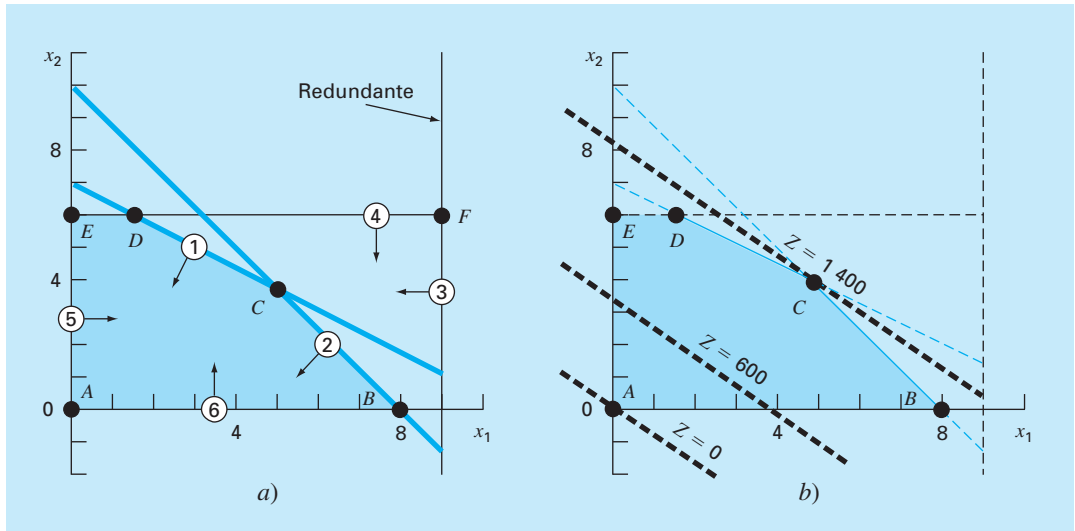
o, despejando  $x_2$ , se obtiene la línea recta

$$x_2 = -\frac{150}{175}x_1$$

Como se muestra en la figura 15.1b, ésta representa una línea punteada que interseca el origen. Ahora, debido a que estamos interesados en maximizar  $Z$ , ésta se aumenta a, digamos, 600, y la función objetivo es

$$x_2 = \frac{600}{175} - \frac{150}{175}x_1$$

Así, al incrementar el valor de la función objetivo, la línea se aleja del origen. Como la línea todavía cae dentro del espacio solución, nuestro resultado es aún factible. No obstante, por la misma razón, todavía hay espacio para mejorarlo. Por lo tanto,  $Z$  continúa

**FIGURA 15.1**

Solución gráfica de un problema de programación lineal. a) Las restricciones definen un espacio solución factible. b) La función objetivo se incrementa hasta que alcance el valor máximo que cumpla con todas las restricciones. Gráficamente, se mueve hacia arriba y a la derecha, hasta que toca el espacio factible en un solo punto óptimo.

aumentando hasta que un incremento adicional lleve la función objetivo más allá de la región factible. Como se muestra en la figura 15.1b, el valor máximo de  $Z$  corresponde aproximadamente a 1 400. En este punto,  $x_1$  y  $x_2$  son, de manera aproximada, iguales a 4.9 y 3.9, respectivamente. Así, la solución gráfica indica que si se producen estas cantidades de gas regular y premium, se alcanzará una máxima utilidad de aproximadamente 1 400.

Además de determinar los valores óptimos, el procedimiento gráfico ofrece una mejor comprensión del problema. Esto se aprecia al sustituir de nuevo las soluciones en las ecuaciones restrictivas:

$$\begin{aligned} 7(4.9) + 11(3.9) &\cong 77 \\ 10(4.9) + 8(3.9) &\cong 80 \\ 4.9 &\leq 9 \\ 3.9 &\leq 6 \end{aligned}$$

En consecuencia, como se ve claramente en la gráfica, producir la cantidad óptima de cada producto nos lleva directamente al punto donde se satisfacen las restricciones de los recursos (1) y del tiempo (2). Tales restricciones se dice que son *obligatorias*. Además, la gráfica también hace evidente que ninguna de las restricciones de almacenamiento [(3) ni (4)] actúan como una limitante. Tales restricciones se conocen como *no obligatorias*. Esto nos lleva a la conclusión práctica de que, en este caso, se puede aumentar las utilidades, ya sea con un incremento en el abastecimiento de recursos (el gas crudo)

o en tiempo de producción. Además, esto indica que el aumento del almacenamiento podría no tener impacto sobre las utilidades.

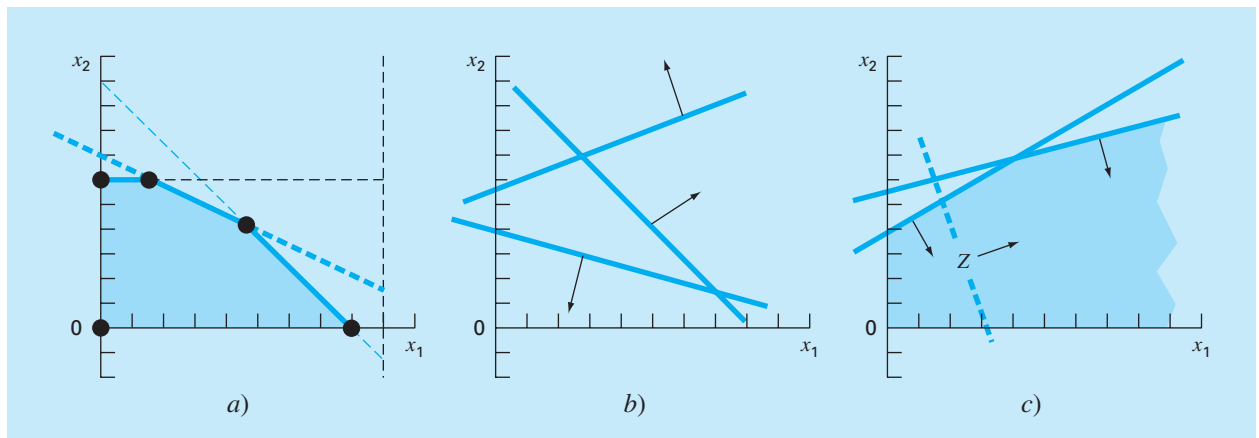
El resultado obtenido en el ejemplo anterior es uno de los cuatro posibles resultados que, por lo general, se obtienen en un problema de programación lineal. Éstos son:

1. *Solución única.* Como en el ejemplo, la función objetivo máxima interseca un solo punto.
2. *Soluciones alternativas.* Suponga que los coeficientes de la función objetivo del ejemplo fueran paralelos precisamente a una de las restricciones. En nuestro ejemplo, una forma en la cual esto podría ocurrir sería que las utilidades se modificaran a \$140/ton y \$220/ton. Entonces, en lugar de un solo punto, el problema podría tener un número infinito de óptimos correspondientes a un segmento de línea (véase figura 15.2a).
3. *Solución no factible.* Como en la figura 15.2b, es posible que el problema esté formulado de tal manera que no haya una solución factible. Esto puede deberse a que se trata de un problema sin solución o a errores en la formulación del problema. Lo último ocurre si el problema está sobrestringido, y ninguna solución satisface todas las restricciones.
4. *Problemas no acotados.* Como en la figura 15.2c, esto usualmente significa que el problema está substringido y, por lo tanto, tiene límites abiertos. Como en el caso de la solución no factible, esto a menudo ocurre debido a errores cometidos durante la especificación del problema.

Ahora supongamos que nuestro problema tiene una solución única. El procedimiento gráfico podría sugerir una estrategia numérica para dar con el máximo. Observando la figura 15.1, deberá quedar claro que siempre se presenta el óptimo en uno de los puntos esquina, donde se presentan dos restricciones. Tales puntos se conocen de manera

**FIGURA 15.2**

Además de una sola solución óptima (por ejemplo, la figura 15.1b), existen otros tres resultados posibles en un problema de programación lineal: a) óptima alternativa, b) solución no factible y c) un resultado no acotado.



formal como *puntos extremos*. Así, del número infinito de posibilidades en el espacio de decisión, al enfocarse en los puntos extremos, se reducen claramente las opciones posibles.

Además, es posible reconocer que no todo punto extremo es factible; es decir, satisface todas las restricciones. Por ejemplo, observe que el punto  $F$  en la figura 15.1a es un punto extremo; pero no es factible. Limitándonos a *puntos extremos factibles*, se reduce todavía más el campo factible.

Por último, una vez que se han identificado todos los puntos extremos factibles, el que ofrezca el mejor valor de la función objetivo representará la solución óptima. Se podría encontrar esta solución óptima mediante la exhaustiva (e ineficiente) evaluación del valor de la función objetivo en cada punto extremo factible. En la siguiente sección se analiza el método simplex, que ofrece una mejor estrategia para trazar un rumbo selectivo, a través de una secuencia de puntos extremos factibles, para llegar al óptimo de una manera extremadamente eficiente.

### 15.1.3 El método simplex

El método simplex se basa en la suposición de que la solución óptima estará en un punto extremo. Así, el procedimiento debe ser capaz de discriminar si durante la solución del problema se presentará un punto extremo. Para esto, las ecuaciones con restricciones se reformulan como igualdades, introduciendo las llamadas *variables de holgura*.

**Variables de holgura.** Como lo indica su nombre, una *variable de holgura* mide cuánto de un recurso restringido está disponible; es decir, cuánta “holgura” está disponible. Por ejemplo, recuerde el recurso restringido que se utilizó en los ejemplos 15.1 y 15.2:

$$7x_1 + 11x_2 \leq 77$$

Se define una variable de *holgura*  $S_1$  como la cantidad de gas crudo que no se usa para un nivel de producción específico ( $x_1, x_2$ ). Si esta cantidad se suma al lado izquierdo de la restricción, esto vuelve exacta a la relación:

$$7x_1 + 11x_2 + S_1 = 77$$

Ahora vemos qué nos dice la variable de holgura. Si es positiva, significa que se tiene algo de “holgura” en esta restricción. Es decir, se cuenta con un excedente de recurso que no se está utilizando por completo. Si es negativa, nos indica que hemos sobrepasado la restricción. Finalmente, si es cero, denota que la restricción se satisface con precisión. Es decir, hemos utilizado todo el recurso disponible. Puesto que ésta es exactamente la condición donde las líneas de restricción se intersecan, la variable de holgura ofrece un medio para detectar los puntos extremos.

Una variable de holgura diferente se desarrolla para cada ecuación restringida, lo cual resulta en lo que se conoce como la *versión aumentada completamente*,

$$\text{Maximizar } Z = 150x_1 + 175x_2$$

sujeta a

$$7x_1 + 11x_2 + S_1 = 77 \quad (15.4a)$$

$$10x_1 + 8x_2 + S_2 = 80 \quad (15.4b)$$

$$x_1 + S_3 = 9 \quad (15.4c)$$

$$x_2 + S_4 = 6 \quad (15.4d)$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2, S_3, S_4 \geq 0$$

Advierta cómo se han establecido las cuatro ecuaciones, de manera que las incógnitas quedan alineadas en columnas. Se hizo así para resaltar que ahora se trata de un sistema de ecuaciones algebraicas lineales (recuerde la parte tres). En la siguiente sección se mostrará cómo se emplean dichas ecuaciones para determinar los puntos extremos en forma algebraica.

**Solución algebraica.** A diferencia de la parte tres, donde se tenían  $n$  ecuaciones con  $n$  incógnitas, nuestro sistema del ejemplo [ecuaciones (15.4)] está *subespecificado*; es decir, tiene más incógnitas que ecuaciones. En términos generales, hay  $n$  *variables estructurales* (las incógnitas originales),  $m$  *variables de holgura* o *excedentes* (una por restricción), y  $n + m$  variables en total (estructurales más excedentes). En el problema de la producción de gas se tienen 2 variables estructurales, 4 variables de holgura y 6 variables en total. Así, el problema consiste en resolver 4 ecuaciones con 6 incógnitas.

La diferencia entre el número de incógnitas y el de ecuaciones (igual a 2 en nuestro problema) está directamente relacionada con la forma en que se distingue un punto extremo factible. Específicamente, cada punto factible tiene 2 de las 6 variables igualadas a cero. Por ejemplo, los cinco puntos en las esquinas del área  $ABCDE$  tienen los siguientes valores cero:

Punto extremo	Variables cero
A	$x_1, x_2$
B	$x_2, S_2$
C	$S_1, S_2$
D	$S_1, S_4$
E	$x_1, S_4$

Esta observación nos lleva a concluir que los puntos extremos se determinan a partir de la forma estándar igualando dos de las variables a cero. En nuestro ejemplo, esto reduce el problema a resolver 4 ecuaciones con 4 incógnitas. Por ejemplo, para el punto  $E$ , si  $x_1 = S_4 = 0$ , la forma estándar se reduce a

$$11x_2 + S_1 = 77$$

$$8x_2 + S_2 = 80$$

$$+ S_3 = 9$$

$$x_2 = 6$$

de donde se obtiene  $x_2 = 6$ ,  $S_1 = 11$ ,  $S_2 = 32$  y  $S_3 = 9$ . Junto con  $x_1 = S_4 = 0$ , estos valores definen el punto  $E$ .

Generalizando, una solución básica de  $m$  ecuaciones lineales con  $n$  incógnitas se obtiene al igualar a cero las variables  $n - m$  y resolver las  $m$  ecuaciones para las  $m$  incógnitas restantes. Las variables igualadas a cero se conocen formalmente como *variables no básicas*; mientras que a las  $m$  variables restantes se les llama *variables básicas*.

Si todas las variables básicas son no negativas, al resultado se le llama una *solución factible básica*. El óptimo será una de éstas.

Ahora, un procedimiento directo para determinar la solución óptima será calcular todas las soluciones básicas, determinar cuáles de ellas son factibles, y de éstas, cuál tiene el valor mayor de  $Z$ . Sin embargo, éste no es un procedimiento recomendable por dos razones.

Primero, aun para problemas de tamaños moderado, se necesita resolver una gran cantidad de ecuaciones. Para  $m$  ecuaciones con  $n$  incógnitas, se tendrán que resolver

$$C^n_m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

ecuaciones simultáneas. Por ejemplo, si hay 10 ecuaciones ( $m = 10$ ) con 16 incógnitas ( $n = 16$ ), ¡se tendrían 8 008 [= 16!/(10!6!)] sistemas de ecuaciones de  $10 \times 10$  para resolver!

Segundo, quizás una porción significativa de éstas no sea factible. Por ejemplo, en el problema actual de los  $C_6^4 = 15$  puntos extremos, sólo 5 son factibles. Claramente, si se pudiese evitar resolver todos estos sistemas innecesarios, se tendría un algoritmo más eficiente. Uno de estos procedimientos se describe a continuación.

**Implementación del método simplex.** El método simplex evita las ineficiencias descritas en la sección anterior. Esto se hace al comenzar con una solución factible básica. Luego se mueve a través de una secuencia de otras soluciones factibles básicas que mejoran sucesivamente el valor de la función objetivo. En forma eventual, se alcanza el valor óptimo y se termina el método.

Se ilustrará el procedimiento con el problema de procesamiento de gas, de los ejemplos 15.1 y 15.2. El primer paso consiste en empezar en una solución factible básica (es decir, en un punto esquina extremo del espacio factible). Para casos como los nuestros, un punto de inicio obvio podría ser el punto A; esto es,  $x_1 = x_2 = 0$ . Las 6 ecuaciones originales en 4 incógnitas se convierten en

$$\begin{array}{rcl} S_1 & & = 77 \\ S_2 & & = 80 \\ S_3 & & = 9 \\ S_4 & & = 6 \end{array}$$

Así, los valores iniciales de las variables básicas se dan automáticamente siendo iguales a los lados derecho de las restricciones.

Antes de proceder al siguiente paso, la información inicial se puede resumir en un adecuado formato tabular. Como se muestra a continuación, la *tabla* proporciona un resumen de la información clave que constituye el problema de la programación lineal.

Básica	Z	$x_1$	$x_2$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	Solución	Intersección
Z	1	-150	-175	0	0	0	0	0	
$S_1$	0	7	11	1	0	0	0	77	11
$S_2$	0	10	8	0	1	0	0	80	8
$S_3$	0	1	0	0	0	1	0	9	9
$S_4$	0	0	1	0	0	0	1	6	$\infty$

Observe que para propósitos de la *tabla*, la función objetivo se expresa como

$$Z - 150x_1 - 175x_2 - 0S_1 - 0S_2 - 0S_3 - 0S_4 = 0 \quad (15.5)$$

El siguiente paso consiste en moverse a una nueva solución factible básica que nos lleve a mejorar la función objetivo. Esto se consigue incrementando una variable actual no básica (en este punto,  $x_1$  o  $x_2$ ) por arriba de cero para que  $Z$  aumente. Recuerde que, en el ejemplo presente, los puntos extremos deben tener 2 valores cero. Por lo tanto, una de las variables básicas actuales ( $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  o  $S_4$ ) también deben igualarse a cero.

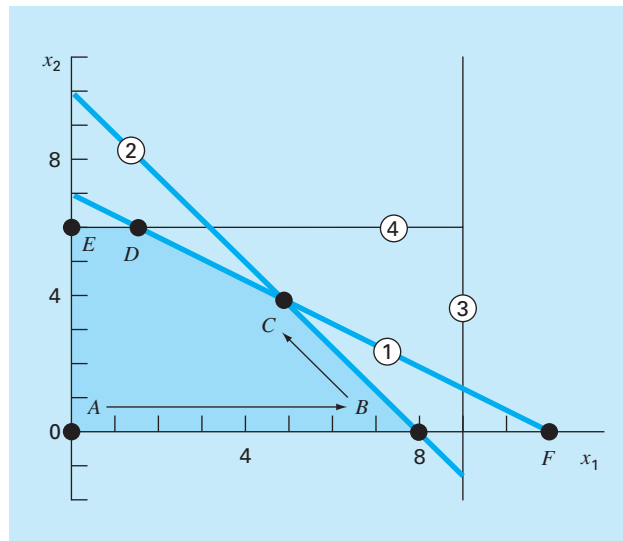
Para resumir este paso importante: una de las variables no básicas actuales debe hacerse básica (no cero). Esta variable se llama *variable de entrada*. En el proceso, una de las variables básicas actuales se vuelve no básica (cero). Esta variable se llama *variable de salida*.

Ahora, desarrollaremos un procedimiento matemático para seleccionar las variables de entrada y de salida. A causa de la convención de cómo escribir la función objetivo [ecuación (15.5)], la variable de entrada puede ser cualquier variable de la función objetivo que tenga un coeficiente negativo (ya que esto hará a  $Z$  más grande). La variable con el valor negativo más grande se elige de manera convencional porque usualmente nos lleva al incremento mayor en  $Z$ . En nuestro caso,  $x_2$  será la variable entrante puesto que su coeficiente,  $-175$ , es más negativo que el coeficiente de  $x_1$ :  $-150$ .

Aquí se puede consultar la solución gráfica para mejor comprensión. Se comienza en el punto inicial A, como se muestra en la figura 15.3. Considerando su coeficiente, se escogerá  $x_2$  como entrada. No obstante, para abreviar en este ejemplo, seleccionamos  $x_1$  puesto que en la gráfica se observa que nos llevará más rápido al máximo.

**FIGURA 15.3**

Ilustración gráfica de cómo se mueve en forma sucesiva el método simplex a través de soluciones básicas factibles, para llegar al óptimo de manera eficiente.





Después, se debe elegir la variable de salida entre las variables básicas actuales ( $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  o  $S_4$ ). Se observa gráficamente que hay dos posibilidades. Moviéndonos al punto  $B$  se tendrá  $S_2$  igual a cero; mientras que al movernos al punto  $F$  tendremos  $S_1$  igual a cero. Sin embargo, en la gráfica también queda claro que  $F$  no es posible, ya que queda fuera del espacio solución factible. Así, decide moverse de  $A$  a  $B$ .

¿Cómo se detecta el mismo resultado en forma matemática? Una manera es calcular los valores en los que las líneas de restricción intersecan el eje o la línea que corresponde a la variable saliente (en nuestro caso, el eje  $x_1$ ). Es posible calcular este valor como la razón del lado derecho de la restricción (la columna “Solución” de la *tabla*) entre el coeficiente correspondiente de  $x_1$ . Por ejemplo, para la primera variable de holgura restrictiva  $S_1$ , el resultado es

$$\text{Intersección} = \frac{77}{7} = 11$$

Las intersecciones restantes se pueden calcular y enlistar como la última columna de la *tabla*. Debido a que 8 es la menor intersección positiva, significa que la segunda línea de restricción se alcanzará primero conforme se incrementa  $x_1$ . Por lo tanto,  $S_2$  será la variable de entrada.

De esta manera, nos hemos movido al punto  $B$  ( $x_2 = S_2 = 0$ ), y la nueva solución básica es ahora

$$\begin{array}{rcl} 7x_1 + S_1 & = & 77 \\ 10x_1 & = & 80 \\ x_1 + S_3 & = & 9 \\ S_4 & = & 6 \end{array}$$

La solución de este sistema de ecuaciones define efectivamente los valores de las variables básicas en el punto  $B$ :  $x_1 = 8$ ,  $S_1 = 21$ ,  $S_3 = 1$  y  $S_4 = 6$ .

Se utiliza la tabla para realizar los mismos cálculos empleando el método de Gauss-Jordan. Recuerde que la estrategia básica de este método implica convertir el elemento pivote en 1, y después eliminar los coeficientes en la misma columna arriba y abajo del elemento pivote (recuerde la sección 9.7).

En este ejemplo, el renglón pivote es  $S_2$  (la variable de entrada) y el elemento pivote es 10 (el coeficiente de la variable de salida,  $x_1$ ). Al dividir el renglón entre 10 y reemplazar  $S_2$  por  $x_1$  se tiene

Básica	Z	$x_1$	$x_2$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	Solución	Intersección
Z	1	-150	-175	0	0	0	0	0	
$S_1$	0	7	11	1	0	0	0	77	
$x_1$	0	1	0.8	0	0.1	0	0	8	
$S_3$	0	1	0	0	0	1	0	9	
$S_4$	0	0	1	0	0	0	1	6	

Después, se eliminan los coeficientes de  $x_1$  en los otros renglones. Por ejemplo, para el renglón de la función objetivo, el renglón pivote se multiplica por  $-150$  y el resultado se resta del primer renglón para obtener

<b>Z</b>	<b><math>x_1</math></b>	<b><math>x_2</math></b>	<b><math>S_1</math></b>	<b><math>S_2</math></b>	<b><math>S_3</math></b>	<b><math>S_4</math></b>	<b>Solución</b>
1	-150	-175	0	0	0	0	0
-0	$-(-150)$	$-(-120)$	-0	$-(-15)$	0	0	$-(-1\ 200)$
1	0	-55	0	15	0	0	1 200

Es posible realizar operaciones similares en los renglones restantes para obtener la nueva tabla,

<b>Básica</b>	<b>Z</b>	<b><math>x_1</math></b>	<b><math>x_2</math></b>	<b><math>S_1</math></b>	<b><math>S_2</math></b>	<b><math>S_3</math></b>	<b><math>S_4</math></b>	<b>Solución</b>	<b>Intersección</b>
Z	1	0	-55	0	15	0	0	1 200	
$S_1$	0	0	5.4	1	-0.7	0	0	21	3.889
$x_1$	0	1	0.8	0	0.1	0	0	8	10
$S_3$	0	0	-0.8	0	-0.1	1	0	1	-1.25
$S_4$	0	0	1	0	0	0	1	6	6

Así la nueva *tabla* resume toda la información del punto *B*. Esto incluye el hecho de que el movimiento ha aumentado la función objetivo a  $Z = 1\ 200$ .

Esta *tabla* se utiliza después para representar el próximo y, en este caso, último paso. Sólo una variable más,  $x_2$ , tiene un valor negativo en la función objetivo, y se elige, por lo tanto, como la variable de salida. De acuerdo con los valores de la intersección (ahora calculados como la columna solución sobre los coeficientes de la columna de  $x_2$ ), la primera restricción tiene el valor positivo más pequeño y, por lo tanto, se selecciona  $S_1$  como la variable de entrada. Así, el método simplex nos mueve del punto *B* al *C* en la figura 15.3. Por último, la eliminación de Gauss-Jordan se utiliza para resolver las ecuaciones simultáneas. El resultado es la *tabla* final,

<b>Básica</b>	<b>Z</b>	<b><math>x_1</math></b>	<b><math>x_2</math></b>	<b><math>S_1</math></b>	<b><math>S_2</math></b>	<b><math>S_3</math></b>	<b><math>S_4</math></b>	<b>Solución</b>
Z	1	0	0	10.1852	7.8704	0	0	1 413.889
$x_2$	0	0	1	0.1852	-0.1296	0	0	3.889
$x_1$	0	1	0	-0.1481	0.2037	0	0	4.889
$S_3$	0	0	0	0.1481	-0.2037	1	0	4.111
$S_4$	0	0	0	-0.1852	0.1296	0	1	2.111

Se sabe que éste es el resultado final porque no quedan coeficientes negativos en la fila de la función objetivo. La solución final se tabula como  $x_1 = 3.889$  y  $x_2 = 4.889$ , que dan una función objetivo máxima  $Z = 1\ 413.889$ . Además, como  $S_3$  y  $S_4$  están todavía en la base, sabemos que la solución está limitada por la primera y la segunda restricciones.

## 15.2 OPTIMIZACIÓN RESTRINGIDA NO LINEAL

Existen varios procedimientos para los problemas de optimización no lineal con la presencia de restricciones. Generalmente, dichos procedimientos se dividen en directos

e indirectos (Rao, 1996). Los procedimientos indirectos típicos usan las llamadas *funciones de penalización*. Éstas consideran expresiones adicionales para hacer que la función objetivo sea menos óptima conforme la solución se aproxima a una restricción. Así, la solución no será aceptada por violar las restricciones. Aunque tales métodos llegan a ser útiles en algunos problemas, se vuelven difíciles cuando el problema tiene muchas restricciones.

El método de búsqueda del *gradiente reducido generalizado*, o GRG, es uno de los métodos directos más populares (para detalles, véase Fylstra *et al.*, 1998; Lasdon *et al.*, 1978; Lasdon y Smith, 1992). Éste es, de hecho, el método no lineal usado en el Solver de Excel.

Este método primero “reduce” a un problema de optimización no restringido. Lo hace resolviendo en un conjunto de ecuaciones no lineales las variables básicas en términos de variables no básicas. Después, se resuelve el problema no restringido utilizando procedimientos similares a los que se describen en el capítulo 14. Se escoge primero una dirección de búsqueda a lo largo de la cual se busca mejorar la función objetivo. La selección obvia es un procedimiento *cuasi-Newton* (BFGS) que, como se describió en el capítulo 14, requiere el almacenamiento de una aproximación de la matriz hessiana. Este procedimiento funciona muy bien en la mayoría de los casos. El procedimiento del *gradiente conjugado* también está disponible en Excel como una alternativa para problemas grandes. El Solver de Excel tiene la excelente característica de que, en forma automática, cambia al método del gradiente conjugado, dependiendo de la capacidad de almacenamiento. Una vez establecida la dirección de búsqueda, se lleva a cabo una búsqueda unidimensional a lo largo de esa dirección, mediante un procedimiento de tamaño de paso variable.

## 15.3 OPTIMIZACIÓN CON BIBLIOTECAS Y PAQUETES DE SOFTWARE

Los paquetes y bibliotecas de software tienen grandes capacidades para la optimización. En esta sección, se dará una introducción a algunos de los más útiles.

### 15.3.1 Programación lineal en Excel

Existe una variedad de paquetes de software especialmente diseñados para la programación lineal. Sin embargo, como su disponibilidad es amplia, este análisis se concentrará en la hoja de cálculo de Excel. Ésta usa la opción Solver que se estudió, previamente en el capítulo 7, para localizar raíces.

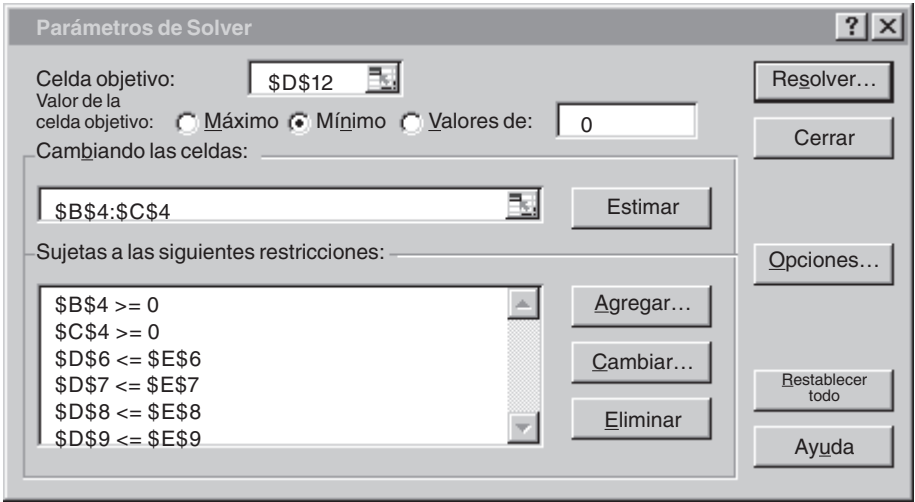
La manera en la cual se usa Solver para programación lineal es similar a las aplicaciones hechas con anterioridad, en el sentido de cómo se introducen los datos en las celdas de la hoja de cálculo. La estrategia básica consiste en ubicar una celda que será optimizada, como una función de las variaciones de las otras celdas sobre la misma hoja de cálculo. El siguiente ejemplo ilustra cómo realizar esto con el problema del procesamiento de gas.

#### EJEMPLO 15.3 Uso del Solver de Excel para un problema de programación lineal

**Planteamiento del problema.** Utilice Excel para resolver el problema del procesamiento de gas que examinamos en este capítulo.

**Solución.** Una hoja de cálculo de Excel para calcular los valores pertinentes en el problema del procesamiento de gas se muestra en la figura 15.4. Las celdas no sombreadas son las que contienen datos numéricos y etiquetados. Las celdas sombreadas contienen las cantidades que se calculan basadas en las otras celdas. Reconozca que la celda que va a ser maximizada es la D12, la cual contiene la utilidad total. Las celdas que cambian son B4:C4, donde se tienen las cantidades producidas de gas regular y prémium.

Una vez que se crea la hoja de cálculo, se selecciona **Solver** del menú Tools (Herramientas). En este momento se despliega una ventana de diálogo solicitándole la información pertinente. Las celdas del cuadro de diálogo de Solver se llenan así



**FIGURA 15.4**

Hoja de cálculo en Excel para usar el Solver con la programación lineal.

	A	B	C	D	E
1	<b>Problema para el procesamiento de gas</b>				
2					
3		Regular	Prémium	Total	Disponible
4	Producido	0	0		
5					
6	Materia prima	7	11	0	77
7	Tiempo	10	8	0	80
8	Almacen. de gas regular			0	9
9	Almacen. de gas prémium			0	6
10					
11	Ganancia por unidad	150	175		
12	Ganancia	0	0	0	

$=B6*B4+C6*C4$

$=B7*B4+C7*C4$

$=B4$

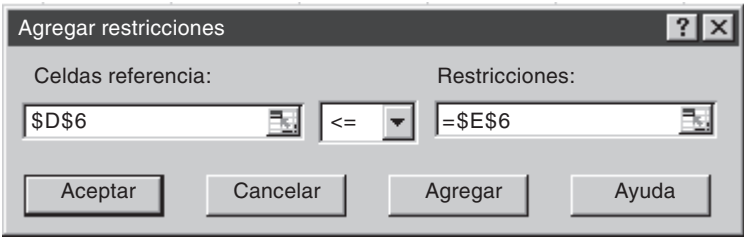
$=C4$

$=B4*B11$

$=C4*C11$

$=B12+C12$

Las restricciones se agregan una por una al seleccionar el botón “Agregar”. Esto abrirá un cuadro de diálogo que se ve así



Entonces, la restricción donde el total de materia prima (celda D6) debe ser menor o igual que el abastecimiento disponible (E6) se agrega como se muestra. Después de agregar cada una de las restricciones, puede seleccionarse el botón agregar. Cuando se haya introducido las cuatro restricciones, seleccionamos el botón Aceptar para regresar a la ventana de diálogo del Solver.

Ahora, antes de la ejecución, se deberá seleccionar el botón “Opciones...” del Solver y escoger el cuadro rotulado como “Assume linear model” (Suponer modelo lineal). Esto hará que Excel emplee una versión del algoritmo simplex (en lugar del Solver no lineal más general que normalmente usa) que acelera su aplicación.

Después de seleccionar esta opción, regrese el menú Solver. Cuando seleccione el botón aceptar, se abrirá un cuadro de diálogo con un reporte sobre el éxito de la operación. En el caso actual, el Solver obtiene la solución correcta (figura 15.5).

**FIGURA 15.5**

Hoja de cálculo de Excel con la solución al problema de programación lineal.

	A	B	C	D	E
1	<b>Problema para el procesamiento de gas</b>				
2					
3		Regular	Prémium	Total	Disponible
4	Producido	4.888889	3.888889		
5					
6	Materia prima	7	11	77	77
7	Tiempo	10	8	80	80
8	Almacen. de gas regular			4.888889	9
9	Almacen. de gas prémium			3.888889	6
10					
11	Ganancia por unidad	150	175		
12	Ganancia	733.3333	680.5556	1413.889	

Además de obtener la solución, Solver también ofrece algunos reportes en resumen útiles. Éstos se explorarán en las aplicaciones a la ingeniería que se describen en la sección 16.2.

### 15.3.2 Excel para la optimización no lineal

La manera de usar Solver para la optimización no lineal es similar a las aplicaciones hechas con anterioridad en el sentido de cómo los datos se introducen en las celdas de la hoja de cálculo. Una vez más, la estrategia básica es tener una sola celda a optimizar, como una función de las variaciones en las otras celdas sobre la misma hoja de cálculo. El siguiente ejemplo ilustra cómo hacer esto con el problema del paracaidista que planteamos en la introducción de esta parte del libro (recuerde el ejemplo PT4.1).

#### EJEMPLO 15.4 Uso del Solver de Excel para la optimización restringida no lineal

**Planteamiento del problema.** Recuerde que en el ejemplo PT4.1 se desarrolló una optimización restringida no lineal para minimizar el costo de la caída de un paracaídas en un campo de refugiados. Los parámetros de este problema son

Parámetro	Símbolo	Valor	Unidades
Masa total	$M_t$	2 000	kg
Aceleración de la gravedad	$g$	9.8	m/s <sup>2</sup>
Coeficiente de costo (constante)	$c_0$	200	\$
Coeficiente de costo (longitud)	$c_1$	56	\$/m
Coeficiente de costo (área)	$c_2$	0.1	\$/m <sup>2</sup>
Velocidad crítica de impacto	$v_c$	20	m/s
Efecto del área sobre el arrastre	$k_c$	3	kg/(s·m <sup>2</sup> )
Altura inicial de caída	$z_0$	500	m

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones (PT4.11) a (PT4.19) se obtiene

$$\text{Minimizar } C = n(200 + 56\ell + 0.1A^2)$$

sujeta a

$$v \leq 20$$

$$n \geq 1$$

donde  $n$  es un entero y todas las otras variables son reales. Además, las siguientes cantidades se definen como

$$A = 2\pi r^2$$

$$\ell = \sqrt{2} r$$

$$c = 3A$$

$$m = \frac{M_t}{n} \tag{15.6}$$

$$t = \text{raíz} \left[ 500 - \frac{9.8m}{c} t + \frac{9.8m^2}{c^2} (1 - e^{-(c/m)t}) \right] \tag{15.7}$$

$$v = \frac{9.8m}{c} (1 - e^{-(c/m)t})$$

Utilice Excel para resolver este problema con las variables de diseño  $r$  y  $n$  que minimicen el costo  $C$ .

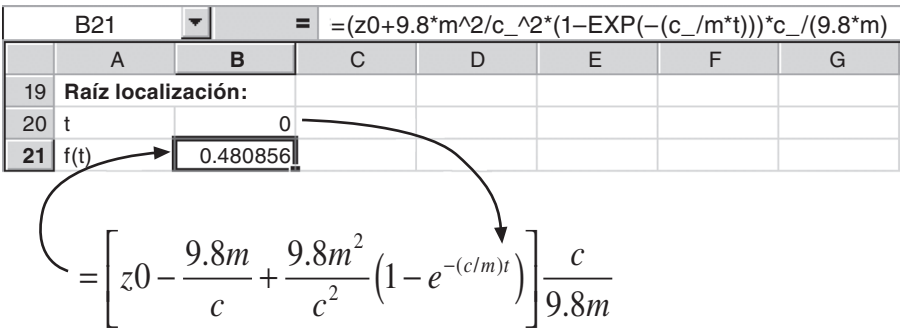
**Solución.** Antes de llevar este problema a Excel, se debe enfrentar primero el problema de determinar la raíz en la formulación anterior [ecuación (15.7)]. Un método podría ser desarrollar un macro para implementar un método de localización de raíces, tal como el de la bisección o de la secante. (Se ilustrará cómo realizar esto en el próximo capítulo, en la sección 16.3.)

Aunque, hay un procedimiento más fácil mediante la siguiente solución de la ecuación (15.7) que es la iteración de punto fijo,

$$t_{i+1} = \left[ 500 + \frac{9.8m^2}{c^2} (1 - e^{-(c/m)t_i}) \right] \frac{c}{9.8m} \tag{15.8}$$

Así,  $t$  se ajusta hasta que se satisfaga la ecuación (15.8). Se puede mostrar que para el rango de los parámetros usados en este problema, la fórmula siempre converge.

Ahora, ¿cómo se puede resolver esta ecuación en una hoja de cálculo? Como se muestra abajo, se fijan dos celdas para que tengan un valor de  $t$  y el lado derecho de la ecuación (15.8) [es decir,  $f(t)$ ].



Se puede teclear la ecuación (15.8) en la celda B21 de tal forma que tome el valor del tiempo en la celda B20 y los valores de los otros parámetros se asignan en otras celdas en cualquier otro lugar de la hoja (véase a continuación cómo se construye toda la hoja). Después colóquese en la celda B20 y lleve su valor a la celda B21.

Una vez que se introduce esta fórmula, se desplegará en forma inmediata el mensaje de error: “No se pueden resolver referencias circulares”, ya que B20 depende de B21 y viceversa. Ahora, escoja del menú herramientas/Opciones y seleccione **calculation** (cálculos). Del cuadro de diálogo “cálculos”, escoja “iteración” y presione “aceptar”. En forma inmediata la hoja de cálculo iterará estas celdas y el resultado aparecerá como

	A	B
19	Raíz localización:	
20	t	10.2551
21	f(t)	10.25595

Así, las celdas convergerán a la raíz. Si se quiere tener más precisión, sólo presione la tecla F9 para que se realicen más iteraciones (por default son 100 iteraciones, que es posible modificar si así se desea).

En la figura 15.6 se muestra cómo implementar una hoja de cálculo en Excel para calcular los valores pertinentes. Las celdas no sombreadas son las que contienen los datos numéricos y las leyendas. Las celdas sombreadas contienen cantidades que se calculan basadas en las otras celdas. Por ejemplo, la masa en B17 se calculó con la ecuación (15.6) con base en los valores de  $M_i$  (B4) y  $n$  (E5). Observe también que algunas celdas son redundantes. Por ejemplo, la celda E11 se refiere a la celda E5. Esta repetición en la celda E11 es para que la estructura de las restricciones sea evidente en la hoja. Finalmente, note que la celda que habrá de minimizarse es E15, que contiene el costo total. Las celdas que cambian son E4:E5, en las cuales se tiene el radio y el número de paracaídas.

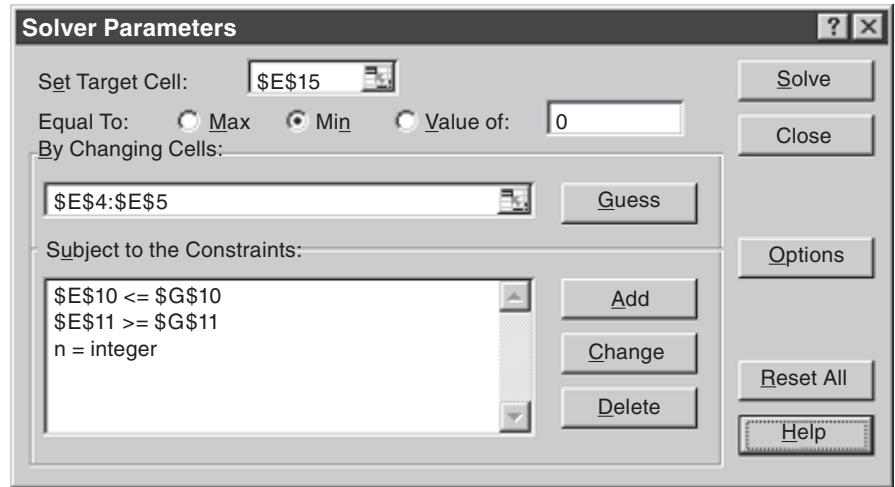
**FIGURA 15.6**

Hoja de cálculo en Excel que muestra la solución del problema de optimización no lineal del paracaídas.

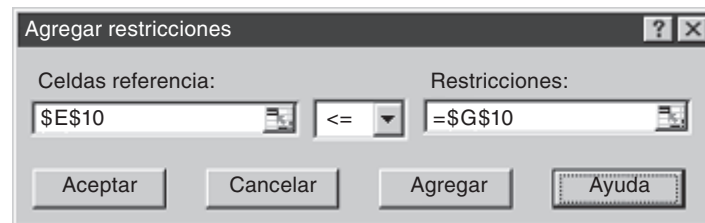
	A	B	C	D	E	F	G
1	<b>Problema de optimización del paracaídas</b>						
2							
3	<b>Parámetros:</b>			<b>Variables de diseño:</b>			
4	Mt	2000		r	1		
5	g	9.8		n	1		
6	cost1	200					
7	cost2	56		<b>Restricciones:</b>			
8	cost3	0.1					
9	vc	20		<b>variable</b>		<b>tipo</b>	<b>límite</b>
10	kc	3		v	95.8786	<=	20
11	z0	500		n	1	>=	1
12							
13	<b>Valores calculados:</b>			<b>Función objetivo:</b>			
14	A	6.283185					
15	l	1.414214		Costo	283.1438		
16	c	18.84956					
17	m	2000					
18							
19	<b>Raíz localización:</b>						
20	t	10.26439					
21	f(t)	10.26439					



Una vez que se ha creado la hoja de cálculo, se elige la solución Solver del menú herramientas. En esta etapa se desplegará un cuadro de diálogo, solicitándole la información pertinente. Las celdas en el cuadro de diálogo de Solver se llenan así



Se deben agregar las restricciones una por una al seleccionar el botón “agregar”. Esto abrirá un cuadro de diálogo que se ve así



Como se muestra, la restricción de que la velocidad de impacto presente (celda E10) debe ser menor o igual que la velocidad requerida (G10) puede agregarse como se muestra. Después de agregar cada restricción se puede seleccionar el botón “agregar”. Observe que la flecha hacia abajo le permite elegir entre varios tipos de restricciones (<=, >=, = y entero). Así, es posible forzar el número del paracaídas (E5) para que sea un entero.

Una vez introducidas las tres restricciones, se selecciona el botón “aceptar” para regresar al cuadro de diálogo de Solver. Después de seleccionar esta opción vuelva al menú de Solver. Cuando seleccione el botón “aceptar” se abrirá un cuadro de diálogo con un reporte sobre el éxito de la operación. En el caso presente, el Solver obtiene la solución correcta como se indica en la figura 15.7.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Problema de optimización del paracaídas						
2							
3	Parámetros:			Variables de diseño:			
4	Mt	2000		r	2.943652		
5	g	9.8		n	6		
6	cost1	200					
7	cost2	56		Restricciones:			
8	cost3	0.1					
9	vc	20		variable		tipo	límite
10	kc	3		v	20	<=	20
11	z0	500		n	6	>=	1
12							
13	Valores calculados:			Función objetivo:			
14	A	54.44435					
15	I	4.162953		Costo	4377.264		
16	c	163.333					
17	m	333.3333					
18							
19	Raíz localización:						
20	t	27.04077					
21	f(t)	27.04077					

FIGURA 15.7

Hoja de cálculo en Excel con la solución del problema de optimización no lineal referente al paracaídas.

De esta forma, se determina que el costo mínimo es \$4 377.26 si se divide la carga en seis paquetes con un radio del paracaídas de 2.944 m. Además de obtener la solución, el Solver también proporciona algunos reportes en resumen útiles. Éstos se explorarán en las aplicaciones a la ingeniería que se describirán en la sección 16.2.

15.3.3 MATLAB

Como se resume en la tabla 15.1, MATLAB tiene varias funciones interconstruidas para optimización. Los siguientes dos ejemplos ilustran cómo utilizarlas.

TABLA 15.1 Funciones de MATLAB para optimización.

Función	Descripción
fminbnd	Minimiza una función de una variable con restricciones
fminsearch	Minimiza una función de varias variables

EJEMPLO 15.5    **Uso de MATLAB para la optimización unidimensional**

**Planteamiento del problema.** Utilice la función *fminbnd* de MATLAB para encontrar el máximo de

$$f(x) = 2 \sin x - \frac{x^2}{2}$$

en el intervalo  $x_l = 0$  y  $x_u = 4$ . Recuerde que en el capítulo 13 empleamos varios métodos para resolver este problema para  $x = 1.7757$  y  $f(x) = 1.4276$ .

**Solución.** Primero, necesitamos crear un archivo M para la función.

```
function f=fx(x)
f = -(2*sin(x)-x^2/10)
```

Como lo que nos interesa es la maximización, introducimos el negativo de la función. A continuación llamamos a la función *fminbnd* con

```
>> x=fminbnd('fx',0,4)
```

El resultado es

```
f =
    -1.7757

x =
    1.4275
```

Observe que se pueden incluir más argumentos. Una adición útil es establecer opciones de optimización, tales como tolerancia de error o máximo de iteraciones. Esto se hace con la función *optimset*, que se utilizó previamente en el ejemplo 7.6 y que tiene el formato general

```
optimset('param_1',value_1,'param_2',value_2,...)
```

donde  $param_i$  es un parámetro que especifica el tipo de opción y  $value_i$  es el valor asignado a esa opción. En el ejemplo si se quiere establecer la tolerancia de  $1 \times 10^{-2}$ ,

```
optimset('TolX',1e-2)
```

De esta manera la solución del presente problema con una tolerancia de  $1 \times 10^{-2}$  se genera con

```
>> fminbnd('fx',0,4,optimset('TolX',1e-2))
```

cuyo resultado es

```
f =
    -1.7757

ans =
    1.4270
```

Un conjunto completo de parámetros se encuentra llamando a “Help” (Ayuda)

```
>> Help optimset
```

#### EJEMPLO 15.6 Uso de MATLAB para optimización multidimensional

**Planteamiento del problema.** Con la función *fminsearch* de MATLAB encuentre el máximo de

$$f(x, y) = 2xy + 2x - x^2 - 2y^2$$

Utilice como valores iniciales  $x = -1$  y  $y = 1$ . Recuerde que en el capítulo 14 se utilizaron varios métodos para resolver este problema para  $x = 2$  y  $y = 1$  con  $f(x, y) = -2$ .

**Solución.** Primero debemos crear un archivo M para retener la función:

```
function f=fxxy(x)
f = -(2*x(1)*x(2)+2*x(1)-x(1)^2-2*x(2)^2)
```

Puesto que nos interesa la maximización, introducimos el negativo de la función. Después llamamos la función *fminsearch* con

```
>> x=fminsearch('fxxy', [-1,1])
```

El resultado es

```
f =
    -2.0000

x =
    1.9999    1.0000
```

Igual que con *fminbnd*, se pueden agregar argumentos en orden para especificar parámetros adicionales en el proceso de optimización. Por ejemplo, la función *optimset* se utiliza para limitar el número máximo de iteraciones

```
x=fminsearch('fxxy', [-1,1], optimset('MaxIter',2))
```

obteniéndose como resultado

```
f =
    7.0025

Exiting: Maximum number of iterations has been exceeded
- increase MaxIter option.

Current function value: 7.000000

x =
    -1    1
```

Debido a que hemos fijado límites muy estrictos a las iteraciones, la optimización termina bien antes de que se alcance el máximo.

**TABLA 15.2** Rutinas IMSL para optimización.

Categoría	Rutina	Capacidad
Minimización no restringida		
Función univariada	UVMIF	Usando sólo valores de la función
	UVMID	Utilizando valores de la función y de la primera derivada
	UVMGS	Función no suave
Función multivariada	UMINF	Usando gradiente por diferencias finitas
	UMING	Empleando gradiente analítico
	UMIDH	Usando hessiano en diferencias finitas
	UMIAH	Utilizando hessiano analítico
	UMCGF	Usando gradiente conjugado con el gradiente en diferencias finitas
	UMCGG	Empleando gradiente conjugado con gradiente analítico
	UMPOL	Función no suave
Mínimos cuadrados no lineales		
	UNLSF	Empleando jacobiano en diferencias finitas
	UNLSJ	Utilizando jacobiano analítico
Minimización con cotas simples		
	BCONF	Usando gradiente en diferencias finitas
	BCONG	Utilizando gradiente analítico
	BCODH	Empleando hessiano en diferencias finitas
	BCOAH	Usando hessiano analítico
	BCPOL	Función no suave
	BCLSF	Mínimos cuadrados no lineales usando jacobiano en diferencias finitas
	BCLSJ	Mínimos cuadrados no lineales utilizando jacobiano analítico
Minimización restringida lineal		
	DIPRS	Programación lineal densa
	QPROG	Programación cuadrática
	LCONF	Función objetivo general con gradiente en diferencias finitas
	LCONG	Función objetivo general con gradiente analítico
Minimización restringida no lineal		
	NCONF	Utilizando gradiente en diferencias finitas
	NCONG	Usando gradiente analítico
Rutinas de servicio		
	CDGRD	Gradiente en diferencias centrales
	FDGRD	Gradiente en diferencias hacia adelante
	FDHES	Hessiano en diferencias hacia adelante
	GDHES	Hessiano en diferencias hacia adelante con gradiente analítico
	FDJAC	Jacobiano en diferencias hacia adelante
	CHGRD	Verificación del gradiente proporcionado por el usuario
	CHHES	Verificación del hessiano dado por el usuario
	CHJAC	Verificación del jacobiano proporcionado por el usuario
	GGUES	Puntos de inicio generados

### 15.3.4 IMSL

IMSL tiene varias subrutinas en Fortran para optimización (tabla 15.2). El presente análisis se concentrará en la rutina UVMID. Esta rutina localiza el punto mínimo de una función suave en una sola variable, mediante evaluaciones de la función y de las primeras derivadas.

UVMID es implementado por la siguiente instrucción CALL:

```
CALL UVMID (F, G, XGUESS, ERREL, GTOL, MAXFN, A, B, X, FX, GX)
```

donde

F = FUNCIÓN suministrada por el usuario para calcular el valor de la función que va a minimizarse. La forma es F(X), donde X = punto donde se evalúa la función. (Entrada). X no deberá ser modificada por F. F = valor de la función calculado en el punto X. (Salida)

G = FUNCIÓN suministrada por el usuario para calcular la derivada de la función, donde G = valor de la función calculado en el punto X. (Salida)

F y G se deben declarar como EXTERNAL en el programa de llamado.

XGUESS = Un valor inicial del punto mínimo de F. (Entrada)

ERREL = Exactitud relativa requerida del valor final de X. (Entrada)

GTOL = Tolerancia de la derivada usada para decidir si el punto actual es un mínimo. (Entrada)

MAXFN = Número máximo permitido de evaluaciones de la función. (Entrada)

A = Punto extremo inferior del intervalo en el cual se localizará el máximo. (Entrada)

B = Punto extremo superior del intervalo en el cual se localizará el máximo. (Entrada)

FX = Valor de la función en X. (Salida)

GX = Valor de la derivada en X. (Salida)

#### EJEMPLO 15.7 Uso de IMSL para localizar un solo óptimo

**Planteamiento del problema.** Use UVMID para determinar el máximo de la función unidimensional resuelta en el capítulo 13 (recuerde los ejemplos del 13.1 al 13.3).

$$f(x) = 2 \sin x - \frac{x^2}{10}$$

**Solución.** Un ejemplo de un programa principal en Fortran 90 y de una función usando UVMIF para resolver este problema se escribe así:

```
PROGRAM Oned
USE mims1

IMPLICIT NONE
INTEGER::maxfn=50
REAL::xguess=0., errel=1.E-6, gtol=1.E-6, a=-2., b=2.
REAL::x, f, g, fx, gx
EXTERNAL f, g
CALL UVMID(f, g, xguess, errrel, gtol, maxfn, a, b, x, fx, gx)
PRINT *, x, fx, gx
END PROGRAM
```

```

FUNCTION f(x)
IMPLICIT NONE
REAL::x, f
f=-(2.*SIN(X) - x**2/10.)
END FUNCTION

```

```

FUNCTION g(x)
IMPLICIT NONE
REAL::x, g
g=-(2.*COS(x) - 2.*x/10.)
END FUNCTION

```

Observe que como la rutina está dada para minimización, se introduce el negativo de la función. Un ejemplo de corrida es

```
1.427334 -1.775726 -4.739729E-04
```

## PROBLEMAS

**15.1** Una compañía fabrica dos tipos de productos, A y B. Éstos se fabrican durante una semana laboral de 40 horas para enviarse al final de la semana. Se requieren 20 kg y 5 kg de materia prima por kilogramo de producto, respectivamente, y la compañía tiene acceso a 9500 kg de materia prima por semana. Sólo se puede crear un producto a la vez, con tiempos de producción para cada uno de ellos de 0.04 y 0.12 horas, respectivamente. La planta sólo puede almacenar 550 kg en total de productos por semana. Por último, la compañía obtiene utilidades de \$45 y \$20 por cada unidad de A y B, respectivamente. Cada unidad de producto equivale a un kilogramo.

- Plantee el problema de programación lineal para maximizar la utilidad.
- Resuelva en forma gráfica el problema de programación lineal.
- Solucione el problema de programación lineal con el método simplex.
- Resuelva el problema con algún paquete de software.
- Evalúe cuál de las opciones siguientes elevaría las utilidades al máximo: incrementar la materia prima, el almacenamiento, o el tiempo de producción.

**15.2** Suponga que para el ejemplo 15.1, la planta de procesamiento de gas decide producir un tercer grado de producto con las características siguientes:

	Supremo
Gas crudo	15 m <sup>3</sup> /ton
Tiempo de producción	12 hr/ton
Almacenamiento	5 ton
Utilidad	\$250/ton

Además, suponga que se ha descubierto una nueva fuente de gas crudo, lo que duplicó el total disponible a 154 m<sup>3</sup>/semana.

- Plantee el problema de programación lineal para maximizar la utilidad.
- Resuelva el problema de programación lineal con el método simplex.
- Solucione el problema con un paquete de software.
- Evalúe cuál de las opciones siguientes aumentaría las utilidades al máximo: incrementar la materia prima, el almacenamiento, o el tiempo de producción.

**15.3** Considere el problema de programación lineal siguiente:

Maximizar  $f(x, y) = 1.75x + 1.25y$

sujeta a:

$$\begin{aligned}
 1.2x + 2.25y &\leq 14 \\
 x + 1.1y &\leq 8 \\
 2.5x + y &\leq 9 \\
 x &\geq 0 \\
 y &\geq 0
 \end{aligned}$$

Obtenga la solución:

- En forma gráfica.
- Usando el método simplex.
- Utilizando un paquete o biblioteca de software apropiados (por ejemplo, Excel, MATLAB, IMSL).

**15.4** Considere el problema de programación lineal que sigue:

Maximizar  $f(x, y) = 6x + 8y$

sujeta a

$$\begin{aligned}
 5x + 2y &\leq 40 \\
 6x + 6y &\leq 60 \\
 2x + 4y &\leq 32 \\
 x + 2y &\leq 500
 \end{aligned}$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

Obtenga la solución:

- En forma gráfica.
- Usando el método simplex.
- Utilizando un paquete o biblioteca de software apropiados (por ejemplo, Excel, MATLAB o IMSL).

**15.5** Emplee un paquete o biblioteca de software (por ejemplo, Excel, MATLAB o IMSL) para resolver el problema siguiente de optimización no lineal restringido:

$$\text{Maximizar } f(x, y) = 1.2x + 2y - y^3$$

sujeta a

$$2x + y \leq 2$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

**15.6** Utilice un paquete o biblioteca de software (por ejemplo, Excel, MATLAB o IMSL) para resolver el siguiente problema de optimización no lineal restringido:

$$\text{Maximizar } f(x, y) = 15x + 15y$$

sujeta a

$$x^2 + y^2 \leq 1$$

$$x + 2y \leq 2.1$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

**15.7** Considere el problema siguiente de optimización no lineal restringido:

$$\text{Minimizar } f(x, y) = (x - 3)^2 + (y - 3)^2$$

sujeta a

$$x + 2y = 4$$

- Utilice el enfoque gráfico para estimar la solución.
- Emplee un paquete o biblioteca de software (como Excel) para obtener una estimación más exacta.

**15.8** Use un paquete o biblioteca de software para determinar el máximo de

$$f(x, y) = 2.25xy + 1.75y - 1.5x^2 - 2y^2$$

**15.9** Emplee un paquete o biblioteca de software para determinar el máximo de

$$f(x, y) = 4x + 2y + x^2 - 2x^4 + 2xy - 3y^2$$

**15.10** Dada la función siguiente,

$$f(x, y) = -8x + x^2 + 12y + 4y^2 + 2xy$$

use un paquete o biblioteca de software para determinar el mínimo:

- En forma gráfica.

b) Numéricamente.

c) Sustituya el resultado del inciso b) en la función a fin de determinar el valor mínimo de  $f(x, y)$ .

d) Determine el Hessiano y su determinante, y sustituya el resultado del inciso b) para verificar que se detectó un mínimo.

**15.11** Se le pide a usted que diseñe un silo cónico cubierto para almacenar 50 m<sup>3</sup> de desechos líquidos. Suponga que los costos de excavación son de \$100/m<sup>3</sup>, los de cubrimiento lateral son de \$50/m<sup>2</sup>, y los de la cubierta son de \$25/m<sup>2</sup>. Determine las dimensiones del silo que minimizan el costo a) si la pendiente lateral no está restringida, y b) la pendiente lateral debe ser menor de 45°.

**15.12** Una compañía automotriz tiene dos versiones del mismo modelo de auto para vender, un cupé de dos puertas y otro de tamaño grande de cuatro puertas.

- Encuentre gráficamente cuántos autos de cada diseño deben producirse a fin de maximizar la utilidad, y diga de cuánto es esta ganancia.
- Con Excel, resuelva el mismo problema.

	Dos puertas	Cuatro puertas	Disponibilidad
Utilidad	\$13 000/auto	\$15 000/auto	
Tiempo de producción	17.5 h/auto	21 h/auto	8 000 h/año
Almacenamiento	400 autos	350 autos	
Demanda del consumidor	680/auto	500/auto	240 000 autos

**15.13** Og es el líder de la tribu de cavernícolas *Calm Waters*, que está sorprendentemente avanzada en matemáticas, aunque con mucho atraso tecnológico. Él debe decidir acerca del número de mazos y hachas de piedra que deben producirse para la batalla próxima contra la tribu vecina de los *Peaceful Sunset*. La experiencia le ha enseñado que un mazo es bueno para generar en promedio 0.45 muertes y 0.65 heridas, en tanto que un hacha produce 0.70 muertes y 0.35 heridas. La producción de un mazo requiere 5.1 libras de piedra y 2.1 horas-hombre de trabajo, mientras que para un hacha se necesitan 3.2 libras de piedra y 4.3 horas-hombre de trabajo. La tribu de Og dispone de 240 libras de piedra para la producción de armas, y de un total de 200 horas-hombre de trabajo, antes de que pase el tiempo esperado para esta batalla (la cual, Og está seguro, pondrá fin para siempre a la guerra). Al cuantificar el daño que se inflige al enemigo, Og valora una muerte tanto como dos heridas, y desea producir la mezcla de armas que maximice el daño.

- Formule la situación como un problema de programación lineal. Asegúrese de definir las variables de decisión.
- Represente este problema en forma gráfica, y asegúrese de identificar todos los puntos de esquina factibles, así como los no factibles.
- Resuelva el problema de forma gráfica.
- Solucione el problema con el uso de una computadora.



# CAPÍTULO 16

## Estudio de casos: optimización

El propósito de este capítulo es utilizar los métodos numéricos analizados en los capítulos 13 al 15 para resolver problemas prácticos de ingeniería que involucren optimización. Estos problemas son importantes, ya que a los ingenieros con frecuencia les pide que den la “mejor” solución a un problema. Como muchos de estos casos implican sistemas complicados e interacciones, entonces los métodos numéricos y las computadoras son necesarios para desarrollar soluciones óptimas.

Las siguientes aplicaciones son típicas de aquellas que se encuentran en forma rutinaria durante los estudios superiores y de graduados. Además, son representativas de problemas con los que se enfrentará el ingeniero profesionalmente. Los problemas se toman de las áreas de la ingeniería siguientes: química/bioingeniería, civil/ambiental, eléctrica y mecánica/aeronáutica.

La primera aplicación, tomada de la *ingeniería química/bioingeniería*, tiene que ver con el uso de la optimización restringida no lineal para el diseño óptimo de un tanque cilíndrico. Se usa el Solver de Excel para encontrar la solución.

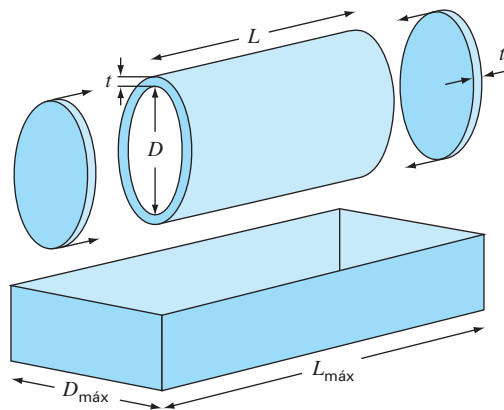
Después, se utiliza la programación lineal para resolver un problema de la *ingeniería civil/ambiental*: minimizar el costo del tratamiento de aguas residuales para cumplir con los objetivos de calidad del agua en un río. En este ejemplo, se expone la noción de los precios indefinidos y su uso para mostrar la sensibilidad de una solución en programación lineal.

La tercera aplicación, tomada de la *ingeniería eléctrica*, implica maximizar la potencia a través de un potenciómetro en un circuito eléctrico. La solución involucra optimización no restringida unidimensional. Además de resolver el problema, se muestra cómo el lenguaje macro de Visual Basic permite el acceso al algoritmo de búsqueda de la sección dorada, dentro del contexto del ambiente Excel.

Por último, en la cuarta aplicación, tomada de la *ingeniería mecánica/aeronáutica*, se busca determinar los desplazamientos de la pierna al pedalear en una bicicleta de montaña, minimizando la ecuación bidimensional de energía potencial.

### 16.1 DISEÑO DE UN TANQUE CON EL MENOR COSTO (INGENIERÍA QUÍMICA/BIOINGENIERÍA)

**Antecedentes.** Los ingenieros químicos (así como otros especialistas tales como los ingenieros mecánicos y civiles) con frecuencia se enfrentan al problema general del diseño de recipientes que transporten líquidos o gases. Suponga que se le pide determinar las dimensiones de un tanque cilíndrico pequeño para el transporte de desechos tóxicos que se van a trasladar en un camión. Su objetivo general será minimizar el cos-

**FIGURA 16.1**

Parámetros para determinar las dimensiones óptimas de un tanque cilíndrico.

**TABLA 16.1** Parámetros para determinar las dimensiones óptimas de un tanque cilíndrico para transporte de desechos tóxicos.

Parámetro	Símbolo	Valor	Unidades
Volumen requerido	$V_o$	0.8	$m^3$
Espesor	$t$	3	cm
Densidad	$\rho$	8 000	$kg/m^3$
Longitud de la caja	$L_{máx}$	2	m
Ancho de la caja	$D_{máx}$	1	m
Costo del material	$c_m$	4.5	\$/kg
Costo de soldadura	$c_w$	20	\$/m

to del tanque. Sin embargo, además del costo, usted debe asegurar que pueda contener la cantidad requerida de líquido y que no exceda las dimensiones de la caja del camión. Debido a que el tanque transportará desechos tóxicos, se requiere que éste sea de un espesor determinado, dentro de ciertos reglamentos.

Un esquema del tanque y de la caja se muestra en la figura 16.1. Como se observa, el tanque es un cilindro con dos placas soldadas en cada extremo.

El costo del tanque tiene dos componentes: 1. gastos del material, que están basados en el peso, y 2. gastos de soldadura que se basan en la longitud a soldar. Note que esto último consiste en soldar tanto la junta interior como la junta exterior donde las placas se unen con el cilindro. Los datos necesarios para el problema se resumen en la tabla 16.1.

**Solución.** El objetivo aquí es construir un tanque a un costo mínimo. El costo está relacionado con las variables de diseño (longitud y diámetro), ya que tienen efecto sobre la masa del tanque y las longitudes a soldar. Además, el problema tiene restricciones, pues el tanque debe 1. caber en la caja del camión y 2. tener capacidad para el volumen requerido de material.

El costo se obtiene de los costos del material del tanque y de la soldadura. Por lo tanto, la función objetivo se formula como una minimización

$$C = c_m m + c_w \ell_w \quad (16.1)$$

donde  $C$  = costo (\$),  $m$  = masa (kg),  $\ell_w$  = longitud a soldar (m),  $c_m$  y  $c_w$  = factores de costo por masa (\$/kg) y longitud de soldadura (\$/m), respectivamente.

Después, se relacionan la masa y la longitud de soldadura con las dimensiones del tambor. Primero, se calcula la masa como el volumen del material por su densidad. El volumen del material usado para construir las paredes laterales (es decir, el cilindro) se calcula así:

$$V_{\text{cilindro}} = L\pi \left[ \left( \frac{D}{2} + t \right)^2 - \left( \frac{D}{2} \right)^2 \right]$$

Para cada placa circular en los extremos,

$$V_{\text{placa}} = \pi \left( \frac{D}{2} + t \right)^2 t$$

Así, la masa se calcula mediante

$$m = \rho \left\{ L\pi \left[ \left( \frac{D}{2} + t \right)^2 - \left( \frac{D}{2} \right)^2 \right] + 2\pi \left( \frac{D}{2} + t \right)^2 t \right\} \quad (16.2)$$

donde  $\rho$  = densidad (kg/m<sup>3</sup>).

La longitud de soldadura para unir cada placa es igual a la circunferencia interior y exterior del cilindro. Para las dos placas, la longitud total de soldadura será

$$\ell_w = 2 \left[ 2\pi \left( \frac{D}{2} + t \right) + 2\pi \frac{D}{2} \right] = 4\pi(D + t) \quad (16.3)$$

Dados los valores para  $D$  y  $L$  (recuerde que el espesor  $t$  es fijado por un reglamento), las ecuaciones (16.1), (16.2) y (16.3) ofrecen un medio para calcular el costo. También observe que cuando las ecuaciones (16.2) y (16.3) se sustituyen en la ecuación (16.1), la función objetivo que se obtiene es no lineal.

Después, se formulan las restricciones. Primero, se debe calcular el volumen que el tanque terminado puede contener,

$$V = \frac{\pi D^2}{4} L$$

Este valor debe ser igual al volumen deseado. Así, una restricción es

$$\frac{\pi D^2 L}{4} = V_o$$

donde  $V_o$  es el volumen deseado (m<sup>3</sup>).

Las restricciones restantes tienen que ver con que el tanque se ajuste a las dimensiones de la caja del camión,

$$\begin{aligned} L &\leq L_{\text{máx}} \\ D &\leq D_{\text{máx}} \end{aligned}$$

El problema ahora está especificado. Con la sustitución de los valores de la tabla 16.1, se resume como

Maximizar  $C = 4.5m + 20\ell_w$

sujeto a

$$\frac{\pi D^2 L}{4} = 0.8$$

$$L \leq 2$$

$$D \leq 1$$

donde

$$m = 8\,000 \left\{ L\pi \left[ \left( \frac{D}{2} + 0.03 \right)^2 - \left( \frac{D}{2} \right)^2 \right] + 2\pi \left( \frac{D}{2} + 0.03 \right)^2 0.03 \right\}$$

y

$$\ell_w = 4\pi (D + 0.03)$$

El problema ahora se puede resolver de diferentes formas. Sin embargo, el método más simple para un problema de esta magnitud consiste en utilizar una herramienta como el Solver de Excel. La hoja de cálculo para realizar esto se muestra en la figura 16.2.

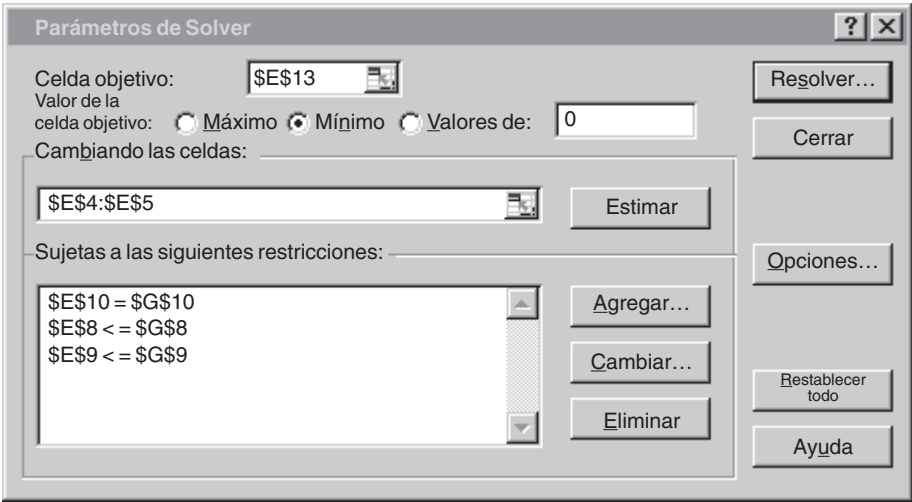
En el caso mostrado, se introducen los límites superiores para  $D$  y  $L$ . En este caso, el volumen es mayor que el requerido ( $1.57 > 0.8$ ).

FIGURA 16.2

Hoja de cálculo de Excel lista para evaluar el costo de un tanque sujeto a restricciones de volumen y tamaño.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Diseño del tanque óptimo						
2							
3	Parámetros:			Variables de diseño:			
4	V0	0.8		D	1		
5	t	0.03		L	2		
6	rho	8000					
7	Lmáx	2		Restricciones:			
8	Dmáx	1		D	1 <=		1
9	cm	4.5		L	2 <=		2
10	cw	20		Vol	1.570796 =		0.8
11							
12	Valores calculados:			Función objetivo:			
13	m	1976.791		C	9154.425		
14	lw	12.94336					
15							
16	Vcoraza	0.19415					
17	Vtapas	0.052948					

Una vez creada la hoja de cálculo, la selección Solver se elije del menú Tools (Herramientas). Aquí aparecerá una ventana de diálogo que le solicitará la información pertinente. Las celdas correspondientes para el cuadro de diálogo Solver se pueden llenar así



Al seleccionar el botón Resolver, un cuadro de diálogo se abrirá mostrando un reporte sobre el éxito de la operación. En el presente caso, Solver obtiene la solución correcta, la cual se muestra en la figura 16.3. Observe que el diámetro óptimo es casi el valor de la restricción de 1 m. Así, si aumentara la capacidad requerida del tanque, podría quitarse esta restricción y el problema se reduciría a una búsqueda unidimensional para la longitud.

**FIGURA 16.3**  
Resultados de la minimización. El precio se reduce de \$9 154 a \$5723, debido al menor volumen con dimensiones  $D = 0.98$  m y  $L = 1.05$  m.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Diseño del tanque óptimo						
2							
3	Parámetros:			Variables de diseño			
4	V0	0.8		D	0.98351		
5	t	0.03		L	1.053033		
6	rho	8000					
7	Lmáx	2		Restricciones			
8	Dmáx	1		D	0.98351	<=	1
9	cm	4.5		L	1.053033	<=	2
10	cw	20		Vol	0.799999	=	0.8
11							
12	Valores calculados:			Función objetivo:			
13	m	1215.206		C	5723.149		
14	lw	12.73614					
15							
16	Vcoraza	0.100587					
17	Vtapas	0.051314					

## 16.2 MÍNIMO COSTO PARA EL TRATAMIENTO DE AGUAS RESIDUALES (INGENIERÍA CIVIL/AMBIENTAL)

**Antecedentes.** Las descargas de aguas residuales de las grandes ciudades son, con frecuencia, la causa principal de la contaminación en un río. La figura 16.4 presenta el tipo de sistema que un ingeniero ambiental podría enfrentar. Varias ciudades están localizadas en las orillas de un río y sus afluentes. Cada una genera contaminación a una razón de carga  $P$  en unidades de miligramos por día (mg/d). La carga contaminante está sujeta al tratamiento de desechos que resultan de una remoción fraccional  $x$ . Así, la cantidad descargada al río es el exceso no removido por el tratamiento,

$$W_i = (1 - x_i)P_i \quad (16.4)$$

donde  $W_i$  = descarga de desechos de la  $i$ -ésima ciudad.

Cuando las descargas de desechos entran en la corriente, se mezclan con los contaminantes de las fuentes corriente arriba. Si se supone un mezclado completo en el punto de descarga, la concentración resultante en el punto de descarga se calcula con un simple balance de masa,

$$c_i = \frac{W_i + Q_u c_u}{Q_i} \quad (16.5)$$

donde  $Q_u$  = flujo (L/d),  $c_u$  = concentración (mg/L) en el río corriente arriba de la descarga, y  $Q_i$  = flujo abajo del punto de descarga (L/d).

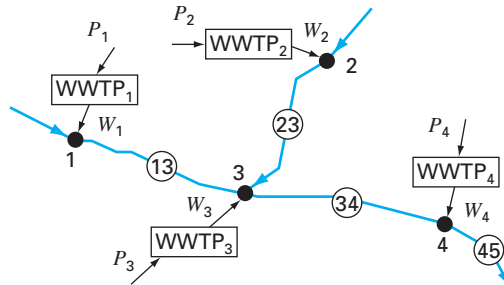
Después de que se establece la concentración en el punto de mezclado, los procesos de descomposición químicos y biológicos pueden eliminar algo de contaminación, conforme fluye corriente abajo. En el presente caso, se supone que esta eliminación puede representarse por un simple factor de reducción  $R$ .

Suponiendo que las fuentes de agua (es decir, las ciudades 1 y 2 en el río mostrado antes) están libres de contaminantes, las concentraciones en los cuatro nodos se calculan así:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{(1 - x_1)P_1}{Q_{13}} \\ c_2 &= \frac{(1 - x_2)P_2}{Q_{23}} \\ c_3 &= \frac{R_{13}Q_{13}c_1 + R_{23}Q_{23}c_2 + (1 - x_3)P_3}{Q_{34}} \\ c_4 &= \frac{R_{34}Q_{34}c_3 + (1 - x_4)P_4}{Q_{45}} \end{aligned} \quad (16.6)$$

**FIGURA 16.4**

Cuatro plantas de tratamiento de aguas residuales que descargan contaminantes a un sistema de ríos. Los segmentos del río entre las ciudades están marcados con números dentro de un círculo.



**TABLA 16.2** Parámetros para las cuatro plantas de tratamiento de aguas residuales que descargan contaminantes a un sistema de ríos, junto con las concentraciones resultantes ( $c_i$ ) para tratamiento cero. También se dan el flujo, el factor de remoción y los estándares para los segmentos del río.

Ciudad	$P_i$ (mg/d)	$d_i$ (\$10 <sup>-6</sup> /mg)	$c_i$ (mg/L)	Segmento	$Q$ (L/d)	$R$	$c_s$ (mg/L)
1	$1.00 \times 10^9$	2	100	1-3	$1.00 \times 10^7$	0.5	20
2	$2.00 \times 10^9$	2	40	2-3	$5.00 \times 10^7$	0.35	20
3	$4.00 \times 10^9$	4	47.3	3-4	$1.10 \times 10^8$	0.6	20
4	$2.50 \times 10^9$	4	22.5	4-5	$2.50 \times 10^8$		20

Después, se observa que el tratamiento de aguas tiene un costo diferente,  $d_i$  (\$1 000/mg eliminado), en cada una de las instalaciones. Así, el costo total de tratamiento (sobre una base diaria) se calcula como

$$Z = d_1 P_1 x_1 + d_2 P_2 x_2 + d_3 P_3 x_3 + d_4 P_4 x_4 \quad (16.7)$$

donde  $Z$  es el costo total diario del tratamiento (\$1 000/d).

La pieza final en la “decisión” son las regulaciones ambientales. Para proteger los usos benéficos del río (por ejemplo, paseos en bote, pesca, uso como balneario), las regulaciones indican que la concentración del río no debe exceder un estándar de calidad  $c_s$  en el agua.

En la tabla 16.2 se resumen los parámetros para el sistema de ríos de la figura 16.4. Observe que hay una diferencia en los costos de tratamiento entre las ciudades corriente arriba (1 y 2) y corriente abajo (3 y 4), debido a la naturaleza obsoleta de las plantas corriente abajo.

La concentración se calcula con la ecuación (16.6) y el resultado se presenta en la columna sombreada, para el caso en que no se implementó tratamiento de residuos (es decir, donde todas las  $x = 0$ ). Observe que el estándar de 20 mg/L se viola en todos los puntos de mezclado.

Utilice la programación lineal para determinar los niveles de tratamiento que satisfacen los estándares de calidad del agua a un costo mínimo. También evalúe el impacto al hacer el estándar más restringido debajo de la ciudad 3. Es decir, realice el mismo ejercicio; pero ahora con los estándares para los segmentos 3-4 y 4-5 disminuidos a 10 mg/L.

**Solución.** Todos los factores antes mencionados se combinan en el siguiente problema de programación lineal:

$$\text{Minimizar } Z = d_1 P_1 x_1 + d_2 P_2 x_2 + d_3 P_3 x_3 + d_4 P_4 x_4 \quad (16.8)$$

sujeto a las siguientes restricciones

$$\begin{aligned} \frac{(1-x_1)P_1}{Q_{13}} &\leq c_{s1} \\ \frac{(1-x_2)P_2}{Q_{23}} &\leq c_{s2} \\ \frac{R_{13}Q_{13}c_1 + R_{23}Q_{23}c_2 + (1-x_3)P_3}{Q_{34}} &\leq c_{s3} \end{aligned} \quad (16.9)$$

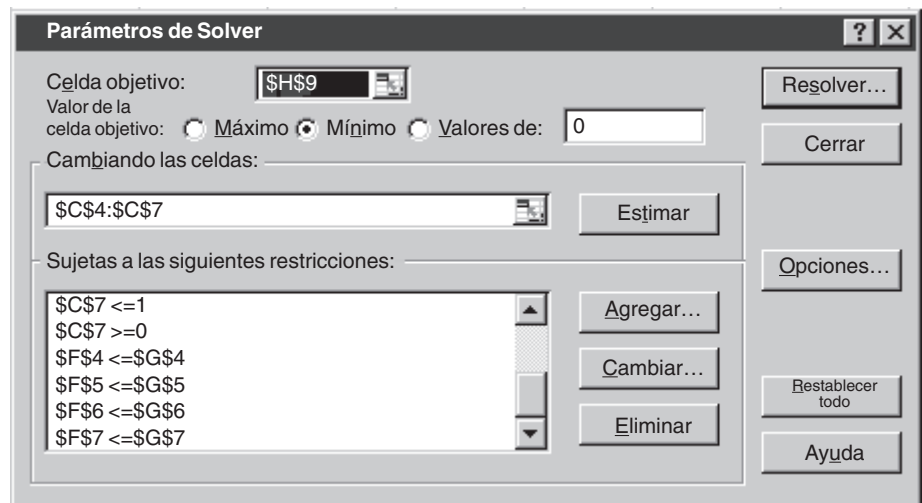
$$\frac{R_{34}Q_{34}c_3 + (1-x_4)P_4}{Q_{45}} \leq c_{s4} \quad (16.10)$$

$$0 \leq x_1, x_2, x_3, x_4 \leq 1$$

De esta forma, la función objetivo es para minimizar el costo del tratamiento [ecuación (16.8)] sujeto a la restricción de los estándares de calidad del agua que se deben satisfacer en todas las partes del sistema [ecuación (16.9)]. Además, el tratamiento no debe ser negativo o mayor que el 100% de remoción [ecuación (16.10)].

El problema se resuelve utilizando diversos paquetes. Para esta aplicación se utiliza la hoja de cálculo Excel. Como se observa en la figura 16.5, los datos junto con los cálculos de la concentración se pueden introducir fácilmente en las celdas de la hoja de cálculo.

Una vez que se crea la hoja de cálculo, se elige la selección Solver del menú Tools (Herramientas). En este punto, se desplegará una ventana de diálogo, solicitándole la información pertinente. Las celdas correspondientes para el cuadro de diálogo se podrían llenar así



Observe que no se muestran todas las restricciones, ya que el cuadro de diálogo despliega sólo seis restricciones a la vez.

Cuando se selecciona el botón Resolver, se abre un cuadro de diálogo con un reporte sobre el éxito de la operación. En el presente caso, Solver obtiene la solución correcta, la cual se muestra en la figura 16.6. Antes de aceptar la solución (al seleccionar el botón OK (aceptar) en el cuadro reporte del Solver), observe que se hayan generado 3 reportes: Respuesta, Sensibilidad y Límites. Seleccione el reporte Sensibilidad y después presione el botón OK para aceptar la solución. Solver generará automáticamente un reporte de Sensibilidad, como el de la figura 16.7.

Ahora examinemos la solución (figura 16.6). Observe que el estándar será satisfecho en todos los puntos de mezclado. De hecho, la concentración en la ciudad 4 en realidad será menor que el estándar (16.28 mg/L), a pesar de que no se requerirá tratamiento para la ciudad 4.



FIGURA 16.5

Hoja de cálculo de Excel lista para evaluar el costo del tratamiento de aguas en un sistema de ríos regulado. La columna F contiene el cálculo de la concentración de acuerdo con la ecuación (16.6). Las celdas F4 y H4 están resaltadas para mostrar las fórmulas usadas para calcular  $c_1$  y el costo del tratamiento para la ciudad 1. Además, se resalta la celda H9 que muestra la fórmula para el costo total que es el que hay que minimizar [ecuación (16.8)].

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Costo mínimo del tratamiento de aguas residuales							
2		No tratada	Tratamiento	Descarga	Costo unit.	Concent.	Estándar	Costo de
3	Ciudad	P	x	W	d	en el río	de CA	tratamiento
4	1	1.00E+09	0	1.00E+09	2.00E-06	100.00	20.00	0.00
5	2	2.00E+09	0	2.00E+09	2.00E-06	40.00	20.00	0.00
6	3	4.00E+09	0	4.00E+09	4.00E-06	47.27	20.00	0.00
7	4	2.50E+09	0	2.50E+09	4.00E-06	22.48	20.00	0.00
8		Flujo en	Remoción					
9	Segmento	el río	en el río				Total	0.00
10	1-3	1.00E+07	0.5					
11	2-3	5.00E+07	0.35					
12	3-4	1.10E+08	0.6					
13	4-5	2.50E+08						

=D4/B10

=B\$4\*\$C\$4\*\$E\$4

=SUM(B4:H7)

FIGURA 16.6

Resultados de la minimización. Los estándares de calidad del agua se satisfacen a un costo de \$12600/día. Observe que a pesar del hecho de que no se requiere tratamiento para la ciudad 4, la concentración en su punto de mezclado excede el estándar.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Costo mínimo del tratamiento de aguas residuales							
2		No tratada	Tratamiento	Descarga	Costo unit.	Concent.	Estándar	Costo del
3	Ciudad	P	x	W	d	en el río	de CA	tratamiento
4	1	1.00E+09	0.8	2.00E+08	2.00E-06	20.00	20.00	1600.00
5	2	2.00E+09	0.5	1.00E+09	2.00E-06	20.00	20.00	2000.00
6	3	4.00E+09	0.5625	1.75 E+09	4.00E-06	20.00	20.00	9000.00
7	4	2.50E+09	0	2.50E+09	4.00E-06	15.28	20.00	0.00
8		Flujo en	Remoción					
9	Segmento	el río	en el río				Total	12600.00
10	1-3	1.00E+07	0.5					
11	2-3	5.00E+07	0.35					
12	3-4	1.10E+08	0.6					
13	4-5	2.50E+08						

Como un ejercicio final, se pueden disminuir los estándares de 3-4 y 4-5 para tener 10 mg/L. Antes de hacerlo, se examina el reporte de Sensibilidad. En el caso presente, la columna clave de la figura 16.7 es la de los multiplicadores de Lagrange (el precio anticipado). El *precio anticipado* es un valor que expresa la sensibilidad de la función objetivo (en nuestro caso, el costo) a una unidad de cambio de una de las restricciones (estándares de calidad-agua). Por lo tanto, representa el costo adicional en que se incurrirá al hacer más restrictivos los estándares. En nuestro ejemplo, es interesante que el precio anticipado mayor,  $-\$440/\Delta c_{s3}$ , se da para uno de los cambios de estándar (es decir, corriente abajo desde la ciudad 3) que se están contemplando. Lo anterior advierte que nuestra modificación será costosa.

Esto se confirma cuando se vuelve a ejecutar el Solver con los nuevos estándares (es decir, se disminuye el valor en las celdas G6 y G7 a 10). Como se muestra en la tabla 16.3, el resultado es que el costo del tratamiento aumentó de \$12 600/día a \$19 640/día. Además, al reducir el estándar de concentraciones para las llegadas inferiores significará que la ciudad 4 debe comenzar a tratar sus desechos, y que la ciudad 3 debe actualizar su tratamiento. Note también que no se afecta el tratamiento en las ciudades corriente arriba.

### 16.3 MÁXIMA TRANSFERENCIA DE POTENCIA EN UN CIRCUITO (INGENIERÍA ELÉCTRICA)

**Antecedentes.** El circuito de resistencias simple que se presenta en la figura 16.8 contiene tres resistores fijos y uno ajustable. Los resistores ajustables se llaman *potenciómetros*. Los valores de los parámetros son  $V = 80$  V,  $R_1 = 8 \Omega$ ,  $R_2 = 12 \Omega$  y  $R_3 = 10 \Omega$ . a) Encuentre el valor de la resistencia ajustable  $R_a$  que maximiza la transferencia de potencia a través de las terminales 1 y 2. b) Realice un análisis de sensibilidad para determinar cómo varían la máxima potencia y el valor correspondiente del potenciómetro ( $R_a$ ) conforme  $V$  varía en un rango de 45 a 105 V.

**Solución.** A partir de las leyes de Kirchhoff es posible obtener una expresión para la potencia del circuito:

$$P(R_a) = \frac{\left[ \frac{VR_3R_a}{R_1(R_a + R_2 + R_3) + R_3R_a + R_3R_2} \right]^2}{R_a} \quad (16.11)$$

**TABLA 16.3** Comparación de dos escenarios que muestran el impacto de diferentes regulaciones sobre los costos de tratamiento.

Escenario 1: Todas las $c_s = 20$			Escenario 2: Corriente abajo $c_s = 10$		
Ciudad	$x$	$c$	Ciudad	$x$	$c$
1	0.8	20	1	0.8	20
2	0.5	20	2	0.5	20
3	0.5625	20	3	0.8375	10
4	0	15.28	4	0.264	10
Costo = \$12 600			Costo = \$19 640		

Microsoft Excel 9.0 Sensitivity Report  
Worksheet: [Sec1602.xls]Sheet1  
Report Created: 12/4/00 5:58:55 PM

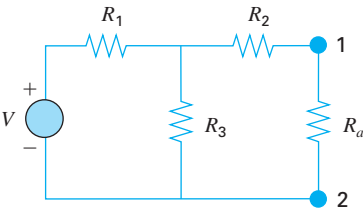
Adjustable Cells

Cell	Name	Final Value	Reduced Gradient
\$C\$4	x	0.8	0
\$C\$5	x	0.5	0
\$C\$6	x	0.562500001	0
\$C\$7	x	0	10000

Constraints

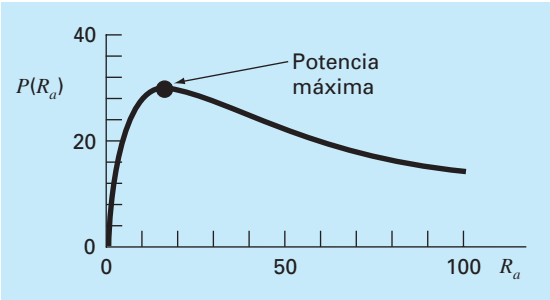
Cell	Name	Final Value	Lagrange Multiplier
\$F\$4	conc	20.00	-440.00
\$F\$5	conc	20.00	0.00
\$F\$6	conc	20.00	-30.00
\$F\$7	conc	15.28	0.00

**FIGURA 16.7**  
Reporte de la sensibilidad en una hoja de cálculo para evaluar el costo del tratamiento de residuos en un sistema de ríos regulado.



**FIGURA 16.8**  
Un circuito de resistencias con un resistor ajustable, o potenciómetro.

**FIGURA 16.9**  
Una gráfica de transferencia de potencia a través de las terminales 1-2 de la figura 16.8, como una función de la resistencia del potenciómetro  $R_a$ .



Sustituyendo los valores de los parámetros se obtiene la gráfica mostrada en la figura 16.9. Observe que la máxima transferencia de potencia se presenta con una resistencia de aproximadamente 16 Ω.

Resolveremos este problema de dos formas con la hoja de cálculo Excel. Primero, se emplean prueba y error y la opción Solver. Después, se desarrollará un programa macro en Visual BASIC, para realizar un análisis de sensibilidad.

a) En la figura 16.10 se muestra una hoja de cálculo de Excel para implementar la ecuación (16.11). Como se indica, la ecuación (16.11) se introduce en la celda B9. Entonces el valor de  $R_a$  (celda B8) se varía en forma de prueba y error hasta que se obtenga un residuo mínimo. En este ejemplo, el resultado es una potencia de 30.03 W con un valor en el potenciómetro de  $R_a = 16.44 \Omega$ .

Un procedimiento mejor consiste en utilizar la opción Solver del menú Tools (Herramientas) de la hoja de cálculo. Se desplegará una ventana de diálogo solicitándole la información pertinente. Las celdas correspondientes para el cuadro de diálogo Solver se llenarán así

Ubique la celda destino:	B9
Igual a <input checked="" type="radio"/> máx <input type="radio"/> mín <input type="radio"/> igual a	0
Por cambio de celdas B8	

Cuando se selecciona el botón OK (aceptar), se despliega un cuadro de diálogo con un reporte sobre el éxito de la operación. En el caso actual, Solver obtiene la misma solución correcta que se presenta en la figura 16.10.

b) Ahora, aunque el procedimiento anterior es excelente para una sola evaluación, no es conveniente para los casos donde se emplean múltiples optimizaciones. Tal podría ser el caso en la segunda parte de esta aplicación, en la cual estamos interesados en

FIGURA 16.10

Determinación en Excel de la máxima potencia a través de un potenciómetro mediante el uso de prueba y error.

B9		=	=(V*Res3*Ra/(Res1*(Ra+Res2+Res3)+Res3*Ra+Res3*Res2))^2/Ra					
	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Máxima transferencia de potencia							
2								
3	V	80						
4	Res1	8						
5	Res2	12						
6	Res3	10						
7								
8	Ra	16.444444						
9	P(Ra)	30.03003						
10								

determinar de qué modo la máxima potencia varía con diferentes valores de voltaje. En efecto, se podría llamar muchas veces el Solver con los diferentes valores de los parámetros; pero esto resultaría ineficiente. Sería preferible desarrollar una función macro que encuentre el óptimo.

Tal función se muestra en la figura 16.11. Advierta su similitud con el pseudocódigo de la búsqueda de la sección dorada que se presentó en la figura 13.5. Además, observe que una función se debe definir también para calcular la potencia de acuerdo con la ecuación (16.11).

En la figura 16.12 se muestra una hoja de cálculo Excel que utiliza este macro para evaluar la sensibilidad de la solución al voltaje. Se tiene una columna de valores que cubre los valores de los voltajes (es decir, de 45 a 105 V). En la celda B9 se tiene una función macro que referencia el valor adyacente de  $V$  (los 45 voltios en A9). Además, se dan también los otros parámetros en el argumento de la función. Advierta que, mientras la referencia a  $V$  es relativa, las referencias a los valores iniciales superior e inferior y a las resistencias son absolutas (es decir, incluyen el signo \$). Esto se hizo de tal forma que cuando la fórmula se copie abajo, las referencias absolutas queden fijas; mientras que la referencia relativa corresponda al voltaje en el mismo renglón. Una estrategia similar se usa para introducir la ecuación (16.11) en la celda C9.

Cuando se copian las fórmulas hacia abajo, el resultado es como el que se presenta en la figura 16.12. La máxima potencia se puede graficar para visualizar el impacto de las variaciones de voltaje. En la figura 16.13 se observa que la potencia aumenta con el voltaje.

Los resultados de los valores correspondientes en el potenciómetro ( $R_a$ ) son más interesantes. La hoja de cálculo indica que para un mismo valor, 16.44  $\Omega$ , da una máxima potencia. Tal resultado podría ser difícil de intuir basándose en una inspección de la ecuación (16.11).

## 16.4 DISEÑO DE UNA BICICLETA DE MONTAÑA (INGENIERÍA MECÁNICA/AERONÁUTICA)

**Antecedentes.** Por su trabajo en la industria de la construcción, los ingenieros civiles se asocian comúnmente con el diseño estructural. Sin embargo, otras especialidades de la ingeniería también deben tratar con el impacto de fuerzas sobre los dispositivos que diseñan. En particular, los ingenieros mecánicos y aeronáuticos deben evaluar tanto la respuesta estática como la dinámica, en una amplia clase de vehículos que van desde automóviles hasta vehículos espaciales.

El interés reciente en bicicletas de competencia y recreativas ha propiciado que los ingenieros tengan que dirigir sus habilidades hacia el diseño y prueba de bicicletas de montaña (figura 16.14a). Suponga que se necesita predecir los desplazamientos horizontal y vertical en un sistema de frenos de una bicicleta como respuesta a una fuerza. Considere que las fuerzas que usted debe analizar se pueden simplificar, como se ilustra en la figura 16.14b. Le interesa probar la respuesta de la armadura cuando se ejerce una fuerza en cualquier dirección designada por el ángulo  $\theta$ .

Los parámetros para el problema son  $E =$  módulo de Young  $= 2 \times 10^{11}$  Pa,  $A =$  área de sección transversal  $= 0.0001$  m<sup>2</sup>,  $w =$  ancho  $= 0.44$  m,  $\ell =$  longitud  $= 0.56$  m y  $h =$

**FIGURA 16.11**

Macro para Excel escrito en Visual BASIC que determina un máximo con la búsqueda de la sección dorada.

Option Explicit

```
Function Golden(xlow, xhigh, R1, R2, R3, V)
Dim iter As Integer, maxit As Integer, ea As Double, es As Double
Dim fx As Double, xL As Double, xU As Double, d As Double, x1 As Double
Dim x2 As Double, f1 As Double, f2 As Double, xopt As Double
Const R As Double = (5 ^ 0.5 - 1) / 2
maxit = 50
es = 0.001
xL = xlow
xU = xhigh
iter = 1
d = R * (xU - xL)
x1 = xL + d
x2 = xU - d
f1 = f(x1, R1, R2, R3, V)
f2 = f(x2, R1, R2, R3, V)
If f1 > f2 Then
    xopt = x1
    fx = f1
Else
    xopt = x2
    fx = f2
End If
Do
    d = R * d
    If f1 > f2 Then
        xL = x2
        x2 = x1
        x1 = xL + d
        f2 = f1
        f1 = f(x1, R1, R2, R3, V)
    Else
        xU = x1
        x1 = x2
        x2 = xU - d
        f1 = f2
        f2 = f(x2, R1, R2, R3, V)
    End If
    iter = iter + 1
    If f1 > f2 Then
        xopt = x1
        fx = f1
    Else
        xopt = x2
        fx = f2
    End If
    If xopt <> 0 Then ea = (1 - R) * Abs((xU - xL) / xopt) * 100
    If ea <= es Or iter >= maxit Then Exit Do
Loop
Golden = xopt
End Function

Function f(Ra, R1, R2, R3, V)
f = (V * R3 * Ra / (R1 * (Ra + R2 + R3) + R3 * Ra + R3 * R2)) ^ 2 / Ra
End Function
```

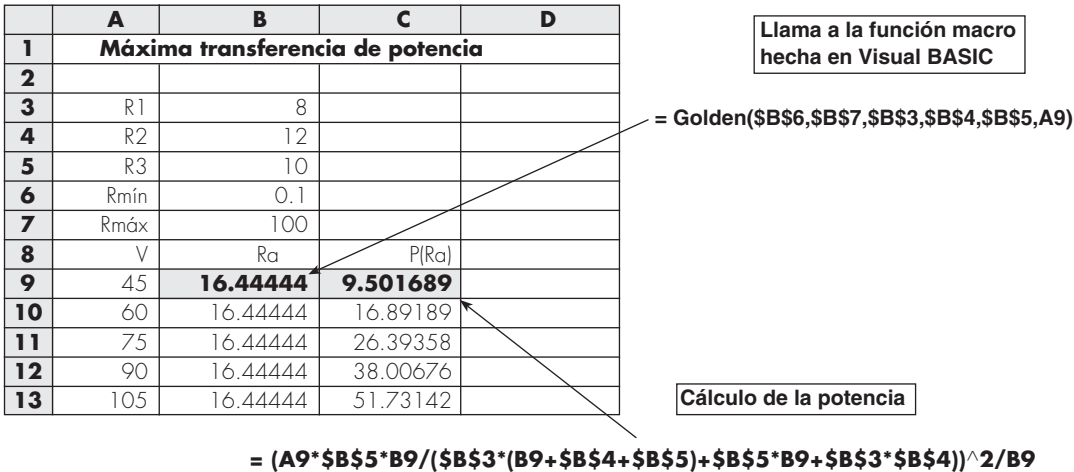


FIGURA 16.12

Hoja de cálculo de Excel para implementar un análisis de sensibilidad de la máxima potencia con variaciones de voltaje. Esta rutina accesa el programa macro para la búsqueda de la sección dorada de la figura 16.11.

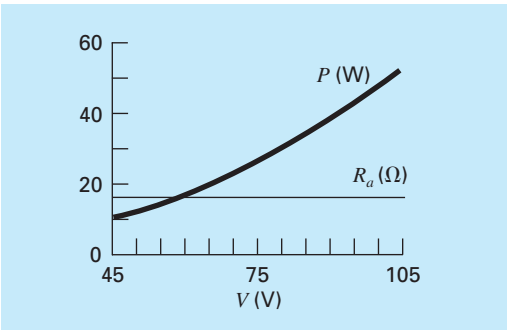
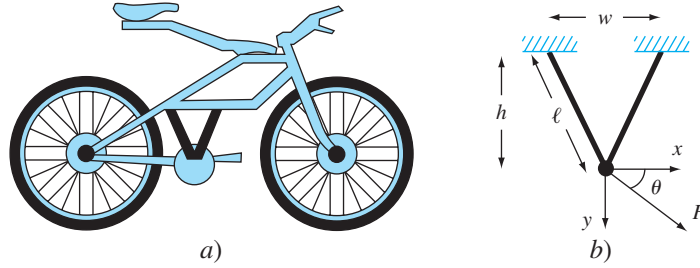


FIGURA 16.13

Resultados del análisis de sensibilidad del efecto de las variaciones de voltaje sobre la máxima potencia.

**FIGURA 16.14**

a) Una bicicleta de montaña junto con b) un diagrama de cuerpo libre para una parte del marco.

altura = 0.5 m. Se pueden resolver los desplazamientos en  $x$  y  $y$  al determinar los valores que den una energía potencial mínima. Determine los desplazamientos para una fuerza de 10000 N y una dirección  $\theta$  desde  $0^\circ$  (horizontal) hasta  $90^\circ$  (vertical).

**Solución.** Este problema se puede plantear al desarrollar la siguiente ecuación para la energía potencial del sistema de frenado,

$$V(x, y) = \frac{EA}{\ell} \left( \frac{w}{2\ell} \right)^2 x^2 + \frac{EA}{\ell} \left( \frac{h}{\ell} \right)^2 y^2 - Fx \cos \theta - Fy \sin \theta \quad (16.12)$$

Resolver para un ángulo en particular es sencillo. Por ejemplo, para  $\theta = 30^\circ$ , los valores de los parámetros dados se pueden sustituir en la ecuación (16.12) y obtener

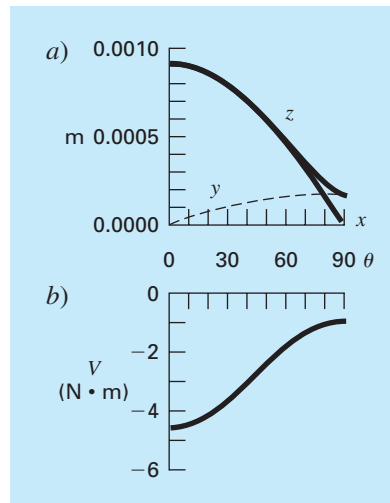
$$V(x, y) = 5512026x^2 + 28471210y^2 - 5000x - 8660y$$

El mínimo de esta función se determina de diferentes maneras. Por ejemplo, mediante el Solver de Excel, la energía potencial mínima es  $-3.62$  con deflexiones de  $x = 0.000786$  y  $y = 0.0000878$  m.

En efecto, es posible ejecutar el Solver de Excel en forma repetida para diferentes valores de  $\theta$  con el propósito de verificar cómo se modifica la solución conforme el ángulo cambia. En forma alterna, se puede escribir un macro como se hizo en la sección 16.3, de tal manera que se puedan implementar optimizaciones múltiples en forma simultánea. Queda claro que, para este caso, debería implementarse un algoritmo de búsqueda multidimensional. Una tercera forma de resolver el problema sería mediante el uso de un lenguaje de programación como Fortran 90, junto con una biblioteca de software para métodos numéricos como el IMSL.

En cualquiera de los casos, los resultados se muestran en la figura 16.15. Como se esperaba (figura 16.15a), la deflexión  $x$  es máxima cuando la carga está dirigida en la dirección  $x$  ( $\theta = 0^\circ$ ) y la deflexión  $y$  tiene un máximo cuando la carga está dirigida en la dirección  $y$  ( $\theta = 90^\circ$ ). Sin embargo, observe que la deflexión  $x$  es mucho más pronunciada que en la dirección  $y$ . Esto se ilustra también en la figura 16.15b, donde la energía potencial es mayor para ángulos menores. Ambos resultados se deben a la geometría del marco de la bicicleta. Si  $w$  fuera mayor, las deflexiones serían más uniformes.



**FIGURA 16.15**

a) El impacto de diferentes ángulos sobre las deflexiones (observe que  $Z$  es la resultante de las componentes  $x$  y  $y$ ) y b) la energía potencial de una parte del marco de la bicicleta de montaña sujeta a una fuerza constante.

## PROBLEMAS

### Ingeniería química/bioingeniería

**16.1** Diseñe el contenedor cilíndrico óptimo (figura P16.1) de tal forma que abra por un extremo y tenga paredes de espesor despreciable. El contenedor va a almacenar  $0.2 \text{ m}^3$ . Realice el diseño de tal forma que el área del fondo y de sus lados sean mínimos.

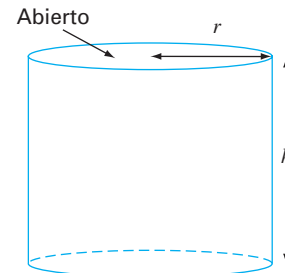
**16.2** Diseñe el contenedor cónico óptimo (figura P16.2) de tal forma que tenga una tapa y paredes de espesor despreciable. El contenedor va a almacenar  $0.5 \text{ m}^3$ . Realice el diseño de modo que tanto su tapa como sus lados sean minimizados.

**16.3** La razón de crecimiento de una levadura que produce un antibiótico es una función de la concentración del alimento  $c$ ,

$$g = \frac{2c}{4 + 0.8c + c^2 + 0.2c^3}$$

Como se ilustra en la figura P16.3, el crecimiento parte de cero a muy bajas concentraciones debido a la limitación de la comida. También parte de cero en altas concentraciones debido a los efectos de toxicidad. Encuentre el valor de  $c$  para el cual el crecimiento es un máximo.

**16.4** Una planta química elabora sus tres productos principales en una semana. Cada uno de estos productos requiere cierta cantidad de materia prima química y de diferentes tiempos de

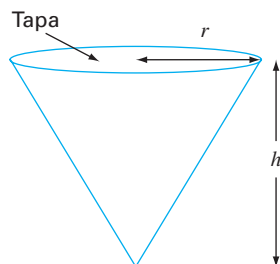
**Figura P16.1**

Un contenedor cilíndrico sin tapa.

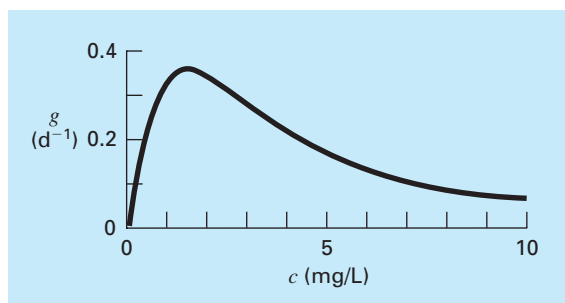
producción, obteniéndose diferentes utilidades. La información necesaria se resume en la tabla P16.4.

Observe que hay suficiente espacio en la bodega de la planta para almacenar un total de  $450 \text{ kg/semana}$ .

- Establezca un problema de programación lineal para maximizar las utilidades.
- Resuelva el problema de programación lineal con el método simplex.

**Figura P16.2**

Un contenedor cónico con tapa.

**Figura P16.3**

La razón de crecimiento de una levadura que produce un antibiótico contra la concentración de alimento.

- c) Resuelva el problema con un paquete de software.  
 d) Evalúe cuál de las siguientes opciones aumentará más las utilidades: incrementar la materia prima, el tiempo de producción o el almacenaje.

**16.5** Recientemente los ingenieros químicos se han interesado en el área conocida como *minimización de desechos*. Ésta considera la operación de una planta química de modo tal que se minimicen los impactos sobre el ambiente. Suponga que una

refinería desarrolla un producto, Z1, hecho de dos materias primas X y Y. La producción de 1 tonelada métrica del producto requiere 1 tonelada de X y 2.5 toneladas de Y y produce 1 tonelada de un líquido de desecho, W. Los ingenieros tienen tres alternativas para los desechos:

- Producir una tonelada de un producto secundario, Z2, al agregar una tonelada más de X por cada tonelada de W.
- Producir una tonelada de otro producto secundario, Z3, al agregar 1 tonelada más de Y por cada tonelada de W.
- Tratar los desechos de tal forma que su descarga sea permisible.

Los productos dan utilidades de \$2000, -\$75 y \$250/tonelada de Z1, Z2 y Z3, respectivamente. Observe que al producir Z2, de hecho, se obtiene una pérdida. El costo del proceso de tratamiento es de \$300/tonelada. Además, la compañía tiene un límite de 7500 y 12500 toneladas de X y Y, respectivamente, durante el periodo de producción. Determine qué cantidad de productos y desechos se deben producir para maximizar las utilidades.

**16.6** Hay que separar una mezcla de benceno y tolueno en un reactor flash. ¿A qué temperatura deberá operarse el reactor para obtener la mayor pureza de tolueno en la fase líquida (maximizar  $x_T$ )? La presión en el reactor es de 800 mm Hg. Las unidades en la ecuación de Antoine son mm Hg y °C para presión y temperatura, respectivamente.

$$x_B P_{\text{sat}_B} + x_T P_{\text{sat}_T} = P$$

$$\log_{10}(P_{\text{sat}_B}) = 6.905 - \frac{1211}{T + 221}$$

$$\log_{10}(P_{\text{sat}_T}) = 6.953 - \frac{1344}{T + 219}$$

**16.7** A se convertirá en B en un reactor con agitación. El producto B y la sustancia sin reaccionar A se purifican en una unidad de separación. La sustancia A que no entró en la reacción se recicla al reactor. Un ingeniero de procesos ha encontrado que el costo inicial del sistema es una función de la conversión,  $x_A$ . Encuentre la conversión que dará el sistema de menor costo. C es una constante de proporcionalidad.

**Tabla P16.4**

	Producto 1	Producto 2	Producto 3	Disponibilidad de fuentes
Materia prima química	6 kg/kg	4 kg/kg	12 kg/kg	2500 kg
Tiempo de producción	0.05 hr/kg	0.1 hr/kg	0.2 hr/kg	55 hr/semana
Utilidad	\$30/kg	\$30/kg	\$35/kg	

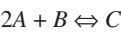
Costo =  $C \left[ \left( \frac{1}{(1-x_A)^2} \right)^{0.6} + 6 \left( \frac{1}{x_A} \right)^{0.6} \right]$

**16.8** En el problema 16.7 se utiliza sólo un reactor. Si se usan dos reactores en serie, cambia la ecuación que rige el sistema. Encuentre las conversiones en ambos reactores ( $x_{A1}$  y  $x_{A2}$ ), de forma que se minimicen los costos totales del sistema.

Costo =

$C \left[ \left( \frac{x_{A1}}{x_{A2}(1-x_{A1})^2} \right)^{0.6} + \left( \frac{1-\left(\frac{x_{A1}}{x_{A2}}\right)}{(1-x_{A2})^2} \right)^{0.6} + 5 \left( \frac{1}{x_{A2}} \right)^{0.6} \right]$

**16.9** En la reacción:



el equilibrio se expresa como:

$K = \frac{[C]}{[A]^2[B]} = \frac{[C]}{[A_0 - 2C]^2[B_0 - C]}$

Si  $K = 2\text{ M}^{-1}$ , se puede modificar la concentración inicial de A ( $A_0$ ). La concentración inicial de B se fija por el proceso,  $B_0 = 100$ . A cuesta \$1/M y C se vende a \$10/M. ¿Cuál será la concentración inicial óptima de A que habrá de usarse de manera que se maximicen las utilidades?

**16.10** Una planta química necesita  $10^6$  L/día de una solución. Se tienen tres fuentes con diferentes tasas de precios y suministros. Cada fuente tiene también concentraciones diferentes de una impureza que no debe rebasar cierto nivel, para evitar interferencias con las sustancias químicas. Los datos de las tres fuentes se resumen en la tabla siguiente. Determine la cantidad de cada fuente que satisfaga los requerimientos al menor costo.

	Fuente 1	Fuente 2	Fuente 3	Requerimiento
Costo (\$/L)	0.50	1.00	1.20	minimizar
Suministro ( $10^5$ L/día)	20	10	5	$\geq 10$
Concentración (mg/L)	135	100	75	$\leq 100$

**16.11** Usted tiene que diseñar un canal triangular abierto para transportar una corriente de desechos desde una planta química hasta un depósito de estabilización de desechos (figura P16.11). La velocidad media aumenta con el radio hidráulico,  $R_h = A/p$ , donde  $A$  es el área de la sección transversal y  $p$  es igual al perímetro mojado. Como la razón de flujo máximo corresponde a la velocidad máxima, el diseño óptimo tratará de minimizar el

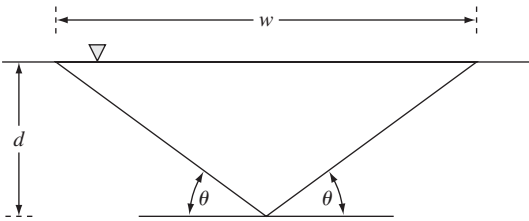


Figura P16.11

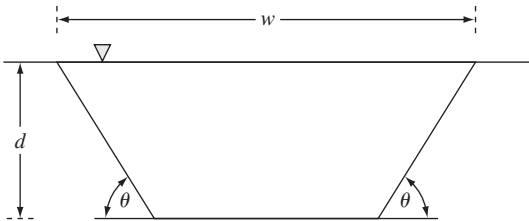


Figura P16.12

perímetro mojado. Determine las dimensiones que minimicen el perímetro mojado para un área dada de la sección transversal.

**16.12** Un ingeniero agrícola tiene que diseñar un canal trapezoidal abierto para transportar el agua para irrigación (figura P16.12). Determine las dimensiones óptimas para minimizar el perímetro mojado en un área de sección transversal de  $50\text{ m}^2$ . ¿Las dimensiones están dentro de las medidas estándar?

**16.13** Calcule las dimensiones óptimas para un tanque cilíndrico térmico diseñado para contener  $10\text{ m}^3$  de fluido. Los extremos y laterales cuestan \$200/ $\text{m}^2$  y \$100/ $\text{m}^2$ , respectivamente. Además, se aplica un recubrimiento a toda el área del tanque, la cual cuesta \$50/ $\text{m}^2$ .

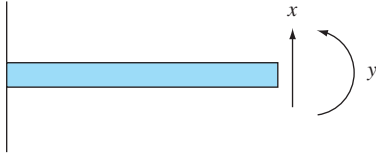
Ingeniería civil/ambiental

**16.14** Si se optimiza la ecuación siguiente se obtiene un modelo de elemento finito para una viga volada sujeta a cargas y momentos (figura P16.14)

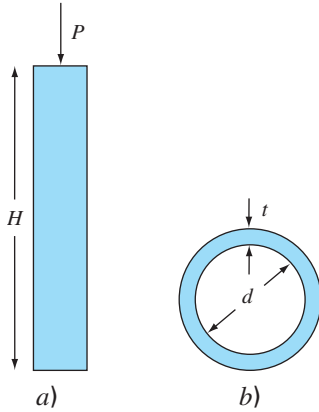
$f(x, y) = 5x^2 - 5xy + 2.5y^2 - x - 1.5y$

donde  $x$  = desplazamiento final, y  $y$  = momento final. Calcule los valores de  $x$  y  $y$  que minimizan  $f(x, y)$ .

**16.15** Suponga usted que se le pide diseñar una columna que soporte una carga de compresión  $P$ , como se muestra en la figura P16.15a. La columna tiene una sección transversal en forma de tubo de pared delgada, como se aprecia en la figura P16.15b.



**Figura P16.14**  
Viga volada.



**Figura P16.15**  
a) Una columna que soporta una carga de compresión  $P$ .  
b) La columna tiene una sección transversal en forma de tubo de pared delgada.

Las variables de diseño son el diámetro medio del tubo  $d$  y el espesor de la pared  $t$ . El costo del tubo se calcula por medio de la ecuación

$$\text{Costo} = f(t, d) = c_1 W + c_2 d$$

donde  $c_1 = 4$  y  $c_2 = 2$  son los factores de costo y  $W$  = peso del tubo,

$$W = \pi d t H \rho$$

donde  $\rho$  = densidad del material del tubo =  $0.0025 \text{ kg/cm}^3$ . La columna debe dar apoyo a la carga bajo un esfuerzo de compresión sin flexionarse. Por tanto,

$$\begin{aligned} \text{Esfuerzo real } (\sigma) &\leq \text{esfuerzo máximo de compresión} \\ &= \sigma_y = 550 \text{ kg/cm}^2 \end{aligned}$$

$$\text{Esfuerzo real} \leq \text{esfuerzo de flexión}$$

El esfuerzo real está dado por

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{P}{\pi d t}$$

Se puede demostrar que el esfuerzo de flexión es

$$\sigma_b = \frac{\pi E I}{H^2 d t}$$

donde  $E$  = módulo de elasticidad e  $I$  = segundo momento del área de la sección transversal. Con cálculo se muestra que

$$I = \frac{\pi}{8} d t (d^2 + t^2)$$

Por último, los diámetros de los tubos disponibles se encuentran entre  $d_1$  y  $d_2$ , y el espesor está entre  $t_1$  y  $t_2$ . Desarrolle y resuelva este problema con la determinación de los valores de  $d$  y  $t$  que minimizan el costo. Obsérvese que  $H = 275 \text{ cm}$ ,  $P = 2000 \text{ kg}$ ,  $E = 900\,000 \text{ kg/cm}^2$ ,  $d_1 = 1 \text{ cm}$ ,  $d_2 = 10 \text{ cm}$ ,  $t_1 = 0.1 \text{ cm}$  y  $t_2 = 1 \text{ cm}$ .

**16.16** El modelo Streeter-Phelps se utiliza para calcular la concentración de oxígeno disuelto en un río aguas abajo del punto de descarga de un drenaje (véase la figura P16.16),

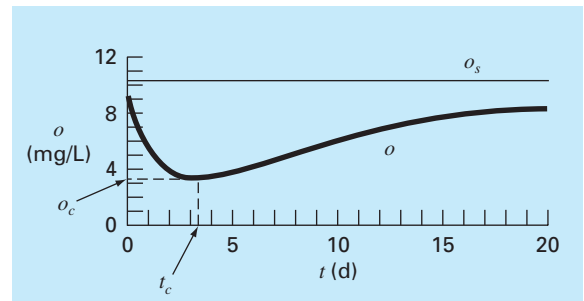
$$o = o_s - \frac{k_d L_o}{k_d + k_s - k_a} (e^{-k_a t} - e^{-(k_d + k_s) t}) - \frac{S_b}{k_a} (1 - e^{-k_a t}) \quad (\text{P. 16.16})$$

donde  $o$  = concentración del oxígeno disuelto [mg/L],  $o_s$  = concentración de saturación del oxígeno [mg/L],  $t$  = tiempo de travesía [d],  $L_o$  = concentración de la demanda bioquímica de oxígeno (DOB) en el punto de mezcla [mg/L],  $k_d$  = razón de descomposición de DOB [ $\text{d}^{-1}$ ],  $k_s$  = razón de asentamiento de DBO [ $\text{d}^{-1}$ ],  $k_a$  = razón de oxigenación [ $\text{d}^{-1}$ ], y  $S_b$  = demanda de oxígeno sedimentario [mg/L/d].

Como se indica en la figura P16.16, la ecuación (P16.16) produce un “decaimiento” de oxígeno que alcanza un nivel mínimo crítico  $o_c$  para cierto tiempo de travesía  $t_c$  abajo del punto de descarga. Este punto se denomina “crítico” porque representa la ubicación en que la biota (flora y fauna) que depende del oxígeno (como los peces) estaría sujeta a la amenaza máxima.

**Figura P16.16**

Un “decaimiento” de oxígeno disuelto debajo del punto de descarga de un drenaje hacia un río.



Determine el tiempo de travesía y la concentración críticos, dados los valores siguientes:

$$\begin{array}{lll} o_s = 10 \text{ mg/L} & k_d = 0.2 \text{ d}^{-1} & k_a = 0.8 \text{ d}^{-1} \\ k_s = 0.06 \text{ d}^{-1} & L_o = 50 \text{ mg/L} & S_b = 1 \text{ mg/L/d} \end{array}$$

**16.17** La distribución bidimensional de la concentración de cierto contaminante en un canal está descrita por la ecuación

$$c(x, y) = 7.7 + 0.15x + 0.22y - 0.05x^2 - 0.016y^2 - 0.007xy$$

Determine la ubicación exacta de la concentración máxima dada la función, si se sabe que se encuentra entre los límites de  $-10 \leq x \leq 10$  y  $0 \leq y \leq 20$ .

**16.18** El flujo  $Q$  [ $\text{m}^3/\text{s}$ ] en un canal abierto se pronostica con la ecuación de Manning (recuerde la sección 8.2)

$$Q = \frac{1}{n} A_c R^{2/3} S^{1/2}$$

donde  $n$  = coeficiente de rugosidad de Manning (número adimensional que se usa para parametrizar la fricción en el canal),  $A_c$  = área de la sección transversal del canal ( $\text{m}^2$ ),  $S$  = pendiente del canal (adimensional, metros en vertical por metros en horizontal), y  $R$  = radio hidráulico (m), el cual está relacionado con otros parámetros más por  $R = A_c/P$ , donde  $P$  = perímetro mojado (m). Como su nombre lo dice, el perímetro mojado es la longitud de los lados y fondo del canal que están bajo el agua. Por ejemplo, para un canal rectangular, se define como  $P = B + 2H$ , donde  $H$  = profundidad (m). Suponga que se utiliza esta fórmula para diseñar un canal recubierto (observe que los granjeros usan canales recubiertos para minimizar las pérdidas por fugas).

- Dados los parámetros  $n = 0.03$ ,  $S = 0.0004$ , y  $Q = 1 \text{ m}^3/\text{s}$ , determine los valores de  $B$  y  $H$  que minimizan el perímetro mojado. Observe que dicho cálculo minimizaría el costo si los costos del recubrimiento fueran mucho mayores que los de excavación.
- Vuelva a resolver el inciso a), pero incluya el costo de excavación. Para hacer esto minimice la siguiente función de costo,

$$C = c_1 A_c + c_2 P$$

donde  $c_1$  es un factor de costo para la excavación =  $\$100/\text{m}^2$ , y  $c_2$  es un factor de costo del recubrimiento de  $\$50/\text{m}$ .

- Analice las implicaciones de los resultados.

**16.19** Una viga cilíndrica soporta una carga de compresión de  $P = 3\,000 \text{ kN}$ . Para impedir que la viga se flexione (doble), la carga debe ser menor que la crítica,

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

donde  $E$  = módulo de Young =  $200 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ ,  $I = \pi r^4/4$  (momento de inercia del área para una viga cilíndrica de radio  $r$ ), y  $L$  es la longitud de la viga. Si el volumen de la viga  $V$  no puede exceder de  $0.075 \text{ m}^3$ , encuentre la altura más grande  $L$  que puede utilizarse, así como el radio correspondiente.

**16.20** El río Splish tiene una tasa de flujo de  $2 \times 10^6 \text{ m}^3/\text{d}$ , de los cuales puede derivarse hasta el 70% hacia dos canales por los que fluye a través de Splish County. Estos canales se usan para el transporte, irrigación y generación de energía eléctrica, y los últimos dos usos son fuentes de ingresos. El uso para el transporte requiere una tasa de flujo derivado mínimo de  $0.3 \times 10^6 \text{ m}^3/\text{d}$  para el Canal 1 y  $0.2 \times 10^6 \text{ m}^3/\text{d}$  para el Canal 2. Por razones políticas se decidió que la diferencia absoluta entre las tasas de flujo en los dos canales no excediera de 40% del flujo total derivado hacia los canales. El Organismo de Administración del Agua de Splish County, también ha limitado los costos de mantenimiento para el sistema de canales a no más de  $\$1.8 \times 10^6$  por año. Los costos anuales de mantenimiento se estiman con base en la tasa de flujo diario. Los costos por año para el Canal 1 se estiman multiplicando  $\$1.1$  por los  $\text{m}^3/\text{d}$  de flujo; mientras que para el Canal 2 el factor de multiplicación es de  $\$1.4$  por  $\text{m}^3/\text{d}$ . El ingreso por la generación de energía eléctrica también se estima con base en la tasa de flujo diario. Para el Canal 1 ésta es de  $\$4.0$  por  $\text{m}^3/\text{d}$ , mientras que para el Canal 2 es de  $\$3.0$  por  $\text{m}^3/\text{d}$ . El ingreso anual por la irrigación también se estima con base en la tasa de flujo diario, pero primero deben corregirse las tasas de flujo por las pérdidas de agua en los canales antes de que se distribuya para irrigar. Esta pérdida es de 30% en el Canal 1 y de 20% en el Canal 2. En ambos canales el ingreso es de  $\$3.2$  por  $\text{m}^3/\text{d}$ . Determine los flujos en los canales que harían máxima la utilidad.

**16.21** Determine las áreas de la sección transversal de una viga que dan como resultado el peso mínimo para la trabe que se estudió en la sección 12.2 (véase la figura 12.4). Los esfuerzos de torsión (flexión) crítica y tensión máxima de los miembros de compresión y tensión son de 10 ksi y 20 ksi, respectivamente. La trabe va a construirse con acero (densidad =  $3.5 \text{ lb/pie-pulg}^2$ ). Observe que la longitud del miembro horizontal (2) es de 50 pies. Asimismo, recuerde que el esfuerzo en cada miembro es igual a la fuerza dividida entre el área de la sección transversal. Plantee el problema como un problema de programación lineal. Obtenga la solución en forma gráfica y con la herramienta Solver de Excel.

### Ingeniería eléctrica

**16.22** Alrededor de un conductor en forma de anillo de radio  $a$ , se encuentra una carga total  $Q$  distribuida uniformemente. A una distancia  $x$  del centro del anillo (véase la figura P16.22) se localiza una carga  $q$ . La fuerza que el anillo ejerce sobre la carga está dada por la ecuación

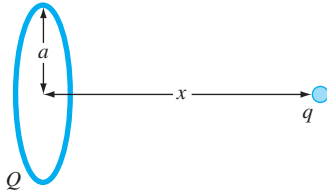


Figura P16.22

$$F = \frac{1}{4\pi e_0} \frac{qQx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

donde  $e_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{C}^2/(\text{N m}^2)$ ,  $q = Q = 2 \times 10^{-5} \text{C}$ , y  $a = 0.9 \text{m}$ . Determine la distancia  $x$  donde la fuerza es máxima.

**16.23** Un sistema consiste en dos plantas de energía que deben distribuir cargas por una red de transmisión. Los costos de generar la energía en las plantas 1 y 2 están dados por

$$F_1 = 2p_1 + 2$$

$$F_2 = 10p_2$$

donde  $p_1$  y  $p_2$  = energía producida en cada una de las plantas. Las pérdidas de energía debidas a la transmisión  $L$  están dadas por

$$L_1 = 0.2p_1 + 0.1p_2$$

$$L_2 = 0.2p_1 + 0.5p_2$$

La demanda total de energía es de 30 y  $p_1$  no debe exceder de 42. Determine la generación de energía necesaria para satisfacer las demandas con el costo mínimo, con el empleo de una rutina de optimización como las que tienen, por ejemplo, Excel, software MATLAB e IMSL.

**16.24** El momento de torsión transmitido a un motor de inducción es función del deslizamiento entre la rotación del campo del estator y la velocidad del rotor  $s$ , donde el deslizamiento se define como

$$s = \frac{n - n_R}{n}$$

donde  $n$  = revoluciones por segundo de rotación de la velocidad del estator, y  $n_R$  = velocidad del rotor. Pueden usarse las leyes de Kirchhoff para demostrar que el momento de torsión (expresado en forma adimensional) y el deslizamiento están relacionados por la ecuación

$$T = \frac{15(s - s^2)}{(1 - s)(4s^2 - 3s + 4)}$$

La figura P16.24 muestra esta función. Emplee un método numérico para determinar el deslizamiento con el que ocurre el momento de torsión máximo.

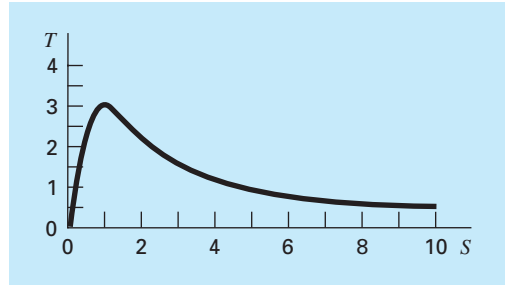


Figura P16.24

Momento de torsión transmitido a un inductor como función del deslizamiento.

### 16.25

- a) Un fabricante de equipo de cómputo produce escáneres e impresoras. Los recursos necesarios para producirlos así como las utilidades correspondientes son los que siguen

Equipo	Capital (\$/unidad)	Mano de obra (hrs/unidad)	Utilidad (\$/unidad)
Escáner	300	20	500
Impresora	400	10	400

Si cada día se dispone de \$127 000 de capital y 4270 horas de mano de obra, ¿qué cantidad de cada equipo debe producirse a diario a fin de maximizar la utilidad?

- b) Repita el problema, pero ahora suponga que la utilidad por cada impresora vendida  $P_p$  depende del número de impresoras producidas  $X_p$ , como en

$$P_p = 400 - X_p$$

**16.26** Un fabricante proporciona microcircuitos especializados. Durante los próximos tres meses, sus ventas, costos y tiempo disponible son los que siguen

	Mes 1	Mes 2	Mes 3
Circuitos requeridos	1 000	2 500	2 200
Costo del tiempo normal (\$/circuito)	100	100	120
Costo del tiempo extra (\$/circuito)	110	120	130
Tiempo de operación regular (hrs)	2 400	2 400	2 400
Tiempo extra (hrs)	720	720	720

Al principio del primer mes no existen circuitos almacenados. Toma 1.5 horas del tiempo de producción fabricar un circuito y

cuesta \$5 almacenarlo de un mes al siguiente. Determine un programa de producción que satisfaga los requerimientos de la demanda, sin que exceda las restricciones de tiempo de producción mensual, y minimice el costo. Observe que al final de los 3 meses no debe haber circuitos almacenados.

Ingeniería mecánica/aeroespacial

16.27 El arrastre total de un aeroplano se estima por medio de

$$D = 0.01\sigma V^2 + \frac{0.95}{\sigma} \left(\frac{W}{V}\right)^2$$

fricción      elevación

donde  $D$  = arrastre,  $\sigma$  = razón de la densidad del aire entre la altitud de vuelo y el nivel del mar,  $W$  = peso y  $V$  = velocidad. Como se observa en la figura P16.27, los dos factores que contribuyen al arrastre resultan afectados en forma distinta conforme la velocidad aumenta. Mientras que el arrastre por fricción se incrementa con la velocidad, el arrastre debido a la elevación disminuye. La combinación de los dos factores lleva a un arrastre mínimo.

- a) Si  $\sigma = 0.6$  y  $W = 16\,000$ , determine el arrastre mínimo y la velocidad a la que ocurre.
- b) Además, realice un análisis de sensibilidad para determinar cómo varía este óptimo en respuesta a un rango de  $W = 12\,000$  a  $20\,000$  con  $\sigma = 0.6$ .

16.28 Los baleros de rodamiento están expuestos a fallar por la fatiga ocasionada por cargas grandes de contacto  $F$  (véase la figura P16.28). Puede demostrarse que el problema de encontrar la ubicación del esfuerzo máximo a lo largo del eje  $x$  es equivalente a maximizar la función

$$f(x) = \frac{0.4}{\sqrt{1+x^2}} - \sqrt{1+x^2} \left(1 - \frac{0.4}{1+x^2}\right) + x$$

Encuentre el valor de  $x$  que maximiza a  $f(x)$ .

Figura P16.27

Gráfica de arrastre versus la velocidad de un aeroplano.

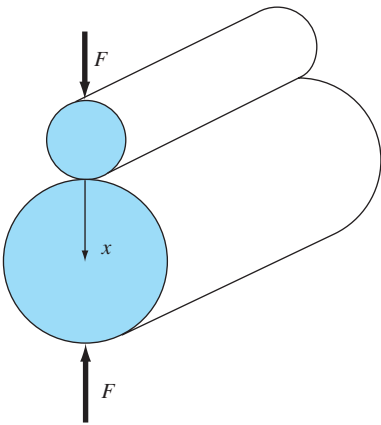
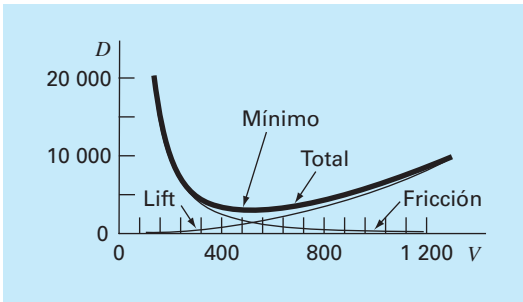


Figura P16.28  
Baleros de rodamiento.

16.29 Una compañía aeroespacial desarrolla un aditivo nuevo para el combustible de aeronaves comerciales. El aditivo está compuesto de tres ingredientes:  $X$ ,  $Y$  y  $Z$ . Para el rendimiento mayor, la cantidad total de aditivo debe ser al menos de 6 mL/L de combustible. Por razones de seguridad, la suma de los ingredientes  $X$  y  $Y$  altamente flamables, no debe exceder los 2.5 mL/L. Además, la cantidad del ingrediente  $X$  siempre debe ser mayor o igual a la de  $Y$ , y la de  $Z$  debe ser mayor que la mitad de la de  $Y$ . Si el costo por mL para los ingredientes  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  es de 0.05, 0.025 y 0.15, respectivamente, determine la mezcla de costo mínimo para un litro de combustible.

16.30 Una empresa manufacturera produce cuatro tipos de partes automotrices. Cada una de ellas primero se fabrica y luego se le dan los acabados. Las horas de trabajador requeridas y la utilidad para cada parte son las siguientes

	Parte			
	A	B	C	D
Tiempo de fabricación (hr./100 unidades)	2.5	1.5	2.75	2
Tiempo de acabados (hr./100 unidades)	3.5	3	3	2
Utilidad (\$/100 unidades)	375	275	475	325

Las capacidades de los talleres de fabricación y acabados para el mes siguiente son de 640 y 960 horas, respectivamente. Determine qué cantidad de cada parte debe producirse a fin de maximizar la utilidad.

# EPÍLOGO: PARTE CUATRO

Los epílogos de las otras partes de este libro contienen un análisis y un resumen tabular de las ventajas y desventajas de los diferentes métodos, así como las fórmulas y relaciones importantes. La mayoría de los métodos de esta parte son complicados y, en consecuencia, no se pueden resumir en fórmulas simples y tablas. Por lo tanto, aquí nos desviaremos un poco para ofrecer el siguiente análisis escrito de las alternativas y las referencias adicionales.

## PT4.4 ALTERNATIVAS

---

En el capítulo 13 se trató de la búsqueda del valor óptimo de una función con una sola variable no restringida. El método de búsqueda de la sección dorada es un método cerrado que requiere de un intervalo que contenga un solo valor óptimo conocido. Tiene la ventaja de minimizar las evaluaciones de la función, y ser siempre convergente. La interpolación cuadrática funciona mejor cuando se implementa como un método cerrado, aunque también se puede programar como un método abierto. Sin embargo, en tales casos, puede diverger. Tanto el método de búsqueda de la sección dorada como el de interpolación cuadrática no requieren evaluaciones de la derivada. Así, ambos son apropiados cuando el intervalo puede definirse fácilmente y las evaluaciones de la función son demasiadas.

El método de Newton es un método abierto que no requiere que esté dentro de un intervalo óptimo. Puede implementarse en una representación de forma cerrada, cuando la primera y segunda derivadas se determinan en forma analítica. También se implementa en una forma similar el método de la secante al representar las derivadas en diferencias finitas. Aunque el método de Newton converge rápidamente cerca del óptimo, puede diverger con valores iniciales pobres. Además la convergencia depende también de la naturaleza de la función.

En el capítulo 14 se trataron dos tipos generales de métodos para resolver problemas de optimización no restringidos multidimensionales. Los métodos directos como el de búsquedas aleatorias y el de búsquedas univariadas no requieren el cálculo de las derivadas de la función y con frecuencia son ineficientes. Sin embargo, proporcionan también una herramienta para encontrar el óptimo global más que el local. Los métodos de búsqueda con un patrón como el método de Powell llegan a ser muy eficientes y tampoco requieren del cálculo de la derivada.

Los métodos con gradiente usan la primera y, algunas veces, la segunda derivadas para encontrar el óptimo. El método del mayor ascenso/descenso ofrece un procedimiento confiable pero en ocasiones lento. Por el contrario, el método de Newton converge con rapidez cuando se está en la vecindad de una raíz; pero algunas veces sufre de divergencia. El método de Marquardt utiliza el método de mayor descenso en la ubicación inicial, muy lejos del óptimo, y después cambia al método de Newton cerca del óptimo, en un intento por aprovechar las fortalezas de cada método.

El método de Newton puede ser costoso computacionalmente ya que requiere calcular tanto del vector gradiente como de la matriz hessiana. Los métodos cuasi-Newton



intentan evitar estos problemas al usar aproximaciones para reducir el número de evaluaciones de matrices (particularmente, la evaluación, el almacenamiento y la inversión del hessiano).

En la actualidad, las investigaciones continúan para explorar las características y las ventajas correspondientes de varios métodos híbridos y en tándem. Algunos ejemplos son el método del gradiente conjugado de Fletcher-Reeves y los métodos cuasi-Newton de Davidon-Fletcher-Powell.

El capítulo 15 se dedicó a la optimización restringida. Para problemas lineales, la programación lineal basada en el método simplex ofrece un medio eficiente para obtener soluciones. Procedimientos tales como el método GRG sirven para resolver problemas restringidos no lineales.

Los paquetes y las bibliotecas de software contienen una gran variedad de capacidades para optimización. La más amplia es la biblioteca del IMSL, la cual contiene muchas subrutinas para implementar la mayoría de los algoritmos de optimización estándar. Al momento de imprimir este libro Excel tenía las capacidades de optimización más útiles por medio de su herramienta Solver. Debido a que esta herramienta se diseñó para implementar la forma más general de optimización (la optimización restringida no lineal), se puede usar para resolver problemas en todas las áreas consideradas en esta parte del libro.

## **PT4.5    REFERENCIAS ADICIONALES**

---

Para problemas unidimensionales, el método de Brent es un método híbrido que toma en cuenta la naturaleza de la función asegurando una convergencia lenta y uniforme para valores iniciales pobres, y una convergencia rápida cerca del óptimo. Véase Press *et al.* (1992) para más detalles. En problemas de varias dimensiones, se puede encontrar información adicional en Dennis y Schnabel (1996), Fletcher (1980, 1981), Gill *et al.* (1981) y Luenberger (1984).