Вопрос №1.3

Линейные интегральные уравнения. Связь краевых задач математической физики с интегральными уравнениями. Элементы теории потенциала.

1 Линейные интегральные уравнения

Интегральное уравнение — уравнение, содержащее неизвестную функцию под знаком интеграла.

Линейное интегральное уравнение 1-го рода:

$$\int_a^b K(x,t)u(t)dt = f(x)$$

Линейное интегральное уравнение 2-го рода (уравнение Фредгольма):

$$u(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt = f(x),$$

где $K(x,t)$ — ядро интегрального уравнения, $f(x)$ — известная функция, $u(t)$ — искомая функция.

Если $f(x) = 0$, то уравнение называется однородным.

Если $K(x,t) = 0$ при $t > x$, получаем уравнение Вольтерра:

$$u(x) - \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)dt = f(x).$$

Если $K(x,t) = \sum_i g_i(x)h_i(t)$, то ядро называется вырожденным, и интегральное уравнение сводится к системе линейных уравнений.

2 Связь краевых задач математической физики с интегральными уравнениями

Многие краевые задачи математической физики могут быть сведены к интегральным уравнениям при помощи функции Грина.

Пусть дано однородное дифференциальное уравнение

$$L[y] = p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0,$$

где функции $p_0, \dots, p_n$ непрерывны на $[a,b]$, $p_0(x) \neq 0$ на $[a,b]$, и краевые условия $V_k(y) = 0$, $k = 1, \dots, n$, где линейные формы V_k от $y(a)$, $\dots$, $y^{(n-1)}(a)$, $y(b)$, $\dots$, $y^{(n-1)}(b)$ являются линейно независимыми.

Функцией Грина этой краевой задачи называется функция $G(x,\xi)$, построенная для любой точки $a<\xi<b$ и имеющая следующие 4 свойства:

- $G(x,\xi)$ непрерывна и имеет непрерывные производные по x до $(n-2)$-го порядка включительно при $a\le x\le b$;
- ее $(n-1)$-я производная имеет разрыв в точке ξ:
$$\left.\frac{\partial^{n-1}G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}}\right|_{x=\xi+0}-\left.\frac{\partial^{n-1}G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}}\right|_{x=\xi-0}=\frac{1}{p_0(\xi)};$$
- в каждом из интервалов $[a,\xi)$ и $(\xi,b]$ функция $G(x,\xi)$, рассматриваемая как функция от x, является решением исходного уравнения, т.е. $L[G]=0$;
- $G(x,\xi)$ удовлетворяет исходным граничным условиям.

Теорема. Если однородная краевая задача имеет лишь тривиальное решение $y(x)=0$, то оператор L имеет одну и только одну функцию Грина $G(x,\xi)$.

Теорема. Если $G(x,\xi)$ есть функция Грина однородной краевой задачи $L[y]=0$, $V_k(y)=0$, $k=1,\ldots,n$, то решение неоднородной краевой задачи $L[y]=f(x)$ с теми же граничными условиями дается формулой $y(x)=\int_a^b G(x,\xi)f(\xi)d\xi$.

Та же техника позволяет свести нелинейную краевую задачу или краевую задачу с параметром к интегральному уравнению:

$$L[y]=f(x,y(x))\Rightarrow\quad y(x)=\int_a^b G(x,\xi)f(\xi,y(\xi))d\xi,$$
$$L[y]=\lambda y+h(x)\Rightarrow\quad y(x)=\lambda\int_a^b G(x,\xi)y(\xi)d\xi+\int_a^b G(x,\xi)h(\xi)d\xi.$$

3 Элементы теории потенциала

Потенциал — понятие, характеризующее широкий класс физических силовых полей (электрическое, гравитационное и т.п.) и вообще векторных полей. В общем случае потенциал векторного поля $A(x,y,z)$ — скалярная функция $u(x,y,z)$, такая, что $A=\nabla u$. Если такую функцию можно ввести, то векторное поле A называют потенциальным.

Потенциал векторного поля A определяется не однозначно, а с точностью до постоянного слагаемого. Поэтому при изучении потенциального поля представляют интерес лишь разности потенциала в различных точках поля. Уравнение $u(x, y, z) = c$ представляет поверхность, во всех точках которой потенциал имеет одинаковую величину; такие поверхности называют поверхностями уровня, или эквипотенциальными поверхностями.

Переходить от векторного поля к потенциалу и обратно позволяет формула $\int_V \nabla u dV = \int_S u d\vec{S}$. Формула является частным случаем обобщенной формулы Остроградского-Гаусса $\int_V \nabla \circ X dV = \int_S X \circ d\vec{S}$, где X — скалярное или векторное поле, $\circ$ — обычное, скалярное или векторное умножение.

В теории потенциала рассматривают следующие функции:

ньютонов потенциал точечной массы m:	$u = m/r$,
ньютонов потенциал массы в объеме V:	$u = \int_V \frac{\rho}{r} dV$,
потенциал простого слоя:	$u = \int_S \frac{\rho}{r} dS$,
потенциал двойного слоя:	$u = \int_S \mu \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} dS$,

Если $\Delta u = 0$ и u непрерывна вместе со своими первыми и вторыми производными в некоторой области, то u называется гармонической. Δu — уравнение Лапласа. Его решение можно искать при помощи теории потенциалов.

$\Delta u|_{x \in G} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial n}|_{x \in \Gamma} = f$ — задача Неймана. Решение ищется в виде потенциала простого слоя, распространенного по Г.

$\Delta u|_{x \in G} = 0$, $u|_{x \in \Gamma} = f$ — задача Дирихле. Решение ищется в виде потенциала двойного слоя, распространенного по Г.