Semillero de Investigación en Ecuaciones Diferenciales Ordinarias con Python

Jackeline Rivera Aguilera,
Milton Pablo Arias Rincón,
Daniel Felipe Franco Rincón,
David Rincón Toro,
Over.

Asesor:
Luis Eduardo López-Montenegro, PhD.

Resumen

Aqui se escribe un resumen del trabajo

1 Ecuaciones diferenciales ordinarias

Una ecuación diferencial es una relación de igualdad entre dos expresiones algebraicas que contienen: derivadas, variables independientes, una variable dependiente y/o constantes (parámetros).

Si la ecuación diferencial tiene una sola variable independiente, se llama *Ecuación Diferencial Ordinaria* (EDO) y si tiene más de una variable independiente, se llama *Ecuación Diferencial Parcial* (EDP). De acuerdo al orden de su derivada, las ecuaciones diferenciales se clasifican en *primer orden* u *orden superior*.

Por ejemplo,

- $r\dfrac{dr}{d\theta} + \text{sen}\theta = r^2$, es una EDO de primer orden donde θ es la variable independiente y r es la variable dependiente.

- $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = xz$, es una EDP de primer orden no lineal donde: x, y son variables independientes, y z es la variable dependiente.
- $t^2 x'' - tx' = 1$, es una EDO de segundo orden (orden superior) con variable independiente t y variable dependiente x.

Una EDO de primer orden con variable independiente t y variable dependiente x, se puede reescribir de la forma:

$$x' = f(t, x) \tag{1}$$

Si $f(t, x)$ no depende de t, la EDO (1) se llama *EDO autónoma*. De lo contrario, se llama *no autónoma*.

La *solución general* de (1) es una familia de curvas $\psi(t, x, c) = 0$, donde $c \in \mathbb{R}$, la cual satisface la ecuación (1). Si $\psi_0(t, x, c_0) = 0$ es una solución de (1) y además pasa por el punto (t_0, x_0), ψ_0 se llama *solución particular* y satisface el *Problema de Valor Inicial* (PVI):

$$\begin{aligned} x' &= f(t, x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \tag{2}$$

Este semillero se enfoca en el estudio de las EDO de primer orden mediante la aproximación numérica a la solución particular $\psi_0(t, x, c_0) = 0$ del PVI (2) implementando *métodos numéricos* para resolver EDO implementados en el software Python, siguiendo la condiciones establecidas en el *Teorema de Existencia y Unicidad*.

Teorema de Existencia y Unicidad. El PVI (2) tiene una **única** solución si, para un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}^2$ que contiene al punto (t_0, x_0), la EDO (1) satisface que:

$$f(t, x) \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial x},$$

son continuas en I [1, pp. 43]

Es importante destacar que el cumplimiento de estas condiciones de continuidad es crucial para la existencia y unicidad de la solución del PVI.

2 Métodos numéricos para resolver EDO

El objetivo de esta sección es obtener una aproximación a la solución $\psi_0(t, x, c_0) = 0$ del PVI (2). Para ello se tomará una discretización de la solución en el intervalo $[t_0, t_f]$, para algun $t_f > t_0,\ t_f \in \mathbb{R}$, a una distacia constante h.

Si el intervalo $[t_0, t_f]$ se divide en M partes iguales,

$$h = \frac{t_f - t_0}{M}$$

y así, dicho intervalo se discretiza mediante la sucesión:

$$t_0,\ t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_n = t_f.$$

Para hallar una aproximación a la discretización de la variable dependiente x,

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n, \tag{3}$$

se utilizan los *Métodos de Runge-Kutta* [1, pp.].

2.1 Método de Euler

El Método de Euler consiste en aproximar la sucesión (3) de la solución del PVI (2) mediante la *recta tangente* a la curva solución ψ_0 en el punto $t_i \in [t_0, t_f]$.

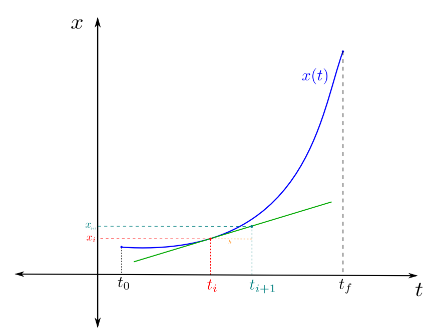
Para esto, consideramos una discretización homogénea del intervalo $[x_0, x_f]$ separados por una distancia h (tamaño de paso):

$$x_0, x_1, \ldots, x_n = x_f,$$

es decir, $x_{i+1} = x_i + h$.

Para hallar y_{i+1}, utilizamos la recta tangente a la solución $x(t)$ en el punto (x_i, y_i). Mediante cálculos algebraicos se obtiene que

$$x_{i+1} = x_i + hf(t_i, x_i).$$



En conclusión para hallar una aproximación de la solución $x(t)$ al PVI (2) mediante el *método de Euler*, se define:

$$
\begin{aligned}
h &= \frac{t_f - t_0}{M},\\
t_{i+1} &= t_i + h,\\
x_{i+1} &= x_i + hf(t_i, x_i).
\end{aligned}
$$

2.2 Métodos de Runge-Kutta

Los métodos de Runge-Kutta son la generalización de la fórmula básica de Euler donde la función $f(t,x)$ del PVI (2) se reemplaza por un promedio ponderado de pendientes en el intervalo $t_i \leq t \leq t_{i+1}$. Es decir,

$$x_{i+1} = x_i + h(w_1 k_1 + w_2 k_2 + \cdots + w_m k_m),$$

donde $w_1, w_2, \ldots, w_m$ son constantes (pesos ponderados) que satisfacen: $w_1 + w_2 + \ldots + w_m = 1$ y cada $k_j,\ j = 1, \ldots, m$, se halla evaluando la función $f(t,x)$ de manera recursiva. Al número m se llama *Orden* del método.

Obsérvese que el *Método de Euler* es un método de Runge-Kutta de orden 1, con un sólo peso $w_1 = 1$ y $k_1 = f(t_i, x_i)$. A continuación se detallan los métodos de Runge-Kutta de segundo y cuarto orden, respectivamente.

Método de Runge-Kutta de Segundo Orden (RK2)

$$
\begin{aligned}
h &= \frac{t_f - t_0}{M},\\
t_{i+1} &= t_i + h,\\
k_1 &= f(t_i,\ x_i),\\
k_2 &= f(t_i + h,\ x_i + hk_1),\\
x_{i+1} &= x_i + \frac{h}{2}(k_1 + k_2).
\end{aligned}
$$

Método de Runge-Kutta de Cuarto Orden (RK4)

$$
\begin{aligned}
h &= \frac{t_f - t_0}{M},\\
t_{i+1} &= t_i + h,\\
k_1 &= f(t_i,\ x_i),\\
k_2 &= f\left(t_i + \frac{h}{2},\ x_i + h\frac{k_1}{2}\right),\\
k_3 &= f\left(t_i + \frac{h}{2},\ x_i + h\frac{k_2}{2}\right),\\
k_4 &= f\left(t_i + h,\ x_i + hk_3\right),\\
x_{i+1} &= x_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).
\end{aligned}
$$

3 Modelos matemáticos basados en EDO autónomas

En esta sección se mostrarán tres modelos matemáticos basados en EDO autónomas. La aproximación de su solución se implemento mediante una interfaz gráfica en Python.

3.1 Modelo de crecimiento exponencial.

Tarea. Aqui deben hacer una descripción del modelo exponencial, pueden consultar esta referecia [1, Capitulo 3]. Usar los mismos parámetros y las mismas variables que se usaron en la interfaz.

3.2 Modelo de crecimiento logístico.

Tarea. Aqui deben hacer una descripción del modelo logístico, pueden consultar esta referecia [1, Capitulo 3]. Usar los mismos parámetros y las mismas variables que se usaron en la interfaz.

3.3 Ley de Enfriamiento/Calentamiento de Newton

Tarea. Aqui deben hacer una descripción de la ley de enfriamiento y calentamiento de Newton, pueden consultar esta referecia [1, Capitulo 3]. Usar los mismos parámetros y las mismas variables que se usaron en la interfaz.

Bibliografía

[1] Dennis G Zill, Michael R Cullen, Ana Elizabeth García Hernández, and Ernesto Filio López. *Ecuaciones diferenciales con problemas de valores en la frontera*. Thomson, 2002.