Crecimiento exponencial

La ley de Malthus establece que la rapidéz con la crece o decrece una población P, es proporcional a la cantidad presente.

Sea t el tiempo en días y $P(t)$ el número promedio de individuos en un tiempo t. Entonces la rapidéz con la crece o decrece la población es $\frac{dP}{dt}$.
Así,

$$\frac{dP}{dt} = kP \quad , \text{ donde } k \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Separando variables de (1) tenemos:

$$\frac{dP}{P} = k\, dt$$

Ahora, integrando en ambos lados obtenemos:

$$\int \frac{dP}{P} = \int k\, dt \implies \ln P = kt + c$$

$$\implies P = e^{kt+c} = e^{kt} e^{c}$$

$$\implies P = C e^{kt}$$

Si consideramos que cuando $t=0$, la población tiene P_0 individuos ($P(0) = P_0$). Entonces:

$$P(0) = C e^{k(0)} = C = P_0$$

Así, la población crece mediante el modelo

$$P(t) = P_0 e^{kt} \qquad (2)$$

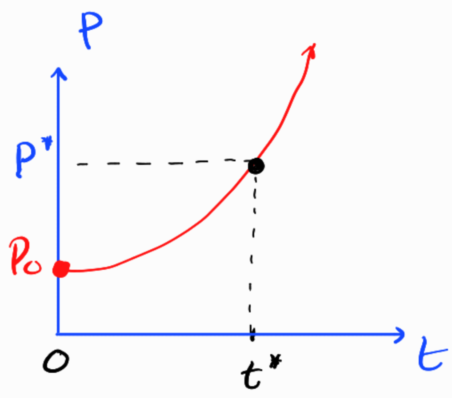
La tasa de crecimiento de una población P se define como la fracción:

$$\frac{P'(t)}{P(t)} = \frac{\cancel{P_0}\,\cancel{e^{kt}}(k)}{\cancel{P_0}\,\cancel{e^{kt}}} = k$$

- Si $k > 0$, la población crece
- Si $k < 0$, la población decrece.

Para hallar la población P^* para un tiempo t^* realizamos:

$$P^* = P(t^*)$$



Si deseamos hallar t^* dado P^* resolvemos la ecuación:

$$P(t) = P^* \Rightarrow P_0 e^{kt} = P^* \Rightarrow kt = \ln\left(\frac{P^*}{P_0}\right)$$

luego, $t^* = \frac{1}{k}\ln\left(\frac{P^*}{P_0}\right)$