

Вопрос №1.3

Линейные интегральные уравнения. Связь краевых задач математической физики с интегральными уравнениями. Элементы теории потенциала.

1 Линейные интегральные уравнения

Интегральное уравнение — уравнение, содержащее неизвестную функцию под знаком интеграла.

Линейное интегральное уравнение 1-го рода:

$$\int_a^b K(x, t)u(t)dt = f(x)$$

Линейное интегральное уравнение 2-го рода (уравнение Фредгольма):

$$u(x) - \lambda \int_a^b K(x, t)u(t)dt = f(x),$$

где $K(x, t)$ — ядро интегрального уравнения, $f(x)$ — известная функция, $u(t)$ — искомая функция.

Если $f(x) = 0$, то уравнение называется однородным.

Если $K(x, t) = 0$ при $t > x$, получаем уравнение Вольтерра:

$$u(x) - \lambda \int_a^x K(x, t)u(t)dt = f(x).$$

Если $K(x, t) = \sum_i g_i(x)h_i(t)$, то ядро называется вырожденным, и интегральное уравнение сводится к системе линейных уравнений.

2 Связь краевых задач математической физики с интегральными уравнениями

Многие краевые задачи математической физики могут быть сведены к интегральным уравнениям при помощи функции Грина.

Пусть дано однородное дифференциальное уравнение

$$L[y] = p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0,$$

где функции p_0, \dots, p_n непрерывны на $[a, b]$, $p_0(x) \neq 0$ на $[a, b]$, и краевые условия $V_k(y) = 0$, $k = 1, \dots, n$, где линейные формы V_k от $y(a), \dots, y^{(n-1)}(a), y(b), \dots, y^{(n-1)}(b)$ являются линейно независимыми.

Функцией Грина этой краевой задачи называется функция $G(x, \xi)$, построенная для любой точки $a < \xi < b$ и имеющая следующие 4 свойства:

- $G(x, \xi)$ непрерывна и имеет непрерывные производные по x до $(n - 2)$ -го порядка включительно при $a \leq x \leq b$;
- ее $(n - 1)$ -я производная имеет разрыв в точке ξ :

$$\left. \frac{\partial^{n-1} G(x, \xi)}{\partial x^{n-1}} \right|_{x=\xi+0} - \left. \frac{\partial^{n-1} G(x, \xi)}{\partial x^{n-1}} \right|_{x=\xi-0} = \frac{1}{p_0(\xi)};$$

- в каждом из интервалов $[a, \xi)$ и $(\xi, b]$ функция $G(x, \xi)$, рассматриваемая как функция от x , является решением исходного уравнения, т.е. $L[G] = 0$;
- $G(x, \xi)$ удовлетворяет исходным граничным условиям.

Теорема. Если однородная краевая задача имеет лишь тривиальное решение $y(x) = 0$, то оператор L имеет одну и только одну функцию Грина $G(x, \xi)$.

Теорема. Если $G(x, \xi)$ есть функция Грина однородной краевой задачи $L[y] = 0$, $V_k(y) = 0$, $k = 1, \dots, n$, то решение неоднородной краевой задачи $L[y] = f(x)$ с теми же граничными условиями дается формулой $y(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi$.

Та же техника позволяет свести нелинейную краевую задачу или краевую задачу с параметром к интегральному уравнению:

$$L[y] = f(x, y(x)) \Rightarrow y(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi, y(\xi)) d\xi,$$

$$L[y] = \lambda y + h(x) \Rightarrow y(x) = \lambda \int_a^b G(x, \xi) y(\xi) d\xi + \int_a^b G(x, \xi) h(\xi) d\xi.$$

3 Элементы теории потенциала

Потенциал — понятие, характеризующее широкий класс физических силовых полей (электрическое, гравитационное и т.п.) и вообще векторных полей. В общем случае потенциал векторного поля $A(x, y, z)$ — скалярная функция $u(x, y, z)$, такая, что $A = \nabla u$. Если такую функцию можно ввести, то векторное поле A называют потенциальным.

Потенциал векторного поля A определяется не однозначно, а с точностью до постоянного слагаемого. Поэтому при изучении потенциального поля представляют интерес лишь разности потенциала в различных

точках поля. Уравнение $u(x, y, z) = c$ представляет поверхность, во всех точках которой потенциал имеет одинаковую величину; такие поверхности называют поверхностями уровня, или эквипотенциальными поверхностями.

Переходить от векторного поля к потенциалу и обратно позволяет формула $\int_V \nabla u dV = \int_S u d\vec{S}$. Формула является частным случаем обобщенной формулы Остроградского-Гаусса $\int_V \nabla \circ X dV = \int_S X \circ d\vec{S}$, где X — скалярное или векторное поле, \circ — обычное, скалярное или векторное умножение.

Если $\delta u = 0$ и u непрерывна вместе со своими первыми и вторыми производными в некоторой области, то u называется гармонической.

ньютонов потенциал точечной массы m :	$u = Gm/r,$
ньютонов потенциал массы в объеме V :	$u = G \int_V \frac{\rho}{r} dV,$
потенциал простого слоя:	$u = G \int_S \frac{\rho}{r} dS,$
потенциал двойного слоя:	$u = G \int_S \mu \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} dS,$
потенциал бесконечного цилиндра:	$u = G \int_S \ln \frac{1}{r} dS.$