# Q-1.7

*Различные формы уравнения переноса энергии в сплошной среде. Уравнение теплопроводности в вязкой несжимаемой жидкости и в твердом теле.*

## 1. Общий вид уравнения переноса энергии.

Введем обозначения: $E$ — удельная энергия на единицу массы, $Q$ — удельный источник энергии на единицу массы, $\mathbf{q}$ — поток энергии, $f$ — удельные объемные силы на единицу массы. Рассмотрим Лагранжев объем $W$ и запишем уравнение сохранению энергии в этом объеме:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_W \rho\left(E+\frac{\mathbf{v}^2}{2}\right)dW = \int\limits_{\partial W}\mathbf{v}\cdot(P\cdot\mathbf{dS})+\int\limits_W \rho f\cdot\mathbf{v}dW-\int\limits_{\partial W}\mathbf{q}\cdot\mathbf{dS}+\int\limits_W \rho Q dW.$$

Первое слагаемое в правой части это работа сил давления (нормальной компоненты тензора напряженности $P$) по деформации лагранжева объема $W$. Второе слагаемое — работа объемных сил $f$, третье — поток энергии через границу объема $W$ и четвертое — энергия виделившаяся в нашем лагранжевом объеме.

Пользуясь теоремой Стокса и тем что $\mathbf{v}\cdot(P\cdot\mathbf{dS}) = (P\cdot\mathbf{v})\cdot\mathbf{dS}$ перепишем это уравнение в дифференциальном виде:

$$\rho\frac{d}{dt}\left(E+\frac{\mathbf{v}^2}{2}\right) = \nabla\cdot(P\cdot\mathbf{v})+\rho f\mathbf{v}-\nabla\cdot\mathbf{q}+\rho Q. \tag{1}$$

Вспомним уравнение движения сплошной среды:

$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \nabla\cdot P+\rho f.$$

Умножая его скалярно на $\mathbf{v}$ находим

$$\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2}\right) = \rho\mathbf{v}\cdot\frac{d\mathbf{v}}{dt} = (\nabla\cdot P)\cdot\mathbf{v}+\rho f\mathbf{v}.$$

Подставляя это в уравнение (1) получаем

$$\rho\frac{dE}{dt} = \nabla\cdot(P\cdot\mathbf{v})-(\nabla\cdot P)\cdot\mathbf{v}-\nabla\cdot\mathbf{q}+\rho Q.$$

Заметим, что

$$\nabla\cdot(P\cdot\mathbf{v})-(\nabla\cdot P)\cdot\mathbf{v} = \sum_{i,j}\frac{\partial}{\partial x_i}(P_{ij}v_j)-\sum_{i,j}\frac{\partial P_{ij}}{\partial x_i}v_j =$$
$$\sum_{i,j}\frac{\partial P_{ij}}{\partial x_i}v_j+\sum_{i,j}P_{ij}\frac{\partial v_j}{\partial x_i}-\sum_{i,j}\frac{\partial P_{ij}}{\partial x_i}v_j =$$
$$\sum_{i,j}P_{ij}\frac{\partial v_j}{\partial x_i} = \sum_{i,j}P_{ij}S_{ij} = P:S,$$

где $S := \mathrm{Sym}(\nabla \mathbf{v})$, а $P : S$ — свертка по обоим индексам. Окончательно приходим к следующей форме уравнения (1):

$$\rho \frac{dE}{dt} = P : S - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho Q. \tag{2}$$

**Выражение для q.** Часто можно считать, что поток энергии пропорционален градиенту тепературы $\mathbf{q} = -\lambda \nabla T$ (закон Фурье), где $\lambda$ называется коэффициентом теплопроводности.

## 2. Твердое тело.

Будем считать, что $\mathbf{q} = -\lambda \nabla T$ и $E = E_0 + C_V T$, где $C_V$ — теплоемкость. Поскольку в твердом теле $\mathbf{v} = 0$, то и $S = 0$ и уравнение (2) приобретает вид

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\lambda}{\rho C_V} \nabla^2 T + \frac{1}{C_V} Q.$$

## 3. Идеальная среда.

Среда называется идеальной, если в ней отсутствуют касательные напряжения, в этом случае тензор $P$ "сферический" — $P = -p \cdot \mathrm{Id}$ и число $p$ называется давлением. При этом предположении ясно, что $P : S = -p \mathrm{Tr}(S) = -p \nabla \cdot \mathbf{v}$. Таким образом уравнение переноса энергии имеет вид

$$\rho \frac{dE}{dt} = -p \nabla \cdot \mathbf{v} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho Q.$$

## 4. Ньютоновская несжимаемая среда.

В случае ньютоновской несжимаемой среды тензор напряженности имеет вид $P = -p \cdot \mathrm{Id} + 2\mu S$, где $\mu$ — коэффициент динамической вязкости, $p := -\frac{1}{3}\mathrm{Tr}(P)$ — называется давлением. Таким образом, уравнение (2) переписывается в виде

$$\rho \frac{dE}{dt} = -p \nabla \cdot \mathbf{v} + 2\mu S : S - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho Q.$$

Так как жидкость несжимаемая, то $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. Предположим также, что $\mathbf{q} = -\lambda \nabla T$ и $E = E_0 + C_V T$, в результате имеем

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) T = \frac{2\mu}{\rho C_V} S : S + \frac{\lambda}{\rho C_V} \nabla^2 T + \frac{1}{C_V} Q.$$

Величина $\frac{\lambda}{\rho C_V}$ называется кинематической теплопроводностью.