Вопрос №1.13

Понятие аппроксимации, устойчивости и сходимости численного решения ДУЧП. Основные методы анализа устойчивости разностных схем (модельное уравнение, дифференциальное приближение, метод фон Неймана).

1 Понятие аппроксимации, устойчивости и сходимости численного решения ДУЧП

Пусть имеется область $G \subset \mathbb{R}^p$ с границей Γ и поставлена корректная задача для дифференциального уравнения с граничными условиями:

$$\begin{aligned} Au(x) - f(x) = 0, \qquad & x \in G, \\ Ru(x) - \mu(x) = 0, \qquad & x \in \Gamma. \end{aligned}$$

Введем в области $G \cup \Gamma$ сетку с шагом h, состоящую из множества внутренних (регулярных) узлов ω_h и множества граничных (нерегулярных) узлов γ_h. Заменим исходную задачу разностным аналогом:

$$\begin{aligned} A_h u_h(x) - f_h(x) = 0, \qquad & x \in \omega_h, \\ R_h u_h(x) - \mu_h(x) = 0, \qquad & x \in \gamma_h. \end{aligned}$$

Близость разностной схемы к исходной задаче будем определять по величине невязки:

$$\begin{aligned} \psi_h(x) = (Au - f) - (A_h u - f_h), \qquad & x \in \omega_h, \\ \nu_h(x) = (Ru - \mu) - (R_h u - \mu_h), \qquad & x \in \gamma_h. \end{aligned}$$

Разностное решение u_h сходится к точному решению u, если $||u_h - u|| \to 0$ при $h \to 0$; разностное решение имеет порядок точности p, если $||u_h - u|| = O(h^p)$ при $h \to 0$.

Разностная схема аппроксимирует задачу, если $||\psi_h|| \to 0$, $||\nu_h|| \to 0$, при $h \to 0$; аппроксимация имеет порядок p, если $||\psi_h|| = O(h^p)$, $||\nu_h|| = O(h^p)$, при $h \to 0$.

Разностная схема устойчива, если решение системы разностных уравнений непрерывно зависит от входных параметров f и μ, причем равномерно по h.

Разностная схема корректна, если она устойчива и ее решение существует и единств енно при любых f и μ из некоторого класса функций.

Теорема. Если решение задачи существует, разностная схема корректна и аппроксимирует задачу на данном решении, то разностное решение сходится к точному.

2 Основные методы анализа устойчивости разностных схем

2.1 Модельное уравнение

Разностные схемы удобно исследовать на простых уравнениях, точные решения которых известны: $u' = 0 \Rightarrow u = C$, $u' = \lambda u \Rightarrow u = u_0 e^{\lambda x}$

2.2 Дифференциальное приближение

Переходя от точного уравнения $Au - f = 0$ к приближенному $A_h u_h - f_h = 0$, мы вносим ошибку, поскольку на самом деле $A_h u_h - f_h = O(h)$. Оценив $O(h)$, можно получить истинное приближаемое уравнение.

Пример: $\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} = 0$

Разностный аналог: $\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} - u\frac{T_i^n - T_{i-1}^n}{\Delta x} = 0$

Разложим T_i^{n+1} и T_{i-1}^n в ряд Тейлора и подставим. Получилось: $(\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x})_i^n + 0.5(\frac{\partial^2 T}{\partial t^2})_i^n \Delta t - 0.5u(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2})_i^n \Delta x + o(\Delta x, \Delta t) = 0$ Это и есть наиболее точно приближаемое уравнение.

2.3 Метод фон Неймана

(Он же спектральный признак устойчивости.)

В разностной схеме $A_h u_h - f_h = 0$ рассматривается однородное уравнение $A_h u_h = 0$, и каждое вхождения значения функции в узле сетки $u_{x=x_n}^{t=t_m}$ заменяется на $\lambda^m e^{in\alpha}$. Из полученного уравнения находится λ. Если $|\lambda| \leq 1$, то схема считается устойчивой.

λ — множитель перехода гармоники с одного временного слоя на другой. Условие $|\lambda| \leq 1$ обеспечивает невозрастание накопленной ошибки.