

Métodos Computacionais da Física - B

Prova 1

Leandra Rodrigues Machado

1 Questão 1

Mostre que o algoritmo Leap-Frog e Velocity Verlet são equivalentes. Isto é, escreva a regra de atualização de um deles e manipule até chegar no outro.

Equação da posição:

$$\vec{x}(t + \Delta t) = x(t) + v(t + \frac{\Delta t}{2})\Delta t \quad (1)$$

Derivando a equação da posição obtemos a velocidade:

$$\vec{x}'(t + \frac{\Delta t}{2}) = \frac{r(t - \Delta t) - r(t)}{\Delta t} \quad (2)$$

E derivando novamente a equação da velocidade chegamos em:

$$\vec{x}''(t) = \frac{v(t + \frac{\Delta t}{2}) - v(t - \frac{\Delta t}{2})}{\Delta t} \quad (3)$$

A equação de Leapfrog, escritas em termos de vetores posição fica:

$$\vec{x}'(t + \frac{\Delta t}{2}) = \vec{x}'(t - \frac{\Delta t}{2}) + \vec{x}''(t)\Delta t \quad (4)$$

Portanto, integrando a Eq(4), obtemos:

$$\vec{x}(t + \Delta t) = \vec{x}(t) + \vec{x}'(t + \frac{\Delta t}{2})\Delta t \quad (5)$$

A Eq. (5) é exatamente a mesma equação da posição de Velocity Verlet, conhecida como:

$$x(t + \Delta t) = x(t) + v(t + \frac{\Delta t}{2})\Delta t \quad (6)$$

2 Questão 2

A dinâmica do modelo SIR é descrita pelas duas equações diferenciais:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I$$

Resolvendo numericamente as equações com o Runge-Kutta 2a ordem (RK2), escreva como ficariam as quatro linhas de iteração com esse algoritmo.

As linhas de iteração são:

$$S = S_i + h[\frac{1}{2}f(t_i, S_i) + f(t_i + h, S_i + hk_i)] \quad (7)$$

$$I = I_i + h[\frac{1}{2}f(t_i, I_i) + f(t_i + h, I_i + hk_i)] \quad (8)$$

$$R = R_i + h[\frac{1}{2}f(t_i, R_i) + f(t_i + h, R_i + hk_i)] \quad (9)$$

$$S = S_i + h[\frac{1}{2}f(t_i, S_i) + f(t_i + h, S_i + hk_i)] \quad (10)$$

3 Questão 3

Faça dois programas para o problema planetário: um com o algoritmo de Verlet e outro com o RK4. Ambos os programas devem calcular a órbita (x, y), as velocidades (vx, vy) e a energia mecânica total (cinética mais gravitacional) do planeta (considerando que orbita um objeto de massa muito maior que o planeta).

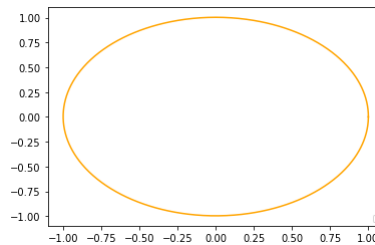


Figure 1: Posição método de Verlet para 1 ano

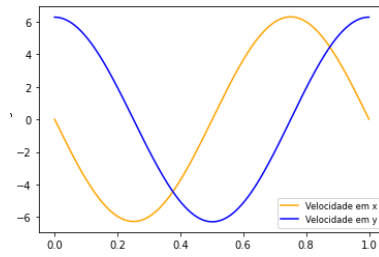


Figure 2: Velocidade método de Verlet para 1 ano

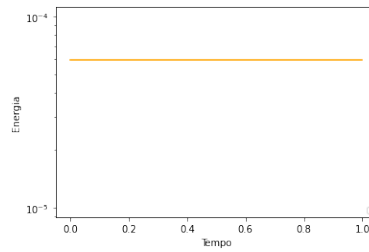


Figure 3: Energia mecanica método de Verlet para 1 ano

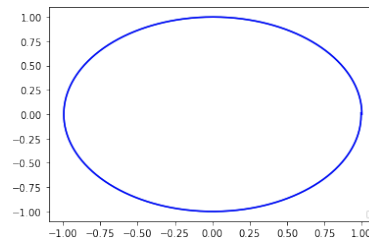


Figure 4: Posição método RK4 para 1 ano

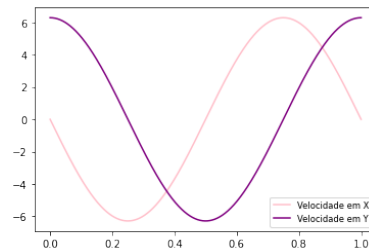


Figure 5: Velocidade método RK4 para 1 ano

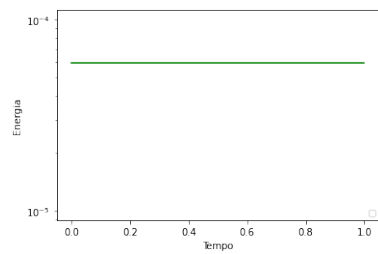


Figure 6: Energia método RK4 para 1 ano