Semillero de Investigación en Ecuaciones Diferenciales Ordinarias con Python

Jackeline Rivera Aguilera,
Milton Pablo Arias Rincón,
Daniel Felipe Franco Rincón,
David Rincón Toro,
Over.

Asesor:
Luis Eduardo López-Montenegro, PhD.

Resumen

Aqui se escribe un resumen del trabajo

1 Ecuaciones diferenciales ordinarias

Definición: Una ecuación diferencial es una relación de desigualdad entre dos expresiones algebraicas que contienen: derivadas, variables independientes, una variable dependiente y/o constantes (números reales).

Si la ecuación diferencial únicamente tiene UNA sola variable independiente, se llama ecuación diferencial ordinaria (EDO) y si tiene más de una variable independiente se llama ecuación diferencial parcial (EDP).

Por ejemplo, las ecuaciones:

$$r\frac{dr}{d\theta} + \sin\theta = r^2$$

Es una EDO donde θ es la variable independiente y r es la variable dependiente.

$$x\frac{dz}{dx} \cdot xy^2 = \left(\frac{dz}{dy}\right)^2$$

Es una EDP donde: x y y son variables independientes, y z es la variable dependiente.

$$t^2x'' - tx' = 1$$

Es una EDO con: t como la variable independiente y x como la variable dependiente.

Este semillero se enfoca en el estudio de las EDO.

Una EDO se clasifica según su grado y su orden. El grado es definido por la variable dependiente y puede ser lineal o no lineal, mientras que el orden es determinado por la mayor derivada.

Por ejemplo, las EDO

- $r\frac{dr}{d\theta} + \sin\theta = r^2$: No lineal de primer orden.
- $t^2x'' - tx' = 1$: Lineal de segundo orden.
- $x^2y' - 1 = y \cdot y'$: No lineal de primer orden.
- $\frac{x'-y}{y} = \sin y + x^5$: Lineal de orden 5.

Una EDO de la forma $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$ tiene como solución una función $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, y se representa de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \text{Forma explícita:} \quad & y = g(x) \\ \text{Forma implícita:} \quad & g(x, y) = 0 \end{aligned}$$

Tal que al reemplazarla en la EDO cumple con la igualdad.

Ejemplos: Verificar que las siguientes funciones son soluciones de la EDO dada:

Ejemplo 1: $y = x\tan x$ es una solución de: $xy' = y + x^2 + y^2$

Al reemplazar y y y' en la EDO tenemos: $y' = \tan x + x\sec^2 x$

Al reemplazar y y y' en la EDO, tenemos: $x(\tan x + x\sec^2 x) = x\tan x + x^2 + x^2\tan^2 x$

Simplificando: $x \tan x + x^3 \sec^2 x = x \tan x + x^2(1 + \tan^2 x)$

Finalmente, esto se reduce a: $x \tan x + x^2 \sec^2 x$

Ejemplo 2: $y = x^2 + Ae^x + Be^{-x}$, donde A y $B \in \mathbb{R}$, es una solución de: $y'' - y = 2 - x^2$

Calculamos las derivadas de y:

$$y' = 2x + Ae^x - Be^{-x}$$
$$y'' = 2 + Ae^x + Be^{-x}$$

Al reemplazar y y y'' en la EDO, obtenemos:

$$\begin{aligned} 2 + Ae^x + Be^{-x} - (x^2 + Ae^x + Be^{-x}) \\ 2 + Ae^x + Be^{-x} - x^2 - Ae^x - Be^{-x} \\ = 2 - x^2 \end{aligned}$$

Ejemplo 3: $x^2 - y^2 = cx$, donde $c \in \mathbb{R}$ es una solución de: $2xyy' = x^2 + y^2$

Multiplicamos la ecuación original por $-x$: $-2x^2 + 2xyy' = -cx$

Al reemplazar $cx = x^2 + y^2$, obtenemos:

$$2xyy' = 2x^2 - (x^2 - y^2)$$
$$= 2x^2 - x^2 + y^2$$
$$= x^2 + y^2$$

Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

Una Ecuación Diferencial de Primer Orden (EDO) tiene la forma general: $F(x, y, y') = 0$ y se puede representar de dos formas:

- $y' = f(x, y)$ ”forma general”
- $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ ”forma diferencial”

Por ejemplo, la EDO $y' = 2x$ se puede escribir como:

$$\frac{dy}{dx} = 2x \Rightarrow dy = 2xdx$$

Al integrar ambos lados: $\int dy = \int 2xdx \rightarrow y + k_1 = x^2 + k_2$

Así, $y = x^2 + c$, donde $c = k_2 - k_1$, es la solución de $y' = 2x$.

Existen tres tipos de soluciones:

- Solución general: Es de la forma $g(x, y, c) = 0$, donde $c \in \mathbb{R}$.
- Solución particular: Cuando c en la solución general toma un valor específico, por ejemplo, $c = c_0$.
- Solución singular: Es una solución que no se genera de la solución general.

Ejemplo 1:

La función $y = Ce^{\frac{y}{x}}$, donde $c \in \mathbb{R}$, es la solución general de la EDO $y' = \frac{y^2}{xy - x^2}$. Calcular la solución particular que pasa por el punto $(1, 0)$.

Al reemplazar $c = 0$ en $y = Ce^{\frac{y}{x}}$, obtenemos $y = Ce^{\frac{y}{x}} \Rightarrow y = 0$ es la solución particular.

Ejemplo 2:

La función $y = x^2 + c^2$ es la solución general de $y' = 4x\sqrt{y}$. La solución $y = 0$ se llama singular porque no hay un valor de c que genere $y = 0$.

Si se desea hallar la solución de la EDO $y' = f(x, y)$ y además, que pase por el punto (x_0, y_0), se resuelve el Problema de Valor Inicial (PVI):

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

De esta manera, la solución del PVI:

$$\begin{cases} y' = \frac{y^2}{xy - x^2} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

es $y = 0$.

Teorema de Existencia y Unicidad:

El Problema de Valor Inicial (PVI)

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

tiene una **ÚNICA** solución si, para un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}^2$ que contiene al punto (x_0, y_0), la Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO) satisface que:

$f(x,y)$ y $\frac{df}{dy}$ son continuas en I.

Este teorema establece las condiciones necesarias para garantizar que el PVI tenga una única solución en el intervalo I cuando se cumplen las condiciones de continuidad de $f(x,y)$ y $\frac{df}{dy}$ en dicho intervalo.

Es importante destacar que el cumplimiento de estas condiciones de continuidad es crucial para la existencia y unicidad de la solución del PVI.

[1, pp. 43]

2 Métodos numéricos para resolver EDO

Recordemos que una EDO de primer orden con variable independiente x y variable dependiente y se representa como $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$, donde $f(x,y)$ es una expresión algebraica que depende de x y y.

Un Problema de Valor Inicial (PVI) consiste en una EDO $y' = f(x,y)$ junto con una condición inicial $y(x_0) = y_0$.

Una solución para el PVI:

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0(1) \end{cases}$$

es una función $y = g(x)$, donde x pertenece al intervalo $[x_0, x_f]$, y $g(x)$ satisface $y'(x) = G'(x) = f(x, G(x))$ y $G(x_0) = y_0$.

Mediante métodos numéricos, obtenemos una discretización de la solución $y = G(x)$ en $[x_0, x_f]$ del PVI (1), de la forma (x_1, y_1), donde $i = 0, 1, \ldots, n$, de modo que $y_i \neq G(x_i)$ y x_i pertenece a $[x_0, x_f]$.

Método de Euler:

El Método de Euler consiste en aproximar la solución $y = G(x)$ mediante la recta tangente de la EDO:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0, \quad x \in [x_0, x_f] \end{cases}$$

Para esto, consideramos una discretización homogénea del intervalo $[x_0, x_f]$ separados por una distancia h (tamaño de paso):

$$x_0, x_1, \ldots, x_n = x_f,$$

es decir, $x_{i+1} = x_i + h$.

Para hallar y_{i+1}, utilizamos la recta tangente en (x_1, y_i). Por ejemplo, para hallar y_1, utilizamos la recta tangente en (x_0, y_0): $y_1 - y_0 = m(x_1 - x_0)$, donde $m = y'(x_0) = f(x_0, y_0)$ y $x_1 - x_0 = h$. Así, se obtiene:

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0).$$

De manera similar, se tiene que $y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$, y en general:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i).$$

3 Métodos de Runge-Kutta

Los métodos de Runge-Kutta son la generalización de la fórmula básica de Euler donde la función $f(x, y)$ del PVI se reemplaza por un promedio ponderado de pendientes en el intervalo $x_i \leq x \leq x_{i+1}$. Es decir,

$$y_{i+1} = y_i + h(w_1 k_1 + w_2 k_2 + \ldots + w_m k_m)$$

donde los pesos $w_1, w_2, \ldots, w_m$ son constantes que satisfacen: $w_1 + w_2 + \ldots + w_m = 1$ y cada k_j, j=1, ..., m, es la función $f(x, y)$ evaluada en un punto seleccionado (tal para el que $x_i \leq x \leq x_{i+1}$). Los k_j se definen recursivamente. El número m se llama Orden del método.

Runge-Kutta de Segundo Orden (m=2)

$$x_{i+1} = x_i + h$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(k_1 + k_2),$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + h, y_i + hk_1)$$

Ejemplo: Al resolver el PVI:

$$\begin{cases} y' = x^2 - y \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

con $h = 0.5$

se obtiene que:

$f(x, y) = x^2 - y; k_1$

Ahora, $k_2 = f(x + 0.5, y + 0.5hk_1)$,

$y + 0.5k_1 = 0.5(x^2 + y)$

$k_2 = f(x + 0.5, 0.5(x^2 + y))$

$= (x + 0.5)^2 - 0,5(x^2 + y))$

$= x^2 + x + 0.25 - 0.5x^2 - 0.5y$

$= 0.5x^2 + x - 0.5y + 0.25$

$$y + h = y_i + 0.25(k_1 + k_2)$$

$= y + h/2(k_1 + k_2) = y + 0.25(x^2 - y_+ 0.5x^2 + x - 0.5y + 0.25)$

$= y + 0.375x^2 + 0.25x - 0.375y + 0.0625$

$= 0.375x^2 + 0.25x + 0.625y + 0.0625$

Entonces,

$$x_{i+1} = x_i + 0.5, \quad x_0 = 0$$

$$y_{i+1} = 0.375x_i^2 + 0.25x_i + 0.625y_i + 0.0625, \quad y_0 = 3$$

$$x_1 = 0.5, \quad y_1 = 1.9375$$

$$x_2 = 1, \quad y_2 = 1.4921875$$

$$x_3 = 1.5, \quad y_3 = 1.620117188$$

$$x_4 = 2, \quad y_4 = 2,293823242$$

Así:

$$y(2) = 2,293823242..., \quad \text{con error} = 0.1584...$$

Runge-Kutta de Cuarto Orden (m=4)

$$x_i + 1 = x_1 + h$$
$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + h\frac{k_1}{2})$$

$$k_3 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + h\frac{k_2}{2})$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + hk_3)$$

Ejemplo: Al resolver el PVI

$$\begin{cases} y' = x^2 - y \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

con $h = 0.5$, Por Euler (RK1), Runge-Kutta Orden 2 (RK2) y Runge-Kutta Orden 4 (RK4) tenemos:

i	x_i	RK1	RK2	RK4	Valor exacto
1	0.5	1.5	1.9375	1.857421875	1.85653066...
2	1	0,875	1.4921875	1.36921691894...	1.36789441...
3	1.5	0.9375	1.62011718...	1.474681099...	1.47313016...
4	2	1.59375	2.29382324...	2.1369809794...	2.13533528...

En Matlab está la función `ode45` cuya sintaxis (más simple) es la siguiente:

```
[X,Y] = ode45(@ed, [X0,Xf], Y0)
```

donde `ed` es una función que define el EDO, $[X0, Xf]$ es el intervalo donde se desarrolla el PVI, $Y0$ es el valor inicial para la variable dependiente, `X` es el vector con los valores de la abscisa, `Y` es el vector con los valores de la ordenada.

A continuación vamos a referenciar una ecuación

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{1}$$

La ecuación (1) es la solución a la ecuación cuadrátrica $ax^2 + bx + c = 0$.

4 Códigos de programación en Python

Este es un ejemplo para incrustar una imagen, referenciada como fig01. En la Figura 1 se muestra

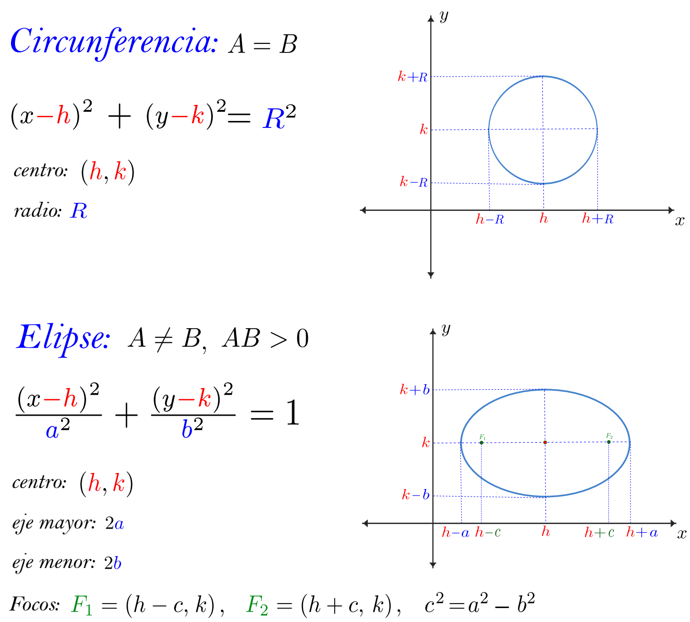

Figura 1: Esta es una elipse

Así se pone la bibliografia:

Bibliografía

[1] Dennis G Zill, Michael R Cullen, Ana Elizabeth García Hernández, and Ernesto Filio López. *Ecuaciones diferenciales con problemas de valores en la frontera*. Thomson, 2002.