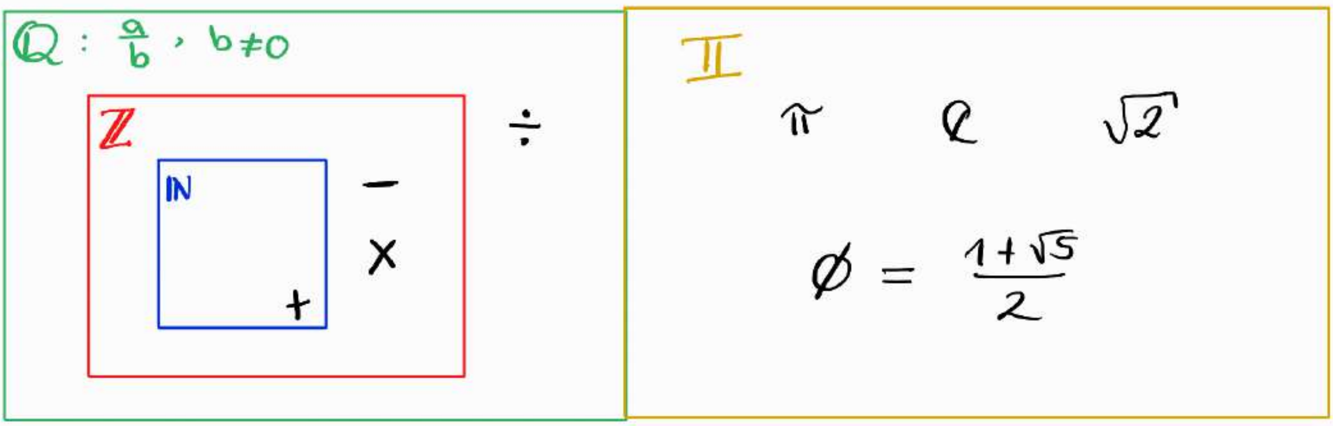
Unidad 0. Conocimientos Previos

Sistemas numéricos

Se definen como un conjunto infinito de números donde se aplican operaciones. Si al tomar 2 números de un sistema numérico y a dichos números se les aplica una operación, la operación se llamará cerrada, si el resultado es otro número del mismo sistema numérico. De lo contrario, se dirá que no es cerrada.

En el siguiente diagrama resumimos la construcción de los números reales.



La unión entre $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ no genera los números reales, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

Todo número real se puede expresar como un número decimal infinito. Si el número es periódico, pertenecerá a $\mathbb{Q}$ y, si no es periódico, pertenecerá a $\mathbb{I}$. Por ejemplo,

$$5 = 5.\overline{0} \quad , \quad 5 \in \mathbb{Q}$$
$$\frac{1}{2} = 0.5\overline{0} \quad , \quad \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$$
$$\sqrt{2} = 1.4142135623\ldots \quad , \quad \sqrt{2} \in \mathbb{I}$$
$$\frac{151}{90} = 1.6\overline{7} \quad , \quad \frac{151}{90} \in \mathbb{Q}$$
$$\pi = 3.1415926535\ldots \quad , \quad \pi \in \mathbb{I}$$
$$e = 2.7182818284\ldots \quad , \quad e \in \mathbb{I}.$$

Potenciación y Radicación

Para un número real positivo a y un número natural n se define:

$$\underset{\text{base}}{a}^{\overset{\text{Exponente}}{n}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ veces}}$$

Por ejemplo:

- $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$
- $\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{81}{16}$

Usando las propiedades de potenciación y radicación simplifique las siguientes expresiones:

* $\sqrt[3]{x^2\sqrt{x^{-4}\sqrt[3]{x}}}$ RTA. $\sqrt[18]{x}$

$$= \left(x^2\left[x^{-4}\left(x^{1/3}\right)\right]^{1/2}\right)^{1/3} = \left(x^2\left[x^{-11/3}\right]^{1/2}\right)^{1/3}$$

$$= \left(x^2\, x^{-11/6}\right)^{1/3} = \left(x^{1/6}\right)^{1/3} = x^{1/18} = \sqrt[18]{x}$$

"Ejercicio" Simplificar:

$$\frac{\sqrt[9]{a^5}\,(a^{-1}+b^{-1})\,(a+b)^{-1}}{\sqrt[6]{a^4\sqrt[3]{a^{-2}b^{18}}}}$$

RTA: $\frac{1}{a}$

Operaciones con polinomios

Un polinomio con variable x y parámetros (valores constantes o fijos) a_i , $i = 0, 1, \ldots, n$ llamandos coeficientes es de la forma:

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \ , \quad n \in \mathbb{N}$$

la mayor potencia de x (n) se llama grado del polinomio.

Por ejemplo, el polinomio:

$$Q_3(x) = 5 - \frac{1}{3}x + \pi x^3$$

es de grado 3, tiene 3 términos, en donde:

$$a_3 = \pi \quad , \quad a_2 = 0 \quad , \quad a_1 = -\frac{1}{3} \quad y \quad a_0 = 5$$

En adelante un polinomio $P_n(x)$ lo denotaremos como P.

Los polinomios se clasifican en:

* **Monomio:** tiene un sólo término.
* **Binomio:** tiene dos términos.
* **Trinomio:** tiene tres términos.
* **Polinomio:** tiene más de tres términos.

Dos términos de un polinomio se llaman semejantes si tiene la misma potencia en su variable. Por ejemplo, $a_i x^n$ y $a_j x^n$ son términos semejantes. Por lo tanto,

$$a_i x^n \pm a_j x^n = (a_i \pm a_j) x^n$$

Adición y Sustracción.

Para $P = 3x^5 - 2x^3 + 7x^2 - x + 6$ y
$Q = 2x^3 + 3x^2 + x - 5$

entonces:

$$P + Q = 3x^5 - \cancel{2x^3} + 7x^2 - \cancel{x} + 6 + \cancel{2x^3} + 3x^2 + \cancel{x} - 5$$

$$= 3x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 10x^2 + 0x + 1$$

$$= 3x^5 + 10x^2 + 1$$

$$P - Q = 3x^5 - 2x^3 + 7x^2 - x + 6 - \left(2x^3 + 3x^2 + x - 5\right)$$

$$= 3x^5 - 2x^3 + 7x^2 - x + 6 - 2x^3 - 3x^2 - x + 5$$

$$= 3x^5 - 4x^3 + 4x^2 - 2x + 11$$

Multiplicación y División.

Para $P = 6x^3 + x^2 - 8x + 5$ y
$Q = 2x - 1$

entonces,

$$PQ = QP = (2x-1)(6x^3+x^2-8x+5)$$

$$= 12x^4 + 2x^3 - 16x^2 + 10x - 6x^3 - x^2 + 8x - 5$$

$$= 12x^4 - 4x^3 - 17x^2 + 18x - 5$$

Al dividir P entre Q se obtiene:

$$\begin{array}{rrrr|l}
\cancel{6x^3} & +x^2 & -8x & +5 & 2x-1 \\ \cline{5-5}
-\cancel{6x^3} & +3x^2 & & & 3x^2+2x-3 \\ \cline{1-4}
 & \cancel{4x^2} & -8x & +5 & \\
 & -\cancel{4x^2} & +2x & & \\ \cline{2-4}
 & & -\cancel{6x} & +5 & \\
 & & \cancel{6x} & -3 & \\ \cline{3-4}
 & & & \boxed{2} &
\end{array}$$

$$\frac{6x^3}{2x} = 3x^2 \qquad \frac{4x^2}{2x} = 2x \qquad -\frac{6x}{2x} = -3$$

Cociente: $3x^2+2x-3$ y residuo: 2.

En general, si dividimos un polinomio $P_n(x)$ entre $Q_m(x)$ $(m \leq n)$ obtenemos:

$$\begin{array}{c|c}
P_n(x) & Q_m(x) \\ \cline{2-2}
R(x) & C(x)
\end{array}$$

$C(x)$: polinomio de grado $n-m$.

$R(x)$: polinomio de grado menor de m.

Además, $P_n(x) = C(x)\,Q_m(x) + R(x)$, ó su equivalente:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q_m(x)}$$

Si $R(x) = 0$, la división entre $P_n(x)$ y $Q_m(x)$ es exacta, esto implica que:

$$P_n(x) = C(x)\,Q_m(x)$$

Es decir, $P_n(x)$ se puede factorizar como el producto de $C(x)$ y $Q_m(x)$.

Productos notables

Dadas dos expresiones algebraicas a y b, entonces:

$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$$

$$(2x+3x^2)(2x-3x^2) = (2x)^2 - (3x^2)^2 = 4x^2 - 9x^4$$

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(3x^2 - 2x^{-3})^2 = (3x^2)^2 - 2(3x^2)(2x^{-3}) + (2x^{-3})^2$$
$$= 9x^4 - 12x^{-1} + 4x^{-6}$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$\left(\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}\right)^3 = \left(\sqrt{x}\right)^3 - 3\left(\sqrt{x}\right)^2\left(\sqrt[3]{x}\right) + 3\left(\sqrt{x}\right)\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 - \left(\sqrt[3]{x}\right)^3$$

$$= \left(x^{1/2}\right)^3 - 3\left(x^{\cancel{1/2}}\right)^{\cancel{2}}\left(x^{1/3}\right) + 3\left(x^{1/2}\right)\left(x^{1/3}\right)^2 - \left(x^{\cancel{1/3}}\right)^{\cancel{3}}$$

$$= x^{3/2} - 3x^1 x^{1/3} + 3x^{1/2}x^{2/3} - x^1$$

$$= x^{3/2} - 3x^{4/3} + 3x^{7/6} - x$$

$$= \sqrt{x^3} - 3\sqrt[3]{x^4} + 3\sqrt[6]{x^7} - x$$

En general, podemos hallar los coeficientes del producto notable $(a \pm b)^n$, $n \in \mathbb{N}$ con el Triángulo de Pascal:

$(a\pm b)^0$							1						
$(a\pm b)^1$						1		1					
$(a\pm b)^2$					1		2		1				
$(a\pm b)^3$				1		3		3		1			
$(a\pm b)^4$			1		4		6		4		1		
$(a\pm b)^5$		1		5		10		10		5		1	
$(a\pm b)^6$	1		6		15		20		15		6		1

También es posible hallar un término en la posición r (T_r) donde:

$$T_r = (\pm 1)^{r-1} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(r-2))}{(r-1)!} a^{n-(r-1)} b^{r-1}$$

$r > 2$

Ej/ Hallar el 5^{to} término de $(a-b)^6$.

En este caso, $r = 5$ y $n = 6$, así:

$$T_5 = (-1)^4 \frac{6(6-1)(6-2)(6-3)}{4!} a^{6-4} b^4$$

$$= \cancel{1} \cdot \frac{\cancel{6}(5)\cancel{(4)}(3)}{\cancel{4}\cancel{(3)}\cancel{(2)}\cancel{(1)}} a^2 b^4 = 15a^2b^4$$

Ejercicio: Hallar 7^{o} término de $(x^{-1} - 2x^2)^{10}$

Factorización

Factorizar es reescribir una expresión algebraica en dos o más factores. Existen varios casos de factorización, los cuales se clasifican según la expresión (polinomio).

Factorización en binomios.

* Factor común. $ab + ac = a(b+c)$

Ej/ $10x^4 - 15x^7 = 5x^4(2 - 3x^3)$

$$\begin{array}{cc|c} 10 & 15 & 5 \\ 2 & 3 & \end{array}$$

* Diferencia de cuadrados: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

conjugados

$\sqrt{a^2} = a$ y $\sqrt{b^2} = b$

Ej/ $16x^8 - 9 = (4x^4 - 3)(4x^4 + 3)$

$\sqrt{16x^8} = 4x^4$, $\sqrt{9} = 3$

Ejercicio: factorizar completamente:

* $150x^2y^3z - 105x^3y^2$
* $2x^6y - 18x^2y$

* Diferencia (suma) de cubos.

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

donde $\sqrt[3]{a^3} = a$, $\sqrt[3]{b^3} = b$

Ej/ Factorizar: $2x^6 - 128$

$= 2(x^6 - 64)$ "factor común"

$= 2(x^3 - 8)(x^3 + 8)$ "Diferencia de cuadrados"

"Diferencia de cubos" y "Suma de cubos"

$$= 2\,(x-2)(x^2+2x+4)(x+2)(x^2-2x+4)$$

Factorización en trinomios

* Trinomio Cuadrado perfecto (TCP)

$$a^2 \pm \underbrace{2ab} + b^2 = (a \pm b)^2$$

$$\sqrt{a^2} = a \qquad \sqrt{b^2} = b \quad > \quad 2(a)(b) = 2ab$$

Ej/ $4x^2 - 12x + 9$ es un TCP.

$$\sqrt{4x^2} = 2x \qquad \sqrt{9} = 3 \quad > \quad 2(2x)(3) = 12x$$

Así, $4x^2 - 12x + 9 = (2x-3)^2$

* Trinomio de la forma:

$$E^2 + (a+b)E + ab = (E+a)(E+b)$$

EJ/. * $x^2 + 3x + 2$

$a+b=3$, $ab=2$ $\Rightarrow$ $a=2$, $b=1$

$= (x+2)(x+1)$

* $x^2 - x - 6$

$a+b=-1$, $ab=-6$ $\Rightarrow$ $a=2$, $b=-3$

$$\begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{array}$$

$(x-3)(x+2)$

* $4x^{10} + 10x^5 - 14$

$= (2x^5)^2 + 5(2x^5) - 14$

$= (2x^5+7)(2x^5-2)$

$= 2(2x^5+7)(x^5-1)$

$a+b=5$, $ab=-14$

$a=7$, $b=-2$

$$\begin{array}{r|l} 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & 1 \end{array}$$

* $x^4 + nx^2 - 2n^2$

$a+b=n$, $ab=-2n^2$ $\Rightarrow$ $a=2n$, $b=-n$

$= (x^2+2n)(x^2-n)$

* Fórmula General

$$aE^2 + bE + c = a(E - x_1)(E - x_2)$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejercicio: factorizar:

* $x^2 - x - 6$
* $4x^{10} + 10x^5 - 14$
* $x^4 + nx^2 - 2n^2$

Factorización en polinomios

Cuando un polinomio tiene mas de 3 términos, para factorizarlo, se suele usar el factor común por agrupación y en general, la Regla de Ruffini.

Ej/ factorizar: $\underline{x^3 + 2x^2} - x - 2$

$$\begin{aligned} x^3 + 2x^2 - x - 2 &= \underline{x^3 + 2x^2}\ \underline{-x - 2} \\ &= x^2(x+2) - (x+2) \\ &= (x+2)(x^2 - 1) \\ &= (x+2)(x-1)(x+1) \end{aligned}$$

Regla de Ruffini.

Para factorizar un polinomio usando esta regla, recordemos el proceso de la división sintética entre un polinomio $P_n(x)$ entre un binomio $Q(x) = x - a$, $a \in \mathbb{R}$ como sigue:

Ej/ Dividir $P = 4x^3 - 12x^2 - 9x + 27$ entre $Q = x + 2$.

En este caso, $a = -2$

$$\begin{array}{rrrr|l} 4 & -12 & -9 & 27 & -2 \\ \downarrow & -8 & 40 & -62 & \\ \hline 4 & -20 & 31 & \boxed{-35} & \end{array}$$

Cociente: $4x^2 - 20x + 31$

Residuo: -35

Teorema del Residuo. El residuo R de dividir el polinomio $P_n(x)$ entre un binomio $Q(x) = x - a$ es:

$$R = P_n(a).$$

Ej/ El residuo de dividir $P = 4x^3 - 12x^2 - 9x + 27$ entre $Q = x + 2$ es:

$$R = P(-2) = 4(-2)^3 - 12(-2)^2 - 9(-2) + 27 = -32 - 48 + 18 + 27$$
$$= -35$$

NOTA: Si para un polinomio $P_n(x)$, $R = P_n(a) = 0$, al número a se le llama raíz de $P_n(x)$.

Por ejemplo, $x = 3$ es una raíz de $P = 4x^3 - 12x^2 - 9x + 27$, porque:

$$P(3) = 4(3)^3 - 12(3)^2 - 9(3) + 27 = 0$$

Observación. Un polinomio de grado n tiene a lo sumo n raíces reales. (Teorema fundamental del álgebra).

Para factorizar un polinomio $P(x)$, se inicia hallando una raíz real a de $P(x)$ y se hace la división sintética con dicha raíz y su factorización será:

$$P(x) = C(x)\,(x - a)$$

donde $C(x)$ es el cociente de la división sintética y, si es posible, se sigue el mismo procedimiento con el polinomio $C(x)$.

Por ejemplo, para factorizar $P = 4x^3 - 12x^2 - 9x + 27$ hacemos división sintética con $a = 3$:

$$\begin{array}{rrrr|l} 4 & -12 & -9 & 27 & 3 \\ & 12 & 0 & -27 & \\ \hline 4 & 0 & -9 & \boxed{0} & \end{array}$$

$$C(x) = 4x^2 + 0x - 9 = 4x^2 - 9$$

signo opuesto

Así,

$$4x^3 - 12x^2 - 9x + 27 = (4x^2 - 9)(x - 3) = (2x - 3)(2x + 3)(x - 3)$$

Regla de Ruffini. Es un método usado para identificar un conjunto finito de números racionales, $\mathbb{Q}$ que son posibles raíces del polinomio a factorizar. Para el polinomio: $P = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, las posibles raíces racionales son de la forma:

$\frac{a}{b}$, donde a son los divisores de a_0
b son los divisores de a_n

Por ejemplo, para $4x^3 - 12x^2 - 9x + 27$:

$a = d(27)$: $\pm 1, \pm 3, \pm 9, \pm 27$

$b = d(4)$: $\pm 1, \pm 2, \pm 4$

Asi, el conjunto de posibles raíces $\mathbb{Q}$ son:

$$\left\{ \pm 1, \pm 3, \pm 9, \pm 27, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{3}{4}, \pm \frac{9}{2}, \pm \frac{9}{4}, \pm \frac{27}{2}, \pm \frac{27}{4} \right\}$$

De las cuales se puede concluir que $4x^3 - 12x^2 - 9x + 27$ tiene 3 raíces: $x_1 = 3$, $x_2 = -\frac{3}{2}$, $x_3 = \frac{3}{2}$.

Nota. Si de un polinomio de grado n: $a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ se conocen sus n raíces: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, entonces:

$$a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = a_n (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$$

Por ejemplo, de $4x^3 - 12x^2 - 9x + 27$ se conoce sus 3 raíces: $x_1 = 3$, $x_2 = -\frac{3}{2}$, $x_3 = \frac{3}{2}$. Entonces:

$$4x^3 - 12x^2 - 9x + 27 = 4(x - 3)\left(x + \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

Ejercicio: usando la división sintética factorizar:

$$6x^2 - xy - 5y^2$$