

TRABAJO MONOGRÁFICO

Curvas pseudoholomorfas y aplicaciones

Por: Joaquín Lema

Orientador: Prof. Ezequiel Maderna



UNIVERSIDAD
DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

Licenciatura en Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de la República
Uruguay, 2019

A mis padres, por darme todo.
A Valentina, por darme el resto.

Resumen

El objetivo de este trabajo es introducir las herramientas básicas para el desarrollo de la teoría de las curvas pseudoholomorfas, y mostrar el rol crucial que ha jugado esta teoría en el estudio de las variedades simplécticas. Luego de presentar los fundamentos, damos una prueba autocontenida del célebre teorema "non-squeezing" de Gromov. Como corolario vamos a obtener la rigidez C^0 de los grupos de symplectomorfismos.

Abstract

The objective of this monograph is to introduce the basic tools in the theory of pseudoholomorphic curves and its role in the study of symplectic manifolds. After we present the general theory, we will be able to give a self contained proof of the celebrated non-squeezing theorem by Gromov. As a corollary we are going to obtain the C^0 rigidity result for the group of symplectomorphisms.

Índice

1	Introducción	4
2	Las estructuras subyacentes.	7
2.1	Un poco de álgebra lineal	7
2.2	Estructuras complejas	12
2.3	Estructura simpléctica	15
2.4	Revisitando las ecuaciones de Cauchy-Riemann	20
2.5	Fibrados holomorfos y operadores de Cauchy-Riemann	24
3	Nociones básicas sobre Curvas Pseudoholomorfas	33
3.1	Regularidad	34
3.2	Algunas propiedades locales	39
3.2.1	Continuación única	41
3.2.2	Puntos críticos	42
3.2.3	Intersecciones de curvas	43
3.2.4	Reparametrizaciones de Curvas	44
3.3	La identidad de energía	46
4	Espacios de Moduli	48
4.1	La linealización de $\bar{\partial}_J$	48
4.2	La transversalidad	51
4.3	Dependencia respecto a J	56
5	Compacidad	57
6	Aplicaciones	66
6.1	El teorema de "Non-squeezing"	66
6.2	Capacidades simplécticas y rigidez	71
7	Apéndices	75
7.1	Algunas nociones de geometría Riemanniana.	75
7.1.1	Conexiones en fibrados vectoriales:	75
7.1.2	El dual de Hodge	76
7.1.3	Breve introducción a las variedades mínimas	78
7.2	Espacios de Sobolev	83
7.3	Análisis no lineal	87
7.3.1	Variedades de Banach	87
7.3.2	Operadores de Fredholm	92
7.3.3	El teorema de Sard-Smale	95
7.4	Breve introducción a las clases de Chern	96
7.5	Algunas cuentas en variedades casi complejas	100

1 Introducción

La definición clásica de geometría refiere al estudio cuantitativo de la forma (*geo* significa tierra y *metria* medida). Quizas la más popular de las geometrías sea la Riemanniana, donde la noción de medida proviene de la *longitud*. El objeto de esta tesis se enmarca en el estudio de otra geometría llamada la geometría simpléctica que describiremos a continuación.

Supongamos que estamos en \mathbb{R}^{2n} , veamos a los elementos de éste como $(q, p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ los pares de “posición” y “momento”, estos nombres serán explicados en breve.

Supongamos que tenemos una curva $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ y consideremos los planos como en la figura. Denotemos γ_i a la proyección de la curva en el plano (q_i, p_i) , entonces definamos la acción simpléctica como:

$$A(\gamma) = \sum_{i=1}^n A(\gamma_i),$$

donde $A(\gamma_i)$ es el área que encierra la curva. Notar que la naturaleza de esta medida es 2-dimensional (al contrario de la longitud que es 1-dimensional). Un simplectomorfismo es una transformación $\phi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ tal que $A(\phi(\gamma)) = A(\gamma)$ para todas las curvas cerradas.

Esta definición no es caprichosa, Poincaré y Cartan ya conocían que ésta era una propiedad de los flujos Hamiltonianos provenientes de la física. Abstraigamos un poco esta definición, recordemos que el área encerrada por una curva en \mathbb{R}^2 es $\int_{\gamma} qdp$, por lo tanto tenemos que:

$$A(\gamma) = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} q_i dp_i = \int_{\gamma} \sum_{i=1}^n q_i dp_i.$$

Definamos como $\lambda = \sum_{i=1}^n q_i dp_i$ a la forma que estamos integrando. Por nuestra definición de simplectomorfismo, notemos que si ϕ lo es:

$$\phi^* \lambda = \lambda + df,$$

Para cierta f . Por lo tanto si $d\lambda = \omega_0$ obtenemos que el simplectomorfismo deja invariante a ω_0 . Resulta que esta 2-forma codifica toda la geometría que describimos. Notemos que $\omega_0 = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i$ y la podemos reescribir como:

$$\omega_0(v, w) = \langle J_0 v, w \rangle,$$

donde J_0 es la matriz que proviene de ver la multiplicación por i en \mathbb{C}^n como transformación lineal de \mathbb{R}^{2n} . Supongamos que tenemos un camino de simplectomorfismos ϕ_t arrancando en la identidad ($\phi_0 = Id$) entonces $\phi_t^* \omega_0 = \omega_0$ por lo tanto si definimos $X = \frac{d}{dt} \phi_t|_{t=0}$ entonces derivando en t :

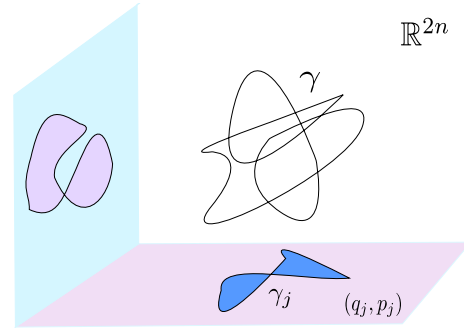


Figura 1: Interpretación geométrica del invariante

$$\mathcal{L}_X \omega_0 = d\iota_X \omega_0 = 0$$

Donde usamos la identidad de Cartan $\mathcal{L}_X \omega_0 = d\iota_X \omega_0 + \iota_X d\omega_0$ y que ω_0 es cerrada. Concluimos que la forma $\iota_X \omega_0$ es cerrada y por el lema de Poincaré $\iota_X \omega_0 = dH$ para cierta $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$, a esta H se la llama el Hamiltoniano. Notemos que ahora podemos reescribir a X en términos de H de la siguiente forma:

$$\iota_X \omega_0(v) = \langle J_0 X, v \rangle = dH(v) = \langle \nabla H, v \rangle.$$

Por lo tanto $X = -J_0 \nabla H$, este es el gradiente con respecto a la forma simpléctica de la función H . Si denotamos a $\phi_t(q, p) = (q(t), p(t))$ entonces las trayectorias $q(t), p(t)$ satisfacen las ecuaciones de Hamilton:

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}(q, p) \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}(q, p) \end{cases}$$

Supongamos que queremos generalizar esto a una variedad diferenciable M , voy a definirlo como lo hace Arnold en sus escritos:

Definición 1.1. Una variedad simpléctica (M, ω) es una variedad equipada con una 2-forma ω tal que existe un cubrimiento por entornos coordinados donde si $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ es una carta, $\phi^* \omega_0 = \omega$.

Observar que como ω_0 no degenera entonces ω tampoco, por lo tanto tenemos la noción de gradiente simpléctico igual que antes. Tomemos $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable (Hamiltoniano) entonces definimos el campo X_H como $\iota_{X_H} \omega = dH$. Además notar que ω es cerrada, esto nos permite concluir con la misma cuenta de antes que los ϕ_t generados por el flujo de X_H son symplectomorfismos (en el sentido $\phi_t^* \omega = \omega$).

La definición usual de forma simpléctica ω es una 2-forma cerrada y no degenerada, un teorema clásico de Darboux nos dice que esta definición es equivalente a la que dimos nosotros, las cartas que nos da nuestra definición se llaman cartas de Darboux. Tampoco la definición de variedad simpléctica es caprichosa, dentro de la matemática estas estructuras surgen naturalmente a modo de ejemplo en las variedades de Kähler que presentamos en 2.3. Esta familia es enorme, por ejemplo toda variedad algebraica compleja proyectiva suave es Kähler.

El teorema de Darboux es un problema ya que nos dice que en esta geometría no tenemos invariantes locales (al contrario de la geometría Riemanniana). Por lo tanto si esta geometría es interesante debe tener algo que la caracterice. Los primeros indicios de que la naturaleza simpléctica tiene algo distintivo nace con el intento de generalizar el teorema de Poincaré-Birkhoff. Este teorema nos dice que un difeomorfismo del anillo que preserva área y “tuerce los bordes para lados distintos” tiene al menos 2 puntos fijos. Uno pensaría que esto nos está diciendo cosas acerca de las transformaciones que preservan volumen sin embargo la dimensión 2 es engañosa ya que ser simpléctica en dimensión 2 coincide con preservar área, en dimensión más alta esto no es verdad aunque ser simpléctica implica preservar volumen. Con el paso del tiempo la gente se dio cuenta que esto no era característico de las transformaciones que preservan volumen sino de las simplécticas, el primero en conjeturarlo fue Arnold (vease su survey [Arn86]).

Ya de lo anterior surge naturalmente una posible pregunta, ¿cómo podemos formular la condición de que las transformaciones simplécticas no pueden cumplir ninguna propiedad más que las que preservan volúmen? Eliashberg conjetura:

¿Toda transformación preservando volúmen puede ser aproximada en la topología C^0 por symplectomorfismos?

Si la respuesta fuera positiva nos dice que desde el punto de vista topológico los symplectomorfismos son esencialmente transformaciones preservando volúmen y nada más. La respuesta a esta pregunta es negativa y vamos a verla en el capítulo 6:

Teorema 1.1 (Eliashberg, Gromov). *Supongamos que $f_k : (M, \omega_M) \rightarrow (N, \omega_N)$ difeomorfismos simplécticos tal que $f_k \rightarrow f \in \text{Diff}(M, N)$ donde la convergencia es en la topología C^0 , entonces f es un difeomorfismo simpléctico*

¿Cómo podemos estudiar las variedades simplécticas? Acá es donde entra la brillantez de Gromov. Es bien conocido (y lo probamos en la sección 2.2) que dada ω una forma simpléctica en M entonces existe lo que se llama una estructura casi compleja J y una métrica g tal que $\omega(v, w) = g(Jv, w)$ y $J^* = -J$. Una estructura casi compleja es un endomorfismo $J : TM \rightarrow TM$ tal que $J^2 = -Id$, esto nos induce naturalmente en $T_p M$ una estructura de \mathbb{C} -espacio vectorial, lo que tenemos que pensar es que si tenemos una variedad compleja entonces la multiplicación por i nos induce a nivel de tangentes una J como arriba. La idea de Gromov fue cambiar el foco del estudio de (M, ω) a (M, J) y estudiar esta última como si fuera una variedad compleja.

Clásicamente para estudiar variedades complejas se estudian las curvas holomorfas dentro de ella, esta es esencialmente la teoría que Gromov desarrolla en su paper fundacional [Gro85]. ¿Qué es una curva holomorfa en este contexto? Es simplemente un mapa diferenciable $u : \Sigma \rightarrow M$ tal que el diferencial es lineal complejo con las estructuras de \mathbb{C} -espacio vectorial natural en los tangentes.

El plan para esta monografía es el siguiente: en el segundo capítulo vamos a hacer un panorama general de varias estructuras que rodean al mundo simpléctico, se recomienda al lector comenzar con el capítulo 3 y volver al 2 cuando se necesiten los prerrequisitos. En el capítulo 3 la moraleja va a ser que localmente estas curvas heredan muchas de las propiedades del caso holomorfo y por lo tanto vamos a intentar rescatar algunos teoremas de este contexto, el final de esta sección también toca la muy importante identidad de energía. En el capítulo 4 vamos por fin a estudiar el espacio de curvas pseudoholomorfas en una variedad, probaremos que genéricamente éstas son variedades de dimensión finita (como en el caso clásico) y cómo varían éstos con la elección de la J que realizamos anteriormente. El capítulo 5 nos va a decir cuándo las variedades que encontramos antes son también compactas. Por último en 6 usamos esta maquinaria para probar:

Teorema 1.2 (Non-squeezing, Gromov). *Supongamos que $\iota : B_r^{2n} \rightarrow D_R \times \mathbb{C}^{n-1}$ es un encaje simpléctico con las formas simplécticas estandar entonces $r \leq R$.*

Este es el primer invariante global que existe en el área que nos da una corolarios interesantes.

2 Las estructuras subyacentes.

En esta sección vamos a hacer una breve introducción a las estructuras que van a aparecer a lo largo de la monografía.

Primero vamos a concentrarnos en las estructuras complejas y simplécticas, vamos a ganar intuición de las mismas haciendo en una primera instancia álgebra lineal para luego trabajar en fibrados. Luego vamos a estudiar los llamados operadores de Cauchy-Riemann que van a jugar un rol fundamental en el capítulo 4. Por último hacemos una breve mención a las variedades mínimas y algunos nexos con el mundo simpléctico, probaremos por ejemplo que una subvariedad compleja de una variedad de Kähler es mínima, además van a aparecer en la prueba del Non-Squeezing en el capítulo 6.

2.1 Un poco de álgebra lineal

Notación. Sea V un espacio vectorial, vamos a denotar $\Lambda^k V$ al k -ésimo producto exterior del espacio vectorial.

Definición 2.1. Una *forma simpléctica* en V es una $\omega \in \Lambda^2 V^*$ no degenerada. Diremos que el par (V, ω) es un *espacio vectorial simpléctico*.

Observación. Es un ejercicio clásico de álgebra lineal ver que si un espacio vectorial admite una forma simpléctica, entonces su dimensión es par.

Vamos a trabajar con la identificación $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$ dada por $(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} \leftrightarrow (x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n) \in \mathbb{C}^n$. Uno u otro enfoque nos va a simplificar alguna cuenta.

Ejemplo. • Las formas simplécticas surgen naturalmente al estudiar las formas hermitianas. Supongamos que h es una forma hermitiana en un \mathbb{C} -espacio vectorial V , es fácil chequear que $\operatorname{Re} h := g$ es un producto interno, estudiemos ahora $\operatorname{Im} h$. Notar que:

$$\operatorname{Im} h(v, w) = \operatorname{Im} \overline{h(w, v)} = -\operatorname{Im} h(w, v), \quad \forall v, w \in V.$$

Por lo tanto $\omega := -\operatorname{Im} h \in \Lambda^2 V$, pero por otro lado es no degenerada, ya que h lo es. Tener g o h determina a la otra únicamente ya que:

$$\omega(v, w) + ig(v, w) = ih(v, w) = g(iv, w) - i\omega(iv, w), \quad \forall v, w \in V.$$

Tomando la parte real de la expresión anterior concluimos que $g(iv, w) = \omega(v, w)$, $\forall v, w \in V$.

- En particular, consideremos \mathbb{C}^n tenemos la forma hermitiana estándar $h_0 = \sum_{k=1}^n dz_k \otimes d\bar{z}_k$ donde $dz_k = dx_k + idy_k$ y $d\bar{z}_k = dx_k - idy_k$, desarrollando la expresión tenemos que:

$$h_0 = \left(\sum_{k=1}^n dx_k \otimes dx_k + dy_k \otimes dy_k \right) - i \left(\sum_{k=1}^n dx_k \wedge dy_k \right).$$

Concluimos que $h = g_0 - i\omega_0$, donde g_0 es el producto interno estándar en \mathbb{R}^{2n} y $\omega_0 := \sum_{k=1}^n dx_k \wedge dy_k$ diremos que es la *forma simpléctica estándar*.

Observación. El primer ejemplo no es más general que el segundo, ya que todo espacio vectorial complejo con una forma hermitiana es isomorfo a \mathbb{C}^n con la forma hermitiana estándar (por Gram-Schmidt).

Veamos ahora que de hecho toda forma simpléctica en un espacio vectorial real es de esa forma. Tomemos g un producto interno en \mathbb{R}^{2n} y ω una forma simpléctica, entonces existe $A \in \text{End}(\mathbb{R}^{2n})$ la matriz asociada a ω , es decir $g(Av, w) = \omega(v, w)$, $\forall v, w \in \mathbb{R}^{2n}$. Notemos que A es invertible y $A^* = -A$, donde el adjunto es respecto a g . Esto es porque ω es no degenerada y antisimétrica.

Consideremos ahora la *descomposición polar* de A , esto es $A = PJ$, donde P es una matriz g -autoadjunta definida positiva y $J^*g = g$ (es decir, es ortogonal respecto a g).

Observación. Al lector que no está familiarizado con la descomposición polar, como A es invertible podemos hacer lo siguiente: definamos $P = \sqrt{A^*A}$ (esto está bien definido porque A^*A es g -autoadjunta y positiva), entonces P conmuta con A , es g -autoadjunta definida positiva y $P^2 = -A^2$, porque A es antisimétrica. Por lo tanto $A = PJ$, donde $J = AP^{-1}$, es sencillo chequear que $J^*g = g$.

Observar que $\tilde{g} = g(P\cdot, \cdot)$ es un producto interno, tal que $\tilde{g}(J\cdot, \cdot) = \omega$, esto se parece al ejemplo visto anteriormente. Notar que J cumple que:

$$J^2 = -J^*J = -Id.$$

Observación. Si $J \in \text{End}(\mathbb{R}^{2n})$ es tal que $J^2 = -Id$, entonces tenemos una acción natural de \mathbb{C} en \mathbb{R}^{2n} dada por $(a + ib)v = av + bJv$, $\forall v \in \mathbb{R}^{2n}$. Esto le da a \mathbb{R}^{2n} una estructura de \mathbb{C} -espacio vectorial.

Esto motiva a definir:

Definición 2.2. Decimos que $J \in \text{End}(\mathbb{R}^{2n})$ satisfaciendo $J^2 = -Id$ es una *estructura compleja* (o J -estructura). Al espacio de estructuras complejas lo vamos a denotar como $\mathcal{J}(\mathbb{R}^{2n})$.

Volviendo a la construcción anterior, notemos que si definimos $\tilde{g}(v, w) = g(Pv, w)$, entonces si vemos a $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$ con la estructura compleja determinada por J , obtenemos $\tilde{g}(iv, w) = \omega(v, w)$ como en el ejemplo.

Observación. Si denotamos como $\mathcal{M}(\mathbb{R}^{2n})$ al espacio de productos internos y $\Omega(\mathbb{R}^{2n})$ al espacio de formas simplécticas, es sencillo ver que construimos un mapa:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\mathbb{R}^{2n}) \times \Omega(\mathbb{R}^{2n}) &\rightarrow \mathcal{J}(\mathbb{R}^{2n}) \\ (g, \omega) &\mapsto J_{g, \omega}. \end{aligned}$$

Notar que $J_{g, \omega}$ satisface que $J_{g, \omega}$ es *compatible* con g y ω en el sentido que $J_{g, \omega}^*g = g$ y $J_{g, \omega}^*\omega = \omega$. Es sencillo chequear que este mapa es equivariante bajo la acción natural de $GL_{2n}(\mathbb{R}^{2n})$.

De todo lo que hicimos anteriormente:

Corolario 2.0.1. *Todo espacio vectorial simpléctico $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ es isomorfo a $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, en el sentido que existe $A \in GL_{2n}(\mathbb{R}^{2n})$ tal que $A^*\omega = \omega_0$.*

Demostración. Ya vimos que existe una estructura compleja J y una métrica g tal que $g(J\cdot, \cdot) = \omega$. Identificando $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$ con la estructura compleja que determina J , obtenemos que $g(i\cdot, \cdot) = \omega$, entonces $h = g - i\omega$ es una forma hermitiana, por Gram-Schmidt existe una base ortonormal de h , digamos $\{e_1, \dots, e_n\}$. Tomando la base $\{e_1, Je_1, \dots, e_n, Je_n\}$, tenemos que aquí ω toma la forma estándar, considerando la matriz de cambio de base terminamos. \square

Si \mathcal{B} es una base de \mathbb{R}^{2n} en la cual ω toma la forma estándar, entonces diremos que \mathcal{B} es una *base simpléctica*.

Definición 2.3. Sean (V, ω_1) y (W, ω_2) espacios simplécticos, decimos que una transformación lineal $A : V \rightarrow W$ es un *simplectomorfismo* si $A^*\omega_2 = \omega_1$.

Estos son simplemente formas de mandar bases simplécticas de (V, ω_1) a bases simplécticas de (W, ω_2) . En particular, si $V = \mathbb{R}^{2n}$ con la forma simpléctica estándar, denotamos como $Sp(2n)$ a los endomorfismos simplécticos.

Proposición 2.1. Sea $U(n)$ el grupo de matrices unitarias (las que preservan la forma hermitiana estándar), entonces:

$$Sp(2n) \cap O(2n) = GL_n(\mathbb{C}) \cap O(2n) = GL_n(\mathbb{C}) \cap Sp(2n) = U(n).$$

Demostración. Como $h_0 = g_0 - i\omega_0$, es claro que si preservamos dos de las tres estructuras presentes, se preserva la tercera. La única igualdad no trivial es entonces $GL_n(\mathbb{C}) \cap Sp(2n) = U(n)$, pero notar que $g_0(v, w) = \omega_0(v, iw)$, por lo tanto $GL_n(\mathbb{C}) \cap Sp(2n) \subset O(2n)$ y concluimos lo deseado. \square

Observación. De hecho $U(n)$ es el subgrupo compacto maximal de $Sp(2n)$ (decimos *el* porque es único a menos de conjugación).

Nuestro objetivo es estudiar las estructuras simplécticas, sin embargo estas son difíciles de visualizar. La idea sera explotar la tricotomía entre las estructuras complejas, simplécticas y los productos internos. En particular a $\mathcal{J}(\mathbb{R}^{2n})$ lo entendemos bastante bien.

Notemos que $GL_{2n}(\mathbb{R})$ actúa en $\mathcal{J}(\mathbb{R}^{2n})$ vía la conjugación. El estabilizador de la acción es $GL_n(\mathbb{C})$ (estas son las matrices que conmutan con la estructura compleja), pero además la acción es transitiva:

Proposición 2.2. Dadas $J, J_0 \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^{2n})$, existe $A \in GL_{2n}(\mathbb{R})$ tal que $AJ = J_0A$.

Demostración. Veamos dos pruebas que nos van a ayudar a comprender mejor las estructuras:

- *Prueba 1:* Veamos a \mathbb{R}^{2n} con la estructura de \mathbb{C} espacio vectorial que determina J , entonces tiene una base $\{e_1, \dots, e_n\}$. Enviando la base canónica a $\{e_1, Je_1, \dots, e_n, Je_n\}$ obtenemos la transformación deseada.
- *Prueba 2:* El espectro de J está en $\{-i, i\}$ (ya que $J^2 = -Id$), por lo tanto en $\mathbb{R}^{2n} \otimes \mathbb{C} = \mathbb{C}^{2n}$ diagonaliza, $\mathbb{C}^{2n} = E_i \oplus E_{-i}$ donde ambos subespacios tienen dimensión n (compleja). De hecho:

$$E_i = \{v - iJv : v \in \mathbb{R}^{2n}\}, E_{-i} = \{v + iJv : v \in \mathbb{R}^{2n}\}.$$

Tomando n vectores linealmente independientes sobre \mathbb{C} de E_i y tomando su parte real, digamos e_1, \dots, e_n , basta definir $\{e_1, Je_1, \dots, e_n, Je_n\}$.

□

De esto concluimos:

Proposición 2.3. $\mathcal{J}(\mathbb{R}^{2n})$ es el espacio homogéneo $GL_{2n}(\mathbb{R})/GL_n(\mathbb{C})$, por lo tanto tiene dos componentes conexas. Su espacio tangente es:

$$T_J\mathcal{J}(\mathbb{R}^{2n}) = \{A \in \text{End}(\mathbb{R}^{2n}) : JA = -AJ\} := \overline{\text{End}}_J(\mathbb{R}^{2n}),$$

el espacio de endomorfismos anti-complejos según J .

Demostración. La primera parte ya la vimos, calculemos su espacio tangente. Sea $J(t)$ una curva con $J(0) = J$, entonces si $\frac{d}{dt}|_{t=0}J(t) = A$ obtenemos derivando la expresión $J(t)^2 = -Id$ que $AJ = -JA$.

□

Observación. Tomemos $J \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^{2n})$ y sea $A \in \overline{\text{End}}_J(\mathbb{R}^{2n}) = T_J\mathcal{J}(\mathbb{R}^{2n})$ en un entorno del 0, definamos el mapa $\phi(A) = (Id + A)J(Id + A)^{-1}$. Haciendo la cuenta tenemos que $\frac{d}{dt}|_{t=0}\tilde{\phi}(tA) = -2JA$. Por lo tanto arreglando un poco el mapa anterior tenemos que el mapa $\phi(A) = (Id + 1/2J_0A)J_0(Id + 1/2J_0A)^{-1}$ cumple que $d_0\phi = Id$ y por lo tanto es un difeomorfismo local. Estos mapas cumplirán el rol de “mapa exponencial”.

En particular fijada una forma simpléctica ω , estudiemos el espacio:

$$\mathcal{J}(\mathbb{R}^{2n}, \omega) := \{J \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^{2n}) : J^*\omega = \omega\},$$

que llamaremos las J -estructuras compatibles con ω . Ser compatible es equivalente a que $g_J = \omega(J\cdot, \cdot)$ sea un producto interno, es decir fijando una forma simpléctica y una estructura compatible obtenemos una única métrica hermitiana tal que $-\text{Im}h = \omega$.

Proposición 2.4. $\mathcal{J}(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ es difeomorfo al espacio \mathcal{P} de matrices simétricas, definidas positivas y simplécticas.

Demostración. Sin pérdida de generalidad suponemos $\omega = \omega_0$ y $J = J_0$. Ser compatible con ω_0 implica que $J \in Sp(2n)$, y esta condición es equivalente a $J^t J_0 J = J_0$. Esto quiere decir que:

$$(J_0 J)^t = -J^t J_0 = J^t J_0 J^2 = J_0 J,$$

es decir $P = -J_0 J$ es simétrica, definida positiva (notar el signo de $-$) y simpléctica. Recíprocamente si P es una matriz de este tipo, definiendo $J = J_0 P$ nos da lo deseado.

□

Observación.

No es difícil ver que si P es una matriz simétrica, definida positiva y simpléctica, entonces P^α lo es $\forall \alpha > 0$. En particular el espacio \mathcal{P} es contractil, por lo tanto $\mathcal{J}(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ lo es (veremos otro argumento para esto más adelante).

Derivando la expresión $\omega(J\cdot, J\cdot) = \omega$ podemos observar que:

$$T_J\mathcal{J}(\mathbb{R}^{2n}, \omega) = \{A \in \text{End}(\mathbb{R}^{2n}) : AJ = -JA, A = A^*\},$$

donde tomamos los adjuntos respecto a la métrica $g_J = \omega(J\cdot, \cdot)$. Este espacio es bastante grande (de hecho tiene dimensión $n(n+1)$, en particular nos será útil:

Proposición 2.5. $T_J\mathcal{J}(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ actúa transitivamente en \mathbb{R}^{2n} .

Demostración. Sin pérdida de generalidad $\omega = \omega_0$ y $J = J_0$, por lo tanto tenemos que ver que el conjunto $\{A \in \text{End}(\mathbb{R}^{2n}) : A^t = A, AJ_0 = -J_0A\}$, actúa transitivamente en \mathbb{R}^{2n} .

Afirmación. Basta probar el teorema para $n = 1$.

Esto es porque si queremos enviar un vector e a un v , podemos definir $A : \langle e, J_0 \rangle \rightarrow \langle v, J_0 v \rangle$ dado por la prueba del teorema para $n = 1$, y cero en los complementos ortogonales de estos planos.

Entonces queremos encontrar $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ autoadjunta y anti lineal compleja enviando un vector fijo e a cierto $v \in \mathbb{R}^2$. Si existiese tal A , como es autoadjunta $A = \lambda_1 \langle \cdot, f_1 \rangle f_1 + \lambda_2 \langle \cdot, f_2 \rangle f_2$, donde $\{f_1, f_2\}$ es una base ortonormal, con $f_2 = J_0 f_1$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Como queremos que $AJ_0 = -J_0A$ obtenemos que $A = \lambda P_{f_1} - \lambda P_{f_2}$, entonces necesitamos que:

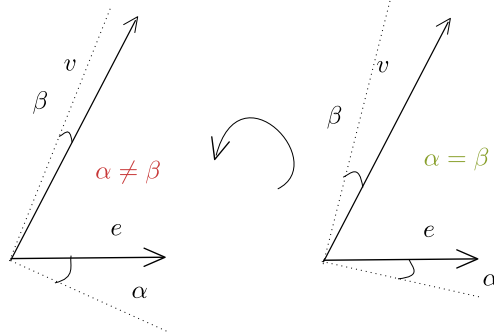
$$Ae = \lambda \langle e, f_1 \rangle f_1 - \lambda \langle e, f_2 \rangle f_2 = v = \langle v, f_1 \rangle f_1 + \langle v, f_2 \rangle f_2,$$

lo cual implica:

$$\frac{\langle v, f_1 \rangle}{\langle e, f_1 \rangle} = -\frac{\langle v, f_2 \rangle}{\langle e, f_2 \rangle}.$$

Es decir la tangente del ángulo entre e y f_1 debe ser el opuesto de la tangente del ángulo entre v y f_2 . Es sencillo encontrar $\{f_1, f_2\}$ base ortonormal cumpliendo con la propiedad.

Figura 2: Prueba de la proposición.



□

2.2 Estructuras complejas

Notación. Sea $\pi : E \rightarrow M$ es un fibrado vectorial sobre una variedad diferenciable M (si no aclaramos, los espacios vectoriales son reales). De ahora en más usaremos la notación $\phi_U = (Id, g_U) : E|_U = \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^{2n}$ para las trivializaciones, $g_{UV} = g_U^{-1} \circ g_V : U \cap V \rightarrow GL_{2n}(\mathbb{R}^{2n})$ para los mapas de transición y $\Gamma(E)$ para las secciones del fibrado.

Definición 2.4. Sea $\pi : E \rightarrow M$ un fibrado vectorial de dimension par, diremos que $J \in \Gamma(\text{End}(E))$ es una *estructura compleja* (o J -estructura) si $J^2 = -Id$. Al conjunto de estructuras complejas en E lo denotaremos como $\mathcal{J}(E)$.

Observación. • Como en alguna base toda J es como J_0 estándar, tenemos que siempre existen trivializaciones $\phi_U : E|_U \rightarrow U \times \mathbb{R}^{2n}$ tal que $g_U \circ J = J_0 \circ g_U$ y que dada dos trivializaciones como arriba el cambio de cartas queda lineal complejo (es decir $g_{UV} \circ J_0 = J_0 \circ g_{UV}$). Esto significa que J define en E una estructura de \mathbb{C} -fibrado vectorial.

- No todo fibrado admite una estructura compleja. Como vimos arriba los E que admiten estructuras son naturalmente \mathbb{C} -fibrados y éstos son orientables.

Definición 2.5. A un par (M, J) donde J es una estructura compleja en TM vamos a llamarle una variedad casi compleja.

Observación. • Una estructura compleja nos determina naturalmente estructuras complejas en los espacios $(T^*M)^k \otimes (TM)^l$ (todos los productos de la expresión son tensoriales), simplemente definiendo:

$$J(dx_1 \otimes \dots \otimes dx_k \otimes y_1 \otimes \dots \otimes y_l) = J^*dx_1 \otimes \dots \otimes J^*dx_k \otimes Jy_1 \otimes \dots \otimes Jy_l.$$

- Lo anterior nos permite definir la *descomposición de Hodge* que describiremos a continuación. Como vimos en el capítulo anterior, J diagonaliza en la complejificación $TM \otimes \mathbb{C}$ con valores propios i y $-i$. Es decir:

$$TM \otimes \mathbb{C} = T^{1,0}M \oplus T^{0,1}M,$$

donde $T^{1,0}M$ es el subfibrado de $TM \otimes \mathbb{C}$ generado por vectores propios asociados a i y $T^{0,1}M$ es lo mismo para $-i$. Recordemos que:

$$T_p^{1,0}M = \{v - iJv : v \in T_pM\}, \quad T_p^{0,1}M = \{v + iJv : v \in T_pM\}.$$

- De la misma forma tenemos que:

$$T^*M \otimes \mathbb{C} = \Lambda^{1,0}T^*M \oplus \Lambda^{0,1}T^*M,$$

donde, $\alpha \in \Gamma(\Lambda^{1,0}T^*M)$ si y solamente si $\alpha \circ J = i\alpha$ y análogamente para $\Lambda^{0,1}T^*M$. Mas en general $\Lambda^k T^*M = \Lambda_{i+j=k} \Lambda^{i,j} T^*M$, donde $\Lambda^{i,j} T^*M = \Lambda^i(\Lambda^{1,0}T^*M) \wedge \Lambda^j(\Lambda^{0,1}T^*M)$.

Notación. Llamemosle $\Omega^{k,l}(M) := \Gamma(\Lambda^{k,l}T^*M)$ el espacio de las (k, l) -formas.

Definición 2.6. Sean (M, J_1) y (N, J_2) variedades casi complejas, decimos que $f : M \rightarrow N$ diferenciable es *pseudoholomorfa* si $f^*J_2 = J_1$.

Describamos ahora la familia de ejemplos más importante de variedades casi complejas:

- Definición 2.7.** 1. Sea M una variedad topológica, decimos que (M, \mathcal{A}) con \mathcal{A} un atlas maximal es una *variedad compleja de dimensión n* si dadas $\phi : U \rightarrow \mathbb{C}^n$ y $\psi : V \rightarrow \mathbb{C}^n$ en el atlas entonces $\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \phi(U \cap V)$ es holomorfa.
2. Sean M y N variedades complejas, $f : M \rightarrow N$ es *holomorfo* si lo es en cada carta.

Observación. En particular, toda variedad compleja es una variedad diferenciable usual, por lo tanto tenemos construida la derivada exterior d . Nos interesa entenderla a las formas con valores complejos, simplemente por linealidad.

Veamos ahora que toda variedad compleja, es casi compleja. Alrededor de cada $p \in M$ existe un entorno coordenado $(z_1, \dots, z_n) : U \rightarrow \mathbb{C}^n$, donde $z_k = x_k + iy_k$. Entonces la forma (con valores complejos) $dz_k = dx + idy$ cumple que $dz_k \circ i = idz_k$, identificando $T_p M \cong \mathbb{C}^n$, esto define una J -estructura en el espacio $T_p^* M \otimes \mathbb{C}$ declarando que:

$$\langle dz_1, \dots, dz_n \rangle \subset \Lambda^{1,0} T^* M,$$

sea el espacio propio asociado a i , es sencillo chequear que esto no depende de la carta elegida.

Observación. Un mapa $f : M \rightarrow N$ entre variedades complejas, es holomorfo si y solamente si es holomorfo para sus estructuras complejas. Para ver esto, es suficiente ver que una función $f : U \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa si y solamente si df es lineal complejo (tomando cartas). Pero notar que a df lo podemos descomponer en sus componentes lineal y antilineal compleja:

$$df = \sum_n \frac{\partial f}{\partial z_n} dz_n + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_n} \overline{dz_n},$$

donde $\frac{\partial}{\partial z_n} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})$ y $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_n} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})$ y $\overline{dz_k} = dx_k - idy_k$, entonces la equivalencia es obvia.

En variedades complejas, la descomposición de Hodge nos da mucha más información por lo siguiente: supongamos que $\alpha \in \Omega^{p,q}(M)$, $\alpha = \sum_{I,J} \alpha_{I,J} dz_I \wedge \overline{dz}_J$, la suma es en multiíndices I, J de largo p y q respectivamente. Entonces

$$\begin{aligned} d\alpha &= \sum_{I,J} d\alpha_{I,J} \wedge dz_I \wedge \overline{dz}_J \\ &= \sum_i \sum_{I,J} \frac{\partial f}{\partial z_i} dz_i \wedge dz_I \wedge \overline{dz}_J + \sum_j \sum_{I,J} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} \overline{dz}_j \wedge dz_I \wedge \overline{dz}_J. \end{aligned}$$

En particular $d : \Omega^{p,q}(M) \rightarrow \Omega^{p+1,q}(M) \oplus \Omega^{p,q+1}(M)$. Esto nos permite definir los *operadores de Dolbeault* $\partial : \Omega^{p,q}(M) \rightarrow \Omega^{p+1,q}(M)$ y $\bar{\partial} : \Omega^{p,q}(M) \rightarrow \Omega^{p,q+1}(M)$ como las proyecciones de d en la primer y segunda componente de la suma anterior.

Proposición 2.6. 1. ∂ y $\bar{\partial}$ satisfacen la regla de Leibniz:

$$\partial(\alpha \wedge \beta) = \partial\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge \partial\beta \quad (\text{y lo mismo para } \bar{\partial}).$$

$$2. \partial^2 = 0, \partial \circ \bar{\partial} + \bar{\partial} \circ \partial = 0 \text{ y } \bar{\partial}^2 = 0.$$

Demostración. 1. Una se deduce de la otra ya que $\bar{\partial}\alpha = \overline{\partial\alpha}$. Para probar la relación basta ver que si $\alpha \in \Omega^{p,q}(M)$ y $\beta \in \Omega^{p',q'}(M)$ entonces la proyección de $d(\alpha \wedge \beta)$ en la componente $(p+p'+1, q+q')$ es lo deseado para ∂ , ya que d cumple Leibniz.

2. Esto es porque $d = \partial + \bar{\partial}$ y como $d^2 = 0$, si $\alpha \in \Omega^{p,q}(M)$ proyectando en las formas de tipo $(p+2, q)$, $(p+1, q+1)$ y $(p, q+2)$ tenemos las tres igualdades respectivamente. \square

Observación. Notar que por la segunda propiedad, podemos definir la cohomología de Dolbeault:

$$H^{p,q}(M) := \frac{\ker(\bar{\partial} : \Omega^{p,q}(M) \rightarrow \Omega^{p,q+1}(M))}{\bar{\partial}\Omega^{p,q-1}(M)}.$$

No utilizaremos esta teoría en el texto, sin embargo es fundamental en el estudio de las variedades complejas.

Hasta acá llega nuestra breve introducción a las variedades complejas, ahora la pregunta natural es ¿toda variedad casi compleja es una variedad compleja? Claramente la respuesta a esta pregunta es negativa, veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo. Sea $\mathbb{O} = \mathbb{R}^8$ los octoniones, consideremos $S^6 \subset \text{Im}\mathbb{O}$ la esfera imaginaria. Dado $p \in S^6$ tenemos que $T_p S^6 = \langle p \rangle^\perp$, podemos chequear que la multiplicación por p define una estructura compleja en $T_p S^6$, pero como los octoniones no son asociativos, esta estructura no puede provenir de multiplicar por i .

Definición 2.8. Decimos que (M, J) variedad casi compleja es *integrable*, si J proviene de una estructura de variedad compleja en M .

El problema intuitivamente está en que no tenemos los vectores $\frac{\partial}{\partial z_j} \in T^{1,0}M$, ya que a priori podríamos definir $\frac{\partial}{\partial x_j} + iJ\frac{\partial}{\partial x_j}$, pero $J\frac{\partial}{\partial x_j}$ esta lejos de ser $\frac{\partial}{\partial y_j}$.

Un resultado bien conocido permite saber cuándo una $J \in \mathcal{J}(M)$ es integrable, solamente vamos a dar una intuición de la prueba, el teorema completo se puede encontrar en el capítulo 5 del clásico libro de Hörmander [Hor90].

Teorema 2.7 (Newlander-Nirenberg). *(M, J) es integrable si y solamente si el tensor de Nijenhuis $N_J = 0$ donde:*

$$N_J(X, Y) = [X, Y] + J[JX, Y] + J[X, JY] - [JX, JY]. \quad (1)$$

Bosquejo: Lo siguiente se puede ver con detalle en el libro [Voi02]. Observar que la existencia de cartas holomorfas es equivalente a la “integrabilidad” del fibrado $T^{1,0}M \subset TM \otimes \mathbb{C}$ (las comillas porque estamos pidiendo que $T^{1,0}M$

sea el tangente complejo de una variedad compleja), esto suena a teorema de Frobenius.

Extendamos el corchete a campos en $TM \otimes \mathbb{C}$, simplemente siendo lineal complejo. Se puede probar entonces que si M es una variedad C^ω (analítica real) y se cumple la condición:

$$[\Gamma(T^{1,0}M), \Gamma(T^{1,0}M)] \subset \Gamma(T^{1,0}M). \quad (2)$$

Entonces existe un atlas holomorfo compatible con la estructura J , esto es esencialmente el teorema de Frobenius. Una de las dificultades del caso general, es probar que aunque M no sea analítica, la condición 2 implica regularidad en la estructura diferenciable (esto se debe a la aparición de cierta ecuación en derivadas parciales elíptica).

Una vez que tenemos esto, llegar a la condición del teorema es sencillo, sabemos que toda sección de $T^{1,0}M$ es de la forma $X - iJX$ para cierto $X \in \Gamma(TM)$. Supongamos que en M se cumple la condición 2 entonces:

$$[X - iJX, Y - iJY] = [X, Y] - [JX, JY] - i([JX, Y] + [X, JY]).$$

Pero como $[X - iJX, Y - iJY] \in T^{1,0}M$ debe cumplirse que $J([X, Y] - [JX, JY]) = [JX, Y] + [X, JY]$. Multiplicando por J y despejando:

$$N_J(X, Y) = [X, Y] + J[JX, Y] + J[X, JY] - [JX, JY] = 0.$$

Por lo tanto la condición del teorema de Newlander-Nirenberg es equivalente a la condición 2. □

Corolario 2.7.1. *Sea (Σ, J) una superficie con una estructura casi compleja, entonces J es integrable.*

Demostración. Definamos mapa bilineal:

$$\begin{aligned} B : T^{1,0}\Sigma \times T^{0,1}\Sigma &\rightarrow T\Sigma \otimes \mathbb{C}/T^{1,0}M \\ B(X, Y) &= \overline{[X, Y]}. \end{aligned}$$

Por lo visto anteriormente $B = 0$ implica que J es integrable. Por la regla de Leibnitz, B es tensorial ($B(fX, Y) = B(X, fY) = fB(X, Y)$) y además es antisimétrica. En particular como $\dim_{\mathbb{C}} \Sigma = 1$ entonces $\dim T^{1,0}\Sigma = 1$, pero no hay formas bilineales antisimétricas no nulas en dimensión 1. □

2.3 Estructura simpléctica

Motivados por la discusión de la introducción, definamos:

Definición 2.9. Sea M una variedad diferenciable, decimos que (M, ω) es una *variedad simpléctica* si $\omega \in \Omega^2(M)$ es *no degenerada* (es decir ω_p es no degenerada $\forall p \in M$), y cerrada ($d\omega = 0$).

Ejemplos. • *Los fibrados cotangentes:*

Ésta es una familia importante de ejemplos e históricamente los primeros. Sea M una variedad cualquiera y $\pi : T^*M \rightarrow M$ el fibrado cotangente, vamos a definir una $\lambda \in \Omega^1(T^*M)$ como:

$$\lambda_{(q,p)}(V) = p_q(d\pi_{(q,p)}(V)), \quad V \in T_{(q,p)}T^*M.$$

Diremos que λ es la 1-forma tautológica o de Liouville. En coordenadas podemos ver que $\lambda_{(p,q)} = \sum p^i dq_i$, entonces $d\lambda = \omega$ es no degenerada y como es exacta, debe ser simpléctica.

Este ejemplo cubre el caso de $\mathbb{R}^{2n} \cong T^*\mathbb{R}^n$ (a menos de un signo por la elección que hicimos en 2.1).

- Las formas de área en superficies son formas simplécticas.
- El toro \mathbb{T}^{2n} tiene la estructura simpléctica que baja de \mathbb{R}^{2n} (viendo $\mathbb{T}^{2n} = \mathbb{R}^{2n}/\mathbb{Z}^{2n}$).
- *Los espacios proyectivos \mathbb{CP}^n :*

Tomemos el mapa $\phi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow S^{2n+1}$ definido como $\phi(z) = (\frac{z_0}{|z|}, \dots, \frac{z_n}{|z|})$, entonces si hacemos $\phi^*\omega_0 = \rho_{FS}$ nos da:

$$\rho_{FS} = \frac{i}{2} \left(\frac{1}{|z|^2} \left(\sum_{i=1}^n dz_i \right) \wedge \left(\sum_{j=1}^n d\bar{z}_j \right) - \frac{1}{|z|^4} \left(\sum_{i=1}^n \bar{z}_i dz_i \right) \wedge \left(\sum_{j=1}^n z_j d\bar{z}_j \right) \right)$$

Notar que esta expresión queda invariante por el producto por escalares complejos, entonces baja a una forma ω_{FS} en \mathbb{CP}^n que se llama la forma de *Fubini-Study*. Esta ω_{FS} es no degenerada ya que en S^{2n+1} coincide con la estándar, además es cerrada ya que la forma:

$$\alpha_{FS} = \frac{i}{4|z|^2} \left(\sum_{i=1}^n z_i d\bar{z}_i - \bar{z}_i dz_i \right)$$

Cumple que $d\alpha_{FS} = \rho_{FS}$.

- *Variedades de Kähler:*

Una variedad de Kähler es una variedad compleja M junto con una métrica hermitiana h tal que $-\text{Im}(h) = \omega$ es una forma cerrada. Un ejemplo de esto es \mathbb{CP}^n con la métrica de Fubini-Study, ya que el pullback de la forma hermitiana estándar por el mapa ϕ del ejemplo nos da exactamente lo deseado.

Una pregunta natural es si toda variedad simpléctica compleja es de Kähler, la respuesta es que no, el ejemplo clásico son algunos fibrados de superficies de Riemann por superficies de Riemann (variedades de Kodaira-Thurston). Esto es en parte porque las Kähler tienen obstrucciones fuertes en la topología de la variedad, por ejemplo $\dim H_{deR}^{2k+1}(M) = 0, \forall k \in \mathbb{N}$.

Motivados por lo que hicimos en la sección 2.1 definimos:

Definición 2.10. Sea (M, ω) variedad simpléctica, decimos que $J \in \mathcal{J}(M)$ es *compatible* con ω si $J^*\omega = \omega$. Al espacio de estructuras compatibles lo denotaremos como $\mathcal{J}(M, \omega)$.

Teorema 2.8. $\mathcal{J}(M, \omega)$ es no vacío y contráctil (con la topología C_{loc}^∞ natural).

Demostración. Denotemos como \mathcal{M} al espacio de métricas Riemannianas en M , notar que este espacio es contráctil porque es convexo.

La descomposición polar depende diferenciablemente de la matriz, gracias a esto podemos definir un mapa $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{J}(M, \omega)$ de la siguiente forma: dada $g \in \mathcal{M}$ consideremos $A \in \text{End}(TM)$ tal que $g(A \cdot, \cdot) = \omega$ y $A = PJ$ su descomposición polar. Ya vimos en la sección 2.1 que J es una estructura compleja, entonces definamos el mapa como siendo $g \mapsto J$. Este tiene una inversa a derecha $\mathcal{J}(M, \omega) \rightarrow \mathcal{M}$ enviando $J \mapsto \omega(J \cdot, \cdot)$.

Componiendo ambos mapas obtenemos $\text{Id} : \mathcal{J}(E, \omega) \rightarrow \mathcal{J}(E, \omega)$, pero el segundo mapa es homotópicamente trivial porque \mathcal{M} es contráctil, por lo tanto obtenemos lo deseado. \square

Observación. Consideremos (M, J) como variedad casi compleja, donde $J \in \mathcal{J}(M, \omega)$, entonces TM es un fibrado vectorial complejo y por lo tanto tiene la primera clase de Chern $c_1(TM) \in H^2(M, \mathbb{Z})$ bien definida (vease 7.4). Por el teorema anterior $\mathcal{J}(M, \omega)$ es conexo por caminos, lo cual implica que los fibrados (M, J) son todos isomorfos entre ellos, en particular la clase de Chern es la misma.

De ahora en mas si $J \in \mathcal{J}(M, \omega)$, definamos la métrica $g_J = \omega(J \cdot, \cdot)$. Recordar que en estas condiciones $h = g_J - i\omega$ es una métrica hermitiana.

Observación. Supongamos que estamos en el caso de M variedad cerrada, entonces:

1. ω^n no puede anularse nunca porque ω es no degenerada. Por lo tanto tenemos que $[\omega^n] \in H_{deR}^{2n}(M)$ no es trivial.
2. De hecho podemos calcular ω^n explícitamente: tomemos $J \in \mathcal{J}(M, \omega)$ y $h_J = g_J - i\omega$ (con g_J como arriba). Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base h_J ortonormal de $T_p M$, entonces $e_1, Je_1, \dots, e_n, Je_n$ una base simpléctica de $T_p M$ y ortonormal para g_J . Si $dx_1, dy_1, \dots, dx_n, dy_n$ es la base dual tenemos que:

$$\omega_p = \frac{i}{2} \sum_i dz_i \wedge d\bar{z}_i,$$

donde $dz_j = dx_j + idy_j$ y $d\bar{z}_j$ análogo (notar que (M, J) no tiene por qué ser compleja). Entonces $\omega_p^n = n! (\frac{i}{2})^n dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \dots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_n$ y como $\frac{i}{2} dz_j \wedge d\bar{z}_j = dx_j \wedge dy_j$ tenemos que $\frac{\omega^n}{n!} = dv_J$ donde dv_J es la forma de volumen inducida por g_J .

En el caso Kähler esta relación es bien conocida. Más en general diremos que dv_J es la *forma de volumen de Liouville*.

3. Como corolario de lo anterior podemos descartar una familia grande de variedades que no pueden ser simplécticas. Supongamos que $H_{deR}^{2k}(M) = 0$

para algún $k < n$ entonces tendríamos que $\omega^k = d\alpha$ para $\alpha \in \Omega^{2k-1}(M)$ y:

$$\omega^n = d\alpha \wedge \omega^{n-k} = d(\alpha \wedge \omega^{n-k}).$$

Por lo tanto $\int \omega^n = 0$ lo cual es absurdo. Esto nos da una cantidad de variedades que no pueden ser simplécticas, por ejemplo S^{2k} con $k \geq 2$.

El lector seguramente ya se pueda imaginar quienes son los morfismos en la categoría de variedades simplécticas:

Definición 2.11. Sean (M, ω_1) y (N, ω_2) variedades simplécticas, diremos que una función diferenciable $f : M \rightarrow N$ es un *simplectomorfismo* si $f^*\omega_2 = \omega_1$.

Observación. Por la observación anterior, si $f : (M, \omega) \rightarrow (M, \omega)$ es un simplectomorfismo entonces preserva la medida de Liouville.

Ejemplo. Sea $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable, definamos un campo de vectores X_H vía la ecuación $\iota_{X_H}\omega = dH$ donde ι es la contracción (acá usamos que ω es no degenerada). X_H nos define el flujo $\phi_t : M \rightarrow M$ que llamamos *el flujo Hamiltoniano*, veamos que cada ϕ_t es un simplectomorfismo. Notar que:

$$\frac{d}{dt}\phi_t^*\omega = \phi_t^*(\mathcal{L}_{X_H}\omega).$$

Por la fórmula de Cartan $\mathcal{L}_{X_H}\omega = d\iota_{X_H}\omega + \iota_{X_H}d\omega$ y usando que ω es cerrada tenemos que $\frac{d}{dt}\phi_t^*\omega = 0$ por lo tanto $\phi_t^*\omega = \omega$.

En particular tomando $J \in \mathcal{J}(M, \omega)$ y g_J entonces:

$$\omega(X_H, Y) = -g(JX_H, Y) = dH(Y) = g(\nabla H, Y).$$

Como esto pasa $\forall Y$ tenemos que $JX_H = -\nabla H$, es decir $X_H = J\nabla H$. En el caso de $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ donde $J = J_0$ obtenemos entonces las celebres ecuaciones de Hamilton. Sea $z = (q, p)$ entonces la ecuación diferencial $\dot{z} = X_H(z)$ satisface:

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}(q, p) \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}(q, p). \end{cases}$$

Como mencionábamos al comienzo, lo malo de los simplectomorfismos es que no tienen invariantes locales:

Teorema 2.9 (Darboux). *Sea (M, ω) una variedad simpléctica, entonces todo punto tiene un entorno difeomorfo simplécticamente a un abierto de $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$.*

Demostración. A menos de tomar coordenadas, podemos suponer que ω esta definida en un entorno de $0 \in \mathbb{R}^{2n}$ y que $\omega(0) = \omega_0$. El argumento que haremos se llama el *truco de Moser*: consideremos la familia de formas $\omega_t = \omega_0 + t(\omega - \omega_0)$, $t \in [0, 1]$. La idea es encontrar un flujo ϕ_t tal que:

$$\phi_t^*\omega_t = \omega_0, \quad t \in [0, 1].$$

Entonces el difeomorfismo ϕ_1 sera la solución a nuestro problema. Si existiera esta familia de difeomorfismos, debe satisfacer:

$$0 = \frac{d}{dt}\phi_t^*\omega_t = \phi_t^*\left(L_{X_t}\omega_t + \frac{d}{dt}\omega_t\right),$$

donde $X_t = \frac{d}{dt}\phi_t$ es el campo asociado. Recordemos que la *formula de Cartan* nos dice que $L_X = \iota_X \circ d + d \circ \iota_X$. Como en nuestro caso $d\omega_t = 0$, obtenemos:

$$\phi_t^* (d\iota_{X_t}\omega_t + \omega - \omega_0) = 0.$$

Notar que a menos de disminuir mas el entorno, el *lema de Poincaré* nos dice que $\omega - \omega_0 = d\alpha$, para cierta 1-forma, supongamos ademas que $\alpha(0) = 0$. Entonces si:

$$\iota_{X_t}\omega_t = -\alpha,$$

entonces el flujo asociado al campo X_t satisface lo deseado. Como la forma es no degenerada, esta ecuación nos determina únicamente X_t , con $X_0 = 0$. \square

Las cartas que nos da el teorema las llamaremos de Darboux. En particular, como localmente nuestras formas son exactas podemos definir:

Definición 2.12. Sea $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ una curva contenida completamente en una carta de Darboux, entonces tenemos bien definida la *acción simpléctica*:

$$A(\gamma) = \int_{\gamma} \lambda,$$

donde $\lambda \in \Omega^1(M)$ es tal que en la carta $d\lambda = \omega$.

Observación. Análogamente podríamos haber definido la acción simpléctica de la siguiente forma: supongamos que la carta de Darboux es suficientemente pequeña para que el entorno sea simplemente conexo, entonces existe $u : D \rightarrow M$ una extension de γ al disco unitario D , es decir $u|_{S^1} = \gamma$. En estas condiciones:

$$A(\gamma) = \int_D u^*\omega.$$

Supongamos ademas que M es una variedad compacta, equipémosla con $J \in \mathcal{J}(M, \omega)$ y g_J la métrica asociada. Supongamos que γ es una curva cerrada en M con longitud $l(\gamma) < \delta$, donde δ es el radio de inyectividad de la variedad. En estas condiciones γ queda contenida en una bola geodésica B en M , de radio a lo sumo la mitad que el radio de inyectividad. Entonces aunque no estemos en una carta de Darboux, la acción:

$$A(\gamma) = - \int_D u_{\gamma}^*\omega,$$

esta bien definida, donde $u : D \rightarrow B \subset M$. Esto es porque dadas dos extensiones en B , éstas son homotópicas *rel* S^1 (dejando fijo el borde).

Podemos probar la siguiente desigualdad del tipo “área longitud” que ya conocemos en análisis complejo:

Teorema 2.10 (Desigualdad isoperimétrica). *Sea (M, ω) una variedad simpléctica y $J \in \mathcal{J}(M, \omega)$, entonces existe $\delta > 0$ y un $C > 0$ tal que si γ es una curva cerrada en M con $l(\gamma) \leq \delta$ entonces:*

$$|A(\gamma)| \leq Cl(\gamma)^2.$$

Demostración. Tomemos δ el radio de inyectividad de la variedad (para esto usamos M compacta). Definamos la extensión $v_\gamma : D \rightarrow M$ como:

$$v_\gamma(re^{i\theta}) = \exp_{\gamma(0)}(r\xi(\theta)),$$

donde $\xi(\theta) \in T_{\gamma(0)}M$ queda determinado por $\gamma(e^{i\theta}) = \exp_{\gamma(0)}\xi(\theta)$. Entonces:

$$\|\partial_r v_\gamma\| = \|\xi(\theta)\| = d(\gamma(0), \gamma(e^{i\theta})) \leq l(\gamma).$$

Por otro lado:

$$\|\partial_\theta v_\gamma\| \leq c_1 \|\dot{\xi}(\theta)\| \leq c_2 \|\dot{\gamma}(e^{i\theta})\|,$$

donde las constantes c_1, c_2 dependen de la métrica. Entonces:

$$|A(\gamma)| \leq \int_0^{2\pi} \int_0^1 |\omega(\partial_r v_\gamma, \partial_\theta v_\gamma)| dr d\theta \leq c_3 l(\gamma)^2.$$

□

En [MS04, Capítulo 4] se prueba una versión mucho más refinada de este Teorema cuya prueba es muy similar a la desigualdad isoperimétrica en \mathbb{R}^2 usando series de Fourier.

2.4 Revisitando las ecuaciones de Cauchy-Riemann

En este texto aparecerán naturalmente “perturbaciones” de la ecuación de Cauchy-Riemann clásica $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = 0$, estudiando esta ecuación utilizando métodos de EDP’s, vamos a conseguir resultados más robustos que nos darán información acerca del caso perturbado.

El lector que no conoce los espacios de Sobolev puede dirigirse a 7.2. Solo por esta sección vamos a denotar $W^{k,p}(D, \mathbb{C}) =: W^{k,p}(D)$ donde $D \subset \mathbb{C}$ es el disco unitario.

El objetivo de esta sección es presentar aplicaciones del siguiente teorema (el cual solamente vamos a bosquejar):

Teorema 2.11. *Sea $p \in (1, \infty)$, el operador $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} : W^{1,p}(D) \rightarrow L^p(D)$ es sobreyectivo y tiene una inversa a derecha T continua.*

Intuitivamente la prueba es sencilla, uno encuentra un candidato para T formalmente (o en el sentido de las distribuciones) y luego trata de probar que esa solución formal es una solución en el sentido usual. El único problema es que T es una integral singular por lo tanto hay que usar resultados más finos de teoría de la medida.

El candidato para T lo podemos encontrar fácilmente por ejemplo usando el siguiente resultado clásico:

Teorema 2.12 (Cauchy-Pompeiu). *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ dominio tal que $\partial\Omega$ es suave y $f \in C^1(\Omega)$ entonces tenemos para $a \in \Omega$ ($z = x + iy$):*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z - a} dz + \frac{1}{\pi} \int_{\Omega} \frac{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}}{z - a} dx dy.$$

Demostración. Consideremos la 1-forma $\omega = \frac{f(z)}{z-a}dz$. Integremos $d\omega = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z} \wedge dz$ en $\Omega \setminus D(a, \varepsilon)$ con $D(a, \varepsilon) \subset \Omega$.

Entonces tenemos por el teorema de Stokes:

$$\int_{\Omega \setminus D(a, \varepsilon)} \frac{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}}{z-a} d\bar{z} \wedge dz = \int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z-a} dz - \int_{\partial D(a, \varepsilon)} \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

Notemos por un lado que:

$$\int_{\partial D(a, \varepsilon)} \frac{f(z)}{z-a} dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(a + \varepsilon e^{i\theta})}{\varepsilon e^{i\theta}} i \varepsilon e^{i\theta} d\theta = i \int_0^{2\pi} f(a + \varepsilon e^{i\theta}) d\theta,$$

y esto cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ tiende a $2\pi i f(a)$.

Despejando y usando que $-\frac{1}{2i}d\bar{z} \wedge dz = dx \wedge dy$ tenemos lo deseado. \square

Esto nos dice entonces que $Tf(z) = \frac{1}{\pi} \int_D \frac{f(w)}{w-z} dx dy$ (donde $w = x + iy$) es la inversa a derecha, al menos cuando f tiene soporte compacto en D .

A partir de ahora denotemos al espacio de las funciones test $\mathcal{D}(D) := C_{comp}^\infty(D)$. En este espacio si derivamos la integral obtenemos que $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \circ T = T \circ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = Id$ (los detalles están hechos en [HZ94, Apéndice 4]). Esto nos dice justamente que T es la inversa en el sentido de las distribuciones.

El objetivo ahora es extender $T : L^p(D) \rightarrow W^{1,p}(D)$, para esto por un argumento de densidad basta controlar las normas para funciones $\mathcal{D}(D)$. Para calcular la norma $W^{1,p}$ de Tf hay que calcular la norma p de Tf , $\frac{\partial}{\partial z} Tf$ y $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} Tf$, esta última es fácil ya que por lo que dijimos antes es simplemente f . La primera de las anteriores también es un caso que se puede hacer a mano pero en la segunda hay problemas porque:

$$\frac{\partial}{\partial z} Tf = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dx dy.$$

Y notar que $\frac{1}{(w-z)^2} \notin L^1_{loc}(\mathbb{D})$, es lo que se llama una integral singular. Sin embargo está en L^p y es consecuencia del altamente no trivial teorema de Calderón-Zygmund.

Teorema 2.13 (Calderón-Zygmund). *Dado $p \in (1, \infty)$ existe $C > 0$ tal que $\forall f \in \mathcal{D}(D)$*

$$\|Tf\|_{L^p} \leq C\|f\|_{L^p}, \quad \left\| \frac{\partial}{\partial z} Tf \right\|_{L^p} \leq C\|f\|_{L^p}.$$

Esto implica el Teorema enunciado al comienzo.

Comentario. No vamos a probar el Teorema de Calderón-Zygmund. Una buena exposición del teorema en un caso muy general se encuentra en [SS11, Capítulo 3]. También en [MS04, Apéndice B] hay una prueba de esto para el caso de la solución fundamental para el Laplaciano, ellos consiguen los mismos resultados que nosotros explotando la relación entre las ecuaciones de Cauchy-Riemann y el Laplaciano.

Este teorema va a ser explotado a lo largo de la tesis de diversas formas, pero en un principio podemos ver cómo este tipo de estimativas implican resultados de regularidad en el operador:

Teorema 2.14. Dado $p \in (1, \infty)$, si $f \in W^{1,p}(D)$ es tal que $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f \in W^{k,p}(D)$ con $k \geq 1$ entonces $\forall r < 1$ tenemos que $f \in W^{k+1,p}(D_r)$ y además existe $C > 0$ (que depende solo de r y p) tal que:

$$\|f\|_{W^{k+1,p}(D_r)} \leq C \left(\|f\|_{W^{1,p}(D)} + \left\| \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f \right\|_{W^{k,p}(D)} \right).$$

Demostración. Afirimo que basta ver para el caso $k = 1$. Esto es simplemente porque si ∂_I denota cierta derivada mixta con $I = (n, m)$ un multiíndice entonces $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \circ \partial_I = \partial_I \circ \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$.

Vamos a ver que las derivadas parciales están en $W^{1,p}(D_r)$, el argumento que vamos a hacer es simétrico para ambas derivadas entonces sin pérdida de generalidad miremos para la primera. Consideremos los cocientes incrementales:

$$f^h(x, y) = \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}.$$

Es fácil probar que $f^h \rightarrow \partial_x f$ en L^p cuando $h \rightarrow 0$, además notar que $f^h \in W^{1,p}(D)$.

Sea ρ una “bump function” que vale 1 en D_r y de soporte compacto en D , entonces podemos usar las estimativas de antes para ρf^h :

$$\|f^h\|_{W^{1,p}(D_r)} \leq \|\rho f^h\|_{W^{1,p}(D)} \leq C \left\| \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\rho f^h) \right\|_{L^p(D)}.$$

Y usando la regla del producto tenemos:

$$\|f^h\|_{W^{1,p}(D_r)} \leq C' \left(\left\| \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f \right\|_{L^p(D)} + \|f^h\|_{L^p(D)} \right),$$

donde absorbimos derivadas de ρ en la constante C' . Sea $g = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f$, como $g \in W^{1,p}(D)$ tenemos en particular que $g^h \rightarrow \partial_x g$ en L^p como antes, entonces:

$$\|f^h\|_{W^{1,p}(D_r)} \leq C' (\|\partial_x g\|_{L^p(D)} + \|\partial_x f\|_{L^p(D)}).$$

Por lo tanto $\{f^h\}_{h \in (0, \varepsilon)}$ está acotada en norma $W^{1,p}(D_r)$. Entonces tiene una subsucesión que converge débilmente por el Teorema de Banach- Alaoglu. Pero notemos que f^h ya converge (fuertemente) en $L^p(D)$ a $\partial_x f$ entonces el límite débil debe coincidir, concluimos $\partial_x f \in W^{1,p}(D_r)$ y las cotas anteriores nos dan las acotaciones deseadas. \square

Con este resultado podemos probar una extensión del teorema 2.11:

Teorema 2.15. Consideremos el operador $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} : W^{k,p}(D) \rightarrow W^{k-1,p}(D)$ con $p \in (1, \infty)$. Entonces éste tiene una inversa a derecha $T : W^{k-1,p}(D) \rightarrow W^{k,p}(D)$ acotada.

Demostración. Procedamos por inducción, sabemos que vale para $k = 0$. Asumamos para $k - 1$, tomemos $R > 1$ y consideremos un operador de extensión $i : W^{k-1,p}(D) \hookrightarrow W^{k-1,p}(D_R)$ acotado que manda $f \mapsto \hat{f}$ donde $\hat{f}|_D = f$. Por hipótesis de inducción existe:

$$T_R : W^{k-2,p}(D_R) \rightarrow W^{k-1,p}(D_R),$$

una inversa acotada de $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ en $W^{k-1,p}(D_R)$. Sea $u = T_R \hat{f} \in W^{k-1,p}(D_R)$, tenemos entonces que $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} u = \hat{f} \in W^{k-1,p}(D_R)$ entonces por el Teorema anterior tenemos que $u|_D$ está en $W^{k,p}(D)$ y además:

$$\|u\|_{W^{k,p}(D)} \leq C \left(\|u\|_{W^{k-1,p}(D_R)} + \|\hat{f}\|_{D_R} \right).$$

Pero $\|u\|_{W^{k-1,p}(D_R)} \leq c_1 \|\hat{f}\|_{W^{k-2,p}(D_R)}$ y $\|\hat{f}\|_{W^{k-1,p}(D_R)} \leq c_2 \|f\|_{W^{k-1,p}(D_R)}$ por lo tanto tenemos:

$$\|u\|_{W^{k,p}(D)} \leq C' \|f\|_{W^{k-1,p}(D)}.$$

Entonces si $r : W^{k,p}(D_R) \rightarrow W^{k,p}(D)$ es el operador de restricción: $r \circ T_R \circ i = T$ es la inversa buscada. \square

Queremos probar ahora:

Teorema 2.16 (Regularidad elíptica). *Supongamos que $f \in W^{k,p}(D)$ para algún $p \in (1, \infty)$ y $u \in L^1(D)$ es una solución débil de $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} u = f$ entonces $u \in W^{k+1,p}(D_r) \forall r < 1$.*

Comentario. Le llamo de esa forma al teorema anterior porque $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ es un operador elíptico, esencialmente esto significa que tenemos estimativas del tipo Calderón-Zygmund. Siempre que tenemos operadores elípticos estos enunciados de regularidad son estándares.

Antes de probar esto necesitamos:

Lema 2.17 (Weil). *Sea $u \in L^1(D)$ una solución débil de $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} u = 0$, entonces $u \in C^\infty(D)$.*

Demostración. Notemos que si $v = \text{Re}(u)$, ésta es una solución débil de $\Delta v = 0$ y lo mismo para $\text{Im}(u)$. Tomemos ρ una función chichón en D que vale 1 en un entorno de 0 y definamos $\rho_\varepsilon(z) = \frac{1}{\varepsilon^2} \rho(\varepsilon z)$, entonces por resultados estándar para convoluciones $v_\varepsilon := \rho_\varepsilon * v$ es una función C^∞ , $v_\varepsilon \rightarrow_{\varepsilon \rightarrow 0} v$ en $L^1(D)$ y además como $\Delta v_\varepsilon = \rho_\varepsilon * \Delta v = 0$ tenemos que es armónica. Por la propiedad del valor medio:

$$v_\varepsilon(z) = \frac{1}{\pi \delta^2} \int_{D(z, \delta)} v_\varepsilon(x, y) dx dy.$$

Entonces por convergencia en L^1 cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, esto converge a la función $z \mapsto \frac{1}{\pi \delta^2} \int_{D(z, \delta)} v(x, y) dx dy$ que es continua y debe ser igual a v en casi todo punto. Entonces v es continua y satisface la propiedad del valor medio, por lo tanto es armónica. \square

Demostración de regularidad elíptica. Tomemos $v \in W^{k+1,p}(D)$ una solución de $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} v = f$ que existe por la proposición 2.15. Por lo tanto $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(u - v) = 0$ entonces $u - v \in C^\infty(D)$ por el lema de Weil, en particular está en $W^{k+1,p}(D_r)$ $\forall r < 1$ entonces $u \in W^{k+1,p}(D_r)$. \square

Otra filosofía que es importante tener en mente es que si tenemos un operador con inversa a derecha y lo perturbamos por otro operador lineal entonces el operador perturbado sigue teniendo inversa a derecha si la perturbación es pequeña, esto nos da por ejemplo:

Proposición 2.18. Sea $p \in (2, \infty)$ y $A \in L^p(D, \text{End}_{2n}(\mathbb{R}))$ entonces el problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} v + A(z)v(z) = 0 \\ v(0) = v_0. \end{cases}$$

Tiene solución para $v \in W^{1,p}(D_\varepsilon, \mathbb{C})$ para algún $\varepsilon > 0$.

Demostración. Tomemos el operador: $S = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \times \text{eval}_0 : W^{1,p}(D) \rightarrow L^p(D) \times \mathbb{C}$, donde $\text{eval}_0(u) = u(0)$ (esto tiene sentido porque $W^{1,p}(D) \hookrightarrow C^0(D)$).

Notemos que si $T : L^p(D) \rightarrow W^{1,p}(D)$ es la inversa de $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ entonces una inversa del operador S viene dada por $(f, v_0) \mapsto Tf - Tf(0) + v_0$.

Tomemos ahora χ_ε la función característica de D_ε y consideremos $S_\varepsilon = S + (\chi_\varepsilon A, 0) : W^{1,p}(D) \rightarrow L^p(D) \times \mathbb{C}$, este operador es continuo porque:

$$\|Av\|_{L^p(D)} \leq \|A\|_{L^p(D)} \|v\|_{C^0(D)} \leq C \|A\|_{L^p(D)} \|v\|_{W^{1,p}(D)},$$

donde el último paso es por el encaje de Sobolev $W^{1,p}(D) \hookrightarrow C^0(D)$. Por la misma cuenta obtenemos:

$$\|S_\varepsilon - S\| \leq C \|A\|_{L^p(D_\varepsilon)},$$

donde la norma es la de operadores. Esto significa $S_\varepsilon \rightarrow S$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Ahora, como los operadores con inversa forman un abierto tenemos que S_ε es invertible si ε es suficientemente chico; y denotemos T_ε a su inversa. Basta tomar $T_\varepsilon(0, v_0)$ para tener soluciones al sistema con condición inicial fija. \square

2.5 Fibrados holomorfos y operadores de Cauchy-Riemann

El siguiente objeto se nos presentara naturalmente en el capítulo 4, aunque también es fundamental en la teoría de variedades complejas:

Definición 2.13. Sea M una variedad compleja y $\pi : E \rightarrow M$ un fibrado vectorial complejo. Decimos que E tiene una *estructura holomorfa* (o que es un fibrado holomorfo) si dadas $\phi_U : E|_U \cong U \times \mathbb{C}^n$ y $\phi_V : E|_V \cong V \times \mathbb{C}^n$ dos trivializaciones, entonces $g_{UV} : U \cap V \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ es holomorfo.

Ejemplo. Los fibrados $T^{1,0}M$, $T^{0,1}M$ y los espacios de formas $\Lambda^{p,q}T^*M$, etc. tienen todos una estructura holomorfa natural.

En estos fibrados decimos que $\xi \in \Gamma(E)$ es holomorfa si dada $E|_U \cong U \times \mathbb{C}^n$ trivialización, entonces viendo a $\xi : U \subset M \rightarrow \mathbb{C}^n$ es holomorfa. Esto no depende de la elección de la trivialización ya que los mapas de transición quedan holomorfos.

Observación. Por los resultados clásicos de análisis complejo podemos deducir muchas propiedades deseables sobre estas secciones. A modo de ejemplo, si los ceros de una sección holomorfa acumulan entonces es la sección nula.

Lo interesante es que la estructura holomorfa nos da automáticamente una forma de derivar. Denotemos como $\Omega^q(M, E)$ y $\Omega^{p,q}(M, E)$ a los espacios $\Gamma(\Lambda^q T^* M \otimes E)$ y $\Gamma(\Lambda^{p,q} T^* M \otimes E)$ respectivamente.

Proposición 2.19. *Sea $\pi : E \rightarrow M$ un fibrado holomorfo, entonces existe un único operador:*

$$\bar{\partial}_E : \Omega^{0,q}(M, E) \rightarrow \Omega^{0,q+1}(M, E),$$

satisfaciendo:

1. $\bar{\partial}_E(\alpha \otimes \xi) = \bar{\partial}\alpha \otimes \xi + \alpha \wedge \bar{\partial}_E \xi.$
2. Sea $\xi \in \Gamma(E)$, entonces $\bar{\partial}_E(\xi) = 0$ si y solo si ξ es holomorfa.

Demostración. La primera propiedad nos dice que el operador es local, por lo tanto basta ver en una trivialización $\Lambda^{0,q} T^* M \otimes E|_V \cong \mathbb{C}^N$. Aquí una sección es simplemente una función a \mathbb{C}^N , podemos definir el operador $\bar{\partial}_E$ como siendo el operador de Dolbeault $\bar{\partial}$ en cada componente. Por ultimo para ver que esto está bien definido hay que ver que es independiente de la trivialización. Para ver esto, tomemos $\xi : U \rightarrow \mathbb{C}^N$ y $g : U \rightarrow GL_N(\mathbb{C})$ holomorfa entonces:

$$\bar{\partial}_E(g\xi) = (\bar{\partial}_E g)\xi + g\bar{\partial}_E \xi = g\bar{\partial}_E \xi,$$

porque g es holomorfa. Por lo tanto las componentes se transforman tensorialmente por mapas de transición holomorfos. □

Notemos que el operador $\bar{\partial}_E$ tiene las mismas propiedades que la parte antilineal compleja de una conexión (para el lector que no este familiarizado con las conexiones, vease un resumen en 7.1.1). Abstrayendo las mismas:

Definición 2.14. 1. Sea $\pi : E \rightarrow M$ un fibrado complejo sobre una variedad compleja M . Decimos que un operador $D : \Gamma(E) \rightarrow \Omega^{0,1}(M, E)$ lineal complejo ($D(J\xi) = JD\xi$) es un *operador de Cauchy-Riemann* si satisface la regla de Leibniz:

$$D(f\xi) = (\bar{\partial}f)\xi + fD\xi, \quad f \in C^\infty(M, \mathbb{C}), \xi \in \Gamma(E).$$

2. Una sección ξ es *holomorfa según D* si $D\xi = 0$.

Observación. 1. Notar que en la definición anterior no asumimos que en E haya una estructura holomorfa.

2. D se extiende naturalmente a $\Omega^{0,q}(M, E) \rightarrow \Omega^{0,q+1}(M, E)$ como

$$D(\alpha \otimes \xi) = \bar{\partial}\alpha \otimes \xi + \alpha \wedge D\xi.$$

3. Sean D, D' dos operadores de Cauchy Riemann, entonces $A = D - D'$ es un tensorial por la regla de Leibnitz (es decir $A(f\xi) = fA\xi$ con $f \in C^\infty(M, \mathbb{C})$). En particular $A \in \Gamma(\text{End}(E, \Lambda^{0,1} T^* \Sigma \otimes E))$ es lineal complejo en el sentido que $A(J\xi) = J \circ A\xi$.

4. Como en una trivialización ϕ siempre podemos definir un $\bar{\partial}^\phi$ (simplemente derivando coordenada a coordenada), la observación de antes nos dice que viendo a ξ en trivializaciones tenemos que existe $A : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \text{End}(\mathbb{C}^n)$ diferenciable donde:

$$D\xi(w) = \left(\frac{\partial \xi}{\partial \bar{z}}(w) + A(w)\xi \right) d\bar{z}.$$

Notar que esto es esencialmente la existencia de los símbolos de Christoffel.

Volvamos a la relación que comentamos entre las conexiones y los operadores de Cauchy-Riemann. Sea ∇ una conexión en E , diremos que es *compleja* si J es paralela para ∇ . Notar que podemos descomponer ∇ :

$$\nabla = \partial^\nabla \oplus \bar{\partial}^\nabla : \Gamma(E) \rightarrow \Omega^1(M, E) = \Omega^{1,0}(M, E) \oplus \Omega^{0,1}(M, E),$$

en sus componentes lineal compleja y antilineal compleja respectivamente. Entonces $\bar{\partial}^\nabla$ es un operador de Cauchy-Riemann. De hecho podemos decir mas, antes una definición:

Definición 2.15. • Sea $\pi : E \rightarrow M$ un fibrado complejo y J su estructura compleja, diremos que el par $(\langle \cdot, \cdot \rangle, J)$ es una *estructura hermitiana* en E si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es una métrica y J es una isometría para $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

- Una *conexión hermitiana* en un fibrado complejo $\pi : E \rightarrow M$ con una estructura hermitiana, es una conexión compleja compatible con la métrica, es decir:

$$d\langle \xi, \eta \rangle = \langle \nabla \xi, \eta \rangle + \langle \xi, \nabla \eta \rangle.$$

Observación. Todo fibrado complejo admite una estructura hermitiana ya que si g es una métrica cualquiera, $\langle \cdot, \cdot \rangle = g + J^*g$ cumple lo deseado.

Proposición 2.20. Sea $\pi : E \rightarrow M$ un fibrado complejo con una estructura hermitiana y $D : \Gamma(E) \rightarrow \Omega^{0,1}(M, E)$ un operador de Cauchy-Riemann, entonces existe una única conexión hermitiana ∇ tal que $\bar{\partial}^\nabla = D$. A tal conexión le llamamos la conexión de Chern.

Demostración. Supongamos que tenemos una conexión ∇ cumpliendo lo deseado. Tomando ∂^∇ y $\bar{\partial}^\nabla$ las proyecciones de ∇ como antes. Es sencillo chequear:

$$\begin{aligned} \partial \langle \xi, \eta \rangle &= \langle \partial^\nabla \xi, \eta \rangle + \langle \xi, \bar{\partial}^\nabla \eta \rangle, \text{ y} \\ \bar{\partial} \langle \xi, \eta \rangle &= \langle \partial^\nabla \xi, \eta \rangle + \langle \xi, \partial^\nabla \eta \rangle. \end{aligned}$$

Entonces como $\bar{\partial}^\nabla = D$, ∂^∇ queda únicamente determinada por la ecuación:

$$\langle \partial^\nabla \xi, \eta \rangle = \bar{\partial} \langle \xi, \eta \rangle - \langle \xi, D\eta \rangle.$$

Tomando esta como la definición de ∂^∇ y definiendo $\nabla = \partial^\nabla + D$ podemos chequear que cumple lo deseado. □

Por lo tanto una vez fijada una estructura hermitiana hay una única conexión cuya parte lineal compleja es nuestro operador de Cauchy-Riemann.

Comenzamos el estudio de los operadores de Cauchy-Riemann abstrayendo las propiedades de $\bar{\partial}_E$ para fibrados con estructura holomorfa. ¿Será que todos los D son el operador $\bar{\partial}_E$ para cierta estructura en el fibrado?

Observación. Por la proposición 2.6, sabemos que $\bar{\partial}_E^2 = 0$.

Lo anterior nos da una condición necesaria para nuestra pregunta: si $D^2 : \Gamma(E) \rightarrow \Omega^{0,2}(M, E)$ es no nula entonces no puede ser un operador $\bar{\partial}_E$. ¿Esta condición es suficiente? Si pensamos en los operadores de Cauchy-Riemann como siendo esencialmente conexiones, entonces $D^2 = 0$ nos está diciendo que la curvatura de la conexión es nula y por lo tanto localmente podemos encontrar una base de secciones holomorfas de E , pero esto es justamente tener una estructura holomorfa en el fibrado.

Todo lo que dijimos anteriormente es verdad, pero el teorema $D^2 = 0 \Rightarrow$ existencia local de una base de secciones holomorfas no es trivial, una prueba se puede encontrar en el capítulo 2 de [DK90].

Observación. Si M tiene dimensión compleja 1, es decir es una *superficie de Riemann*, entonces automáticamente $\Omega^{0,2}(M, E) = 0$. Por lo tanto aquí las estructuras holomorfas en un fibrado se corresponden con los operadores de Cauchy-Riemann.

De hecho podemos ver una prueba de este resultado con las herramientas que desarrollamos en el capítulo anterior.

Teorema 2.21. *Sea $\pi : E \rightarrow M$ un fibrado sobre M una superficie de Riemann y sea $D : \Gamma(E) \rightarrow \Omega^{0,1}(M, E)$ un operador de Cauchy-Riemann. Entonces existe una estructura holomorfa en E tal que $D = \bar{\partial}_E$.*

Demostración.

Afirmación. Basta probar que $\forall z_0 \in M$ existe un entorno U y s_1, \dots, s_n secciones holomorfas en U (según D) que son una \mathbb{C} -base de E .

Esto es porque si $\xi \in \Gamma(E)$ tenemos $\xi|_U = \sum_{i=1}^n \lambda_i(z) s_i(z)$ para ciertos $\lambda_i : U \rightarrow \mathbb{C}$ suaves entonces:

$$D\xi|_U = \sum_{i=1}^n \bar{\partial}\lambda_i s_i + \lambda_i Ds_i.$$

Pero el segundo término es 0 porque s_i es holomorfa $\forall i$. Por lo tanto si construimos trivializaciones $E|_U \cong U \times \mathbb{C}^n$ mandando s_1, \dots, s_n a la base canónica, es fácil verificar que los cambios de trivializaciones quedan holomorfos.

El problema ahora se volvió local, a menos de tomar cartas suponemos $z_0 = 0$, $U = D_\varepsilon$ y por la observación anterior las secciones holomorfas satisfacen la ecuación diferencial:

$$\partial_x s_i + J_0 \partial_y s_i + A s_i = 0,$$

para cierta $A \in C^\infty(D_\varepsilon, \text{End}(\mathbb{C}^n))$. Pero nosotros ya vimos en la proposición 2.18 que si fijamos $s_i(0)$ entonces existe una solución. Tomando s_i para que en 0 sean la base canónica terminamos porque en un entorno de 0 sigue siendo base por continuidad (s_i son continuas por regularidad elíptica).

□

En esta monografía nos aparecerán operadores que cumplen la misma regla de Leibniz que los operadores de Cauchy-Riemann, pero que no son necesariamente lineal complejos (vease la sección 4.1):

Definición 2.16. Sea $\pi : E \rightarrow M$ un fibrado complejo sobre una variedad compleja. Un *operador de Cauchy Riemann real* es un operador $D : \Gamma(E) \rightarrow \Omega^{0,1}(M, E)$ satisfaciendo la regla de Leibnitz:

$$D(f\xi) = (\bar{\partial}f)\xi + fD\xi, \quad f \in C^\infty(M, \mathbb{R}), \xi \in \Gamma(E).$$

Nuevamente tenemos la observación de la existencia de los simbolos de Christoffel:

Observación. 1. Si tenemos D, D' dos operadores de Cauchy Riemann reales entonces $A = D - D'$ es un tensor, $A \in \Gamma(\text{End}(E, \Lambda^{0,1}T^*M \otimes E))$.

2. Si tomamos una trivialización ϕ y vemos a $\xi : U \rightarrow \mathbb{C}^n$, entonces la observación anterior aplicada a $D - \bar{\partial}^\phi$ existe $A : U \rightarrow \text{End}(\mathbb{R}^{2n})$ tal que:

$$D\xi(w) = \left(\frac{\partial \xi}{\partial \bar{z}}(w) + A(w)\xi \right) d\bar{z}.$$

A partir de ahora vamos a suponer que nuestra variedad compleja es Σ una superficie de Riemann. En este contexto el famoso teorema de *Riemann-Roch* nos dice que el espacio vectorial de secciones holomorfas tiene dimension finita, de hecho la calcula. Lo que trataremos hacer en el resto de la sección es un bosquejo de este resultado para operadores de Cauchy-Riemann reales (y en particular recuperar el resultado original). Usaremos técnicas de espacios de Sobolev, por lo tanto recomendamos al lector no familiarizado consultar 7.2 y 7.3.

Teorema 2.22 (Riemann-Roch). *Sea $\pi : E \rightarrow \Sigma$ un fibrado complejo sobre una superficie de Riemann Σ cerrada y sea D un operador de Cauchy-Riemann real. Entonces extendiendo D a la completación $W^{1,p}$ con $p > 2$, $D : W^{1,p}(E) \rightarrow L^p(\Lambda^{0,1}T^*\Sigma \otimes E)$ tenemos que:*

1. D es Fredholm
2. $\ker D$ y $\text{coker } D$ no dependen de p .
3. El índice de D es:

$$\text{Ind } D = n\chi(\Sigma) + 2\langle c_1(E), [\Sigma] \rangle,$$

donde $c_1(E) \in H^2(M, \mathbb{Z})$ es la clase de Chern introducida en el apéndice 7.4.

La prueba que presentaremos se debe a Taubes en [Tau96]. El plan es el siguiente:

1. Probar que $\ker D$ es de dimensión finita.
2. Estudiar la existencia de un operador adjunto D^* satisfaciendo $\text{Coker } D \cong \ker D^*$. Ver que este operador es esencialmente un operador de Cauchy-Riemann y por lo tanto podemos usar el resultado anterior.

3. Por un método perturbativo, calcular el índice.

Lo que esta detras del primer paso son las estimativas de Calderón-Zygmund que comentamos en el paso anterior.

Lema 2.23. *En las condiciones del teorema $\exists C > 0$ tal que vale la estimativa:*

$$\|\xi\|_{W^{1,p}} \leq C (\|D\xi\|_{L^p} + \|\xi\|_{L^p}), \quad \forall \xi \in W^{1,p}(E).$$

Demostración. Para deducir esta cota notemos que a menos de tomar una partición de la unidad asociada a un cubrimiento por entornos coordenados donde E trivializa estamos en el caso $\xi : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^n$ con soporte compacto en D . Pero entonces basta ver que si $\eta = \frac{\partial \xi}{\partial \bar{z}} + A(z)\xi$ se cumple la cota $\|\xi\|_{W^{1,p}(D)} \leq C (\|\eta\|_{L^p(D)} + \|\xi\|_{L^p(D)})$.

Notar que:

$$\|\xi\|_{W^{1,p}(D)} \leq c \left\| \frac{\partial \xi}{\partial \bar{z}} \right\|_{L^p(D)} = c \|\eta - A\xi\|_{L^p(D)},$$

por Calderón Zygmund (notar que ξ tiene soporte compacto). Por otro lado:

$$\|\xi\|_{W^{1,p}(D)} \leq c' \|\xi\|_{L^p(D)},$$

ya que la inclusión es continua. Juntando ambas estimativas:

$$\begin{aligned} \|\xi\|_{W^{1,p}(D)} &\leq C (\|\eta - A\xi\|_{L^p(D)} + \|\xi\|_{L^p(D)}) \\ &\leq C' (\|\eta\|_{L^p(D)} + \|\xi\|_{L^p(D)}), \end{aligned}$$

donde usamos $\|A\xi\|_{L^p(D)} \leq \|A\|_\infty \|\xi\|_{L^p(D)}$ por ser A suave de soporte compacto y la desigualdad triangular. Esto es lo que queríamos. \square

Corolario 2.23.1. *Sea $\pi : E \rightarrow \Sigma$ un fibrado complejo sobre una superficie de Riemann cerrada y $D : W^{1,p}(E) \rightarrow L^p(\Lambda^{0,1}T^*\Sigma \otimes E)$ un operador de Cauchy-Riemann real. Entonces $\ker D$ tiene dimension finita y su imagen es un subespacio cerrado.*

Demostración. Como la inclusión $\iota : W^{1,p}(E) \rightarrow L^p(E)$ es compacta, el teorema 7.15 implica lo deseado. \square

Pasemos ahora al paso 2 en el bosquejo de la prueba. Fijemos $(\langle \cdot, \cdot \rangle, J)$ una estructura hermitiana en el fibrado y ∇ una conexión hermitiana tal que $\bar{\partial}^\nabla$ es un operador de Cauchy-Riemann (por lo visto anteriormente siempre podemos conseguir estos objetos). En estas condiciones (como se puede ver por ejemplo en 7.1.2) tenemos la estrella de Hodge $*_E : \Omega^k(\Sigma, E) \rightarrow \Omega^{n-k}(\Sigma, E)$ bien definida.

Observación. $*_E$ preserva la descomposición de Hodge, es decir $*_E : \Omega^{p,q}(\Sigma, E) \rightarrow \Omega^{n-p,n-q}(\Sigma, E)$. Esto es porque con la métrica heredada de $\Lambda^k T^*\Sigma \otimes E$ en los espacios $\Lambda^{p,q} T^*\Sigma \otimes E$ hacen que sean dos a dos ortogonales (variando p, q con $p + q = k$).

Ya sabemos por dualidad de Hodge que si denotamos como $d^\nabla : \Omega^k(\Sigma, E) \rightarrow \Omega^{k+1}(\Sigma, E)$ a la extensión de la derivada exterior, entonces su adjunto respecto a las métricas en los espacios de formas $(d^\nabla)^* : \Omega^1(\Sigma, E) \rightarrow \Gamma(E)$ es $(d^\nabla)^* = *_{E}^{-1} \circ d^\nabla \circ *_{E}$ (donde notar que el d^∇ del medio va desde $\Omega^1(\Sigma, E) \rightarrow \Omega^2(\Sigma, E)$). Ahora usando la observación anterior, podemos descomponer este adjunto en la parte antilíneal compleja para obtener $(\bar{\partial}^\nabla)^* : \Omega^{0,1}(\Sigma, E) \rightarrow \Gamma(E)$, dado por la fórmula $(\bar{\partial}^\nabla)^* = *_{E}^{-1} \circ \bar{\partial}^\nabla \circ *_{E}$, notar que el operador del medio va desde $\Omega^{1,0}(\Sigma, E) \rightarrow \Omega^{1,1}(\Sigma, E)$.

Observación. Definamos al *fibrado dual* como $\hat{E} = E \otimes \Lambda^{1,0}T^*\Sigma$, entonces podemos ver a $\bar{\partial}^\nabla : \Omega^{0,1}(\Sigma, E) \rightarrow \Omega^{1,1}(\Sigma, E)$ como un operador de Cauchy-Riemann en el fibrado \hat{E} .

Entonces concluimos que a menos de componer con un isomorfismo lineal (simplemente $*_{E}$), $(\bar{\partial}^\nabla)^*$ es un operador de Cauchy-Riemann, más específicamente el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \Omega^0(\Sigma, \hat{E}) & \xrightarrow{\bar{\partial}^\nabla} & \Omega^{0,1}(\Sigma, \hat{E}) \\ \downarrow *_{E}^{-1} & & \downarrow *_{E}^{-1} \\ \Omega^{0,1}(\Sigma, E) & \xrightarrow{(\bar{\partial}^\nabla)^*} & \Omega^0(\Sigma, E), \end{array}$$

En particular el núcleo de ambos operadores se identifica vía $*_{E}$.

Ahora tomemos D un operador de Cauchy-Riemann real como en las hipótesis del teorema, entonces como observamos anteriormente $D = \bar{\partial}^\nabla + A$, donde $A \in \Gamma(\text{Hom}(E, \Lambda^{0,1}T^*\Sigma \otimes E))$. Denotemos $F := \Lambda^{0,1}T^*\Sigma \otimes E$, entonces notar que simplemente por álgebra lineal existe $A^* : \Gamma(F) \rightarrow \Gamma(E)$ tal que:

$$\langle \xi, A\eta \rangle_F = \langle A^*\xi, \eta \rangle_E,$$

con las métricas naturales en los espacios correspondientes. Por otro lado, por lo discutido anteriormente tenemos que $\langle \eta, \bar{\partial}^\nabla \xi \rangle_{L^2(F)} = \langle (\bar{\partial}^\nabla)^*\eta, \xi \rangle_{L^2(E)}$. De estas dos afirmaciones concluimos que D tiene un operador adjunto respecto a la norma L^2 en el espacio de formas dado por:

$$\begin{aligned} D^* &: \Omega^{0,1}(\Sigma, E) \rightarrow \Gamma(E) \\ D^* &= (\bar{\partial}^\nabla)^* + A^*. \end{aligned}$$

Observación. Nuevamente obtenemos que D^* es conjugado vía los isomorfismos lineales suaves $*_{E}$ a un operador de Cauchy-Riemann real en \hat{E} . Esto es simplemente porque el término de A es una perturbación de $\bar{\partial}^\nabla$ de orden 0.

Extendamos D^* a la clausura Sobolev obteniendo $D^* : W^{1,p}(F) \rightarrow L^p(E)$. Notar que por la observación anterior el núcleo de este operador tiene dimensión finita y su imagen es cerrada, ya que a menos de componer por un isomorfismo lineal, estamos en el paso 1.

Proposición 2.24. *Usando la inclusión $W^{1,p} \hookrightarrow L^p$ tenemos que:*

$$\begin{aligned} L^p(F) &= \text{im} D \oplus \ker D^* \\ L^p(E) &= \text{im} D^* \oplus \ker D. \end{aligned}$$

En particular cocientando obtenemos que $\ker D \cong \text{coker} D^$ y $\text{coker} D^* \cong \ker D^*$. Por los resultados de regularidad, todo elemento de $\ker D$ y $\ker D^*$ son suaves y por lo tanto estos subespacios no dependen del $p > 2$ elegido.*

Demostración. Probemos sólo que $L^p(F) = \text{im} D \oplus \ker D^*$, ya que la otra descomposición es análoga. Observemos primero que $\text{im} D \cap \ker D^* = \{0\}$ ya que si $D^*\alpha = 0$ y además $\alpha = D\beta$ entonces:

$$0 = \langle D^*\alpha, \beta \rangle_{L^2(E)} = \langle \alpha, \alpha \rangle_{L^2(F)},$$

por lo tanto $\alpha = 0$. Veamos ahora que $\text{im} D + \ker D^* = L^p(F)$. Notemos que el subespacio $\text{im} D + \ker D^*$ es cerrado ya que es la suma de un subespacio cerrado con uno de dimensión finita (por el paso 1). Basta ver entonces que el subespacio no es denso, supongamos que no, entonces por Hahn-Banach existe un $\beta \in L^q(F)$ no nulo, donde $1/p + 1/q = 1$ tal que:

$$\begin{aligned} \langle \beta, D\xi \rangle_{L^2(F)} &= 0, \quad \forall \xi \in W^{1,p}(E) \text{ y} \\ \langle \beta, \alpha \rangle_{L^2(F)} &= 0, \quad \forall \alpha \in \ker D^*. \end{aligned}$$

En particular la primera ecuación vale $\forall \xi \in \Gamma(E)$, por lo tanto β es una solución débil para $D^*\beta = 0$. Pero ya vimos que el núcleo de D^* es conjugado por un mapa C^∞ al núcleo de un operador de Cauchy-Riemann real, que por los resultados de regularidad elíptica, todo elemento de aquí es suave. Concluimos que β es suave y $D^*\beta = 0$ (en un sentido fuerte). Entonces $\langle \beta, \beta \rangle_{L^2(F)} = 0$ por la segunda condición, pero esto nos dice $\beta = 0$ lo cual es absurdo. \square

Con esto concluimos la prueba de las dos primeras partes del teorema de Riemann-Roch. Nos falta el calculo del índice del operador, esta es la idea más interesante de la prueba. Los detalles deben ser rellenados del artículo de Taubes [Tau96], espero que al menos la estrategia quede clara.

Tomemos $A \in \Gamma(\text{End}(E, F))$ una sección genérica del fibrado $\text{End}(E, F)$, entonces A induce un mapa $A : W^{1,p}(E) \rightarrow W^{1,p}(F) \hookrightarrow L^p(F)$, donde la última inclusión es compacta (esto es porque A no deriva las secciones). Concluimos que si $\sigma > 0$ es un real positivo arbitrario entonces:

$$D + \sigma A : W^{1,p}(E) \rightarrow L^p(F),$$

es simplemente una perturbación compacta del operador de Fredholm D . La idea es pensar lo siguiente: ¿qué pasa con el núcleo de $D + \sigma A$ cuando $\sigma \rightarrow \infty$?

Es intuitivamente obvio que las secciones en el núcleo deben concentrar la mayor cantidad de norma L^2 posible alrededor de los 0's de A , ya que fuera de estos, a σ lo podemos hacer suficientemente grande para que $D\xi + \sigma A\xi$ no se pueda anular. Formalizar este punto implica probar una formula de tipo Bochner-Weitzenboch pero los detalles exceden las expectativas del texto.

Notar que sin pérdida de generalidad podemos suponer que D es un operador de Cauchy-Riemann (no real) ya que dado dos operadores de Cauchy-Riemann reales, uno es un perturbado compacto del otro. Otra simplificación que haremos es que E es un *fibrado por líneas*, es decir $\dim_{\mathbb{C}} E = 1$. Ahora por lo visto anteriormente, si σ es suficientemente grande, esencialmente podemos a ver a $\xi \in \ker(D + \sigma A)$ en un entorno de un cero de A . Supongamos que A tiene ceros no degenerados, entonces dividamos los ceros de A entre los positivos y los negativos. Tomemos una trivialización cercana a un cero positivo, donde el

operador $D + \sigma A$ se vea como:

$$\begin{aligned} W^{1,p}(D, \mathbb{C}) &\rightarrow L^p(D, \mathbb{C}) \\ f &\mapsto \frac{\partial f}{\partial z} + af, \end{aligned}$$

donde $a \in \mathbb{C}$. Entonces notar que la ecuación $\frac{\partial f}{\partial z} + af = 0$ tiene solución $f(z) = e^{-a\lambda|z|^2}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Por lo tanto ese cero cuenta como un subespacio de dimensión 1 (real) del núcleo. Haciendo la misma cuenta con los ceros negativos y el operador adjunto (que en coordenadas quedaría $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} + a\bar{a}$) obtenemos que cada cero negativo contribuye a un subespacio de dimensión 1 de $\text{coker}(D + \sigma A)$.

De lo anterior concluimos que $\text{ind}(D + \sigma A) = \text{ind} D = \langle e(\text{Hom}(E, F)), [\Sigma] \rangle$, donde $e(\text{Hom}(E, F))$ es la *clase de Euler* (vease 7.4). Pero notar que:

$$\text{Hom}(E, F) \cong E \otimes F \cong \Lambda^{0,1} T^* \Sigma \otimes \mathbb{C} \otimes E^2 \cong T\Sigma \otimes E^2,$$

donde el ultimo isomorfismo puede verse identificando $\Lambda^{0,1} T^* \Sigma \otimes \mathbb{C}$ con $T^* \Sigma$ como espacios vectoriales reales. Por lo tanto:

$$e(\text{Hom}(E, F)) = e(T\Sigma) + 2e(E).$$

Y como en dimensión 2 la clase de Euler y c_1 coinciden, concluimos lo deseado.

Para culminar la “prueba” solamente nos bastaría quitar la hipótesis de que E es un fibrado por líneas, esto es por el no trivial *teorema de Grothendieck* que nos dice que si $E \rightarrow \Sigma$ es un fibrado complejo sobre una superficie de Riemann, entonces existe una descomposición de E como una suma directa de fibrados por líneas $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_n$ (en particular esto nos dice que $c_1(E)$ clasifica completamente a los fibrados complejos sobre superficies de Riemann). Esto termina la prueba del teorema de Riemann-Roch.

El siguiente corolario de Riemann-Roch nos va a ser útil en la práctica:

Corolario 2.24.1. *Sea $\pi : E \rightarrow M$ un fibrado complejo por rectas sobre la superficie de Riemann Σ cerrada. Tomemos D un operador de Cauchy-Riemann real, entonces:*

1. Si $\langle c_1(E), [\Sigma] \rangle < 0$, entonces D es inyectivo.
2. Si $\langle c_1(E), [\Sigma] \rangle > -\chi(E)$, entonces D es sobreyectivo.

Demostración. 1. Supongamos que $\ker D \neq \{0\}$, entonces existe una sección holomorfa $\eta \in \Gamma(E)$ (la sección es suave por regularidad elíptica). Esta sección tiene una cantidad finita de ceros (por ser holomorfa) y cada uno de estos cuentan como un número positivo en $\langle e(E), [\Sigma] \rangle$, donde $e(E)$ es la clase de Euler. Pero $e(E) = c_1(E)$ porque $\dim_{\mathbb{C}} E = 1$, por lo tanto $\langle c_1(E), [\Sigma] \rangle \geq 0$ lo cual es absurdo.

2. Como vimos antes, el operador D es sobreyectivo si y solamente si D^* es inyectivo, D^* es un operador en el fibrado dual $F = \Lambda^{0,1} T^* \Sigma \otimes E$ para el cual:

$$\langle c_1(F), [\Sigma] \rangle = -\langle c_1(E), [\Sigma] \rangle - \chi(\Sigma),$$

por una cuenta similar a la de arriba. Por lo tanto basta aplicar la parte anterior.

□

3 Nociones básicas sobre Curvas Pseudoholomorfas

Durante toda nuestra discusión vamos a estar en el contexto (M, ω) variedad simpléctica. Por lo discutido en el capítulo anterior a (M, ω) le podemos dar estructura de variedad casi compleja con una $J \in \mathcal{J}(M, \omega)$. En este contexto M tiene naturalmente la métrica asociada $\langle v, w \rangle := g_J(v, w) := \omega(Jv, w)$, siempre que aparezcan conexiones va a ser Levi-Civita con esa métrica (a no ser que lo explicita).

Definición 3.1. Sea (Σ, j) una superficie de Riemann con su estructura compleja. Una curva pseudoholomorfa (o J -holomorfa) en (M, J) es un mapa diferenciable $u : \Sigma \rightarrow M$ tal que el diferencial es lineal complejo respecto a las estructuras, es decir $du \circ j = J \circ du$

Observación. • En el capítulo anterior mencionamos que en dimensión 2, toda variedad casi-compleja es de hecho compleja. Por lo tanto bastaba decir que (Σ, j) era una superficie equipada con una estructura casi-compleja.

- Definamos como X a la preimagen de los puntos críticos, es decir el conjunto:

$$X = u^{-1}\{u(z) : z \in \Sigma, d_z u = 0\}.$$

Entonces $u|_{\Sigma \setminus X}$ es una inmersión, por lo tanto su imagen $C \subset M$ es una subvariedad inmersa y la condición $du \circ j = J \circ du$ nos dice que $J(TC) = TC$. Es decir TC es un subfibrado complejo de TM , pero es sencillo ver que un subfibrado complejo de dimensión 1 (compleja) cumple que $\omega|_{TC}$ es una forma simpléctica.

- Inspirados por la observación anterior, decimos que una subvariedad $C \subset M$ es simpléctica si ω se restringe a una forma simpléctica en C . Vimos que si tenemos una curva pseudoholomorfa inmersa entonces su imagen es simpléctica, de hecho es sencillo chequear el recíproco, si tenemos una subvariedad simpléctica de dimensión 2 (real) entonces existe una estructura casi-compleja J compatible con ω tal que C es la imagen de una curva pseudoholomorfa.

Vamos a reformular esta definición usando el lenguaje introducido en el capítulo anterior. Como tenemos una estructura casi compleja el espacio $\Omega^1(\Sigma, u^*TM)$ se descompone naturalmente como $\Omega^{1,0}(\Sigma, u^*TM) \oplus \Omega^{0,1}(\Sigma, u^*TM)$ y en particular tenemos que $du = \partial_J u + \bar{\partial}_J u$ donde:

$$\partial_J u = \frac{1}{2}(du - J \circ du \circ j), \quad \bar{\partial}_J u = \frac{1}{2}(du + J \circ du \circ j)$$

Son las proyecciones en $\Omega^{1,0}(\Sigma, u^*TM)$ y $\Omega^{0,1}(\Sigma, u^*TM)$ respectivamente.

Con estas definiciones tenemos que $u \in C^\infty(\Sigma, M)$ es pseudoholomorfa si y solamente si $\bar{\partial}_J u = 0$. Lo importante de este operador es que su linealización es un operador de Cauchy-Riemann real como veremos más adelante.

La expresión de $\bar{\partial}_J u$ en coordenadas $z = x + iy$ es:

$$\bar{\partial}_J u = \frac{1}{2}(\partial_x u + J(u)\partial_y u)dx - \frac{1}{2}J(u)(\partial_x u + J(u)\partial_y u)dy \quad (3)$$

Entonces en coordenadas la ecuación que satisface una curva pseudoholomorfa es $\partial_x u + J(u)\partial_y u = 0$, la intuición que tenemos que tener es que esto es una “perturbación” de la ecuación de Cauchy Riemann clásica ($\frac{\partial}{\partial \bar{z}} u = 0$).

3.1 Regularidad

Esta sección es técnica y se recomienda evitar las demostraciones en una primera lectura sobre el tema. Vamos a usar las herramientas de espacios de Sobolev probadas en 7.2.

Las curvas pseudoholomorfas son soluciones de $\bar{\partial}_J u = 0$ con $u \in C^\infty(\Sigma, M)$, el problema es que este espacio no tiene una topología agradable para buscar soluciones (es una variedad de Frechet). A estas soluciones las vamos a buscar en espacios más flexibles como $W^{k,p}(\Sigma, M)$ y nos gustaría que $\bar{\partial}_J u = 0$ implicara en este espacio que u es regular como queríamos originalmente, éste es uno de los objetivos de esta sección.

De hecho vamos a conseguir mucho más, no sólo las soluciones están en C^∞ sino que la topología que induce $W^{k,p}(\Sigma, M)$ en $\bar{\partial}_J^{-1}(0)$ es la misma que la inducida por $C^\infty(\Sigma, M)$.

Como la pregunta es local a menos de tomar cartas tenemos $u : D \rightarrow B^{2n}$ J -holomorfa para cierta $J \in \mathcal{J}^l(B^{2n})$ (estructuras casi complejas C^l en la bola, si no escribo la l es porque la estructura es suave). Notar que siempre podemos elegir las cartas para que $J(0) = J_0$ y $u(0) = 0$.

Por la ecuación 3 tenemos que u satisface:

$$\partial_x u + J(u)\partial_y u = 0.$$

A partir de ahora denotemos a los espacios $W^{k,p}(D) := W^{k,p}(D, B^{2n})$. Diremos que $u \in W^{k,p}(D)$ es pseudoholomorfa para cierta $J \in \mathcal{J}^l(B^{2n})$ si satisface la ecuación anterior en un sentido débil.

Teorema 3.1. *Sea $p \in (2, \infty)$ y $J \in \mathcal{J}^l(B^{2n})$ con $J(0) = J_0$ y $u \in W^{1,p}(D)$ pseudoholomorfa con $u(0) = 0$ entonces u es de clase $W_{loc}^{l+1}(D)$.*

Prueba del caso $l=1$. Definamos los cocientes incrementales para cualquier $f : D \rightarrow \mathbb{C}^n$ como $f^h(x, y) = \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$, notar que estos satisfacen que $(fg)^h = f^h g + fg^h$.

Por la misma prueba que en el teorema 2.14 basta ver que existe $\varepsilon > 0$ y $C > 0$ tal que:

$$\|u^h\|_{W^{1,p}(D_\varepsilon)} \leq C.$$

Tomemos ρ una función chichon con $\rho|_{D_{\frac{1}{2}}} = 1$ y con soporte en D , definamos $\rho_\varepsilon(z) = \rho(\frac{z}{\varepsilon})$. Tenemos por las estimativas de Calderon-Zygmund que:

$$\|u^h\|_{W^{1,p}(D_\varepsilon)} \leq \|\rho_\varepsilon u^h\|_{W^{1,p}(D_{2\varepsilon})} \leq C \left\| \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\rho u^h) \right\|_{L^p(D_{2\varepsilon})}.$$

Entonces notemos que:

$$2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\rho u^h) = \partial_x(\rho u^h) + J(u) \partial_y(\rho u^h) + (J_0 - J(u)) \partial_y(\rho_\varepsilon u^h).$$

El último término lo acotamos como:

$$\|(J_0 - J(u)) \partial_y(\rho_\varepsilon u^h)\|_{L^p(D_{2\varepsilon})} \leq \|J_0 - J(u)\|_{C^0(D_{2\varepsilon})} \|\rho_\varepsilon u^h\|_{W^{1,p}(D_{2\varepsilon})}.$$

Pero $\|J_0 - J(u)\|_{C^0(D_{2\varepsilon})} = C_1(\varepsilon)$ que tiende a 0 cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ ya que $J(0) = J_0$.

Por otro lado tenemos:

$$\begin{aligned} \partial_x(\rho u^h) + J(u) \partial_y(\rho u^h) &= 2 \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \rho_\varepsilon \right) u^h + (J(u) - J_0)(\partial_y \rho_\varepsilon) u^h + \rho_\varepsilon (\partial_x u^h + J(u) \partial_y u^h) \\ &= 2 \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \rho_\varepsilon \right) u^h + (J(u) - J_0)(\partial_y \rho_\varepsilon) u^h + \rho_\varepsilon ((\partial_x u + J(u) \partial_y u)^h \\ &\quad - J(u)^h \partial_y u) \\ &= 2 \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \rho_\varepsilon \right) u^h + (J(u) - J_0)(\partial_y \rho_\varepsilon) u^h - \rho_\varepsilon J(u)^h \partial_y u. \end{aligned}$$

Notemos que los primeros dos términos $\|2(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \rho_\varepsilon) u^h\|_{L^p(D_{2\varepsilon})}$ y $\|(J(u) - J_0)(\partial_y \rho_\varepsilon) u^h\|_{L^p(D_{2\varepsilon})}$ están uniformemente acotados cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ porque $u^h \rightarrow \partial_x u$ en L^p cuando $h \rightarrow 0$.

Por otro lado $|\varepsilon J(u)^h| \leq \|J\|_{C^1(D_{2\varepsilon})} |u^h|$ entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} \|\rho_\varepsilon J(u)^h \partial_y u\|_{L^p(D_{2\varepsilon})} &\leq \|J\|_{C^1(D_{2\varepsilon})} \|\rho_\varepsilon u^h\|_{C^0(D_{2\varepsilon})} \|\partial_y u\|_{L^p(D_{2\varepsilon})} \\ &\leq C_2(\varepsilon) \|\rho_\varepsilon u^h\|_{W^{1,p}(D_{2\varepsilon})}, \end{aligned}$$

donde en el último paso usamos el encaje de Sobolev $W^{1,p}(D_{2\varepsilon}) \hookrightarrow C^0(D_{2\varepsilon})$ y absorbimos a $\|u\|_{W^{1,p}(D_{2\varepsilon})}$ en la constante. $C_2(\varepsilon)$ es directamente proporcional a $\|u\|_{W^{1,p}(D_{2\varepsilon})}$ por lo tanto $C_2(\varepsilon) \rightarrow 0$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Concluimos de todo esto que:

$$\|\rho_\varepsilon u^h\|_{W^{1,p}(D_{2\varepsilon})} \leq C' + C'(\varepsilon) \|\rho_\varepsilon u^h\|_{W^{1,p}(D_{2\varepsilon})},$$

donde $C'(\varepsilon) \rightarrow 0$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ y por lo tanto en algún momento es menor que 1 y podemos despejar:

$$\|\rho_\varepsilon u^h\|_{W^{1,p}(D_{2\varepsilon})} \leq \frac{C'}{1 - C'(\varepsilon)}.$$

Como queríamos. □

Observación. El paso inductivo lo vamos a hacer observando que el 1-jet de una curva pseudoholomorfa lo podemos considerar una curva pseudoholomorfa para cierta \hat{J} en $D \times B^{2n} \times \mathbb{C}^n$. Solo vamos a ver esto localmente pero globalmente sigue siendo cierto como se explica en el anexo del segundo capítulo de [AL94].

Denotemos a $\xi = \partial_x u$ y $\eta = \partial_y u$, derivando respecto a x la expresión $\xi + J(u)\eta = 0$ obtenemos:

$$\partial_x \xi + d_u J(\xi) \circ J\xi + J(u) \partial_y \xi = 0.$$

Y haciendo lo mismo para η obtenemos que:

$$\partial_x \eta + d_u J(\eta) \eta + J(u) \partial_y \eta = 0.$$

Definamos la estructura \hat{J} en $D \times B^{2n} \times \mathbb{C}^n$ como:

$$\hat{J}(z, p, X) = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & J(p) & 0 \\ A(p, X) & 0 & J(p) \end{pmatrix},$$

donde $A(p, X) = (d_u J(X) X d_u J(X) JX)$. Entonces tomando el mapa $\hat{u}_x(z) = (z, u(z), \partial_x u)$ es sencillo ver que cumple la ecuación $\partial_x \hat{u}_x + \hat{J}(\hat{u}_x) \partial_y \hat{u}_x = 0$ y lo mismo para $\hat{u}_y(z) = (z, u(z), \partial_y u(z))$. Notar que si J es de clase C^l entonces \hat{J} es de clase C^{l-1} .

Final de la prueba. Ya probamos el caso $l = 1$, asumiendo que el teorema es válido para J estructuras de clase C^{l-1} , entonces si $J \in \mathcal{J}^l(B^{2n})$ tenemos que toda curva J -holomorfa es de clase $W_{loc}^{l,p}$.

Por la observación anterior sabemos que \hat{u}_x como antes es pseudoholomorfa para la estructura \hat{J} que es de clase C^{l-1} entonces por inducción sabemos que \hat{u}_x es de clase $W_{loc}^{l,p}$. Haciendo lo mismo para \hat{u}_y tenemos que u es de clase $W_{loc}^{l+1,p}$ como queríamos. \square

Concluimos entonces que si J es C^l , por el teorema de encaje de Sobolev toda curva J -holomorfa es de clase C^l . El siguiente teorema nos va a decir que la topología C^l inducida en el espacio de curvas pseudoholomorfas coincide con la topología inducida por $W^{1,p}$.

Teorema 3.2. *Sea $J_k \in \mathcal{J}^l(B^{2n})$ sucesión tal que $J_k \rightarrow J \in \mathcal{J}^l(B^{2n})$ en la topología C^l y sean u_k curvas J_k -holomorfas tal que $u_k \rightarrow u$ en la topología en $W^{1,p}(D)$ con $p \in (2, \infty)$ entonces u_k convergen $W_{loc}^{l+1,p}$ a u .*

Demostración. Probemos primero para $l = 1$, las ideas de la prueba son similares a las del caso anterior. Sabemos que u_k y u son de clase $W^{2,p}$ y sea ρ_ε como antes, entonces:

$$\|u - u_k\|_{W^{2,p}(D_\varepsilon)} \leq \|\rho_\varepsilon(u - u_k)\|_{W^{2,p}(D_{2\varepsilon})} \leq C_1 \left\| \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\rho_\varepsilon(u - u_k)) \right\|_{W^{1,p}(D_{2\varepsilon})}.$$

Tratemos de estimar el último término, tenemos que:

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\rho_\varepsilon u_k) &= \partial_x (\rho_\varepsilon u_k) + J_k(u_k) \partial_y (\rho_\varepsilon u_k) + (J_0 - J_k(u_k)) \partial_y (\rho_\varepsilon u_k) \\ &= 2 \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \rho_\varepsilon \right) u_k + (J_k(u_k) - J_0) \partial_y \rho_\varepsilon u_k + (J_0 - J_k(u_k)) \partial_y (\rho_\varepsilon u_k), \end{aligned}$$

donde acá usamos que $\partial_x u_k + J_k(u_k) \partial_y u_k = 0$. Notar que tenemos la misma expresión para $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} u$ (sacando las k de todos lados) entonces:

$$\begin{aligned}
2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\rho_\varepsilon u - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\rho_\varepsilon u_k)) &= 2(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\rho_\varepsilon)(u_k - u) + (J(u) - J_0)\partial_y \rho_\varepsilon u \\
&\quad + (J_0 - J_k(u_k))\partial_y \rho_\varepsilon u_k + (J_0 - J(u))\partial_y(\rho_\varepsilon u) \\
&\quad + (J_k(u_k) - J_0)\partial_y(\rho_\varepsilon u_k) \\
&= 2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\rho_\varepsilon(u_k - u) + (J(u) - J_0)\partial_y \rho_\varepsilon(u - u_k) \\
&\quad + (J(u) - J_k(u_k))\partial_y \rho_\varepsilon u_k + (J_k(u_k) - J(u))\partial_y(\rho_\varepsilon u) \\
&\quad + (J_k(u_k) - J_0)\partial_y(\rho_\varepsilon(u_k - u)).
\end{aligned}$$

Tomando norma $W^{1,p}(D_{2\varepsilon})$ es fácil ver que los dos primeros términos se van a 0 para cada $\varepsilon > 0$ fijo porque $u_k \rightarrow u$ en la norma $W^{1,p}$. Para el tercer término notar que como J es C^1 entonces $J_k(u_k) \rightarrow J(u)$ en norma $W^{1,p}$, entonces el tercer término también va a 0. El cuarto término se acota de manera similar notando que $\|\partial_y(\rho_\varepsilon u)\|_{W^{1,p}(D_{2\varepsilon})} \leq \|\rho_\varepsilon u\|_{W^{2,p}(D_{2\varepsilon})}$ si ε es suficientemente chico por el Teorema anterior.

Ver que el último término va a 0 termina con la prueba. Notemos que:

$$\begin{aligned}
\|(J_k(u_k) - J_0)\partial_y(\rho_\varepsilon(u_k - u))\|_{W^{1,p}(D_{2\varepsilon})} &= \|(J_k(u_k) - J_0)\partial_y(\rho_\varepsilon(u_k - u))\|_{L^p(D_{2\varepsilon})} \\
&\quad + \|dJ_k \circ du(\partial_y(\rho_\varepsilon(u_k - u)))\|_{L^p(D_{2\varepsilon})} \\
&\quad + \|(J_k(u_k) - J_0)d(\partial_y(\rho_\varepsilon(u_k - u)))\|_{L^p(D_{2\varepsilon})}.
\end{aligned}$$

Fijemos un $\varepsilon > 0$ lo suficientemente chico para que si k es suficientemente grande entonces:

$$\|J_0 - J_k(u_k)\|_{C^0(D_{2\varepsilon})} \leq \frac{1}{3C_1}.$$

Por lo tanto el primer término queda acotado por:

$$\|(J_k(u_k) - J_0)\partial_y(\rho_\varepsilon(u_k - u))\|_{L^p(D_{2\varepsilon})} \leq \frac{1}{3C_1}\|\rho_\varepsilon(u_k - u)\|_{W^{1,p}(D_{2\varepsilon})}.$$

Que tiende a 0 con k .

El último termino cumple que:

$$\|(J_k(u_k) - J_0)d(\partial_y(\rho_\varepsilon(u_k - u)))\|_{L^p(D_{2\varepsilon})} \leq \frac{1}{C_3}\|\rho_\varepsilon u - \rho_\varepsilon u_k\|_{W^{2,p}(D_{2\varepsilon})}.$$

Y el segundo:

$$\begin{aligned}
\|dJ_k \circ du(\partial_y(\rho_\varepsilon(u_k - u)))\|_{L^p(D_{2\varepsilon})} &\leq \|J\|_{C^1(D_{2\varepsilon})}\|du\|_{C^0(D_{2\varepsilon})}\|\partial_y(\rho_\varepsilon(u_k - u))\|_{C^0(D_{2\varepsilon})} \\
&\leq C_2\|J\|_{C^1(D_{2\varepsilon})}\|u\|_{W^{1,p}(D_{2\varepsilon})}\|\rho_\varepsilon(u_k - u)\|_{W^{2,p}(D_{2\varepsilon})}.
\end{aligned}$$

Donde usamos los encajes de Sobolev. Ahora, achicando ε si fuese necesario, podemos asumir que:

$$\|u\|_{W^{1,p}(D_{2\varepsilon})} < \frac{1}{3C_1C_2\|J\|_{C^1(B^{2n})}}.$$

Entonces concluimos de todo lo dicho que:

$$\|\rho_\varepsilon(u - u_k)\|_{W^{2,p}(D_{2\varepsilon})} \leq f(\|u - u_k\|_{W^{1,p}(D_{2\varepsilon})}) + \frac{2}{3}\|\rho_\varepsilon(u - u_k)\|_{W^{2,p}(D_{2\varepsilon})}.$$

Y de acá concluimos lo deseado. \square

Observación. Notemos que podemos definir el espacio de moduli universal local (el porque del nombre va a quedar claro en el capítulo 4) como:

$$\mathcal{M}^{1,p}(B^{2n}; \mathcal{J}^l) = \{(u, J) \in W^{1,p}(D) \times \mathcal{J}^l(B^{2n}) : \partial_x u + J(u)\partial_y u = 0\}.$$

Esto hereda de $W^{1,p}(D) \times \mathcal{J}^l(B^{2n})$ una topología, pero por el primer teorema de la sección todo elemento acá está en el espacio:

$$\mathcal{M}_r^{1,p}(B^{2n}; \mathcal{J}^l) = \{(u, J) \in \mathcal{M}^{1,p}(B^{2n}; \mathcal{J}^l) : u|_{D_r} \in W^{l+1,p}(D_r)\},$$

donde $r < 1$. Pongámosle a este espacio la norma $\|u\| = \|u\|_{W^{1,p}(D)} + \|u|_{D_r}\|_{W^{l+1,p}(D_r)}$. El segundo teorema nos dice entonces que la inclusión $\mathcal{M}_r^{1,p}(B^{2n}; \mathcal{J}^l) \hookrightarrow \mathcal{M}^{1,p}(B^{2n}; \mathcal{J}^l)$ es un homeomorfismo con las topologías mencionadas.

El siguiente corolario es fundamental en la teoría y lo vamos a explotar en el resto de la tesis, especialmente en el capítulo 5. Básicamente nos dice que cotas de gradiente nos dan cotas C^∞ .

Corolario 3.2.1. Sean $p \in (2, \infty)$, $J_k \in \mathcal{J}^l(B^{2n})$ tal que $J_k \rightarrow J \in \mathcal{J}^l(B^{2n})$ en la topología C^l , y $\{u_k\}_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \subset W^{1,p}(D)$ curvas J_k -holomorfas tal que $\|u_k\|_{W^{1,p}} \leq C \ \forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. En estas condiciones u_k tiene una subsucesión convergiendo $W_{loc}^{l+1,p}$ a una curva J -holomorfa u .

Demostración. Como el encaje $W^{1,p}(D) \hookrightarrow C^0(D)$ es compacto entonces tenemos que u_k tiene una subsucesión (que la vamos a seguir denotando u_k) convergiendo C^0 a cierta $u \in C^0(D)$, a menos de cambiar las coordenadas asumamos que $u(0) = 0$ y $J(0) = J_0$.

Veamos que en verdad podemos conseguir cotas en $W_{loc}^{l+1,p}$, esto es porque la inclusión antes mencionada $\mathcal{M}_r^{1,p}(B^{2n}; \mathcal{J}^l) \hookrightarrow \mathcal{M}^{1,p}(B^{2n}; \mathcal{J}^l)$ es un homeomorfismo. Entonces para que esté acotada en $\mathcal{M}_r^{1,p}(B^{2n}; \mathcal{J}^l)$ basta que esté cerca del 0 en $\mathcal{M}^{1,p}(B^{2n}; \mathcal{J}^l)$. Notemos que si definimos $u_k^\varepsilon(z) = u_k(\varepsilon z)$ entonces:

$$\|u_k^\varepsilon\|_{L^p(D)}^p = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{D_\varepsilon} |u|^p dx dy \leq \pi \|u\|_{C^0(D_\varepsilon)}^p.$$

Además:

$$\|du_k^\varepsilon\|_{L^p(D)}^p = \varepsilon^p \int_D |du(\varepsilon z)|^p dx dy = \varepsilon^{p-2} \int_{D_\varepsilon} |du|^p dx dy \leq \varepsilon^{p-2} \|du\|_{L^p(D_\varepsilon)}^p.$$

Notar que ambas normas van a 0 cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Por lo tanto, si $\varepsilon > 0$ es suficientemente chico tenemos que la sucesión está en un entorno de $(J, 0)$ y por lo tanto vale la cota $\|u_k^\varepsilon\|_{W^{l+1,p}(D_r)} \leq C$ para cierta constante C , como queríamos. Esto implica que $\|u_k\|_{W^{l+1,p}(D_\delta)} \leq C$ para cierta $\delta > 0$.

Pero entonces como $\|u_k\|_{W^{l+1,p}(D_\delta)} \leq C$ y el encaje $W^{l+1,p}(D_\delta) \hookrightarrow W^{l,p}(D_\delta)$ es compacto tenemos que u_k tiene una subsucesión convergiendo en $W^{l,p}$ a cierta \tilde{u} , y como esta \tilde{u} es continua tiene que coincidir con la u anterior. Ahora, por el teorema anterior, la convergencia tiene que ser en $W^{l+1,p}$ como queríamos. \square

3.2 Algunas propiedades locales

Anteriormente hicimos el comentario de que la ecuación $\partial_x u + J(u)\partial_y u = 0$ en algún sentido es una “perturbación” de la ecuación de Cauchy-Riemann clásica $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} u = 0$, lo primero que vamos a hacer es formalizar de alguna forma este comentario y el resto será esencialmente un corolario.

Queremos entender lo que está pasando localmente, por lo tanto, al igual que en la sección anterior, basta ver a $u : D \rightarrow \mathbb{C}^n$ y asumir que en algún entorno del $0 \in \mathbb{C}^n$ hay una J estructura casi compleja con $J(0) = J_0$ tal que u es J -holomorfa.

El teorema fundamental es:

Teorema 3.3 (Carleman). *Sean $p \in (2, \infty)$, $\bar{J} \in W^{1,p}(D, Gl_{2n}(\mathbb{R}))$ con $\bar{J}(0) = J_0$, $A \in L^p(D, End(\mathbb{R}^{2n}))$ y $u \in W^{1,p}(D)$ con $u(0) = 0$ satisfaciendo:*

$$\partial_x u(z) + \bar{J}(z)\partial_y u(z) + A(z)u(z) = 0.$$

Entonces existen $\varepsilon > 0$, $\Phi \in W^{1,p}(D_\varepsilon, Gl_{2n}(\mathbb{R}))$ con $\Phi(0) = Id$ y $f : D_\varepsilon \rightarrow \mathbb{C}^n$ holomorfa tal que $\bar{J} \circ \Phi = \Phi \circ J_0$ y $u(z) = \Phi(z)f(z)$.

Observación. • En nuestro contexto, como $J \in \mathcal{J}(B^{2n})$ es suave y $u \in W^{1,p}(D)$, entonces $\bar{J}(z) := J(u(z))$ cae en las hipótesis de arriba.

- Geométricamente lo que está pasando lo podemos ver en el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} (D \times \mathbb{C}^n, \bar{J}) & \xrightarrow{Id \times \Phi} & (D \times \mathbb{C}^n, J_0) \\ u \uparrow & & f \uparrow \\ D & \xrightarrow{Id} & D \end{array}$$

Pensemos a $D \times \mathbb{C}^n$ como un fibrado vectorial con su estructura compleja \bar{J} , entonces el Teorema nos da un morfismo Φ que nos endereza el fibrado y manda las secciones u satisfaciendo la ecuación de arriba a secciones holomorfas (al menos localmente).

Demostración.

- *Paso 1:* La parte difícil del Teorema es la siguiente:

Afirmación. El Teorema es válido cuando $\bar{J} = J_0$ y $A \in L^p(D, End(\mathbb{R}^{2n}))$ es lineal complejo (es decir $A \circ J_0 = J_0 \circ A$).

Para ver la afirmación estudiemos el problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} v + A(z)v(z) = 0 \\ v(0) = v_0, \end{cases}$$

que por la proposición 2.18 tiene solución para $\varepsilon > 0$ pequeño. Siguiendo la motivación geométrica, construyamos una base local holomorfa del fibrado y con esto la transformación lineal Φ . Tomemos v_1, \dots, v_n soluciones como arriba definidas en D_ε para algún $\varepsilon > 0$ tal que $\{v_i(0)\}_{i=1, \dots, n}$ sea la base canónica de \mathbb{C}^n . Definamos $\Phi : D_\varepsilon \rightarrow \text{End}(\mathbb{R}^{2n})$, donde en cada $z \in D$ $\Phi(z)$ es la transformación lineal mandando la base canónica (compleja) a $v_1(z), \dots, v_n(z)$.

Tenemos que $\Phi \in W^{1,p}(D_\varepsilon, \text{End}(\mathbb{R}^{2n}))$, en particular, es continua y como Φ es invertible en 0, también lo es en un entorno de este, por lo tanto a menos de achicar ε tenemos que Φ es invertible. Por construcción Φ es lineal compleja y satisface $\partial_x \Phi + J_0 \partial_y \Phi + A\Phi = 0$ (acá usamos que A es lineal compleja).

Ahora definamos $f \in W^{1,p}(D_\varepsilon)$ como $u(z) = \Phi(z)f(z)$ y veamos qué ecuación diferencial satisface:

$$\begin{aligned} \partial_x(\Phi f) + J_0 \partial_y(\Phi f) + (A\Phi)f &= 0 \\ \Rightarrow \Phi(\partial_x f) + J_0 \Phi(\partial_y f) + (\partial_x \Phi)f + (J_0 \partial_y \Phi)f + (A\Phi)f &= 0. \end{aligned}$$

Pero por la ecuación que satisface Φ tenemos que:

$$\Phi(\partial_x f + J_0 \partial_y f) = 0.$$

Y como Φ es invertible, concluimos que $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f = 0$ como queríamos.

A partir de ahora veamos que a menos de componer por transformaciones lineales invertibles estamos en estas hipótesis.

- *Paso 2:* Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $\bar{J} = J_0$

Como todas las estructuras complejas son equivalentes a menos de un cambio de base, tenemos que existe $P : D \rightarrow \text{Gl}_{2n}(\mathbb{R})$ tal que $P^{-1} \circ \bar{J} \circ P = J_0$ y además viendo la construcción de tal P se puede observar que es tan regular como \bar{J} . Definiendo $v : D \rightarrow \mathbb{C}^n$ por la ecuación $P(z)v(z) = u(z)$ y haciendo la misma cuenta que el paso anterior llegamos a que v satisface:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} v + \tilde{A}(z)v(z) = 0,$$

donde $\tilde{A} = P^{-1}(\partial_x P + J_0 \partial_y P + A \circ P)$. Como $P \in W^{1,p}$ tenemos que $\tilde{A} \in L^p$.

- *Paso 3:* Sin pérdida de generalidad podemos asumir que A es lineal compleja.

Descompongamos la matriz A como su parte lineal y antilineal complejas $A = A^{cl} + A^{ca}$. La idea es cambiar A por $\tilde{A} = A^{cl} + A^{ca}B$, donde $B \in L^\infty(D, \text{End}(\mathbb{R}^{2n}))$ es antilineal compleja y $Bu(z) = u(z)$. Entonces $\tilde{A} \in L^p(D, \text{End}(\mathbb{R}^{2n}))$ y es lineal compleja.

Podemos elegir tal B como:

$$B(z)v = \begin{cases} \frac{1}{|u(z)|^2} u(z) h_0(u(z), v), & u(z) \neq 0 \\ 0, & u(z) = 0 \end{cases}$$

Donde h_0 es la forma hermitiana estándar de \mathbb{C}^n .

□

En lo que resta de esta sección vamos a usar este resultado para rescatar teoremas del Análisis complejo.

3.2.1 Continuación única

Definición 3.2. Una función medible $w : D \rightarrow \mathbb{C}^n$ decimos que se anula con orden ∞ en 0 si:

$$\int_{D_\varepsilon} |w(x, y)| dx dy = O(\varepsilon^k), \quad \forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$$

En particular observemos que si w es de clase C^∞ , entonces se anula con orden ∞ en 0 si y solo si su serie de Taylor en 0 es nula. Uno de los resultados interesantes de análisis complejo es que si w es holomorfa y se anula con orden ∞ en 0, entonces es nula. Esto también vale para los mapas pseudoholomorfos.

Teorema 3.4 (Continuación única). *Sea $J \in \mathcal{J}^l(B^{2n})$ con $l \geq 1$. Supongamos que $u, v : D \rightarrow B^{2n}$ son mapas J -holomorfos tal que $u - v$ se anula en 0 con orden ∞ , entonces $u = v$.*

Demostración. Notar que por el Teorema de regularidad, en estas condiciones, $u, v \in W^{2,p}(D_r) \quad \forall r < 1$. Denotemos $w := u - v$, entonces restando la ecuación $\partial_x u + J(u)\partial_y u = 0$ de la respectiva para v obtenemos:

$$\partial_x w + J(u)\partial_y w + (J(u) - J(v))\partial_y v = 0.$$

Pero notar que:

$$(J(u) - J(v))\partial_y v = \left(\int_0^1 dJ_{u+tw}(w) dt \right) \partial_y v = C(w),$$

donde el mapa $C \in L^p(D_r, \text{End}(\mathbb{R}^{2n}))$ definido como $C(z)\xi = \left(\int_0^1 dJ_{u(z)+tw(z)}(\xi) dt \right) \partial_y v(z)$ es continuo ya que $u, v, \partial_y v$ y dJ son continuos.

Por el principio de similitud de Carleman tenemos $\varepsilon > 0, \Phi \in W^{1,p}(D_\varepsilon, \text{Gl}_{2n}(\mathbb{R}))$ y $f : \mathbb{D}_\varepsilon \rightarrow \mathbb{C}^n$ holomorfa tal que $w(z) = \Phi(z)f(z)$.

Consideremos el conjunto: $A = \{z \in D : w \text{ se anula con orden } \infty\}$, notemos que:

- A es abierto:

Sea $z_0 \in A$, entonces, a menos de hacer una traslación, $z_0 = 0$ y podemos conseguir Φ, f como arriba. Φ es continua y w se anula con orden infinito en 0 por lo tanto f se anula con orden infinito en 0 y al ser holomorfa tenemos que $f = 0$. Por lo tanto $w = 0$ en un entorno de z_0 .

- A es cerrado

Consideremos una sucesión $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ tal que $z_n \rightarrow_n z_0$ entonces, a menos de trasladar, $z_0 = 0$ y tomando Φ, f como arriba tenemos que f tiene una sucesión de valores que acumula en 0, pero como es holomorfa $f = 0$.

□

Tomando cartas obtenemos:

Corolario 3.4.1. *Sea $J \in \mathcal{J}(M)$, Σ una superficie de Riemann conexa y $u, v : \Sigma \rightarrow M$ curvas J -holomorfas tal que todas las derivadas en un punto coinciden, entonces $u = v$.*

3.2.2 Puntos críticos

Sea $u : \Sigma \rightarrow M$ una curva J -holomorfa para cierta J . Decimos que $z \in \Sigma$ es un punto crítico si $d_z u = 0$. Si un punto no es crítico, decimos que es regular.

Teorema 3.5. *Sea Σ una superficie de Riemann cerrada, $J \in \mathcal{J}^1(M)$ con $l \geq 1$ y $u : \Sigma \rightarrow M$ J -holomorfa no constante, entonces:*

1. $\forall x \in M$ tenemos que $u^{-1}(x)$ es un conjunto finito.
2. El conjunto:

$$X = u^{-1}\{x \in M : x = u(z) \text{ con } d_z u = 0\},$$

(la preimagen de los valores críticos) es un conjunto finito.

Demostración. 1. Como la variedad es compacta basta ver que $u^{-1}(x)$ no tiene puntos de acumulación. Supongamos por absurdo que $z_0 \in X$ es punto de acumulación. Tomemos cartas alrededor de z_0 y x de tal modo que podemos ver localmente a $u : D \rightarrow \mathbb{C}^n$ J -holomorfa para cierta estructura C^l con $u(0) = 0$. Usando el principio de similitud de Carleman sabemos que $u(z) = \Phi(z)f(z)$ para $z \in D_\varepsilon$ con $f : D_\varepsilon \rightarrow \mathbb{C}^n$ holomorfa. Por hipótesis existe $z_n \rightarrow 0$ tal que $u(z_n) = 0$ pero como Φ es invertible esto implica que $f = 0$ ya que los ceros de f acumulan. Concluimos entonces que $u = 0$ constate en D_ε y por el corolario final de la sección anterior, $u(z) = x$ constante.

2. Al igual que en el punto anterior, probemos que X no puede acumular. Supongamos que existe $z \in X$ el punto de acumulación y tomemos cartas alrededor de z y $u(z)$ para ver a $u : D \rightarrow \mathbb{C}^n$ como arriba. Notar que por los resultados de regularidad $u \in W^{2,p}(D_r) \forall r < 1$. Definamos $\xi =$

$\partial_x u \in W^{1,p}$, entonces derivando la ecuación que satisface u concluimos que ξ satisface:

$$\partial_x \xi + J(u) \partial_y \xi + d_u J(\xi)(J(u)\xi) = 0.$$

Entonces el principio de Similitud de Carleman se aplica para ξ , y tenemos que los ceros de ξ no pueden acumular, ya que si no $du = 0$ en ese entorno, y u sería localmente constante lo cual es absurdo. \square

3.2.3 Intersecciones de curvas

Notemos que si tenemos una curva que es regular en un punto entonces tenemos una forma local como en Análisis complejo.

Lema 3.6. Sea $J \in \mathcal{J}^l(M)$ con $l \geq 2$ y $u : D \rightarrow M$ una curva J -holomorfa con $d_0 u \neq 0$. En estas condiciones existe una carta C^{l-1} alrededor de $u(0)$, $\psi : U \subset M \rightarrow \mathbb{C}^n$, tal que $\psi \circ u(z) = (z, \dots, 0)$ y $d_u \psi \circ J(u) = J_0 \circ d_u \psi$.

Demostración. Tomando cartas podemos suponer que $u : D \rightarrow \mathbb{C}^n$, $u(0) = 0$ curva J -holomorfa con $J \in \mathcal{J}(V)$ donde V es un entorno de 0. Sean Z_1, \dots, Z_n una base (compleja) del fibrado $u^* TM$ con $Z_1 = \partial_x u$ (esto lo podemos lograr a menos de tomar un disco más chico), consideremos el mapa:

$$\phi(w_1, \dots, w_n) = \exp_{u(w_1)} \left(\sum_{j=1}^n x_j Z_j(w_1) + y_j J(u(w_1)) Z_j(w_1) \right).$$

En un entorno del 0 es un difeomorfismo C^{l-1} ya que u es de clase C^{l-1} por el encaje de Sobolev. Además satisface:

$$\partial_{x_j} \phi + J(\phi) \partial_{y_j} \phi = 0,$$

con $2 \leq j \leq n$ en los puntos $(z, \dots, 0)$. El mapa deseado es entonces ϕ^{-1} . \square

Supongamos ahora que tenemos dos curvas $u, v : \Sigma \rightarrow M$ con $u(z_0) = v(z_0)$. Tomando cartas como en el lema anterior tenemos que: $u(z) = (z, 0)$ y $v(z) = (v_1(z), \tilde{v}(z))$ (respecto a la descomposición $\mathbb{C}^n = \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1}$). Veamos que $\tilde{v}(z)$ satisface las condiciones del teorema de Carleman, esto nos da:

Proposición 3.7. Sean $u, v : D \rightarrow M$ curvas J -holomorfas con $J \in \mathcal{J}^l(M)$, $u(0) = v(0)$ y $d_0 u \neq 0$. Si existiesen $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sucesiones de $D \setminus \{0\}$ con $z_n, w_n \rightarrow_n 0$ tal que $u(z_n) = v(w_n) \forall n \in \mathbb{N}$, entonces existe $\phi : D_\varepsilon \rightarrow D$ de clase C^{l-1} tal que $v(z) = \phi \circ u(z)$ (para cierto $\varepsilon > 0$).

Demostración. Tomando cartas como en el lema anterior conseguimos que $u, v : D \rightarrow \mathbb{C}^n$ son J -holomorfas para $J \in \mathcal{J}^{l-1}(U)$, donde $U \subset \mathbb{C}^n$ es un entorno del 0, $u(z) = (z, 0)$ y $v(z) = (v_1(z), \tilde{v}(z))$. Notar que perdimos regularidad en J porque el cambio de coordenadas es solo C^{l-1} . Ahora reescribamos la ecuación de v $\partial_x v + J(v) \partial_y v = 0$ como:

$$\partial_x v + J_0 \partial_y v + (J(u) - J_0) \partial_y v = 0.$$

Pero notar que $J_0 = J((v_1, 0))$ por la elección de las coordenadas, entonces:

$$(J(u) - J_0) \partial_y v = \left(\int_0^1 d_{(v_1, t\tilde{v})} J(0, \tilde{v}) dt \right) \partial_y v.$$

Como queremos una ecuación para \tilde{v} , tomemos $\pi : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^{n-1}$ la proyección en la segunda coordenada y compongamos la ecuación anterior con π . Entonces si definimos $C(z)\xi = \pi \circ \left(\int_0^1 d_{(v_1(z), t\tilde{v}(z))} J(0, \xi) dt \right) \partial_y v(z)$ tenemos que es continua y por lo tanto en compactos está en L^p , \tilde{v} satisface $\partial_x \tilde{v} + J_0 \partial_y \tilde{v} + C\tilde{v} = 0$ y por lo tanto vale el principio de similitud para \tilde{v} .

Notar que por hipótesis tenemos que los ceros de \tilde{v} acumulan, pero por el principio de similitud de Carleman y los argumentos vistos anteriormente, esto solo puede pasar si $\tilde{v} = 0$. Concluimos que en D_ε $u(z) = (z, 0)$ y $v(z) = (v_1(z), 0)$ por lo tanto $\phi := v_1 : D_\varepsilon \rightarrow D$ satisface las condiciones del teorema. \square

Jugando un poco con el teorema anterior logramos el resultado aparentemente más fuerte:

Teorema 3.8. *Sea $J \in \mathcal{J}^l$ con $l \geq 2$, $u : \Sigma_1 \rightarrow M$ una curva J -holomorfa no constante y $v : \Sigma_2 \rightarrow M$ J -holomorfa tal que $u(\Sigma_1) \neq v(\Sigma_2)$. Entonces el conjunto $u^{-1}(v(\Sigma_2))$ es a lo sumo numerable y acumula solamente en el conjunto $C := \{z \in \Sigma_1 : d_z u = 0\}$.*

Demostración. Si v es constante el teorema ya está probado (vease 3.5) entonces supongamos que no lo es. Notemos que si $z_0 \in \Sigma_1 \setminus C$, entonces son equivalentes:

1. Existe U entorno de z_0 tal que $u(U) \subset v(\Sigma_2)$.
2. Existe $\{z_n\} \in u^{-1}(v(\Sigma_2))$ con $z_n \rightarrow_n z_0$.

La equivalencia de estas dos propiedades viene de la proposición anterior tomando cartas. Pero entonces, si consideramos el conjunto de los $z_0 \in \Sigma_1 \setminus X_1$ tal que se cumple cualquiera de las condiciones anteriores, tenemos que es abierto por la primera propiedad y cerrado por la segunda, por lo tanto este conjunto o bien es vacío o es $\Sigma_1 \setminus C$ (notar que acá usamos que C es finito). Suponiendo que no es vacío tendríamos $u(\Sigma_1 \setminus C) \subset v(\Sigma_2)$ y por continuidad $u(\Sigma_1) \subset v(\Sigma_2)$, pero si volvemos a hacer el argumento con v en vez de con u obtenemos $v(\Sigma_2) \subset u(\Sigma_1)$ que es absurdo por hipótesis. \square

3.2.4 Reparametrizaciones de Curvas

Definición 3.3. Sea $u : \Sigma \rightarrow M$ es una curva J -holomorfa, vamos a decir que $u(\Sigma) \subset M$ es una curva J -holomorfa sin parametrización.

Observación. 1. Sea $C \subset \Sigma$ el conjunto de los puntos críticos, entonces $u(\Sigma \setminus C)$ es una variedad inmersa en M .

2. Si $\phi : \Sigma' \rightarrow \Sigma$ es un cubrimiento ramificado holomorfo, entonces $v = u \circ \phi$ es una curva J -holomorfa tal que $v(\Sigma') = u(\Sigma)$.

Supongamos ahora que nos dan una curva sin parametrización, ¿podemos encontrar una parametrización de esta sin redundancias? Motivados por la observación anterior una pregunta posible es, ¿existe un $z \in \Sigma$ tal que $d_z u \neq 0$ y $u^{-1}(u(z)) = \{z\}$? A tales puntos les vamos a llamar los puntos inyectivos.

Definición 3.4. Vamos a decir que $u : \Sigma \rightarrow M$, curva J -holomorfa, es *simple* si dado $\phi : \Sigma \rightarrow \Sigma'$ cubrimiento ramificado holomorfo y $v : \Sigma' \rightarrow M$ curva J -holomorfa tal que $u = v \circ \phi$, entonces $\deg \phi = 1$.

Observación. En particular observar que si tenemos que $u_*[\Sigma] \in H_2(M, \mathbb{Z})$ es indivisible en el sentido de que no existe $A \in H_2(M, \mathbb{Z})$ y $n \in \mathbb{Z}$ tal que $nA = u_*[\Sigma]$, entonces es simple. Esto es porque si no lo fuera, existiría una factorización $u = v \circ \phi$ con $\deg \phi > 1$, entonces $u_*[\Sigma] = (\deg \phi)v_*[\Sigma']$.

Vamos a probar ahora:

Teorema 3.9. Sea $J \in \mathcal{J}^l(M)$ con $l \geq 2$ y $u : \Sigma \rightarrow M$ una curva J -holomorfa simple, entonces tiene puntos inyectivos. Es más, si $Z(u)$ es el complemento de estos:

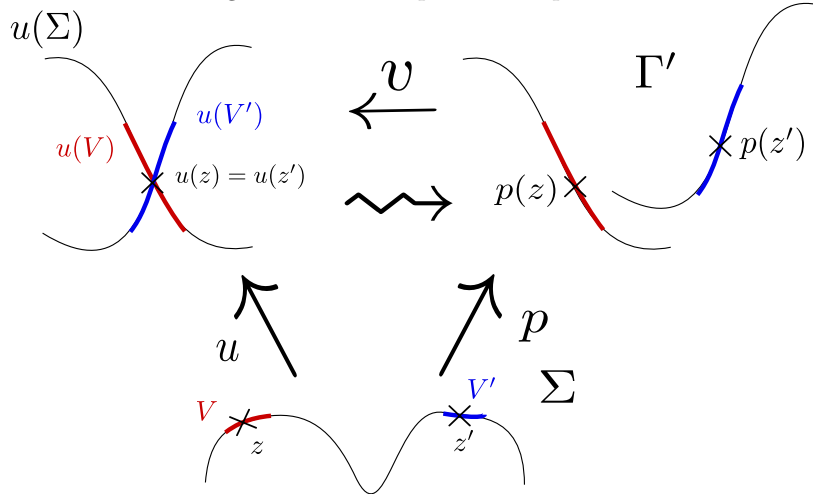
$$Z(u) = \{z \in \Sigma : d_z u = 0 \text{ o } \#u^{-1}(u(z)) \geq 2\}.$$

Entonces $Z(u)$ es a lo sumo numerable y acumula en los puntos críticos de u .

De hecho vamos a conseguir algo más fuerte, dada $u : \Sigma \rightarrow M$ pseudoholomorfa existe una $v : \Sigma' \rightarrow M$ simple tal que $u = v \circ \phi$ donde $\phi : \Sigma \rightarrow \Sigma'$ es un cubrimiento ramificado.

Demostración. Sea $u : \Sigma \rightarrow M$ la curva y denotemos como X al conjunto de los puntos críticos (que sabemos que es finito). Tenemos que $u(\Sigma \setminus X)$ está inmersa en M , ahora veamos que a menos de sacarle una cantidad finita de puntos, u es un cubrimiento.

Figura 3: Primera parte de la prueba.



Definamos el conjunto $Y \subset \Sigma \setminus X$ como: $z \in Y \Leftrightarrow$ existe $z' \in u^{-1}(u(z))$ y V, V' entornos de z y z' respectivamente tal que $u(V) \neq u(V')$. Por el teorema

3.8 tenemos que el conjunto Y es discreto en $\Sigma \setminus X$. Notemos que $u|_{\Sigma \setminus (X \cup Y)}$ es un cubrimiento y $u(\Sigma \setminus (X \cup Y))$ es cierta superficie de Riemann Γ .

Definamos $u|_{\Sigma \setminus (X \cup Y)} := p : \Sigma \setminus (X \cup Y) \rightarrow \Gamma$ veamos que podemos extenderlo como un cubrimiento a un mapa desde $\Sigma \setminus X$ a cierta superficie de Riemann Γ' de tal forma que existe $v : \Gamma' \rightarrow M$ curva con $u(\Sigma \setminus X) = v(\Gamma')$ (vease la figura 3). Tomemos $y \in Y$ y bolas (para cierta métrica en Σ) $B(y)$ lo suficientemente chicas para que $u(B(y)) \cap u(B(y')) = \{u(y)\}$ para $y, y' \in Y$. Entonces peguemos a Γ vía el mapa $u|_{B(y)}$ para conseguir cierta superficie de Riemann Γ' , p se extiende naturalmente a $p : \Sigma \setminus X \rightarrow \Gamma'$ y tenemos $v : \Gamma' \rightarrow M$ curva J -holomorfa colapsando los puntos nuevos conseguidos de Γ .

Notar que como Γ' es recubierta por $\Sigma \setminus X$ que es una superficie de Riemann de tipo finito (esto es una superficie de Riemann compacta sin una cantidad finita de puntos) entonces Γ' es una superficie de Riemann de tipo finito. Por lo tanto, existe un compacto $K \subset \Gamma'$ tal que $\Gamma' \setminus K$ es una cantidad finita de anillos topológicos disjuntos $\Gamma' \setminus K = \bigcup_{i=1}^n A_i$. Consideremos $\Sigma \setminus p^{-1}(K) = \bigcup_{j=1}^m U_j$ la descomposición en componentes conexas, entonces notar que p se restringe al cubrimiento holomorfo:

$$p : U_j \setminus (U_j \cap X) \rightarrow A_i,$$

para ciertos i, j . De acá concluimos que en cada U_j debe haber un elemento de X , digamos x_j y que $U_j \setminus \{x_j\} \cong A_j$ son discos pinchados. Entonces la compactificación de Γ' tiene una única estructura conforme posible, si le llamamos Σ' a tal compactificación tenemos que p se extiende naturalmente a un cubrimiento ramificado $p : \Sigma \rightarrow \Sigma'$. Además tenemos definido un mapa J -holomorfo $v : \Sigma' \rightarrow M$ (haciendo corresponder a cada fin la imagen del correspondiente punto crítico).

□

3.3 La identidad de energía

Una de las propiedades geométricas interesantes que tienen las curvas holomorfas es la armonicidad. Veamos si eso continúa valiendo para curvas pseudoholomorfas.

Observación. El fibrado $\Lambda^1 T^* \Sigma$ tiene naturalmente la métrica μ^* inducida por μ en el dual (vease 7.1). Por lo tanto, como $u^* TM$ y $\Lambda^1 T^* \Sigma$ tienen métricas podemos equipar al producto tensorial con la métrica producto $g_J \otimes \mu^*$. Vamos a abusar de notación y denotar a la norma de esta métrica en $\Lambda^1 T^* \Sigma \otimes u^* TM$ como $||\cdot||$.

Habiendo hecho esta acotación, consideremos la energía de Dirichlet:

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} ||du||^2 dv_{\mu},$$

donde dv_{μ} es la forma de volumen en Σ . Calculemos esta expresión en coordenadas. Supongamos que $\mu = \lambda^2(dx^2 + dy^2)$ y hagamos algunas cuentas:

1. Veamos cómo queda la expresión para $||du||^2$, donde $u \in C^{\infty}(\Sigma, M)$, en coordenadas locales. Como $du = \partial_x u dx + \partial_y u dy$ entonces tenemos que:

$$||du||^2 = ||\partial_x u||^2 \lambda^{-2} + ||\partial_y u||^2 \lambda^{-2},$$

ya que dx, dy es una base ortonormal con la métrica μ^* y su norma es λ^{-2} . Por lo tanto, como $dv_\mu = \lambda^2 dx \wedge dy$, tenemos que $\|du\|^2 dv_\mu = (\|\partial_x u\|^2 + \|\partial_y u\|^2) dx \wedge dy$. Notar que esta expresión no depende de la μ elegida en la clase conforme de j .

2. Ahora hagamos lo mismo para $\|\bar{\partial}_J u\|$. Usando la expresión en coordenadas (ecuación 3) tenemos:

$$4\|\bar{\partial}_J u\|^2 = 2\|\partial_x u + J(u)\partial_y u\|_J^2 \lambda^{-2}.$$

Acá usamos que J es isometría para g_J (porque J es compatible con ω). Desarrollando la expresión y notando que $g_J(\partial_x u, J\partial_y u) = -\omega(\partial_x u, \partial_y u)$ tenemos que:

$$4\|\bar{\partial}_J u\|^2 = 2(\|\partial_x u\|_J^2 + \|\partial_y u\|_J^2) \lambda^{-2} - 4u^* \omega(\partial_x, \partial_y) \lambda^{-2}.$$

De los dos cálculos anteriores llegamos al siguiente resultado importante:

Proposición 3.10 (Fórmula de energía). *Sea $u : \Sigma \rightarrow M$ diferenciable, entonces:*

$$E(u) = \int_{\Sigma} \|\bar{\partial}_J u\|^2 + \int_{\Sigma} u^* \omega$$

Observación. 1. En una curva pseudoholomorfa $E(u) = \int_{\Sigma} u^* \omega$, pero esto solo depende de la clase de homología $A = u_*[\Sigma] \in H_2(M, \mathbb{Z})$. Por lo tanto la energía de la curva es un invariante topológico.

2. Por el comentario anterior tenemos que las curvas pseudoholomorfas minimizan la energía de Dirichlet dentro de su clase de homología.
3. Por la desigualdad de Wirtinger 7.4 tenemos que $\int_{\Sigma} u^* \omega = \int_{u(\Sigma)} \omega = \int_{u(\Sigma)} dV|_{u(\Sigma)}$, por lo tanto si $\tilde{\Sigma}$ es homóloga a $u(\Sigma)$ tenemos que:

$$\int_{\tilde{\Sigma}} dV|_{\tilde{\Sigma}} \geq \int_{\tilde{\Sigma}} \omega = \int_{u(\Sigma)} \omega = \int_{u(\Sigma)} dV|_{u(\Sigma)}$$

Entonces concluimos que las curvas pseudoholomorfas minimizan el área en su clase de homología.

4. Si $A \in H_2(M, \mathbb{Z})$ no nula satisface que $\langle \omega, A \rangle = 0$ entonces no pueden existir curvas pseudoholomorfa con $u_*[\Sigma] = A$, y si $A = 0$ entonces u solo puede ser constante.

4 Espacios de Moduli

En esta sección Σ es una superficie de Riemann y (M, ω) una variedad simpléctica, ambas cerradas.

Tomemos $A \in H_2(M, \mathbb{Z})$ una clase de homología y $J \in \mathcal{J}(M, \omega)$. En esta sección vamos a estudiar los *espacios de moduli*:

$$\mathcal{M}(A, \Sigma; J) = \{u \in C^\infty(\Sigma, M) : \bar{\partial}_J u = 0, u_*[\Sigma] = A\}.$$

En otras palabras, $\mathcal{M}(A, \Sigma; J)$ es el conjunto de todas las curvas pseudoholomorfas representando a la clase de homología A .

La idea para estudiar estos espacios nace en la siguiente observación: definamos $\mathcal{B} = \{u \in C^\infty(\Sigma, M) : u_*[\Sigma] = A\}$, este espacio es una “variedad” en un sentido amplio (es modelado en un espacio de Frechet, vease el apéndice 7.3.1), su tangente es $T_u \mathcal{B} = \Gamma(u^* TM)$ (los campos a lo largo de $u(\Sigma)$). Tomemos por otro lado \mathcal{E} un fibrado sobre \mathcal{B} cuyas fibras son $\mathcal{E}_u = \Omega^{0,1}(\Sigma, u^* TM)$. Con estas notaciones observar que $\bar{\partial}_J : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}$ es una sección de este fibrado, además $\mathcal{M}(A, \Sigma; J) = \bar{\partial}_J^{-1}(0)$.

En dimensión finita si quisieramos que $\bar{\partial}_J^{-1}(0)$ sea una variedad necesitaríamos que $\bar{\partial}_J$ sea transversal a la sección nula de \mathcal{E} . El problema es que en estos espacios no podemos formalizar esta idea, sin embargo en variedades de Banach ese argumento si funciona. Por los resultados de regularidad que conseguimos en 3.1, si trabajáramos en la completación Sobolev de \mathcal{B} y \mathcal{E} , $\bar{\partial}_J^{-1}(0) \subseteq \mathcal{B}$ por lo tanto no ganamos soluciones nuevas, además estos espacios si son variedades de Banach (vease 7.13) y podemos usar el argumento anterior.

En este capítulo haremos tres cosas. Primero estudiaremos la linealización del operador $\bar{\partial}_J$ para estudiar la transversalidad discutida anteriormente. Luego vamos a probar que bajo ciertas condiciones, $\mathcal{M}(A, \Sigma; J)$ es una variedad de dimensión finita para el caso de un J “genérico”. Por ultimo comentaremos como la misma prueba funciona para probar resultados análogos para:

$$\mathcal{W}(A, \Sigma, \gamma) = \{(t, u) : u \in \mathcal{M}(A, \Sigma; \gamma(t))\},$$

donde γ es un camino en $\mathcal{J}(M, \omega)$ entre J_0, J_1 fijas. Nuevamente para alcanzar la transversalidad vamos a tener imponer condiciones extra. Esto nos va a decir como se relacionan los moduli para distintas estructuras casi complejas.

4.1 La linealización de $\bar{\partial}_J$

Sean \mathcal{B}, \mathcal{E} como arriba y $u \in \bar{\partial}_J^{-1}(0)$, notemos que $d_u \bar{\partial}_J : T_u \mathcal{B} \rightarrow T_{(u,0)} \mathcal{E} = T_u \mathcal{B} \oplus \mathcal{E}_u$ ya que en la sección nula el tangente se descompone naturalmente. Sea $\pi_u : T_{(u,0)} \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_u$ la proyección, definamos $D_u = \pi_u \circ d_u \bar{\partial}_J$. Ser transversal a la sección nula es equivalente a que D_u sea sobreyectivo. Decimos que D_u es el *diferencial vertical*.

Notar que para definir D_u usamos fuertemente el hecho de que $T_{(u,0)} \mathcal{E}$ se descompone naturalmente como un espacio vertical y uno horizontal, por lo tanto el diferencial vertical solo tiene sentido en $\bar{\partial}^{-1}(0)$. Busquemos una expresión para D usando una conexión, esta nos descompone $T_{(u,\bar{\partial}u)} \mathcal{E}$ en un espacio vertical y horizontal $\forall u \in \mathcal{B}$ y en las secciones de $\bar{\partial}^{-1}(0)$ el espacio vertical coincide con el anterior.

Sea ∇ la conexión de Levi-Civita para la métrica determinada por ω y J , observar J no es necesariamente paralela con esta conexión (de hecho por las cuentas de apéndice 7.5 esto solo pasa cuando (M, ω, J) es Kahler). Por lo tanto el fibrado $\Omega^{0,1}(\Sigma, u^*TM)$ no queda invariante por el transporte paralelo. Para solucionar esto hay que cambiar a ∇ por una conexión donde J sea paralela.

Proposición 4.1. *Sea ∇ una conexión en TM entonces:*

$$\tilde{\nabla}_Y X = \nabla_Y X - \frac{1}{2}J(\nabla_Y J)X. \quad (4)$$

Es una conexión donde J es paralela ($\tilde{\nabla}J = 0$ o equivalentemente $\tilde{\nabla}(JX) = J\tilde{\nabla}X$).

Demostración. Derivando la expresión $J^2 = -Id$ obtenemos que $\nabla J \circ J = -J \circ \nabla J$. Por otro lado como $\nabla(JX) = (\nabla J)X + J\nabla X$:

$$\nabla(JX) - \frac{1}{2}J(\nabla J)JX = J(\nabla X - \frac{1}{2}J(\nabla J)X),$$

donde usamos la primera propiedad que deducimos. Esto es justamente la igualdad deseada. \square

Observación. Notar que $\tilde{\nabla}$ pierde propiedades con respecto a ∇ , por ejemplo no es simétrica (recordar que ∇ es simétrica si $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$). Por eso en los cálculos vamos a escribir $\tilde{\nabla}$ en función de ∇ para operar y luego volver a $\tilde{\nabla}$.

Supongamos que queremos derivar en la dirección de $\xi \in \Gamma(u^*TM) = T_u\mathcal{B}$, entonces tomemos la variación de u dada por $u_s(z) = \exp_{u(z)}(s\xi)$. Denotemos por $\Phi_u(\xi) : u^*TM \rightarrow (\exp_u\xi)^*TM$ al transporte paralelo respecto a $\tilde{\nabla}$ por las geodésicas $s \rightarrow \exp_{u(z)}s\xi(z)$. Notar que $\Phi_u(\xi)$ es un isomorfismo entre fibrados que por la proposición anterior es lineal complejo ($\Phi_u(\xi) \circ J = J \circ \Phi_u(\xi)$).

Definamos el mapa:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_u : T_u\mathcal{B} &\rightarrow \Omega^{0,1}(\Sigma, u^*TM) \\ \mathcal{F}_u(\xi) &= \Phi_u(\xi)^{-1}\bar{\partial}_J(\exp_u\xi), \end{aligned}$$

el diferencial de este mapa en 0 es justamente la componente vertical de $d_u\bar{\partial}_J$. En particular si $u \in \bar{\partial}_J^{-1}(0)$ entonces $d_0\mathcal{F}_u = D_u$.

Tenemos entonces que:

$$D_u(\xi) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mathcal{F}_u(t\xi) = \tilde{\nabla}_t \bar{\partial}_J(u_t)|_{t=0}.$$

Calculemos esta expresión en coordenadas, si $z = x + iy$ ya vimos en la ecuación 3 que:

$$\bar{\partial}_J u = (\partial_x u + J(u)\partial_y u)dx - J(u)(\partial_x u + J(u)\partial_y u)dy. \quad (5)$$

Por lo tanto basta derivar la expresión $\partial_x u_t + J(u_t)\partial_y u_t$, como J es paralela para $\tilde{\nabla}$ tenemos:

$$\tilde{\nabla}_t(\partial_x u_t + J(u_t)\partial_y u_t)|_{t=0} = \tilde{\nabla}_t \partial_x u_t|_{t=0} + J(u)\tilde{\nabla}_t \partial_y u_t|_{t=0}.$$

Pero:

$$\tilde{\nabla}_t \partial_x u_t|_{t=0} = \nabla_t \partial_x u_t|_{t=0} - \frac{1}{2} J(\nabla_\xi J) \partial_x u = \nabla_x \xi - \frac{1}{2} J(\nabla_\xi J) \partial_x u,$$

por la simetría de ∇ . La misma cuenta para $\tilde{\nabla}_t \partial_y u_t$ nos permite concluir que:

$$\tilde{\nabla}_t (\partial_x u + J(u) \partial_y u)|_{t=0} = \nabla_x \xi + J(u) \nabla_y \xi - \frac{1}{2} J(\nabla_\xi J) \partial_x u + \frac{1}{2} (\nabla_\xi J) \partial_y u.$$

Poniendo todo nuevamente en términos de $\tilde{\nabla}$ obtenemos que la expresión de arriba nos da:

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_t (\partial_x u_t + J(u_t) \partial_y u_t)|_{t=0} &= \tilde{\nabla}_x \xi + J \tilde{\nabla}_y \xi \\ &\quad - \frac{1}{2} (J(\nabla_\xi J) \partial_x u - (\nabla_\xi J) \partial_y u + J(\nabla_x J) \xi - (\nabla_y J) \xi). \end{aligned}$$

Notemos que:

$$J(\nabla_\xi J) \partial_x u - (\nabla_\xi J) \partial_y u = J(\nabla_\xi J) (\partial_x u - J \partial_y u) = 2J(\nabla_\xi J) \partial_J u,$$

donde usamos $J^2 = -Id$ y que J y ∇J anticonmutan. Además:

Teorema 4.2. *Supongamos que (M, ω) es una variedad simpléctica y $J \in \mathcal{J}(M, \omega)$. Tomemos $\langle \cdot, \cdot \rangle_J = \omega(J \cdot, \cdot)$ y ∇ la conexión de Levi-Civita. En estas condiciones tenemos que $J(\nabla_{JX} Y) = \nabla_X Y$ y el tensor de Nijenhuis se puede calcular con la ecuación:*

$$N_J(X, Y) = 2(J(\nabla_Y J)X - J(\nabla_X J)Y).$$

Demostración. Es el teorema 7.27 del apéndice 7.5. □

Por lo tanto $J(\nabla_x J) \xi - (\nabla_y J) \xi = 2 \nabla_{\partial_J u} \xi$. Usando la formula para el tensor de Nijenhuis del teorema concluimos:

$$\tilde{\nabla}_t (\partial_x u_t + J(u_t) \partial_y u_t)|_{t=0} = \tilde{\nabla}_x \xi + J \tilde{\nabla}_y \xi - \frac{1}{2} N_J(\partial_J u, \xi).$$

Incertando esta ecuación en 5 obtenemos:

$$D_u \xi = \tilde{\nabla}^{0,1} \xi + \frac{1}{4} N_J(\xi, \partial_J u), \quad (6)$$

donde N_J es el tensor de Nijenhuis.

Observación. El operador D_u es una perturbación del operador de Cauchy-Riemann complejo $\tilde{\nabla}^{0,1}$ por un término (de orden 0) antilineal complejo. En particular es un operador de Cauchy-Riemann real (vease 2.5) y por lo tanto vale el teorema de Riemann-Roch.

Pasando a la completación $W^{1,p}$ (con $p > 2$) de $\Gamma(u^* TM)$ obtenemos:

Teorema 4.3. *El mapa $\mathcal{F}_u : W^{1,p}(u^* TM) \rightarrow L^p(\Lambda^{0,1} T\Sigma \otimes u^* TM)$ es diferenciable (de hecho es tan suave como J) y $D_u = d_0 \mathcal{F}_u$ es un operador de Cauchy-Riemann real, por lo tanto es Fredholm de índice:*

$$\text{ind}(D_u) = n\chi(\Sigma) + 2c_1(u_*[\Sigma]).$$

4.2 La transversalidad

Definamos el espacio:

$$\mathcal{M}^*(A, \Sigma; J) := \{u \in \mathcal{M}(A, \Sigma; J) : u \text{ es simple}\},$$

la definición de simple se introdujo en la sección 3.2.4. Para nuestros motivos solamente nos interesa que en estas curvas existe un abierto denso de $z \in \Sigma$ tal que $d_z u \neq 0$ y $u^{-1}(u(z)) = \{z\}$. A estos puntos le llamaremos *puntos inyectivos*.

Definición 4.1. Sea $J \in \mathcal{J}(M, \omega)$, decimos que esta estructura es *regular* para $A \in H_2(M, \mathbb{Z})$ y Σ si D_u es sobreyectiva $\forall u \in \mathcal{M}^*(A, \Sigma; J)$. Denotemos el conjunto de las J regulares como $\mathcal{J}_{reg}(A, \Sigma)$.

El resultado fundamental que vamos a probar en esta sección es:

Teorema 4.4. 1. Si $J \in \mathcal{J}_{reg}(A, \Sigma)$ entonces el espacio $\mathcal{M}^*(A, \Sigma; J)$ es una variedad diferenciable de dimensión:

$$\dim \mathcal{M}^*(A, \Sigma; J) = n\chi(\Sigma) + 2\langle c_1(TM), A \rangle.$$

2. $\mathcal{J}_{reg}(A, \Sigma) \subset \mathcal{J}(M, \omega)$ es un residual con la topología C_{loc}^∞ .

Observación. 1. Observar que por el teorema 2.8 la clase de Chern $c_1(TM)$ no depende de la $J \in \mathcal{J}_{reg}(A, \Sigma)$, denotemos $c_1(A) := \langle c_1(TM), A \rangle$.

2. Aunque $J \in \mathcal{J}_{reg}(A, \Sigma)$, el espacio $\mathcal{M}^*(A, \Sigma; J)$ puede ser vacío (esto va a quedar claro en la prueba).

Una dificultad que debemos sortear es la topología C^∞ en el espacio $\mathcal{J}(M, \omega)$, aquí no podemos usar herramientas típicas de espacios de Banach. Por eso lo que vamos a hacer es trabajar en principio con $\mathcal{J}^l := \mathcal{J}^l(M, \omega)$ las J estructuras compatibles de clase C^l y mediante un truco (debido a Taubes) concluir el caso C^∞ .

Observación. Vamos a usar el teorema de Baire con el espacio $\mathcal{J}(M, \omega)$. Esto está justificado porque es una variedad de Frechet paracompacta, como es de Frechet localmente la podemos metrizar y la condición de paracompacta nos permite pegar las métricas locales para obtener una métrica en todo el espacio. Luego es sencillo ver que como localmente estamos modelados en un espacio completo, la métrica que obtuvimos es completa. La condición de paracompacta se puede ver (por ejemplo) si encajamos la variedad en algún \mathbb{R}^N y aquí $\mathcal{J}(M, \omega)$ son simplemente mapas C^∞ de un abierto de \mathbb{R}^N a un espacio euclideo, que sabemos es un conjunto separable.

Veamos la primera parte del Teorema, basicamente definimos las estructuras regulares para que esto suceda.

Primera parte del teorema. Sea $\mathcal{F}_u : W^{1,p}(u^*TM) \rightarrow L^p(\Lambda^{0,1}T^*\Sigma \otimes u^*TM)$ (con $p > 2$) el mapa definido en la sección anterior, como $d_0\mathcal{F}_u = D_u$ es sobreyectivo por el teorema de la función implícita (como en el apéndice 7.3) tenemos que $\mathcal{F}^{-1}(0)$ en un entorno de 0 es una subvariedad suave de dimensión $n\chi(\Sigma) + 2c_1(A)$ por el teorema de Riemann- Roch. La imagen de este entorno por la exponencial coincide con un entorno de u en $\mathcal{M}^*(A, \Sigma; J)$ por los resultados de regularidad para las curvas pseudoholomorfas. Observemos que las cartas que obtuvimos son independientes de p .

□

Definamos el *espacio de moduli universal*:

$$\mathcal{M}^*(A, \Sigma; \mathcal{J}^l) := \{(u, J) : u \in \mathcal{M}^*(A, \Sigma; J), J \in \mathcal{J}^l\}.$$

Tomemos $p > 2$ y denotemos a $\mathcal{B} := \{u \in W^{1,p}(\Sigma, M) : u_*[\Sigma] = A\}$, esto es un abierto de $W^{k,p}(\Sigma, M)$ por el encaje $W^{1,p}(\Sigma, M) \hookrightarrow C^0(\Sigma, M)$. Entonces $\mathcal{M}^*(A, \Sigma; \mathcal{J}^l) \subset \mathcal{B} \times \mathcal{J}^l$ es una variedad de Banach separable, ya que \mathcal{J}^l es una variedad de Banach separable como veremos abajo y $W^{1,p}(\Sigma, M)$ también (vease 7.13).

Observación. Si $J \in \mathcal{J}^l$ definamos:

$$\text{End}_{C^l}(TM, J, \omega) = \{A \in C^l(M, \text{End}(TM)) : AJ = -JA, A = A^*\},$$

donde el adjunto lo tomamos respecto a la métrica g_J . Es secillo ver que este es un espacio de Banach con la norma C^l . Esto nos dan parametrizaciones de \mathcal{J}^l vía las cartas:

$$A \mapsto \left(Id + \frac{1}{2}JA \right) J \left(Id + \frac{1}{2}JA \right)^{-1},$$

que en un entorno del 0 en $\text{End}_{C^l}(TM, J, \omega)$ son un difeomorfismo por el teorema de la función inversa y los calculos hechos en 2.1..

Proposición 4.5. *Dada $A \in H_2(M, \mathbb{Z})$ y $l \geq 2$, entonces $\mathcal{M}^*(A, \Sigma; \mathcal{J}^l)$ es una subvariedad de Banach de $\mathcal{B} \times \mathcal{J}^l$ de clase C^{l-1} y separable.*

Demostración. Veamos $\mathcal{M}^*(A, \Sigma; \mathcal{J}^l)$ como los ceros de una sección de cierto fibrado. Definamos el fibrado de Banach $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B} \times \mathcal{J}^l$ cuyas fibras son $\mathcal{E}_{(u,J)} = L^p(\Lambda^{0,1}T^*\Sigma \otimes_J u^*TM)$, donde \otimes_J significa que tomamos las formas antilineales segun J .

Afirmación. \mathcal{E} es un fibrado de Banach de clase C^{l-1} .

Demostración. Sea $\mathcal{N}(u)$ un entorno coordenado de u , esto identifica un entorno del 0 en $W^{1,p}(u^*TM)$ vía el mapa exponencial $\xi \in u^*TM \rightarrow \exp_u(\xi) \in \mathcal{N}(u)$. Sea $\tilde{\nabla}$ es la conexión (lineal compleja) de la sección anterior, esta nos trivializa \mathcal{E} vía el transporte paralelo el entorno $\mathcal{N}(u) \times \{J\}$, pero como J es C^l entonces $\tilde{\nabla}$ y su transporte paralelo son de clase C^{l-1} , por lo tanto si derivamos $l-1$ veces los mapas de transición el resultado sigue estando en L^p .

Ahora fijemos u y trivialicemos un $\{u\} \times \mathcal{N}(J)$, con $\mathcal{N}(J)$ un entorno de J suficientemente pequeño para que:

$$\begin{aligned} \Lambda^{0,1}T^*\Sigma \otimes_J u^*TM &\rightarrow \Lambda^{0,1}T^*\Sigma \otimes_{J'} u^*TM \\ \alpha &\rightarrow \frac{1}{2}(\alpha + J' \circ \alpha \circ j), \end{aligned}$$

sean isomorfismos, donde $J' \in \mathcal{N}(u)$. Notar que esto es simplemente la proyección antilineal según J' de un α . Ahora extendamos esta trivialización a un entorno $\mathcal{N}(u) \times \mathcal{N}(J)$ simplemente trivializando cada $\mathcal{N}(u) \times \{J'\}$ y luego volver a trivializar para cada $\{u\}$.

□

Ahora que tenemos este detalle técnico, definamos la sección:

$$\begin{aligned}\mathcal{S} : \mathcal{B} \times \mathcal{J}^l &\rightarrow \mathcal{E} \\ \mathcal{S}(u, J) &= \bar{\partial}_J u.\end{aligned}$$

Sea $(u, J) \in \mathcal{M}^*(A, \Sigma; \mathcal{J}^l)$, calculemos el diferencial vertical $D_{(u, J)} : W^{1,p}(u^*TM) \times T_J \mathcal{J}^l \rightarrow \mathcal{E}_{(u, J)}$. Este es simplemente:

$$D_{(u, J)}(\xi, Y) = D_u \xi + \frac{1}{2} Y \circ du \circ j.$$

Como D_u es Fredholm tenemos que $\text{im} D_{(u, J)}$ es cerrada, basta ver que este subespacio es denso para ver que $D_{(u, J)}$ es sobreyectiva y concluir lo deseado (por el teorema de la función implícita).

Supongamos que no es densa, entonces existe un funcional de $L^p(\Lambda^{0,1} T^* \Sigma \otimes E)$ que se anula en $\text{im} D_{(u, J)}$. Por dualidad esto significa que existe $\eta \in L^q(\Lambda^{0,1} T^* \Sigma \otimes E)$, con q el exponente conjugado a p tal que:

$$\int \langle \eta, D_u \xi \rangle dv = 0,$$

para todo $\xi \in W^{1,p}(u^*TM)$ y además:

$$\int \langle \eta, Y(u) \circ du \circ j \rangle dv = 0,$$

para todo $Y \in T_J \mathcal{J}^l$. De la primera condición tenemos que η es una solución débil para $D_u^* \eta = 0$ (notar que como D_u es una conexión, por dualidad de Hodge tiene un adjunto, vease 7.1.2). Por regularidad elíptica esto implica que $\eta \in W^{1,p}(\Lambda^{0,1} T^* \Sigma \otimes E)$ y $D_u^* \eta = 0$.

Ahora veamos que $\eta = 0$, sea $z \in \Sigma$ un punto inyectivo (es decir $du(z) \neq 0$ y $u^{-1}(u(z)) = \{z\}$) tal que $\eta(z) \neq 0$, esto lo podemos hacer porque en una curva pseudoholomorfa simple estos puntos son densos. Si pudieramos ver que $\langle \eta(z), Y(u(z)) \circ du \circ j \rangle = 0$ para algún $Y \in T_J \mathcal{J}^l$, entonces a menos de multiplicar Y por una función chichón tenemos que $\int \langle \eta, Y(u) \circ du \circ j \rangle dv \neq 0$ lo cual es absurdo.

Formalicemos esta idea, notemos que existe $Y \in T_J \mathcal{J}^l$ tal que:

$$\langle \eta(z), Y(u(z)) \circ du \circ j \rangle > 0.$$

Esto es porque el espacio $T_J \mathcal{J}(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ actúa transitivamente en \mathbb{R}^{2n} (como vimos en la proposición 2.5). Tomemos U entorno de z tal que la función de arriba es positiva. Como z es un punto inyectivo concluimos que $u(\Sigma \setminus U)$ es un compacto que no contiene a $u(z_0)$, por lo tanto existe V un entorno de $u(z)$ que no corte a $u(\Sigma \setminus U)$. Sea $\beta : V \rightarrow [0, 1]$ una función chichón soportada en V , tenemos que si cambiamos Y por βY entonces:

$$\int \langle \eta, \beta(u) Y(u) \circ du \circ j \rangle dv > 0,$$

lo cual es absurdo. Por lo tanto alrededor de cada punto inyectivo $\eta(z) = 0$ pero como estos son densos y η en particular es continua (nuevamente por regularidad elíptica) obtenemos que $\eta = 0$.

□

Por la prueba anterior, sabemos que el operador $D_{(u,J)} : W^{1,p}(u^*TM) \times T_J\mathcal{J}^l \rightarrow \mathcal{E}_{(u,J)}$ es sobreyectivo. Observar que $D_{(u,J)}$ es la suma del operador $D_u : W^{1,p}(u^*TM) \rightarrow \mathcal{E}_{(u,J)}$ que es Fredholm y $L : T_J\mathcal{J}^l \rightarrow \mathcal{E}_{(u,J)}$, donde $L(Y) = \frac{1}{2}Y \circ du \circ j$. En estas condiciones, podemos probar un lema del tipo “álgebra lineal en dimension infinita”:

Lema 4.6. Sean X, Y y Z espacios de Banach, $D : X \rightarrow Z$ un operador Fredholm y $L : Y \rightarrow Z$ lineal acotado tal que $D \oplus L$ es sobreyectivo. Entonces:

1. $D \oplus L$ tiene una inversa a derecha.
2. La proyección $\pi : \ker(D \oplus L) \rightarrow Y$ cumple que $\ker \pi \cong \ker D$ y $\operatorname{coker} \pi \cong \operatorname{coker} D$. En particular es Fredholm.

Demostración. 1. Tomemos $\{y_1, \dots, y_n\} \subset Y$ tal que las clases de Ly_1, \dots, Ly_n son una base de $\operatorname{coker} D$, entonces podemos escribir a todo $z \in Z$ como $z = Dx + \sum_{i=1}^n \lambda^i Ly_i$. Definiendo la inversa como $z \mapsto (x, \sum_{i=1}^n \lambda^i y_i)$ tenemos lo deseado (la inversa es continua por el teorema del mapa abierto).

2. Notar que $\ker \pi = \ker D \oplus \{0\}$ e $\operatorname{im} \pi = L^{-1}(\operatorname{im} D)$, entonces:

$$Y/\operatorname{im} \pi = Y/L^{-1}(\operatorname{im} D) \cong \operatorname{im} L/\operatorname{im} D \cap \operatorname{im} L \cong Z/\operatorname{im} D,$$

donde el primer isomorfismo esta inducido por L , y el segundo es porque $\operatorname{im} D + \operatorname{im} L = Z$. □

Este teorema nos dice que la linealización de la proyección $\pi : \mathcal{M}^*(A, \Sigma; \mathcal{J}^l) \rightarrow \mathcal{J}^l$ es Fredholm y además es sobreyectiva si y solamente si D_u lo es. Esto nos permite probar:

Proposición 4.7. Existe l_0 tal que si $l \geq l_0$ entonces $\mathcal{J}_{reg}^l := \{J \in \mathcal{J}^l : D_u \text{ sobreyectivo}\}$ es un residual de \mathcal{J}^l en la topología C^l .

Demostración. Tenemos que la proyección $\pi : \mathcal{M}^*(A, \Sigma; \mathcal{J}^l) \rightarrow \mathcal{J}^l$ es un mapa C^{l-1} . Por lo observado anteriormente, π cae en las condiciones del teorema de Sard-Smale, por lo tanto los valores regulares de π son un conjunto residual de \mathcal{J}^l si $l - 2 \geq n\chi(\Sigma) + 2c_1(A)$. Pero los valores regulares de π son justamente las J para las cuales D_u es sobreyectivo sobre las curvas simples por el lema. □

Segunda parte del Teorema. Sea $K > 0$, definamos el conjunto $\mathcal{J}_{reg,K} \subset \mathcal{J}(M, \omega)$ de las J tal que si u es J -holomorfa con $u_*[\Sigma] = A$ cumpliendo:

1. $\|du\|_{L^\infty} \leq K$.
2. Existe un punto $z \in \Sigma$ tal que $\inf_{z \neq w} \frac{d(u(z), u(w))}{d(z, w)} \geq \frac{1}{K}$.

Entonces D_u es sobreyectivo. Es claro que si u cumple estas dos propiedades, entonces es simple, recíprocamente si u es simple por lo visto en el capítulo anterior, u cumple las condiciones anteriores para algún K . Concluimos de esto que:

$$\mathcal{J}_{reg}(A, \Sigma) = \bigcap_{K>0} \mathcal{J}_{reg,K}.$$

Entonces si probamos que $\mathcal{J}_{reg,K}$ es un abierto denso $\forall K > 0$, entonces usando el teorema de Baire terminamos.

- $\mathcal{J}_{reg,K}$ es abierto:

Supongamos que $J_n \notin \mathcal{J}_{reg,K}$ es una sucesión tal que $J_n \rightarrow_n J$. Por definición existen u_n satisfaciendo $\|du_n\| \leq K$ y la condición 2 para algún z_n tal que D_{u_n} no es sobreyectiva. Por el teorema 3.2.1, u_n tiene una subsucesión convergente a u pseudoholomorfa. Supongamos además que z_n converge a un z (a menos de tomar subsucesión), entonces u satisface las condiciones anteriores. Ahora como D_{u_n} no es sobreyectivo entonces D_u tampoco puede serlo, entonces $J \notin \mathcal{J}_{reg,K}$.

- $\mathcal{J}_{reg,K}$ es denso:

Notemos que $\mathcal{J}_{reg,K} = \mathcal{J}_{reg,K}^l \cap \mathcal{J}(M, \omega)$, donde $\mathcal{J}_{reg,K}^l$ es idéntico a $\mathcal{J}_{reg,K}$ pero solamente le pedimos a las u pseudoholomorfas ser de clase C^l . Tenemos que $\mathcal{J}_{reg,K}^l$ es abierto por el argumento de antes y es denso por lo visto anteriormente si l es suficientemente grande.

Tomemos $J \in \mathcal{J}(M, \omega)$ entonces como $\mathcal{J}_{reg,K}^l$ es abierto y denso existe ε_l tal que si $J' \in \mathcal{J}^l(M, \omega)$ y $\|J - J'\|_{C^l} < \varepsilon_l \implies J' \in \mathcal{J}_{reg,K}^l$. En particular tomando $J_l \in \mathcal{J}(M, \omega)$ como arriba tal que:

$$\|J - J_l\|_{C^l} < \min\{\varepsilon_l, 2^{-l}\},$$

obtenemos una sucesión $\{J_l\}_{l \in \mathbb{N}}$ tal que $J_l \rightarrow_l J$ como queríamos.

□

El esquema de prueba fue básicamente:

1. Probamos que $\mathcal{M}(A, \Sigma; \mathcal{J}^l) \subset \mathcal{B}^{k,p} \times \mathcal{J}^l$ es una subvariedad de Fredholm separable.
2. Vimos por el lema de "álgebra lineal en dimensión infinita" que los valores regulares de la proyección $\pi : \mathcal{M}(A, \Sigma; \mathcal{J}^l) \rightarrow \mathcal{J}^l$ corresponde a los $J \in \mathcal{J}_{reg}^l$.
3. Por el Teorema de Sard- Smale probamos que estos son un residual en la topología C^l para un l suficientemente grande.
4. Usamos el argumento de Taubes para conseguir el resultado deseado en la topología C^∞ .

Comentario. Estas pruebas se repiten en distintos contextos en la teoría y en variaciones de la misma. En el caso de hacer teoría en perturbaciones de la curva pseudoholomorfa, usualmente el paso delicado es el primero ya que acá usamos fuertemente los resultados de curvas pseudoholomorfas simples.

4.3 Dependencia respecto a J

La relación entre las variedades $\mathcal{M}^*(A, \Sigma; J)$ para $J \in \mathcal{J}_{reg}(A, \Sigma)$ es que son cobordantes entre ellas (cobordante por una variedad que no tiene por qué ser compacta), esto es fundamental ya que tenemos invariantes topológicos que se preservan por la relación de ser cobordantes.

Supongamos que $J_0, J_1 \in \mathcal{J}_{reg}(A, \Sigma)$ y denotemos $\mathcal{J}(J_0, J_1) = \{\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{J}(M, \omega) : \gamma(0) = J_0, \gamma(1) = J_1\}$, donde los caminos los tomamos continuos. Definamos al *espacio de caminos* (simple) entre las curvas:

$$\mathcal{W}^*(A, \Sigma; \gamma) = \{(t, u) : 0 \leq t \leq 1, u \in \mathcal{M}^*(A, \Sigma; \gamma(t))\}.$$

La siguiente definición es la que nos garantiza que si una γ es “regular” entonces los espacios anteriores son variedades (al igual que en el caso anterior, es lo que necesitamos para usar el teorema de la función implícita):

Definición 4.2. Decimos que una curva $\gamma \in \mathcal{J}(J_0, J_1)$ es *regular* para A y Σ si:

$$\Omega^{0,1}(\Sigma, u^*TM) = \text{im } D_{(\gamma(t), u_t)} + \mathbb{R}v_t, \quad \forall (t, u) \in \mathcal{W}^*(A, \Sigma; \gamma),$$

donde $v_t = \dot{\gamma}(t) \circ du \circ j$. Al espacio de curvas regulares las denotamos como $\mathcal{J}_{reg}(A, \Sigma; J_0, J_1)$.

En este contexto, el teorema análogo al anterior es:

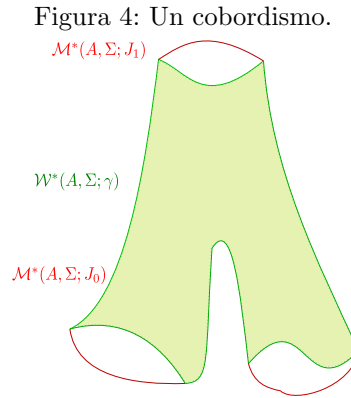
Teorema 4.8. Sean A, Σ y $J_0, J_1 \in \mathcal{J}_{reg}(A, \Sigma)$ como arriba, entonces:

1. Si $\gamma \in \mathcal{J}_{reg}(A, \Sigma; J_0, J_1)$ entonces $\mathcal{W}(A, \Sigma; \gamma)$ es una variedad diferenciable con borde y:

$$\partial \mathcal{W}^*(A, \Sigma; \gamma) = \mathcal{M}^*(A, \Sigma; J_1) \cup \mathcal{M}^*(A, \Sigma; J_0).$$

2. El conjunto $\mathcal{J}_{reg}(A, \Sigma; J_0, J_1)$ es un conjunto residual en el espacio de curvas $\mathcal{J}(J_0, J_1)$.

Omitiremos la prueba de este teorema ya que es idéntico a lo hecho en la sección anterior (el lector interesado puede leer los detalles en [MS04]).



5 Compacidad

En esta sección las superficies de Riemann (Σ, j) y las variedades simplécticas (M, ω) serán cerradas. A M la vamos a equipar con la métrica g_J determinada por J y ω (donde J va a quedar claro en el contexto) y a Σ con una métrica μ en la clase conforme de j (esto significa que j es una isometría para μ).

En la sección anterior probamos que a menos de perturbar nuestra J -estructura los espacios de moduli se comportan bien, en particular tenemos resultados de existencia de curvas una vez prefijada la clase de homología. Como veremos en la sección siguiente, la existencia de curvas pseudoholomorfas satisfaciendo ciertas condiciones geométricas nos dan información sobre nuestra variedad simpléctica. La cuestión ahora es cómo conseguir la existencia de estas curvas sin perturbar la J -estructura. Una forma natural de hacerlo es establecer la existencia para un conjunto denso de estructuras (con las herramientas del capítulo anterior), por lo tanto existe $J_n \in \mathcal{J}(M, \omega)$ tal que $J_n \rightarrow_n J$ y u_n curvas J_n -holomorfas satisfaciendo nuestra propiedad geométrica. Si la propiedad que nos interesa fuera preservada, por ejemplo tomando límites C^0 entonces nos gustaría sacar una subsucesión convergente de $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ para obtener una J -curva satisfaciendo la propiedad deseada.

Ejemplos 1. Para ser conscientes de que tipo de resultados buscar, veamos un par de casos donde no obtenemos la compacidad deseada.

1. Los espacios de moduli $\mathcal{M}^*(A, S^2; J)$ son en general no compactos, el problema es que $\text{Aut}(S^2) = PGL(2, \mathbb{C})$ no es compacto. Tomemos $u \in \mathcal{M}^*(A, S^2; J)$ y $\phi_n \in \text{Aut}(S^2)$ sin subsucesión convergente, entonces $u_n = u \circ \phi_n \in \mathcal{M}^*(A, \Sigma; J)$ y las únicas subsucesiones convergentes de estas curvas son funciones constantes, que no están en el moduli.
2. El ejemplo anterior muestra que la compacidad falla por una razón “interna”, que solo depende de la superficie de Riemann Σ . Ahora presentemos un ejemplo mas geométrico de por qué puede fallar la compacidad.

Consideremos la curva compleja:

$$C_\varepsilon := \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{CP}^2 : x_0 x_1 = \varepsilon x_2^2\} = \mathcal{V}(x_0 x_1 - \varepsilon x_2^2) \subset \mathbb{CP}^2,$$

donde vamos a usar la notación de geometría algebraica $\mathcal{V}(P)$ para denotar al conjunto de puntos que anulan al polinomio homogéneo P . Esta es una curva holomorfa sin parametrización, una posible parametrización es:

$$\begin{aligned} u_\varepsilon : \mathbb{CP}^1 &\rightarrow \mathbb{CP}^2 \\ u_\varepsilon(x_0 : x_1) &= (\varepsilon x_0^2 : x_1^2 : x_0 x_1). \end{aligned}$$

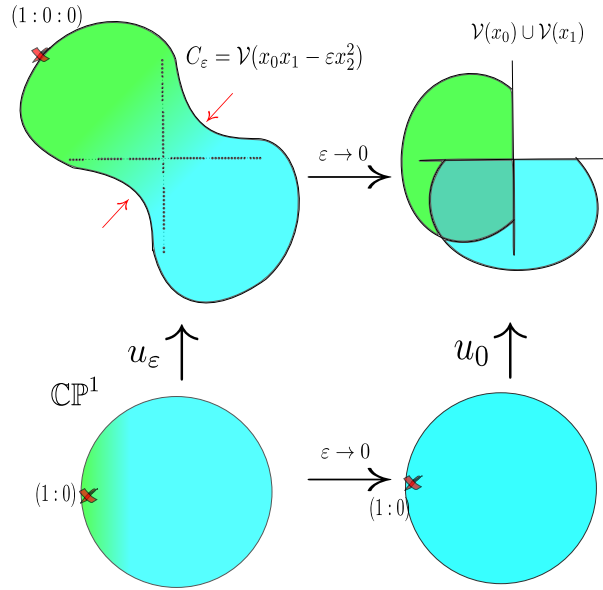
Se recomienda al lector mirar la figura 5 mientras se esta leyendo esta explicación. Notar que la curva no parametrizada C_ε cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ tiende a $\mathcal{V}(x_0) \cup \mathcal{V}(x_1)$, que son dos \mathbb{CP}^1 que se cortan transversalmente en el punto $(0 : 0 : 1)$ (en la figura una burbuja esta arriba de otra). Sin embargo cuando vemos la parametrización, tenemos que $u_\varepsilon \rightarrow u_0$ donde:

$$u_0 : \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{CP}^2$$

$$u_0(x_0 : x_1) = (0 : x_1 : x_0).$$

La convergencia es uniforme en todos lados menos en el punto $(1 : 0)$, donde no esta definido el límite. El problema entonces fue la formación de una “burbuja” que la parametrización no puede ver, volveremos a este ejemplo más adelante.

Figura 5: Bosquejo del segundo ejemplo, el color representa a donde van los puntos.



El último ejemplo ya nos dice que no podemos esperar extraer subsucesiones que converjan, al menos en todo punto. Algo que nos puede dar esperanza son los resultados de regularidad que obtuvimos en la sección 3.1 para curvas pseudoholomorfas, en particular el corolario 3.2.1. Este decía que si tenemos una sucesión de curvas J_n –holomorfas definidas en una carta, digamos $u_n : D \subset \mathbb{C} \rightarrow M$ donde $J_n \rightarrow_n J$ y la sucesión $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ esta acotada en la norma $W^{1,p}$, entonces existe una subsucesión convergente C^∞ (si las estructuras son suaves). Un corolario sencillo de esto es:

Proposición 5.1. *Sea $\{J_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de estructuras casi complejas tal que $J_n \rightarrow_n J$ (en la topología C_{loc}^∞) y $u_n : \Sigma \rightarrow M$ una sucesión de curvas J_n –holomorfas tal que:*

$$\|du_n\|_{C^0} \leq K,$$

donde la norma de du_n esta determinada por g_J y μ . Entonces $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente C^∞ a $u : \Sigma \rightarrow M$ curva J –holomorfa.

Demostración. Por el Teorema de Arzela-Ascoli tenemos que $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente C^0 , supongamos que a $u : \Sigma \rightarrow M$. Cubramos a Σ y a $u(\Sigma)$ con una cantidad finita de entornos coordenados, en estos entornos vale el corolario 3.2.1. Entonces en cada carta vamos a tener una subsucesión que va a converger a un límite en la topología C^∞ , este límite es continuo por lo tanto debe coincidir con u . Tomando una subsucesión diagonal a todas las cartas obtenemos lo deseado. \square

Notar que entonces los problemas para extraer subsucesiones surgen porque $\{du_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ no están equiacotados. La idea ahora es buscar estimativas para du (con u pseudoholomorfa) para controlar el crecimiento del diferencial y aplicar la proposición anterior.

Teorema 5.2 (Desigualdad de valor medio). *Existe $\delta > 0$ tal que si $u : D_r \subset \mathbb{C} \rightarrow M$ es pseudoholomorfa y $\int_{D_r} \|du\|^2 dx dy \leq \delta$ entonces:*

$$\|du(0)\|^2 \leq \frac{8}{\pi r^2} \int_{D_r} \|du\|^2 dx dy.$$

La prueba de este teorema se puede encontrar en [?]. La idea de la prueba es más o menos la siguiente: consideremos ∇ la conexión de Chern para el fibrado $u^*TM \rightarrow \Sigma$ con la estructura holomorfa determinada por D_u . Es fácil chequear que cumple:

$$d^\nabla du = 0,$$

donde d^∇ es la extensión de ∇ a las formas. Analogamente usando dualidad de Hodge se puede ver que:

$$(d^\nabla)^* du = 0.$$

Por lo tanto la forma du es armónica para esta conexión, por la fórmula de Weitzenböck obtenemos:

$$0 = \nabla^* \nabla du + du \circ Ricc + K^{u^*TM}(du)$$

Por lo tanto si denotamos $e(u) = \langle du, du \rangle$, la fórmula anterior nos da una desigualdad del tipo:

$$\frac{1}{2} \Delta e(u) \leq C(e(u) + e(u)^2).$$

Una vez que se tiene esta desigualdad se aplica un teorema de valor medio para el laplaciano, con funciones cumpliendo una desigualdad como la de arriba. Menciono este método, simplemente porque es muy general, esta misma prueba funciona para probar la misma desigualdad para curvas pseudoholomorfas con borde y conexiones de Yang-Mills, vease [Weh04].

Observación. Sea $u : \Sigma \rightarrow M$ pseudoholomorfa, tomando cartas y comparando la métrica g_J con la estándar obtenemos que $\exists \delta > 0$ tal que si $\int_{D_r} \|du\|^2 dx dy \leq \delta$ entonces vale la desigualdad para alguna constante $C > 0$ que depende de la métrica g_J .

Corolario 5.2.1 (Cuantización de energía). *Existe $K > 0$ tal que si u es pseudoholomorfa con $E(u) \leq K$ entonces u es constante.*

Demostración. Como Σ es compacta, deducimos del Teorema anterior que existe $C > 0$ tal que $\|du\|_{C^0}^2 \leq CE(u)$ para todas las curvas pseudoholomorfas (tomando un cubrimiento finito de entornos coordenados). Sea $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Sigma$ una curva, estimemos la longitud de $u \circ \gamma$:

$$\begin{aligned} l(u \circ \gamma) &= \int_0^1 \|d_{\gamma(t)}u(\dot{\gamma}(t))\| dt \leq \int_0^1 \|d_{\gamma(t)}u\| \|\dot{\gamma}(t)\| dt \\ &= \leq \sup_{z \in \Sigma} \|d_z u\| l(\gamma) \leq (CE(u))^{\frac{1}{2}} l(\gamma). \end{aligned}$$

Por lo tanto si $E(u)$ es suficientemente pequeño, $u(\Sigma)$ está contenida dentro de una bola geodésica en M y por lo tanto $u_*[\Sigma]$ es trivial. \square

Vamos a llamar a $\hbar = \sup\{K > 0 : E(u) \leq K \implies u = \text{const}, \bar{\partial}_J u = 0\}$.

Corolario 5.2.2. *Sean $\{J_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{J}(M, \omega)$ estructuras casi complejas con $J_n \rightarrow_n J \in \mathcal{J}(M, \omega)$. Existe $K > 0$ tal que si una sucesión $u_n : \Sigma \rightarrow M$ de curvas J_n -holomorfas satisface que $E(u_n) \leq K$ entonces existe una subsucesión convergente en la topología C^∞ a $u_\infty : \Sigma \rightarrow M$ curva J -holomorfa.*

Demostración. Notemos que como $J_n \rightarrow_n J$ en C^∞ entonces $g_{J_n} \rightarrow g_J$ en C^∞ , por lo tanto en la desigualdad del valor medio 5.2 podemos encontrar un δ independiente de J_n . Entonces si $K > 0$ es suficientemente pequeña tenemos una cota global $\|du_n\|_{C^0} \leq C'$, pero por la proposición 5.1 tenemos lo deseado. \square

A partir de ahora, vamos a asumir que $\{J_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{J}(M, \omega)$ es tal que $J_n \rightarrow_n J \in \mathcal{J}(M, \omega)$ (en la topología C_{loc}^∞). Podemos refinar un poco el corolario anterior para obtener:

Proposición 5.3. *Sean $u_n : \Sigma \rightarrow M$ curvas J_n -holomorfas tal que $E(u_n) \leq C$ para cierta constante $C > 0$, entonces existen $\{x_1, \dots, x_l\} \subset \Sigma$ y una subsucesión de $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergiendo C_{loc}^∞ en $\Sigma \setminus \{x_1, \dots, x_l\}$ a $u_\infty : \Sigma \setminus \{x_1, \dots, x_l\} \rightarrow M$ J -holomorfa.*

Demostración. Triangulemos Σ y engordemos un poco la triangulación para obtener un cubrimiento $\{V_i^0\}_{i \in I_0}$ (I_0 es un conjunto finito porque Σ es compacta). Subdividiendo baricéntricamente n veces y engordando obtenemos cubrimientos $\{V_i^n\}_{i \in I_n}$ (vease 6) tal que:

1. $\sup_{i \in I_n} \text{diam} V_i^n \rightarrow_n 0$.
2. $V_{i_1}^n \cap V_{i_2}^n \cap V_{i_3}^n \cap V_{i_4}^n = \emptyset$ donde $i_j \neq i_k$.

Sea $K > 0$ como en la proposición anterior entonces veamos que podemos estimar globalmente $\#J_{n,k}$ donde $J_{n,k} = \{i \in I_n : \int_{V_i^n} u_k^* \omega \geq K\}$. Estos son los “conjuntos malos”, notemos que:

$$\#J_{n,k}K \leq \sum_{i \in J_{n,k}} \int_{V_i^n} u_k^* \omega \leq 3C$$

Por lo tanto tenemos que $\#J_{n,k}$ está acotado y es independiente de n, k . Supongamos que l es una cota superior entera y tomemos $\{x_{n,k}^1, \dots, x_{n,k}^l\}$ elementos en cada uno de los V_i^n con $i \in J_{n,k}$, si hay menos de l rellenamos con elementos cualesquiera de Σ . Como Σ es compacta a menos de tomar subsucesiones de $\{u_k\}$ y $\{V_i^n\}_{i \in I_n}$ supongamos que $x_{n,k}^i \rightarrow x^i$ para cierto $x^i \in \Sigma$.

Ahora si tomamos K_N un compacto en $\Sigma \setminus \{x_1, \dots, x_l\}$ como los diámetros de los cubrimientos van a 0, para un n, k grande tenemos que K_N intersecta solo abiertos tal que $\int_{V_i^n} u_k^* \omega \leq K$, por lo tanto podemos asumir que en K_N tenemos una subsucesión de u_k convergente C^∞ . Haciendo esto para compactos con $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_N = \Sigma \setminus \{x_1, \dots, x_l\}$ tenemos lo deseado tomando la subsucesión diagonal a todas las anteriores. \square

Una pregunta natural ahora es si es posible extender ese límite a todo Σ . La respuesta es que sí:

Teorema 5.4 (Singularidad evitable). *Sea $D^* = D \setminus \{0\}$ y $u : D^* \rightarrow \Sigma$ una curva J -holomorfa con $\int_{D^*} u^* \omega < +\infty$ entonces existe una extensión a una curva J -holomorfa en el disco D .*

Demostración. La idea es conseguir cotas para el diferencial cerca del 0, así vamos a conseguir que u es Hölder y por lo tanto la podemos extender continuamente. Que esta extensión es pseudoholomorfa lo veremos más adelante.

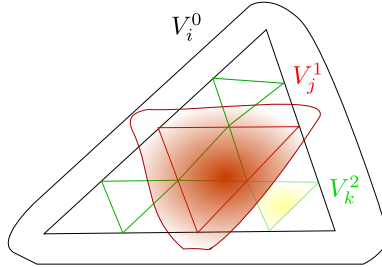
La hipótesis nos dice que $a(r) = \int_{D_r} \|du\|^2 dx dy$ cumple que $a(r) \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow 0$. Tomemos un $r < \delta$ donde δ es como en el teorema de valor medio 5.2. Entonces si $|z| \leq \frac{\delta}{2}$ tenemos que:

$$\|du(z)\|^2 \leq \frac{8}{\pi(\frac{|z|}{2})^2} \int_{D(z, \frac{|z|}{2})} \|du(x+iy)\| dx dy \leq \frac{C}{|z|^2} a(2|z|), \quad (7)$$

donde usamos $D(z, \frac{|z|}{2}) \subset D(0, 2|z|)$. Usemos esto para estimar $l(r) = \int_0^{2\pi} \|du(re^{i\theta})\| d\theta$ que es la longitud de la curva cerrada $\gamma_r(e^{i\theta}) = u(re^{i\theta})$, por la desigualdad:

$$l(r) \leq 2\pi \sqrt{Ca(2r)},$$

Figura 6: Las triangulaciones descritas arriba



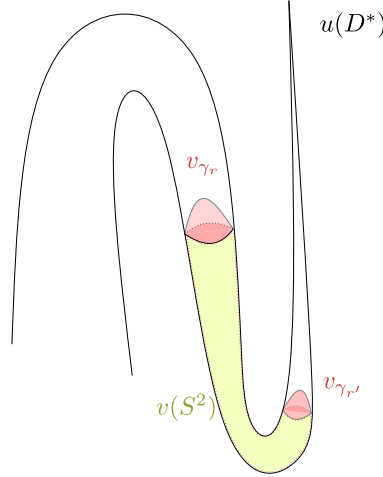
en particular tenemos que $l(r) \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow 0$. En la figura 7 se puede ver un bosquejo de lo que esta sucediendo, el peor caso posible es que la parte fina acumule.

Tratemos de acotar $a(r)$ (para así acotar $\|du(z)\|$), supongamos que r es pequeño para que $l(r')$ sea menor que el radio de inyectividad de la variedad M $\forall r' : 0 < r' \leq r$.

Observar que en estas condiciones γ_r y $\gamma_{r'}$ tienen bien definida la acción simpléctica (vease 2.3). Esto significa que si v_{γ_r} es una extensión de γ_r al disco, la cantidad $A(\gamma_r) = \int_D v_{\gamma_r}^* \omega$ es independiente de la extensión elegida. Definamos $v : S^2 \rightarrow M$ como:

$$v(z) = \begin{cases} v_{\gamma_{r'}}(\frac{1}{r'}z), & z \in D(0, r') \\ u(re^{i\theta}), & z \in A(r, r') \\ v_{\gamma_r}(r\frac{1}{z}), & z \in D(0, r)^c, \end{cases}$$

Figura 7: Un bosquejo de la situación.



donde $A(r, r') = D_r \setminus D_{r'}$. Tenemos que v es el borde de una esfera S^3 homotópicamente nula y por lo tanto integrando $v^* \omega$ tenemos que:

$$E(u|_{A(r, r')}) + A(\gamma_r) + A(\gamma_{r'}) = 0.$$

La desigualdad isoperimétrica (teorema 2.10) nos dice que cuando $r' \rightarrow 0$ tenemos que $A(\gamma_{r'}) \rightarrow 0$ y que $A(\gamma_r) \leq Cl(r)^2$. Entonces haciendo $r' \rightarrow 0$ en la igualdad anterior:

$$a(r) \leq C'l(r)^2.$$

Ahora si usamos Cauchy-Schwartz:

$$\begin{aligned} l(r)^2 &= \left(\int_0^{2\pi} \|du(re^{i\theta})\| r d\theta \right)^2 \\ &\leq \left(\int_0^{2\pi} \|du(re^{i\theta})\|^2 d\theta \right) 2\pi r^2. \end{aligned}$$

Pasando un r dentro de la integral:

$$l(r)^2 \leq 2\pi r \left(\int_0^{2\pi} \|du(re^{i\theta})\|^2 r d\theta \right).$$

Pero el lado derecho es justamente $4\pi r a'(r)$, por lo tanto:

$$a(r) \leq C' 4\pi r a'(r),$$

integrando esta expresión tenemos que $a(r') \leq a(r) \left(\frac{r'}{r}\right)^{2\alpha}$ donde $\alpha = \frac{1}{8\pi C'} > 0$.

Usando esta cota en la ecuación 7 tenemos que:

$$\|du(z)\| \leq \frac{C''}{|z|^{1-\alpha}},$$

con $\alpha > 0$, de esto deducimos dos cosas: la primera es que entonces u es uniformemente α -Hölder en un entorno de 0 por el teorema de valor medio, entonces la podemos extender continuamente. La segunda observación es que entonces $du \in L^p$ con $p < \frac{2}{1-\alpha}$ (y $\frac{2}{1-\alpha} > 2$) por lo tanto $u \in W^{1,p}$ en un entorno del 0, por los resultados de regularidad concluimos que u es C^∞ y por lo tanto pseudoholomorfa. □

Con esto concluimos entonces:

Corolario 5.4.1. *Sea $u_n : \Sigma \rightarrow M$ una sucesión de curvas J_n -holomorfas con $E(u_n) \leq C$ para cierta $C > 0$. Entonces existen $\{x_1, \dots, x_l\} \subset \Sigma$ tal que en $\Sigma \setminus \{x_1, \dots, x_l\}$, $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergiendo C_{loc}^∞ a $u_\infty : \Sigma \rightarrow M$ curva J -holomorfa.*

Ahora sabemos que a menos de finitos puntos, toda sucesión de curvas con energía acotada tiene una subsucesión convergente (C_{loc}^∞). ¿Podemos decir algo sobre el área de la curva límite? Volvamos al ejemplo 1 que vimos al comienzo, aquí las curvas iniciales u_n tenían área $2\text{Vol}(S^2)$ (los mapas tienen grado 2) sin embargo el límite tiene área $\text{Vol}(S^2)$. ¿A donde se fue la energía perdida? Ciertamente lo que sea que pase sucede en los finitos puntos donde no tenemos convergencia (ya que las derivadas convergen uniformemente fuera de este conjunto).

Motivados por lo anterior, sean $u_n : \Sigma \rightarrow M$ curvas J_n -holomorfas. Notemos que cada u_n define una medida ν_n en Σ vía la forma $u_n^* \omega$. Las medidas en un espacio compacto, son un conjunto compacto (con la topología w^* , por Banach-Alaoglu) por lo tanto a menos de tomar una subsucesión de u_n tenemos que $\nu_n \rightarrow_n \nu$ una medida y que $u_n \rightarrow_n u_\infty$ C^∞ salvo en finitos puntos (por el teorema anterior).

Tomemos $z \in \Sigma$ y definamos:

$$m(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{D_\varepsilon(z)} u_n^* \omega,$$

donde $D_\varepsilon(z)$ es una bola geodésica centrada en z . Denotemos por C al conjunto de puntos a los que $u_n \not\rightarrow_n u_\infty$ minimal. Observemos entonces que si $z \notin C$ entonces $m(z) = 0$ por convergencia uniforme a u_∞ .

El enunciado que nos completa el panorama de que pasa con la compacidad de las curvas pseudoholomorfas es:

Teorema 5.5 (Compacidad débil). *Sean $u_n : \Sigma \rightarrow M$ curvas J_n -holomorfas con $E(u_n) \leq C$ para cierta $C > 0$, tales que sus medidas asociadas ν_n convergen a cierta ν (en la topología débil) y $u_n \rightarrow_n u_\infty$ una curva J -holomorfa donde la convergencia es uniforme en compactos salvo en finitos puntos C . Entonces usando las notaciones anteriores tenemos:*

1. Si $z \in C$ entonces $m(z) \geq \hbar$.
2. $\nu = \nu_\infty + \sum_{z \in C} m(z) \delta_z$, donde ν_∞ es la medida asociada a u_∞ .

Demostración. 1. Tomemos entornos coordenados alrededor de $z_i \in C$ disjuntos. En estos $\|du_n\|$ no está equiacotado ya que sino $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tendría subsucesión convergente por lo dicho anteriormente. Tomando cartas centradas en estos puntos suponemos sin pérdida de generalidad que $u_n : D_\varepsilon \subset \mathbb{C} \rightarrow M$ curvas J -holomorfas y $z_n \rightarrow_n 0$ una sucesión tal que $\|du_n(z_n)\| \rightarrow_n \infty$. La idea es reparametrizar inteligentemente la curva, para obtener una sucesión de curvas con energía acotada. Esto requiere cierta astucia, como veremos abajo precisamos que los z_n sean tales que podamos conseguir una cota $\|du(z)\| \leq C\|du(z_n)\|$ para todos los z en un entorno de z_n . Para esto el siguiente lema es natural:

Lema 5.6 (Hofer). *Sea (X, d) un espacio métrico completo y $f : X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ una función continua. Fijemos $\delta > 0$ y $x_0 \in X$, entonces existe $\varepsilon \in (0, \delta]$ e $y \in B_{2\varepsilon}(x_0)$ tal que:*

$$\begin{cases} d(y, x) \leq \varepsilon \\ \varepsilon f(y) \geq \delta f(x) \\ \sup_{x \in B_\varepsilon(y)} f(x) \leq 2f(y). \end{cases}$$

Demostración. La prueba es constructiva: supongamos que $\sup_{x \in B_\delta(x_0)} f(x) \leq f(x_0)$, en este caso terminamos ya que $\delta = \varepsilon$ e $y = x_0$. Si esto no pasa entonces existe $x_1 \in B_\delta(x_0)$ tal que $f(x_1) > 2f(x_0)$. Entonces tomemos $\varepsilon_1 = \frac{\delta}{2}$, notar que en particular $\varepsilon_1 f(x_1) > \delta f(x)$. Ahora o bien $\sup_{x \in B_{\varepsilon_1}(x_1)} f(x) \leq 2f(x_1)$ o seguimos el proceso como antes.

Si este programa no termina en una cantidad finita de pasos, obtenemos sucesiones $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B_\delta(x_0)$ y $\{\varepsilon_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tales que:

$$\begin{cases} \varepsilon_n = \frac{\varepsilon_{n-1}}{2} \\ \varepsilon_n f(x_n) > \delta f(x_0). \end{cases}$$

Como $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ esta en la bola, podemos tomar una subsucesión convergente, la primera condición nos dice que $\varepsilon_n \rightarrow 0$ y la segunda tomando límite en n nos da $\delta f(x_0) < 0$ lo cual es absurdo.

□

Usemos este lema (a menos de restringirnos a un disco compacto) con la función $f_n(z) = ||du_n(z)||$, en el punto es z_n y $\delta_n = \frac{1}{||du_n(z_n)||^{\frac{1}{2}}}$. Obtenemos entonces sucesiones $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D_\varepsilon$ y $\{\varepsilon_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que:

$$\begin{cases} \delta_n \geq \varepsilon_n, \text{ (en particular } \varepsilon_n \rightarrow_n 0) \\ w_n \rightarrow 0 \\ \sup_{B_{\varepsilon_n}(w_n)} ||du(z)|| \leq 2||du(w_n)|| \\ \varepsilon_n ||du(w_n)|| \rightarrow_n \infty. \end{cases}$$

Definamos $C_n = ||du(w_n)||$ y las curvas:

$$\begin{aligned} v_n : D_{C_n \varepsilon_n} &\rightarrow M \\ v_n(z) &= u(w_n + \frac{z}{C_n}). \end{aligned}$$

Observemos que $||dv_n||_{L^\infty(D_{\varepsilon_n C_n})} \leq 2$ y $||dv_n(0)|| = 1$. En particular la equiacotación de los gradientes, $\{v_n\}_{n \geq n_0}$ tiene subsucesión convergente en $D_{\varepsilon_{n_0} C_{n_0}}$. Como $\varepsilon_n C_n \rightarrow_n \infty$, si tomamos una subsucesión diagonal obtenemos que $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergiendo C^∞ en compactos a $v : \mathbb{C} \rightarrow M$ una curva J -holomorfa.

Notar que v no es constante ya que $||dv(0)|| = 1$ y por lo tanto tiene cierta energía $E(v) < \infty$. Tomando $v(\frac{1}{z})$ obtenemos una curva pseudoholomorfa con dominio $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ y energía finita, por el teorema de la singularidad evitable esta se extiende a $v : S^2 \rightarrow M$ J -holomorfo (y $E(v) \geq \hbar$).

En particular si $\lambda \in (0, 1)$ entonces existe un R grande tal que:

$$\begin{aligned} \lambda \hbar &< \int_{D_{C_n \varepsilon_n}} v^* \omega = \lim_n \int_{D_{C_n \varepsilon_n}} v_n^* \omega \\ &< \lim_n \int_{D_{\varepsilon_n}} u_n^* \omega \leq \lim_n \int_{D_\varepsilon} u_n^* \omega. \end{aligned}$$

Como esto vale $\forall \lambda \in (0, 1)$ obtenemos que $\hbar \leq \int_D u_n^* \omega$. En particular haciendo $\varepsilon \rightarrow 0$ obtenemos lo deseado.

2. Tomemos $B_\varepsilon(z_i)$ con $z_i \in C$ bolas geodésicas disjuntas y denotamos a $E(u, K) = \int_K u^* \omega$ para u pseudoholomorfa, entonces si Ω es un abierto:

$$\begin{aligned} E(u_\infty, \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^l B_\varepsilon(z_i)) &= \lim_n E(u_n, \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^l B_\varepsilon(z_i)) \\ &= \lim_n E(u_n, \Omega) - \sum_{i=1}^l E(u_n, B_\varepsilon(z_i) \cap \Omega). \end{aligned}$$

Y notemos que $\lim_n E(u_n, \Omega) = \nu(\Omega)$. Haciendo $\varepsilon \rightarrow 0$ tenemos lo deseado. \square

6 Aplicaciones

6.1 El teorema de "Non-squeezing"

El objetivo de esta sección es probar el famoso teorema de Gromov:

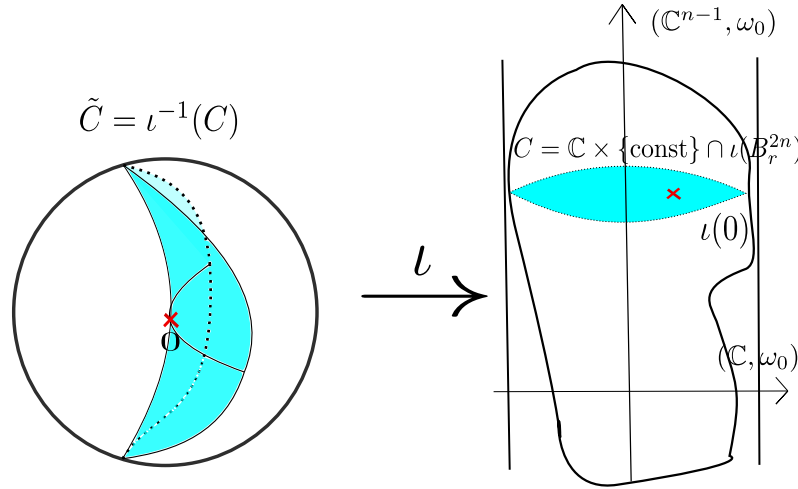
Teorema 6.1 (Non-squeezing). *Supongamos que $\iota : B_r^{2n} \rightarrow D_R \times \mathbb{C}^{n-1}$ es un encaje simpléctico respecto a las formas simplécticas estandar, entonces $r \leq R$.*

Antes que nada, veamos como aparecen las curvas pseudoholomorfas en esta situación. Supongamos que $\iota(0) \in \mathbb{C} \times \{\text{const}\}$ (vease la figura 8), entonces $C = \mathbb{C} \times \{\text{const}\} \cap \iota(B_r^{2n})$ es una subvariedad de $D_R \times \mathbb{C}^{n-1}$ tal que:

- Es *simpléctica*.
- $\text{área}(C) \leq \pi R^2$.
- C es mínima para la métrica usual g_0 (simplemente porque esta contenida en un plano).

Esto nos dice que $\iota^{-1}(C) = \tilde{C} \subset B_r^{2n}$ es una superficie pasando por cero que tiene la misma área que C ($\leq \pi R^2$) y es mínima según la métrica ι^*g_0 (lo cual puede no decirnos nada).

Figura 8: Bosquejo de la situación.



La idea de Gromov es sutil y se basa en la observación hecha al comienzo del capítulo 3 que nos decía que las subvariedades simplécticas eran lo mismo que las curvas J -holomorfas para cierta J -estructura compatible con la simpléctica. Gracias a esta observación, supongamos por un momento que existe $C \subset D_R \times \mathbb{C}^{n-1}$ una superficie (posiblemente abierta) pasando por $\iota(0)$ tal que:

- Es J -holomorfa para cierta J estructura compatible con ω_0 .

- $\text{área}(C) \leq \pi R^2$ respecto a la métrica g_J determinada por J y ω .

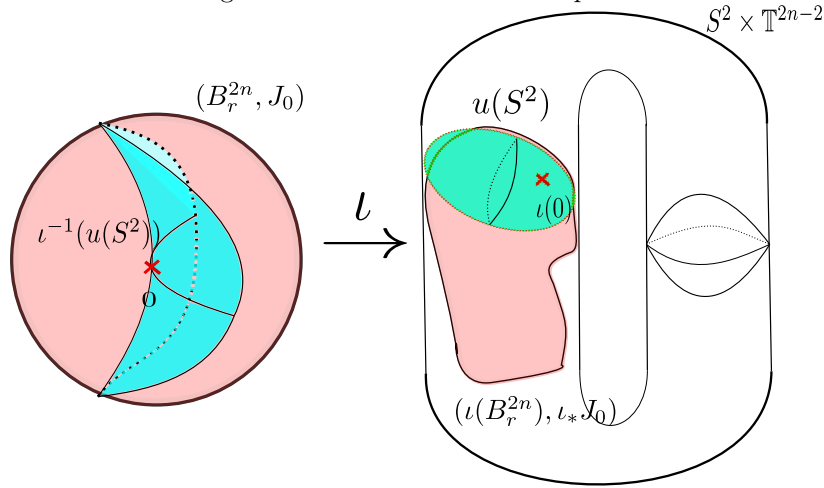
Entonces $\iota^{-1}(C) = \tilde{C} \subset B_r^{2n}$ es una curva ι^*J -holomorfa pasando por 0 con la misma área que C . Pero el espacio de J -estructuras compatibles con la forma simpléctica estandar es muy flexible (en el sentido de que es fácil construirlas), en particular veremos que es posible construir una J -estructura en $D_R \times \mathbb{C}^{n-1}$ tal que $\iota^*J = J_0$ la estructura estandar. Esto implica que \tilde{C} es una curva *holomorfa* pasando por 0, entonces por el principio de monotonía (teorema 7.5) obtenemos que:

$$\pi r^2 \leq \text{área}(\tilde{C}) = \text{área}(C) \leq \pi R^2,$$

que implica lo deseado. Gracias a esto reducimos la demostración del teorema a probar la existencia de curvas pseudoholomorfas con área prefijada. El problema que tenemos ahora es que las curvas mencionadas anteriormente son abiertas, si pudieramos modificar este problema a uno donde las mismas fueran compactas, entonces la existencia de curvas con área prefijada es equivalente a la existencia de curvas en cierta clase de homología (por la identidad de energía, vease 3.3). Esto es lo que haremos para rematar la idea.

Observación. Para probar el teorema podemos asumir sin pérdida de generalidad que ι se extiende diferenciablemente a $\overline{B_r^{2n}}$ con imagen compacta en $D_R \times \mathbb{C}^{n-1}$. Esto es porque $\forall \varepsilon > 0$ podemos restringir ι a $\overline{B_{r-\varepsilon}^{2n}}$, probar el teorema en este caso nos dice que $r - \varepsilon \leq R \forall \varepsilon > 0$, y esto prueba la desigualdad deseada.

Figura 9: Reducción al caso compacto.



Casi demostración. Usando la observación anterior, sin pérdida de generalidad suponemos que $\iota(B_r^{2n})$ tiene clausura compacta en $D_R \times \mathbb{C}^{n-1}$, en particular está contenido en $D_{R-\delta} \times [-N, N]^{2n-2}$ para algún N grande y $\delta > 0$.

Sea $\mathbb{T}^n := \mathbb{R}^n / k\mathbb{Z}^n$, $k \in \mathbb{Z}$ el toro usual, tenemos el encaje $[-N, N]^{2n-2} \hookrightarrow \mathbb{T}^{2n-2}$ simplécticamente, donde la estructura simpléctica en el toro es la que baja naturalmente al cociente. También podemos encajar simplécticamente $D_{R-\delta} \hookrightarrow S^2$ donde S^2 tiene una forma de área σ con $\int_{S^2} \sigma = \pi R^2$.

Por lo tanto a menos de componer por un encaje simpléctico $\phi : D_R \times [-N, N]^{2n-2} \rightarrow S^2 \times \mathbb{T}^{2n-2}$, podemos suponer que tenemos el encaje $\iota : B_r^{2n} \hookrightarrow S^2 \times \mathbb{T}^{2n-2}$, donde este último tiene la estructura simpléctica $\sigma \oplus \omega_0$ (vease la figura 9).

Tenemos ahora el abierto $\iota(B_r^{2n}) \subset S^2 \times \mathbb{T}^{2n-2}$, aquí podemos definir la estructura compleja $J := \iota_* J_0$. Esta estructura es compatible con $\sigma \oplus \omega_0$ porque ι es un symplectomorfismo. Podemos extender J a una estructura compatible en todo $S^2 \times \mathbb{T}^{2n-2}$ usando funciones chichón (J es simplemente una sección de un fibrado).

Notemos que $\pi_2(S^2 \times \mathbb{T}^{2n-2}) \cong \mathbb{Z}$ y está generado por la clase de homotopía de $S^2 \times \{pt\}$. Esto nos dice que el área de una curva J -holomorfa puede ser solamente un múltiplo del área de la esfera por la siguiente cuenta: sea $u = (u^{S^2}, u^{\mathbb{T}^{2n-2}}) : S^2 \rightarrow S^2 \times \mathbb{T}^{2n-2}$ una curva pseudoholomorfa, entonces:

$$E(u) = \langle \sigma \oplus \omega_0, u_*[S^2] \rangle = \langle \sigma, u_*^{S^2}[S^2] \rangle + \langle \omega_0, u_*^{\mathbb{T}^{2n-2}}[S^2] \rangle = \langle \sigma, u_*^{S^2}[S^2] \rangle,$$

donde la última igualdad es porque $\pi_2(\mathbb{T}^{2n-2}) = 0$. Entonces concluimos que $E(u) = \pi k R^2$, donde $k = \deg u^{S^2}$.

En particular si existiese $u : S^2 \rightarrow S^2 \times \mathbb{T}^{2n-2}$ con clase de homología $u_*[\Sigma] = [S^2 \times \{pt\}]$ entonces $\text{área}(u(S^2)) = \pi R^2$ y:

$$\text{área}(u(S^2)) \geq \text{área}(u(S^2) \cap \iota(B_r^{2n})) = \text{área}(\iota^{-1}(u(S^2) \cap \iota)) \geq \pi r^2,$$

donde la última desigualdad es por el principio de monotonía, ya que $\iota^{-1}(u(S^2) \cap \iota(B_r^{2n}))$ es una curva holomorfa pasando por 0 por la elección de J . □

Lo único que nos falta probar es la existencia de la curva $u : S^2 \rightarrow S^2 \times \mathbb{T}^{2n-2}$ con $u_*[S^2] = [S^2 \times \{pt\}]$. Vamos a probar algo mucho más fuerte:

Teorema 6.2. *Sea (W, ω) una variedad simpléctica tal que $\langle \omega, \pi_2(W) \rangle = 0$ y tomemos $M := S^2 \times W$ con la forma simpléctica $\omega_0 = \sigma \oplus \omega$, con σ una forma de área en S^2 . Entonces dada $J \in \mathcal{J}(M, \omega_0)$ y $z \in S^2$ el mapa:*

$$\begin{aligned} ev_z : \mathcal{M}([S^2 \times \{pt\}], S^2; J) &\rightarrow M \\ ev_z(u) &= u(z), \end{aligned}$$

es sobreyectivo.

Es decir que por cada punto pasa una curva J -holomorfa con clase de homología $[S^2 \times \{pt\}]$ como queríamos, lo cual termina la prueba del teorema.

En lo que queda de esta sección vamos a probar este resultado. Este teorema no es cierto en general para cualquier variedad simpléctica, la prueba se basa fuertemente en que tenemos una familia de J -estructuras en M que son automáticamente regulares. Una vez que tenemos esto, el resto del argumento es esencialmente: por cobordismo extender el resultado para el resto de las estructuras regulares y luego usar la densidad de estas ultimas en el espacio $\mathcal{J}(M, \omega_0)$ para concluir el caso general.

Proposición 6.3. Sea $J \in \mathcal{J}(W, \omega)$ y definamos $J_0 = j \oplus J (\in \mathcal{J}(M, \omega_0))$, donde j es la estructura compleja de S^2 . Entonces esta estructura es regular para la clase $[S^2 \times \{pt\}]$ y satisface la conclusión del teorema 6.2.

Demostración. Supongamos que existe $u = (u^1, u^2) : S^2 \rightarrow S^2 \times W$ curva J_0 -holomorfa en la clase de homología deseada, entonces u^1 y u^2 son curvas holomorfas (j y J -holomorfa respectivamente). Pero entonces como $\langle \omega, \pi_2(W) \rangle = 0$ tenemos que $E(u^2) = 0$ y por lo tanto $u^2 = \text{const.}$ Por otro lado, como u^1 tiene grado 1 (por la elección de la clase de homología), $u^1 \in \text{Aut}(S^2) = PGL(2, \mathbb{C})$. Por lo anterior tenemos un difeomorfismo natural $\mathcal{M}([S^2 \times \{pt\}], S^2; J_0) \cong PGL(2, \mathbb{C}) \times W$ (es sencillo ver que mediante esta identificación las topologías coinciden). Esto una variedad de dimensión $6 + \dim W$. Por otro lado observemos que:

$$n\chi(S^2) + 2c_1(u^*T(S^2 \times W)) = 2n + 2c_1(TS^2) = 2n + 4.$$

Como $\dim W = 2n - 2$, tenemos que es justamente la dimensión del moduli. Esta cuenta nos dice que la dimensión de $\mathcal{M}([S^2 \times \{pt\}], S^2; J_0)$ coincide con la predicha por el teorema 4.4, esto nos da esperanzas de que la estructura sea regular. Para ver esto, sea $(u, w) \in PGL(2, \mathbb{C}) \times W$, la linealización del operador $\bar{\partial}_J$ sobre esta curva se descompone naturalmente:

$$D_{(u,w)} : W^{1,p}((u, w)^*TM) \rightarrow L^p(\Lambda^{0,1}T^*S^2 \otimes (u, w)^*TM)$$

$$D_{(u,w)} = \begin{pmatrix} D_u & 0 \\ 0 & \bar{\partial} \end{pmatrix},$$

donde usamos que $(u, w)^*TM = u^*TS^2 \times T_w W$, por lo tanto $D_u : W^{1,p}(u^*TS^2) \rightarrow L^p(\Lambda^{0,1}T^*S^2 \otimes u^*TS^2)$ es la linealización del operador de Cauchy-Riemann usual y $\bar{\partial} : W^{1,p}(T_w W) \rightarrow L^p(\Lambda^{0,1}T^*S^2 \otimes T_w W)$ es simplemente aplicar el operador $\bar{\partial}$ en cada componente. Usando el segundo criterio del corolario 2.24.1 es fácil ver que D_u y $\bar{\partial}$ son ambos sobreyectivos.

Nos falta ver que el mapa ev_z es sobreyectivo, pero esto es inmediato porque $PGL(2, \mathbb{C})$ actúa transitivamente en S^2 . □

Siguiendo el plan anterior, el segundo paso para probar el teorema es:

Proposición 6.4. Sea $J \in \mathcal{J}_{reg}([S^2 \times \{pt\}], S^2)$, entonces el mapa evaluación:

$$ev_z : \mathcal{M}([S^2 \times \{pt\}], S^2; J) \rightarrow M,$$

es sobreyectivo.

Demostración. Denotemos $J_1 := J$ y sea J_0 una estructura como en la proposición anterior. Usando el teorema 4.8 existe $\gamma \in \mathcal{J}_{reg}(J_0, J_1)$ un camino regular tal que $\mathcal{W}([S^2 \times \{pt\}], S^2; \gamma)$ es una variedad diferenciable con borde $\partial\mathcal{W}([S^2 \times \{pt\}], S^2; \gamma) = \mathcal{M}([S^2 \times \{pt\}], S^2; J_1) \cup \mathcal{M}([S^2 \times \{pt\}], S^2; J_0)$.

Afirmación. Para probar la proposición basta con probar que $\mathcal{W}([S^2 \times \{pt\}], S^2; \gamma)$ es una variedad compacta.

Esto es porque como ev_z en el moduli de J_0 es sobreyectiva, tiene grado ($\text{mod } \mathbb{Z}_2$) no nulo. El moduli de J_1 es cobordante a este (por una variedad compacta), y por lo tanto ev_z debe tener grado no nulo aquí también y por lo tanto es sobreyectiva.

Probar la compacidad de $\mathcal{W}([S^2 \times \{pt\}], S^2; \gamma)$, es difícil porque $Aut(S^2)$ no es compacto, entonces podríamos terminar fácilmente con curvas convergiendo a un punto. Sin embargo para probar el teorema basta tomar una subvariedad de esta y ver que la evaluación aquí es sobreyectiva. Para controlar la falta de compacidad del grupo $Aut(S^2)$ tenemos que imponer obstrucciones en el moduli, para esto usemos que una transformación de Mobius queda únicamente determinada por sus valores en tres puntos.

Lema 6.5. *En las condiciones anteriores, fijemos una métrica en $M = S^2 \times W$ y $z_1, z_2, z_3 \in S^2$. Consideremos el espacio:*

$$\mathcal{M}_\delta([S^2 \times \{pt\}], S^2; \mathcal{J}) = \{(u, J) \in \mathcal{M}([S^2 \times \{pt\}], S^2; \mathcal{J}) : d(u(z_i), u(z_j)) \geq \delta, \forall i, j\},$$

donde $\mathcal{M}([S^2 \times \{pt\}], S^2; \mathcal{J})$ es el espacio de moduli universal. Entonces la proyección $\pi : \mathcal{M}_\delta([S^2 \times \{pt\}], S^2; \mathcal{J}) \rightarrow \mathcal{J}(M, \omega_0)$ es propia.

Demostración. Supongamos que $\{J_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathcal{J}(M, \omega_0)$ tal que $J_n \rightarrow_n J \in \mathcal{J}(S^2 \times W, \omega_0)$. Queremos ver que $\{(u_n, J_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_\delta([S^2 \times \{pt\}], S^2; \mathcal{J})$ tiene una subsucesión convergente en la misma clase de homología.

Por lo discutido anteriormente $E(u_k) = \hbar$, donde \hbar es la energía de la mínima esfera pseudoholomorfa en M . Entonces por los resultados de compacidad probados en la sección 5 tenemos que existen puntos $\{z^1, \dots, z^l\} \subset S^2$ tal que fuera de estos $u_n \rightarrow_n u_\infty$ C_{loc}^∞ , donde u_∞ es una curva J -holomorfa. Además tenemos:

$$E(u_\infty) + \sum_{i=1}^l m(z^i) = \hbar,$$

donde $m(z_i)$ son como en el teorema 5.5. Pero $m(z^i) \geq \hbar \forall i$ y por lo tanto $l \leq 1$. Esto quiere decir que en al menos dos de los z_1, z_2, z_3 , tenemos convergencia uniforme usual, pero entonces u_∞ no es constante y por lo tanto $l = 0$. \square

Ahora estamos en condiciones de culminar con la proposición. Tomemos $z_2, z_3 \in S^2$, y denotemos como $z_1 = z$ el punto donde estamos evaluando los moduli. Tomemos las inclusiones $j_i : \{z_i\} \times W \hookrightarrow S^2 \times W$, $i = 1, 2, 3$ y los mapas de evaluación:

$$\begin{aligned} ev_{z_i} : \mathcal{W}([S^2 \times \{pt\}], S^2; \gamma) &\rightarrow M \\ ev_{z_i}(t, u) &= u(z_i). \end{aligned}$$

Usando el Teorema de transversalidad, a menos de perturbar C^1 a j_i tenemos que estas inclusiones son transversales a ev_{z_i} . Por lo tanto:

$$\tilde{\mathcal{W}}([S^2 \times \{pt\}], S^2; \gamma) = \{(t, u) \in \mathcal{W}([S^2 \times \{pt\}], S^2; \gamma) : u(z_i) \in j_i(\{z_i\} \times W), i = 1, 2, 3\},$$

es una variedad diferenciable con borde $\tilde{\mathcal{M}}([S^2 \times \{pt\}], S^2; J_1) \cup \tilde{\mathcal{M}}([S^2 \times \{pt\}], S^2; J_0)$, donde cada uno de estos son los elementos del moduli que cumplen con la restricción como arriba. Además si las perturbaciones son suficientemente pequeñas se cumple que $d(u(z_i), u(z_j)) \geq \delta$ y por lo tanto $\tilde{\mathcal{W}}([S^2 \times \{pt\}], S^2; \gamma)$ es compacta por la proposición anterior. El argumento de cobordismo que dimos anteriormente nos dice que $ev_{z_1} : \tilde{\mathcal{M}}([S^2 \times \{pt\}], S^2; J_0) \rightarrow \{z_1\} \times W$ es sobreyectiva y por lo tanto $ev_{z_1} : \tilde{\mathcal{M}}([S^2 \times \{pt\}], S^2; J_1) \rightarrow \{z_1\} \times W$ también lo es.

Hasta ahora probamos que $ev_{z_1}^1$ es sobreyectiva en $\{z_1\} \times W$, pero para terminar el argumento de que es sobreyectiva basta componer con automorfismos de S^2 que nos lleve z_1 al punto deseado. \square

Ahora estamos en condiciones de concluir la prueba del teorema:

Prueba de 6.2. Ya probamos el teorema para las estructuras regulares. Tomemos ahora $J \in \mathcal{J}(S^2 \times W, \omega_0)$ arbitraria y $p \in M$. Fijando $z_2, z_3 \in S^2$ y consideremos el moduli universal restringido de la demostración anterior junto con la proyección: $\pi : \mathcal{M}_\delta([S^2 \times \{pt\}], S^2; \mathcal{J}) \rightarrow \mathcal{J}(M, \omega)$. Aproximemos a J por $\{J_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ regulares (que son densas), en cada moduli de las J_n existe u_n una curva J_n -holomorfa con $u_n(z_1) = p$, entonces como la proyección es propia tiene una subsucesión convergente a una u J -holomorfa con $u(z_1) = p$ como queríamos. \square

6.2 Capacidades simplécticas y rigidez

A continuación veremos que el non-squeezing nos permite definir un invariante global de las variedades simplécticas, este forma parte de una familia de invariantes introducidos por primera vez por Hofer y Ekeland en [?] llamadas capacidades simplécticas:

Definición 6.1. Una *capacidad simpléctica* c asigna a cada (M, ω) variedad simpléctica de dimensión $2n$ (o una subclase de estas) un real positivo (posiblemente ∞) cumpliendo las siguientes propiedades:

- *Monotonía:* Si existe $f : (M, \omega_M) \rightarrow (N, \omega_N)$ encaje simpléctico entonces $c(M, \omega_M) \leq c(N, \omega_N)$.
- *Conformalidad:* $c(M, \lambda\omega) = |\lambda|c(M, \omega)$.
- *Normalización:* $c(B^{2n}, \omega_0) = c(D \times \mathbb{C}^{n-1}, \omega_0) = \pi$.

Observación. • En dimensión 2 tenemos que $|\int_M \omega|^{\frac{1}{2}}$ es una capacidad trivialmente. Notar que en dimensión más alta es mentira que $|\text{vol}(M)|^{\frac{1}{n}}$ es una capacidad, donde vol es la medida de Liouville (el volumen del cilindro es ∞).

- Si $U \subset \mathbb{R}^{2n}$ es un abierto, afirmo que $c(\lambda U, \omega_0) = \lambda^2 c(U, \omega_0)$ con $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Demostración. Tenemos el mapa $\phi : \lambda U \rightarrow U$ que manda $x \mapsto \frac{1}{\lambda}x$ y cumple que $\phi^*\lambda^2\omega_0 = \omega_0$, por lo tanto $\phi : (\lambda U, \omega_0) \rightarrow (U, \lambda^2\omega_0)$ es un difeomorfismo simpléctico. Usando la conformalidad concluimos lo deseado. \square

Estas observaciones nos dice de alguna manera que las capacidades son invariantes “de dimensión 2”.

Ejemplos. • Definamos el ancho de Gromov como:

$$D(M, \omega) = \sup\{\pi r^2 : \text{existe un encaje simpléctico } \phi : (B_r^{2n}, \omega_0) \rightarrow (M, \omega)\}.$$

Es fácil ver que $D(M, \omega)$ satisface las dos primeras propiedades para ser una capacidad, la tercera es exactamente el Non-Squeezing.

• También podemos definir:

$$\hat{c}(M, \omega) = \inf\{\pi R^2 : \text{existe un encaje simpléctico } \psi : (M, \omega) \rightarrow (D_R \times \mathbb{C}^{n-1}, \omega_0)\}.$$

Por las mismas razones que antes, \hat{c} es una capacidad.

Estas capacidades son especiales por lo siguiente:

Lema 6.6. *Sea c una capacidad simpléctica, entonces $D(M, \omega) \leq c(M, \omega) \leq \hat{c}(M, \omega)$.*

Demostración. Supongamos que existe $\phi : (B_r^{2n}, \omega_0) \rightarrow (M, \omega)$ un encaje simpléctico, entonces por monotonía tenemos $c(B_r^{2n}, \omega_0) \leq c(M, \omega)$. Por lo visto anteriormente $c(B_r^{2n}, \omega_0) = \pi r^2$ y tomando supremos tenemos lo deseado. La otra desigualdad es idéntica. \square

Comentario. Encontrar una capacidad es equivalente a probar el non-squeezing, por lo tanto no es trivial encontrarlas. Una capacidad distinta a las dos que ya presentamos es la capacidad de Hofer y Zehnder, la referencia clásica acerca de esto es el libro [HZ94]. Esta se basa en ciertas propiedades sobre las órbitas periódicas para una clase especial de Hamiltonianos en M .

Concluyamos este texto probando la rigidez C^0 de los simplectomorfismos. Para esto “solamente” vamos a usar que existe una capacidad.

Teorema 6.7 (Eliashberg, Gromov). *Sean $f_n : (M, \omega_M) \rightarrow (N, \omega_N)$ difeomorfismos simplécticos tal que $f_n \rightarrow_n f \in \text{Diff}(M, N)$ en la topología C^0 , entonces f es un difeomorfismo simpléctico.*

Notar que este teorema es local (ya que la diferenciabilidad es una propiedad local). Tomando cartas de Darboux, basta ver el siguiente enunciado (que es más fuerte):

Proposición 6.8. *Sean $f_n : B^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ simplectomorfismos respecto a ω_0 con $f_n(0) = 0$. Supongamos que $f_n \rightarrow_n f$ en la topología C^0 y que f es diferenciable en 0, entonces $d_0 f \in Sp(2n, \mathbb{R})$.*

Para esto usemos el siguiente lema de álgebra lineal:

Lema 6.9. Supongamos que $T \in SL(2n, \mathbb{R})$ no es simpléctica ni antisimpléctica ($T^*\omega_0 = -\omega_0$), entonces existe $S \in Sp(2n, \mathbb{R})$ y una base simpléctica $\{e_1, f_1, \dots, e_n, f_n\}$ tal que:

1. $T \circ S(e_1) = \lambda e_1$, $T \circ S(f_1) = \lambda f_1$ donde $|\lambda| < 1$.
2. $T \circ S$ deja el ortogonal simpléctico de $\mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}f_1$ invariante.

Esto significa que un $T \in SL(2n, \mathbb{R})$ que no es simpléctico ni antisimpléctico contrae un plano simpléctico.

Veamos primero como el lema implica la proposición, y por lo tanto el teorema.

Demostración. Sea $T = [df_0]_C$ la matriz Jacobiana. Afirimo que $T \in SL(2n, \mathbb{R})$, esto es porque f_n preserva la medida de Lebesgue $\forall n$, y por lo tanto f también la preserva por convergencia uniforme. Luego como

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{m(f(B_\varepsilon^{2n}))}{m(B_\varepsilon^{2n})} = |\det T|,$$

por el teorema de Taylor, por lo tanto $|\det T| = 1$. Supongamos entonces que T no es simpléctica ni antisimpléctica, entonces el lema anterior nos da $S \in Sp(2n, \mathbb{R})$ como arriba. A menos de cambiar de base tenemos:

$$T \circ S(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots).$$

Entonces tenemos que $f \circ S(z) = Tz + o(|z|)$ lleva una bola B_ε^{2n} en $B_{\varepsilon'}^{2n}$ con $\varepsilon' < \varepsilon$ y por lo tanto lo mismo vale para f_n con n lo suficientemente grande, esto es absurdo por la existencia de una capacidad.

Hasta ahora concluimos que T es simpléctica o antisimpléctica. Hagamos el mismo argumento para la sucesión $\{(f_n, Id)\}_{n \in \mathbb{N}}$, esto nos dice que (T, Id) es simpléctica o antisimpléctica, es decir $(T, Id)^*\omega_0 \oplus \omega_0 = \mu(\omega_0 \oplus \omega_0)$ con $\mu = \pm 1$, pero:

$$(T, Id)^*\omega_0 \oplus \omega_0 = (\pm\omega_0) \oplus \omega_0.$$

Y por lo tanto $\mu = 1$ y T es simpléctica. □

Demostración. Afirimo que existe un e, f con $|\omega_0(e, f)| = 1$ pero con $|\omega_0(Le, Lf)| = \lambda^2 < 1$. Esto es simplemente porque $|\det L| = 1$, no todos pueden dar 1 y si todos dieran ≥ 1 nos da un absurdo con el determinante.

Completemos $\{e, f\}$ a una base simpléctica con $e_1 = e$, $f_1 = f$ □

Solamente nos falta probar:

Demostración del lema 6.9. Notar que como ω_0 es no degenerada, los $L \in GL_{2n}(\mathbb{R})$ tienen adjuntos bien definidos, es decir $\omega_0(Tv, w) = \omega_0(v, T^*w)$, $\forall v, w \in \mathbb{R}^{2n}$. En particular tenemos T^* bien definido y $T^* \in SL(2n, \mathbb{R})$.

Es sencillo chequear que T^* no es simpléctico ni antisimpléctico ya que T no lo es, entonces afirimo que existen $\{e, f\}$ dos vectores tal que $|\omega_0(e, f)| = 1$ y:

$$|\omega_0(T^*e, T^*f)| = \lambda^2 < 1.$$

Esto es simplemente porque $T^* \in SL(2n, \mathbb{R})$ y si para todo par de vectores $\{e, f\}$ la cuenta diera > 1 estaríamos contradiciendo esta hipótesis.

Para culminar simplemente tomemos un simplectomorfismo S enviando $S \circ T^*(e) = \lambda e$ y $S \circ T^*(f) = \lambda f$. Transponiendo simplecticamente los mapas obtenemos lo deseado.

□

7 Apéndices

7.1 Algunas nociones de geometría Riemanniana.

Sea M^n una variedad diferenciable y $\pi : E \rightarrow M$ un *fibrado vectorial* sobre M . Denotemos como $\text{Sym}^2(E)$ al fibrado de las formas simétricas de E , diremos que $g \in \Gamma(\text{Sym}^2(E))$ (una sección del fibrado) es una métrica si g_p es no degenerada $\forall p \in M$.

Definición 7.1. Sea M una variedad diferenciable y g una métrica en TM , diremos que el par (M, g) es una variedad Riemanniana.

Observación. 1. Toda variedad diferenciable admite una métrica Riemanniana (por un argumento clásico usando particiones de la unidad).

2. La métrica g induce naturalmente métricas en todos los productos tensoriales de TM y T^*M (es decir fibrados de la forma $\bigotimes_{i=1}^k T^*M \otimes \bigotimes_{i=1}^l TM$). Para ver esto, sea e_1, \dots, e_n una base ortonormal de T_pM , entonces si declaramos que los elementos de la forma $e_{i_1}^* \otimes \dots \otimes e_{i_k}^* \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_l}$ formen un conjunto ortonormal de $\bigotimes_{i=1}^k T_p^*M \otimes \bigotimes_{i=1}^l T_pM$, esto nos determina únicamente una métrica en $\bigotimes_{i=1}^k T^*M \otimes \bigotimes_{i=1}^l TM$ (la estrella arriba de un elemento representa el elemento dual).

3. En particular tenemos métricas en $T^*M \otimes TM \cong \text{End}(TM)$ y en los productos exteriores $\Lambda^k T^*M \subset \bigotimes_{i=1}^k T^*M$.

7.1.1 Conexiones en fibrados vectoriales:

Sea $\pi : E \rightarrow M$ un fibrado vectorial sobre M . Si tenemos una sección $\xi \in \Gamma(E)$ y cierta dirección $v \in T_pM$, es sencillo definir “ $\partial_v \xi \in T_pM$ ” tomando entornos coordenados de $p \in M$. El problema de esta definición es que depende de las cartas escogidas. Abstrayendo las propiedades que satisface “ $\partial_v \xi$ ” es sencillo llegar a la siguiente definición:

Definición 7.2. Una conexión en un fibrado $\pi : E \rightarrow M$, es una transformación lineal $\nabla : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(T^*M \otimes E)$ tal que satisface la regla de Leibniz:

$$\nabla(f\xi) = df \otimes \xi + f\nabla\xi, \forall f \in C^\infty(M),$$

donde df es la derivada exterior usual.

Esta definición puede resultar un poco misteriosa al principio, pero hay que pensar que estamos “esperando” un campo $X \in TM$ contra el cual estamos derivando.

Observación. 1. Las conexiones son un espacio vectorial de dimension infinita. Esto se puede ver construyendo cualquier conexión en coordenadas (por ejemplo “ $\partial_v \xi$ ” del comienzo) y luego pegarlas con particiones de la unidad.

2. Es bien sabido que si (M, g) es una variedad Riemanniana, TM tiene una única conexión, llamada conexión de *Levi-Civita* tal que:

(a) Es *simétrica*:

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y], \forall X, Y \in \Gamma(TM).$$

(b) Es compatible con la métrica:

$$d\langle X, Y \rangle = \langle \nabla X, Y \rangle + \langle X, \nabla Y \rangle, \forall X, Y \in \Gamma(TM).$$

3. Sean ∇^1 y ∇^2 dos conexiones, entonces por la regla de Leibniz:

$$\nabla^1(f\xi) - \nabla^2(f\xi) = f(\nabla^1 - \nabla^2)\xi, \forall \xi \in \Gamma(E), f \in C^\infty(M).$$

Esto implica que $\nabla^1 - \nabla^2 \in \Gamma(T^*M \otimes \text{End}(E))$ (ya que el operador es C^∞ lineal).

Gracias a la derivada exterior, podemos extender ∇ a:

$$\Gamma(E) \xrightarrow{d^\nabla} \Gamma(T^*M \otimes E) \xrightarrow{d^\nabla} \Gamma(\Lambda^2 T^*M \otimes E) \xrightarrow{d^\nabla} \dots, \quad (8)$$

definiendo $d^\nabla(\omega \otimes \xi) = d\omega \otimes \xi + (-1)^{\deg \omega} \omega \wedge \nabla \xi$. Antes de ver para qué nos sirve esto, necesitamos una definición:

Definición 7.3. Sea $\xi \in \Gamma(E)$ satisfaciendo $\nabla \xi = 0$, vamos a decir que la sección ξ es *paralela*.

El estudio de estas secciones surge naturalmente (vease 2.5), la intuición es que estas son las secciones constantes.

Observación. La existencia de secciones paralelas depende de la conexión y en general no existen. Por ejemplo en el contexto Riemanniano la existencia de una sección paralela implicaría que localmente la métrica se descompone como un producto de una métrica euclídea y una métrica de codimensión 1. En particular, la existencia local de una base de secciones paralelas implica que localmente (M, g) es isométrica a (\mathbb{R}^n, g_0) .

Algunos resultados importantes (por ejemplo la integrabilidad de los fibrados holomorfos) son equivalentes a la existencia de una base de secciones locales paralelas como en la observación. Un resultado clásico de Cartan (vease [DK90]) nos dice que la existencia de esta base es equivalente a que $d^\nabla \circ d^\nabla = 0$.

Definición 7.4. Decimos que el operador $d^\nabla \circ d^\nabla : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(\Lambda^2 M \otimes E)$ es la *curvatura* de la conexión.

Observación. Por el resultado que mencionamos anteriormente, la curvatura es una obstrucción para la existencia de secciones locales paralelas. Si observamos la ecuación 8, podemos pensar que esto es una especie de “lema de Poincaré”.

7.1.2 El dual de Hodge

Sea M^n una variedad Riemanniana compacta y orientable, como vimos anteriormente, esta métrica induce naturalmente una en $\bigwedge^k T^*M$. Abusando de notación, denotemosla como $\langle \cdot, \cdot \rangle$, el grado del fibrado exterior al que corresponde estará claro en el contexto.

Notar que entonces tenemos dos isomorfismos naturales. El primero es:

$$\wedge : \bigwedge^k T^*M \rightarrow \text{Hom}(\bigwedge^{n-k} T^*M, \bigwedge^n T^*M)$$

$$\wedge(\alpha)(\beta) = \beta \wedge \alpha,$$

que viene dado por el producto cuña. Pero $\bigwedge_x^n T^*M \cong \mathbb{R}$ ya que este espacio tiene dimensión 1, elegimos el isomorfismo identificando $1 \leftrightarrow (e_1)^* \wedge \dots \wedge (e_n)^* = dv$ el producto del dual de una base ortonormal (esta es la forma de volúmen de la métrica). Por otro lado la métrica nos da el isomorfismo bemol:

$$\flat : \bigwedge^k T^*M \rightarrow (\bigwedge^k T^*M)^*$$

$$\flat(\alpha)(\beta) = \langle \alpha, \beta \rangle$$

Definamos entonces

$$* := \wedge^{-1} \circ \flat : \bigwedge^k T^*M \rightarrow \bigwedge^{n-k} T^*M$$

Notar que al variar x , $*_x$ es tan regular como la métrica μ . La construcción de $*$ nos da que como $\wedge \circ * = \flat$, si $\alpha \in \Omega^k(M)$ y $\beta \in \Omega^k(M)$:

$$\langle \alpha, \beta \rangle dv = \alpha \wedge * \beta$$

Ahora notemos que como tenemos una métrica en $\bigwedge^k T^*M$, tenemos la norma L^2 :

$$\langle \alpha, \beta \rangle_{L^2} = \int_M \langle \alpha, \beta \rangle dv.$$

Que por lo anterior es $\int_M \alpha \wedge * \beta$.

Observación. $*$: $\bigwedge^k T^*M \rightarrow \bigwedge^{n-k} T^*M$ es una isometría ya que manda bases ortonormales en bases ortonormales.

Lema 7.1. $*^2 = (-1)^{k(n-k)}$

Demostración. Por la observación anterior tenemos que:

$$\alpha \wedge * \beta = \langle \alpha, \beta \rangle dv = \langle * \alpha, * \beta \rangle dv$$

$$= * \beta \wedge * * \alpha = (-1)^{k(n-k)} * * \alpha \wedge * \beta,$$

donde usamos la simetría de el producto interno. Como esto pasa para cualquier β terminamos. □

La $*$ se usa usualmente para calcular adjunto a operadores con la norma L^2 definida anteriormente. A modo de ejemplo calculemos el adjunto del operador $d : \Omega^{k-1}(M) \rightarrow \Omega^k(M)$:

$$\langle d\alpha, \beta \rangle_{L^2} = \int d\alpha \wedge * \beta.$$

Pero como $d(\alpha \wedge * \beta) = d\alpha \wedge * \beta + (-1)^{k-1} \alpha \wedge d \circ * \beta$ entonces por el teorema de Stokes tenemos que:

$$\int d\alpha \wedge * \beta = (-1)^{\deg k} \int \alpha \wedge d \circ * \beta.$$

Entonces si ponemos $d^* : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k-1}(M)$ definido como $d^* = (-1)^{k(n-k+1)} * \circ d \circ *$ es fácil ver por la cuenta anterior que

$$\langle d\alpha, \beta \rangle_{L^2} = \langle \alpha, d^* \beta \rangle_{L^2}.$$

Podemos extender esta construcción un poco más: sea $\pi : E \rightarrow M$ un fibrado vectorial sobre M variedad Riemanniana compacta, donde E tiene una métrica g .

Observación. Los espacios $\Lambda^k T^* M \otimes E$ tiene naturalmente la métrica producto. Nuevamente abusemos de notación y denotemosla como $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ya que el espacio queda claro en el contexto.

Extendamos a este contexto la estrella de Hodge como:

$$\begin{aligned} *_E : \Lambda^k T^* M \otimes E &\rightarrow \Lambda^{n-k} T^* M \otimes E \\ *_E \alpha \otimes \xi &= (*\alpha) \otimes \xi. \end{aligned}$$

Definiendo también el mapa:

$$\begin{aligned} - : \Lambda^k T^* M \otimes E &\rightarrow \Lambda^{n-k} T^* M \otimes E^* \\ \overline{\alpha \otimes \xi} &= \alpha \otimes \iota_\xi g, \end{aligned}$$

donde $\iota_\xi g(\eta) = g(\xi, \eta)$ es la contracción usual. Obtenemos que:

$$\langle \alpha \otimes \xi, \beta dv \otimes \eta \rangle = \overline{\alpha \otimes \xi} \wedge *_E \beta \otimes \eta,$$

donde el producto cuña se extiende a $\Lambda^k T^* M \otimes E \times \Lambda^l T^* M \otimes E^* \rightarrow \Lambda^{k+l} T^* M$.

Nuevamente podemos definir los espacios $L^2(\Lambda^k T^* M \otimes E)$. Entonces si ∇ es una conexión en el fibrado E , podemos tratar de calcular el adjunto formal al operador d^∇ . Por la misma cuenta que antes, si ∇ es *compatible con la métrica* g , obtenemos que $d^* = (-1)^{k(n-k+1)} *_E \circ d^\nabla \circ *_E$ (donde $d^\nabla : \Omega^{k-1}(M, E) \rightarrow \Omega^k(M, E)$).

7.1.3 Breve introducción a las variedades mínimas

Cuando comenzamos un curso de geometría Riemanniana, es natural buscar la primera variación de la longitud de curvas para encontrar geodésicas. La idea es generalizar esta pregunta a dimensión más grande, ¿qué subvariedades inmersas de dimensión k son puntos críticos del funcional de área?

Tomemos (\bar{M}, \bar{g}) una variedad Riemanniana y consideremos $M \subset \bar{M}$ una subvariedad encajada (esto es simplemente por simplicidad, todo lo que diremos vale para subvariedades inmersas) con la métrica g inducida por \bar{g} . La conexión de Levi-Civita para M es $\nabla = (\bar{\nabla})^T$, donde $\bar{\nabla}$ es la conexión de Levi-Civita de \bar{M} y el superíndice T denota la proyección en TM .

Definición 7.5. En las condiciones anteriores, definimos la segunda forma fundamental $\Pi \in \Gamma(\text{Sym}^2 TM \otimes T^\perp M)$:

$$\Pi(X, Y) = \bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y = (\bar{\nabla}_X Y)^N.$$

Esto es simplemente la componente normal de la derivada covariante $\bar{\nabla}$.

Definición 7.6. Definimos a la curvatura media de M como $H := \text{tr } \Pi$. Esto significa que si E_1, \dots, E_n una base ortonormal en un punto $x \in M$ entonces:

$$H(x) = \sum_{i=1}^n \Pi_x(E_i, E_i).$$

H esta bien definida porque Π es tensorial. El teorema que queremos probar es:

Teorema 7.2 (Fórmula de la primera variación). *Sea $M \subset \bar{M}$ una subvariedad compacta de \bar{M} y $\phi_t : M \rightarrow \bar{M}$ una familia a un parámetro de inmersiones con $\phi_0 = \text{Id}$ y $\phi_t|_{\partial M} = \text{Id}$, denotemos a $X = \frac{d}{dt}|_{t=0} \phi_t$ entonces:*

$$\frac{d}{dt}|_{t=0} \text{vol}(\phi_t M) = - \int_M \langle H, X \rangle dv_g,$$

donde dv_g es la forma de volúmen de M .

Observación. Definamos a la divergencia de un campo X como

$$\mathcal{L}_X dv_g = \text{div}_g X dv_g$$

Que por la fórmula de Cartan, esto coincide con $d\iota_X dv_g$. Por lo tanto el Teorema de Stokes nos dice que $\int_M \text{div}_g X dv_g = \int_{\partial M} \iota_X dv_g$.

Veamos una expresión en coordenadas, supongamos que ϕ_t localmente satisfacen $\frac{d}{dt}|_{t=0} \phi_t = X$ y tomemos E_1, \dots, E_n es un frame ortonormal en un punto p entonces en este punto tenemos:

$$\phi_t^* dv_g = \det(\langle E_i(\phi_t), E_j \rangle) dv_g.$$

Por lo tanto derivando esta expresión:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}|_{t=0} \phi_t^* dv_g &= \left(\sum_{i=1}^n \frac{d}{dt}|_{t=0} \langle E_i(\phi_t), E_i \rangle \right) dv_g \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} X, E_i \rangle \right) dv_g. \end{aligned}$$

Concluimos $\text{div}_g X = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} X, E_i \rangle$, donde E_1, \dots, E_n es una base ortonormal en p .

Demostración. Por la misma cuenta que la observación anterior tenemos que si E_1, \dots, E_n es una base ortonormal de M en un punto x entonces:

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}\phi_t^*dv_g = \left(\sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{E_i} X, E_i \rangle \right) dv_g.$$

Esto difiere de lo anterior porque en vez de la conexi3n ∇ aparece $\bar{\nabla}$, esto es porque nos escapamos de M . Separemos $X = X^T + X^N$ la parte tangencial y normal entonces:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{E_i} X, E_i \rangle &= \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{E_i} X^T, E_i \rangle + \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{E_i} X^N, E_i \rangle \\ &= \operatorname{div}_g X^T + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \langle X, N_j \rangle \langle \nabla_{E_i} N_j, E_i \rangle, \end{aligned}$$

donde N_1, \dots, N_m es un frame que es una base ortonormal del complemento ortogonal a $T_x M$. Como $\langle \nabla_{E_i} N_j, E_i \rangle = -\langle N_j, \nabla_{E_i} E_i \rangle$ y N_j est1 en el ortogonal concluimos $\langle N_j, \nabla_{E_i} E_i \rangle = -\langle N_j, \Pi(E_i, E_i) \rangle$. Reagrupando todo nos da:

$$\sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{E_i} X, E_i \rangle = \operatorname{div}_g X^T - \langle X^N, H \rangle.$$

Pero $\langle X^N, H \rangle = \langle X, H \rangle$ ya que H es ortogonal a TM . Usando el teorema de Stokes como en la observaci3n y notando que $X|_{\partial M} = 0$ tenemos lo deseado. \square

Motivados por esto definimos:

Definici3n 7.7. Decimos que $M \subset \bar{M}$ como arriba es una *variedad m3nima* si $H = 0$.

Esto nos dice que las variedades m3nimas son puntos cr3ticos del funcional de vol3men.

Hay una familia importante de variedades m3nimas que nos vamos a encontrar a lo largo de la tesis y viene dada por esta proposici3n:

Proposici3n 7.3. Tomemos (\bar{M}, J, ω) una variedad de K1hler y supongamos que M es una subvariedad compleja (es decir $J(TM) = TM$), entonces Σ es m3nima.

Demostraci3n. Se puede ver (esta hecho en 7.5) que si \bar{M} es Kahler entonces J es paralela para Levi-Civita de g_J , esto implica que:

$$\Pi(JX, Y) = \Pi(X, JY) = J(\Pi(X, Y)).$$

En particular $\Pi(JX, JY) = -\Pi(X, Y)$, por lo tanto si $\{E_1, \dots, E_n\}$ es una \mathbb{C} -base ortonormal para $h = g_J - i\omega$ entonces $\{E_1, \dots, E_n, JE_1, \dots, JE_n\}$ es una base ortonormal para g_J y por la cuenta anterior tenemos que la traza de Π es nula. \square

De hecho podemos decir mucho m1s:

Teorema 7.4 (Desigualdad de Wirtinger). 1. Sea (V, h) un espacio vectorial complejo con una forma hermitiana $h = g - i\omega$, entonces si $W \subset V$ es un subespacio de dimensión $2k$ y $\{w_1, \dots, w_{2k}\}$ es base de W tenemos:

$$|\omega^k(w_1, \dots, w_{2k})| \leq k! dv(w_1, \dots, w_{2k}),$$

donde dv es la forma de volumen de g en W . La igualdad se realiza si y solo si W es un subespacio complejo.

2. Sea M una subvariedad compleja de (\bar{M}, J, ω) variedad de Kahler y sea M' una subvariedad real homóloga a M , entonces:

$$vol(M) \leq vol(M').$$

Con igualdad si y solo si M' es compleja.

Demostración. 1. Primero observemos que si cambiamos a w_i por Aw_i con $A \in GL_{2k}(\mathbb{R})$ entonces sale $|\det A|$ en ambos lados de la desigualdad, por lo tanto basta hacerlo para una base preferida.

Notemos para el caso $k = 1$, si $\{w_1, w_2\}$ es una base g ortonormal de W entonces:

$$|\omega(w_1, w_2)| = |g(Jw_1, w_2)| \leq \|Jw_1\| \|w_2\| = 1,$$

donde usamos Cauchy-Schwarz. La igualdad se da si y solo si $Je = a \pm f$, es decir el subespacio es complejo.

Para el caso general notar que $\omega|_W(v, w) = \langle Av, w \rangle$ para cierto $A \in End(W)$ antisimétrico. Por el teorema espectral esta se diagonaliza en una base h ortonormal y como es antisimétrica sus valores propios son imaginarios. Por la forma de Jordan real concluimos que existe w_1, \dots, w_{2k} base ortonormal y reales μ_1, \dots, μ_k tal que:

$$A(w_{2j-1}) = \mu_j w_{2j}, \quad A(w_{2j}) = -\mu_j w_{2j-1}.$$

Usando Cauchy-Schwarz con $\omega(w_{2j-1}, w_{2j})$ como arriba obtenemos que $|\mu_j| \leq 1$ con igualdad si y solo si $Aw_{2j-1} = \pm Jw_{2j}$ por lo tanto:

$$\omega^k(w_1, \dots, w_{2k}) = k! |\mu_1 \dots \mu_k| \leq k! = k! dv(w_1, \dots, w_{2k}).$$

2. Si tengo una variedad con una métrica Hermitiana, vimos en 2.3 que la forma de volumen era $\frac{\omega^k}{k!}$ por lo tanto $vol(M) = \int_M \frac{\omega^k}{k!}$, pero tenemos $\int_M \frac{\omega^k}{k!} = \int_{M'} \frac{\omega^k}{k!}$ porque M, M' son homólogas. Entonces por la desigualdad anterior notar que $\frac{\omega^k}{k!} \leq dv$ la forma de volumen de M' , y con esto concluimos $vol(M) \leq vol(M')$. □

Una aplicación de la fórmula de la primera variación que nos va a ser muy útil es:

Teorema 7.5 (Principio de monotonía). *Sea $M^n \subset \mathbb{R}^N$ una variedad mínima entonces $\forall p \in M$ tenemos:*

$$\text{vol}(B(p, r) \cap M) \geq \omega_n r^n.$$

Donde ω_n es el volúmen de la bola de la esfera n dimensional.

Demostración. Supongamos sin pérdida de generalidad que $p = 0$ y definamos la función $V(r) = \text{vol}(M \cap B_r)$. El objetivo es estudiar $V'(r)$, una buena idea es usar la fórmula de la primera variación con el vector radial $X(x) = x$ en \mathbb{R}^N (que es la dirección normal a las bolas), el problema es que este campo no se anula en el borde.

Supongamos que tomamos el vector radial $X(x) = f(|x|)x$ anulándose en $\partial(B_r \cap M)$, entonces por 7.2 tenemos:

$$\int_{M \cap B_r} \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{E_i} X, E_i \rangle dv_g = 0.$$

Pero notar que:

$$\bar{\nabla}_{E_i} (f(|x|)x) = f'(|x|) \frac{\langle x, E_i \rangle}{|x|} x + f(|x|) E_i.$$

Y por lo tanto la ecuación anterior queda:

$$\int_{M \cap B_r} f'(|x|) \frac{|x|^2}{|x|} + f(|x|) n dv_g = 0.$$

En particular tomando f lineal a trozos con $f(t) = 1$ si $t \leq r - \varepsilon$ y $f(t) = 0$ si $t \geq r$ tenemos $f'(t) = -\frac{1}{\varepsilon}$ si $t \in (r - \varepsilon, r)$ y 0 de otra forma. Por lo tanto la fórmula anterior nos dá:

$$nV(r - \varepsilon) \leq \int_{M \cap (B_r \setminus B_{r-\varepsilon})} \frac{1}{\varepsilon} |x| dv_g \leq \frac{r}{\varepsilon} \text{vol}(M \cap (B_r \setminus B_{r-\varepsilon})).$$

Haciendo $\varepsilon \rightarrow 0$ nos dá justamente:

$$nV(r) \leq rV'(r).$$

Esto es equivalente a $(r^{-n}V(r))' \geq 0$ por lo tanto $V(r) \geq Cr^n$ para cierto C . Por último basta comparar a $V(r)$ con el volumen de una bola en T_0M para obtener que $C = \omega_n$. □

Observación. En particular notar que no hay variedades mínimas en \mathbb{R}^N compactas.

7.2 Espacios de Sobolev

Esta sección tiene el contenido mínimo necesario para que el texto resulte autocontenido, para una buena introducción a los espacios de Sobolev junto a su uso en el estudio de las ecuaciones en derivadas parciales elípticas ver [GT98].

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto, vamos a usar la notación $\partial_I = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{i_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_N}\right)^{i_N}$ donde $I = (i_1, \dots, i_N)$ es un multiíndice, definamos como $|I| := \sum_{k=1}^N i_k$ al orden del multiíndice. Por $L^p(\Omega)$ denotamos las funciones medibles en L^p con valores reales.

Definición 7.8. Sea I un multiíndice y $f \in L^p(\Omega)$, decimos que $\partial_I f \in L^1_{loc}(\Omega)$ es la derivada I -ésima débil (o en el sentido de las distribuciones) si:

$$\int_{\Omega} f \partial_I \phi dx = (-1)^{|I|} \int_{\Omega} \partial_I f \phi dx, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

donde $\mathcal{D}(\Omega)$ es el espacio de funciones C^∞ con soporte compacto en Ω .

Cuando la derivada débil existe está únicamente definida Lebesgue casi todo punto (ctp de ahora en más). En particular por el teorema de la divergencia si una función es C^k entonces sus derivadas débiles coinciden (por lo menos hasta orden k) con las usuales.

Definición 7.9. • Sea $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ y $p \in [1, \infty]$, definimos el espacio de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ como:

$$W^{k,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) : \partial_I f \in L^p(\Omega) \quad \forall I \text{ con } |I| \leq k\},$$

donde la derivada es en el sentido débil descrito anteriormente. A este espacio le vamos a poner la norma:

$$\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|I| \leq k} \|\partial_I f\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

En el caso $p = 2$ se le puede poner un producto interno de forma análoga.

- Definimos $f \in W^{k,p}_{loc}(\Omega)$ si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es medible y para todo abierto U de Ω con $\bar{U} \subset \Omega$ tenemos $f|_U \in W^{k,p}(U)$.
- Denotemos como $W^{k,p}_0(\Omega)$ a la clausura de $\mathcal{D}(\Omega)$ en $W^{k,p}(\Omega)$.

Observación. 1. Podemos ver que $W^{k,p}(\Omega)$ es completo ya que ser de Cauchy en $W^{k,p}$ significa que todas las derivadas débiles hasta orden k de una sucesión son de Cauchy y por lo tanto cada una de estas tiene un candidato a límite por la completitud de L^p .

2. Podemos encajar $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega, \mathbb{R}^M)$ para M grande vía el mapa:

$$\begin{aligned} W^{k,p}(\Omega) &\rightarrow L^p(\Omega, \mathbb{R}^M) \\ f &\mapsto (f, \partial_{I_1} f, \dots, \partial_{I_M} f), \end{aligned}$$

donde ordenamos a los multiíndices de orden hasta k con el orden lexicográfico. La imagen de este mapa es un cerrado por el comentario anterior, en particular si $p \in (1, \infty)$ el espacio $L^p(\Omega, \mathbb{R}^M)$ es reflexivo y por lo tanto $W^{k,p}(\Omega)$ es isomorfo a un subespacio cerrado de un espacio reflexivo y por lo tanto es reflexivo.

Definición 7.10. Definamos el espacio de funciones α -Hölder de Ω como:

$$C^{0,\alpha}(\Omega) := \{f \in C^0(\Omega) : \|f\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} < \infty\},$$

donde:

$$\|f\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} = \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} + \sup_{x \in \Omega} |u(x)|.$$

A $\|\cdot\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)}$ le llamamos la norma α -Hölder.

El primer teorema que vamos a presentar es el de encaje de Sobolev. Lo central en la prueba anterior es la siguiente desigualdad:

Teorema 7.6 (Desigualdad de Morrey). *Sea $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ y $p \in (N, \infty]$, entonces existe $C = C(p, N) > 0$ tal que:*

$$\|f\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)} \leq C \|f\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)},$$

donde $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$ (> 0).

Demostración.

Afirmación. Para $x \in \mathbb{R}^N$ tenemos la estimativa:

$$\int_{B(x,r)} |f(x+y) - f(x)| dy \leq \frac{r^N}{N} \int_{B(x,r)} \frac{|df(x+y)|}{|y-x|^{N-1}} dy.$$

Para probar esto notemos que si $y \in S^N$ y $s > 0$ entonces:

$$|f(x+sy) - f(x)| \leq \int_0^s |df(x+ty)| dt,$$

donde la norma es la del operador. Esto es simplemente usando el teorema de valor medio y que $y \in S^N$. Por lo tanto integrando en S^N obtenemos:

$$\int_{S^N} |f(x+sy) - f(x)| dS(y) \leq \int_0^s \int_{S^N} |df(x+ty)| dS(y) dt.$$

Si en la expresión de la derecha hacemos $|df(x+ty)| = |df(x+ty)|^{\frac{t^{N-1}}{t^{N-1}}}$ entonces podemos integrar en polares y concluimos:

$$\int_{S^N} |f(x+sy) - f(x)| dS(y) \leq \int_{B(x,s)} \frac{|df(x+y)|}{|x-y|^{N-1}} dy.$$

Entonces multiplicando por s^{N-1} e integrando de 0 a r obtenemos lo deseado.

Una vez que tenemos esto tenemos que acotar primero el supremo de $|u|$ y luego los incrementos.

1. Notemos que:

$$|f(x)| \leq \frac{1}{m(B(x, r))} \left(\int_{B(x, r)} |f(y) - f(x)| dy + \int_{B(x, r)} |f(y)| dy \right).$$

Por un lado tenemos $\int_{B(x, r)} |f(y)| dy \leq C \|f\|_{L^p(B(x, r))}$ por la desigualdad de Hölder. Basta acotar entonces el primer término. Este está acotado por $C \int_{B(x, r)} \frac{|df(x+y)|}{|x-y|^{N-1}} dy$ usando la estimativa de la afirmación y nuevamente por la desigualdad de Hölder obtenemos:

$$\int_{B(x, r)} \frac{|df(x+y)|}{|x-y|^{N-1}} dy \leq \|df\|_{L^p(B(x, r))} \left(\int_{B(x, r)} \frac{1}{|y-x|^{(N-1)q}} dy \right)^q,$$

donde q es el exponente conjuado de p . Pero $\frac{1}{|y-x|^{(N-1)q}} \in L^1(B(x, r))$ si y solo si $(N-1)q < N$ y como $q = \frac{p}{p-1}$ despejando esto pasa cuando $p > N$. Concluimos que $\|f\|_{C^0(\mathbb{R}^N)} \leq C \|f\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}$.

2. Tomemos $x, y \in \mathbb{R}^N$ y denotemos $r = |y - x|$, entonces si $U = D(x, r) \cap D(y, r)$ tenemos que:

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{m(U)} \left(\int_U |f(x) - f(z)| dz + \int_U |f(y) - f(z)| dz \right)$$

Pero notar que la estimativa que conseguimos para el primer factor en el item anterior nos sirve, además tenemos que:

$$\left(\int_{B(x, r)} \frac{1}{|z-x|^{(N-1)q}} dz \right) = c(r^{N-(N-1)\frac{p}{p-1}})^{\frac{p}{p-1}} = c|x-y|^{1-\frac{N}{p}}$$

Y tenemos lo deseado. □

Ahora supongamos que queremos el teorema para $f \in W^{1,p}(\Omega)$, algo natural que uno se puede preguntar es si hay alguna manera de extender una función de $W^{1,p}(\Omega)$ a una en $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Esto no es trivial ya que si intentamos (por ejemplo) multiplicar por una característica entonces las derivadas débiles en el borde explotan. Con esta intuición podemos pensar que la respuesta al problema de extensión va a depender de $\partial\Omega$. El siguiente teorema se puede encontrar en [GT98, 7.25]

Teorema 7.7 (Extensión). *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto acotado con $\partial\Omega$ de clase $C^{k-1,1}$ con $k \geq 1$ entonces:*

1. *Si denotamos a $C^\infty(\overline{\Omega})$ a las $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ que son C^∞ en un entorno de Ω , entonces $C^\infty(\overline{\Omega})$ es denso en $W^{k,p}(\Omega)$*

2. Si Ω' es un abierto que contiene a la clausura de Ω entonces existe un operador lineal acotado $E : W^{k,p}(\Omega) \rightarrow W_0^{k,p}(\Omega')$ tal que $Eu = u$ en Ω .

Asumiendo este teorema tenemos:

Corolario 7.7.1. Sea $p \in (N, +\infty)$ y Ω un abierto de \mathbb{R}^N acotado con borde Lipschitz. Entonces tenemos que la inclusión $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$ es lineal acotada y compacta.

Demostración. Veamos que f tiene un representante en $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, para esto tomemos una bola B que contenga a Ω y E un operador de extensión para este conjunto. Sea $\tilde{f} = Ef \in W_0^{1,p}(B)$, aproximemos \tilde{f} por una sucesión $\tilde{f}_n \in \mathcal{D}(B)$ y por el teorema de Morrey tenemos:

$$\|\tilde{f}_n - \tilde{f}_m\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)} \leq C \|\tilde{f}_n - \tilde{f}_m\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}.$$

Por lo tanto como la sucesión es de Cauchy, lo anterior nos dice que es de Cauchy con la norma Hölder pero entonces por Arzela Ascoli tiene subsucesión convergente a cierta \tilde{f} . Pero \tilde{f} debe coincidir con el límite \tilde{f} en casi todo punto, entonces \tilde{f} es un representante en $C^0(\overline{\Omega})$ de f . Además tenemos que:

$$\|f\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C \|f\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

En particular por Arzela Ascoli tenemos que el mapa es compacto. \square

Es inmediato de esto concluir el encaje compacto $W^{k+1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega})$ para $p \in (N, \infty]$.

Observación. Notar que las cotas son “sharp”, supongamos que en $B \subset \mathbb{R}^N$ la bola unitaria consideramos las funciones:

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\|x\|^\varepsilon},$$

donde $\varepsilon > 0$. Entonces tenemos que $|\nabla f_\varepsilon(x)| = O(\|x\|^{-\varepsilon-1})$ y por lo tanto $f_\varepsilon \in W^{1,p}(B)$ si y solo si $p(-1-\varepsilon) > -N$, es decir $\varepsilon < \frac{N}{p} - 1$. Esto solo puede suceder cuando $p \in (1, N)$. Acá conseguimos $f_\varepsilon \in W^{1,p}(B)$ con $p \in (1, N)$ tal que $f_\varepsilon \notin C^0(B)$. Para construir un ejemplo como los anteriores para $p = N$ es natural considerar:

$$f(x) = \log \|x\|,$$

ya que $|\nabla f(x)| = O(\frac{1}{\|x\|})$ y $\frac{1}{\|x\|}$ está “a punto de pertenecer a $L^N(B)$ ”. Resulta que alterando un poco esta función como:

$$f(x) = (\log \|x\|)^\alpha,$$

donde $\alpha \in (0, 1)$ nos dá un $f \in W^{1,N}(B)$ tal que $f \notin C^0(B)$.

De hecho la desigualdad de Morrey nos dá otro resultado importante:

Corolario 7.7.2. Sean $f \in \mathcal{D}(\Omega)$, donde Ω es un abierto acotado de borde Lipschitz y $p \in (N, +\infty)$. Entonces tenemos que la inclusión $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ es compacta.

Demostración. Como tenemos la inclusión $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\bar{\Omega})$ es compacta, por otro lado la inclusión $C^0(\bar{\Omega}) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ es continua (como U es acotado la convergencia C^0 implica la convergencia L^p). Por lo tanto la composición de ambos mapas es un mapa compacto. \square

Observación. • Si Ω es un abierto en las condiciones anteriores, $p \in (N, +\infty)$ y $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ es inmediato que la inclusión $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k-1,p}(\Omega)$ es compacta.

- Este resultado es cierto incluso para $p \in (1, +\infty)$, sin embargo esto será suficiente para nuestros motivos. Para más información ver el capítulo 7 de [GT98].

7.3 Análisis no lineal

7.3.1 Variedades de Banach

Definición 7.11. Sean E, F espacios de Banach y $U \subset E$ un abierto. Decimos que $f : U \rightarrow F$ es diferenciable en $x \in U$ (o diferenciable en el sentido de Frechet) si existe $d_x f : E \rightarrow F$ un mapa lineal continuo tal que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - d_x f(h)\|}{h} = 0.$$

Muchas de las cosas hechas en un curso de Cálculo 2 no usan la hipótesis de estar en \mathbb{R}^n . A modo de ejemplo:

Proposición 7.8. 1. Si f es diferenciable en $x \in U$ entonces es continua en este punto.

2. Si $f : U \rightarrow F$ y $g : V \subset F \rightarrow G$ cumplen que f es diferenciable en x y g es diferenciable en $f(x)$ entonces $g \circ f$ es diferenciable y $d_x(g \circ f) = d_{f(x)}g \circ d_x f$.

Denotemos al espacio de transformaciones lineales continuas de E a F como $\mathcal{L}(E, F)$ y supongamos que $f : U \subset E \rightarrow F$ es diferenciable (esto significa que lo es en todo punto de U) entonces podemos ver a $df : U \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$. Decimos que f es C^1 si el mapa anterior es continuo. Ahora podemos definir las derivadas segundas, si df es diferenciable. Repitiendo este esquema podemos definir lo que significa que una función sea C^k o C^∞ .

Lo más importante es que sigue valiendo el teorema de la función inversa, una de las demostraciones (la que usa el teorema de punto fijo para contracciones, vease el Teorema 3 del segundo capítulo de [Nel69]) solamente usa la completitud del espacio E .

Teorema 7.9 (Función inversa). Sea $f : U \subset E \rightarrow F$ un mapa C^k tal que $d_x f : E \rightarrow F$ es un isomorfismo. Entonces existen abiertos $V, W \subset E$ donde V es un entorno de x y W de $f(x)$ tal que $f|_V : V \rightarrow W$ es un difeomorfismo C^k .

Es bien sabido que este teorema es equivalente a:

Teorema 7.10 (Función implícita). Sean E, F y G espacios de Banach, $f : U \times V \subset E \times F \rightarrow G$ una función C^k tal que $D_2f(x_0, y_0) : F \rightarrow G$ (la derivada parcial en la segunda componente) es un isomorfismo. Entonces existen entornos V_1, V_2 de x_0 e y_0 respectivamente y $g : V_1 \rightarrow V_2$ tal que:

$$f(x, y) = a \Leftrightarrow y = g(x),$$

donde $a = f(x_0, y_0)$ y $(x, y) \in V_1 \times V_2$.

Estos teoremas son los que nos permiten hacer cálculo en variedades como estamos acostumbrados usualmente.

Definición 7.12. Sea X un espacio topológico.

- Una carta de Banach es una tripla (U, ϕ, E_U) donde $U \subset X$ es un abierto, E_U es un espacio de Banach y $\phi : U \rightarrow \phi(U) \subset E_U$ es un homeomorfismo sobre su imagen.
- Dos cartas $\phi : U \rightarrow \phi(U) \subset E_U$ y $\psi : V \rightarrow \psi(V) \subset E_V$ son C^k compatibles si su mapa de transición $\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \subset E_V \rightarrow \phi(U \cap V) \subset E_U$ es un difeomorfismo C^k .
- Sea \mathcal{A} una colección de cartas C^k , decimos que es un *atlas* C^k si las cartas son compatibles y sus dominios cubren X . Dos atlas \mathcal{A} y \mathcal{B} son equivalentes si $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ es un atlas C^k .
- Una *variedad de Banach* C^k es un espacio topológico Hausdorff paracompacto X con una clase de equivalencia de atlas C^k .

Observación. Supongamos que X es una variedad de Banach entonces:

- Todos los espacios de Banach que modelan a X son isomorfos.
- Como X es un espacio Hausdorff, ser paracompacto es equivalente a tener particiones de la unidad subordinadas a cualquier cubrimiento.
- En particular como X es localmente metrizable y tiene particiones de la unidad, tenemos que es metrizable.
- Observar que podríamos haber hecho la misma definición sustituyendo espacios de Banach por espacios de Frechet. El problema es que en estos espacios podemos hacer menos teoría, ya que no tenemos un teorema de la función implícita (vease [Ham82]).

El concepto de función diferenciable entre variedades de Banach se define de la misma forma que en el contexto clásico. Antes de ver ejemplos de estas variedades, vamos a recuperar parcialmente un teorema clásico de topología diferencial, que nos muestra el rol central del teorema de la función inversa:

Proposición 7.11 (Forma Local). 1. Sea $f : X \rightarrow Y$ un mapa C^k y supongamos que dado $p \in X$, $\ker d_p f$ e $\text{Im}(d_p f)$ son subespacios complementados. Entonces existen cartas centradas en p y $f(p)$, digamos ϕ y ψ respectivamente tal que:

$$\begin{aligned}\psi \circ f \circ \phi^{-1} : U \oplus V &\subset E \oplus F \rightarrow E \oplus G \\ \psi \circ f \circ \phi^{-1}(x, y) &= (x, g(x, y)),\end{aligned}$$

donde $g : U \oplus V \rightarrow F$ es C^k y $d_0g = 0$ (E, F y G son ciertos espacios de Banach).

2. Además si $\ker d_p f$ y el subespacio complementario a $\text{Im}(d_p f)$ son de dimensión finita, $\dim E = \dim \ker d_p f$ y $\dim G = \dim \text{Im}(d_p f)$.

Demostración. A menos de tomar cartas centradas, supongamos que X e Y son espacios de Banach, $p = 0$, $f(p) = 0$ y $f : W \subset X \rightarrow Y$. Sea $F = \ker d_0 f$, E un subespacio complementario a F y G un subespacio complementario a $\text{Im}(d_0 f)$. Escribamos $f = (f_1, f_2)$ respecto a la descomposición $Y = \text{Im}(d_0 f) \oplus G$.

Afirmo que podemos suponer sin pérdida de generalidad $d_0 f_1 = \text{Id} : E \rightarrow E$, en particular $E = \text{Im}(d_0 f)$. Esto es porque por hipótesis $d_0 f_1|_E : E \rightarrow \text{Im} d_0 f$ es un isomorfismo, entonces a menos de componer por el mapa $((d_0 f_1|_E)^{-1}, \text{Id}) : E \oplus F \rightarrow E \oplus F$ tenemos lo deseado. También sin pérdida de generalidad $W = U' \oplus V'$ con respecto a la descomposición $X = E \oplus F$.

Definiendo el mapa $h : U' \oplus F \rightarrow E \oplus F$ como $h(x, y) = (f_1(x, y), y)$, notemos que $d_0 h = \text{Id}$ entonces por el teorema de la función inversa existe un entorno del 0 $U \oplus V$ tal que existe $h^{-1} : U \oplus V \rightarrow E \oplus F$ y es C^k . Por lo tanto:

$$f \circ h^{-1}(x, y) = (x, g(x, y)),$$

para $g : U \oplus V \rightarrow G$ cierta función C^k con $d_0 g = 0$. La segunda parte es inmediata de la demostración. \square

Ejemplo. Sean M, N dos variedades diferenciables compactas, vamos a introducir una estructura de variedad de Banach en $C^0(M, N)$. Pongamos una métrica Riemanniana en N , entonces vía el mapa exponencial tenemos una identificación entre un entorno de la sección nula $\mathcal{U} \subset TM$ y el entorno $\exp(\mathcal{U}) \subset N \times N$ de la diagonal.

Construyamos cartas alrededor de $u \in C^0(M, N)$. Tenemos que el fibrado $u^*TN \rightarrow M$ viene equipado con la métrica que le pusimos a N , con esta métrica las secciones continuas de este fibrado $C^0(M, u^*TN)$ son un espacio de Banach con la norma $\|\xi\| = \sup_{p \in M} \|\xi(p)\|$. Dentro de este espacio tenemos el abierto $V_u = C^0(M, u^*\mathcal{U})$, definamos entonces las cartas:

$$\begin{aligned}\exp_u : V_u &\rightarrow C(N, M) \\ \exp_u \xi(p) &= \exp_{u(p)}(\xi(p)).\end{aligned}$$

Estos son nuestros candidatos a coordenadas, el mapa anterior es un homeomorfismo sobre su imagen por la elección de \mathcal{U} y vamos a llamar a $\exp_u(V_u) = U_u$. Notar que $v \in U_u$ si y solo si $u \in U_v$.

Proposición 7.12. Sean M, N variedades compactas diferenciables entonces:

1. Los mapas $\exp_u^{-1} : U_u \rightarrow V_u \subset C^0(M, u^*TN)$ definen un atlas en $C^0(M, N)$ que le dan a $C^0(M, N)$ una estructura de variedad de Banach.
2. Los atlas inducidos por métricas Riemannianas distintas son equivalentes.
3. El conjunto $\{U_u : u \in C^\infty(M, N)\}$ es un cubrimiento de $C^0(M, N)$.

Las dos primeras partes son automáticas una vez que se escriben los cambios de coordenadas, además $C^0(M, N)$ es Hausdorff y paracompacto porque es metrizable con la métrica dada por $d(u, v) = \sup_{p \in M} d(u(p), v(p))$ donde d la distancia inducida por una métrica en N . Para la tercera hay que ver que toda función continua la podemos aproximar por diferenciables.

La variedad de Banach que usamos nosotros en el capítulo 4 es $W^{k,p}(M, N)$ con M, N compactas como arriba y $kp > \dim M$.

Notemos que si $\pi : E \rightarrow M$ es un fibrado vectorial entonces podemos definir el espacio $W^{k,p}(M, E)$ como aquellas secciones $s : M \rightarrow E$ tal que en coordenadas locales está en $W^{k,p}$. Tomando un cubrimiento finito \mathcal{U} de M por trivializaciones podemos definir $\|s\|_{W^{k,p}(M, E)}^{\mathcal{U}}$ como la suma de las normas Sobolev en cada trivialización. Esta definición claramente depende de las trivializaciones pero si tomamos dos cubrimientos distintos es sencillo ver (tomando el refinamiento de \mathcal{U} y \mathcal{V}) que $\|\cdot\|_{W^{k,p}(M, E)}^{\mathcal{U}} \leq C \|\cdot\|_{W^{k,p}(M, E)}^{\mathcal{V}}$. En particular notemos que con esta definición los teoremas de encaje de Sobolev y compacidad valen inmediatamente en este contexto ya que valen localmente.

Esto nos define un functor $W^{k,p} : VB(M) \rightarrow \mathcal{B}$ donde $VB(M)$ es la categoría de los fibrados vectoriales sobre M y \mathcal{B} la de los espacios “Banacheables”, estos son los espacios de Banach cocientados por la relación de tener normas equivalentes. Este functor cumple:

1. Existe una inclusión continua $W^{k,p}(M, E) \hookrightarrow C^0(M, E)$.
2. Existe una inclusión continua $W^{k,p}(Hom(E, F)) \hookrightarrow \mathcal{L}(W^{k,p}(M, E), W^{k,p}(M, F))$.
3. Sea \mathcal{U} un abierto de E que se proyecta a toda la variedad y $\psi : \mathcal{U} \rightarrow F$ un mapa suave preservando las fibras. Entonces para cada $\xi \in W^{k,p}(M, \mathcal{U})$ tenemos que $\psi \circ \xi \in W^{k,p}(M, F)$ y además el mapa $\xi \mapsto \psi \circ \xi$ es continuo.

Si se demuestra con cuidado la proposición del ejemplo nos daríamos cuenta que estas tres son las únicas propiedades que se usan, si tomamos la mismas cartas que antes tenemos:

Proposición 7.13. Sean M, N variedades compactas entonces $W^{k,p}(M, N)$ con $kp > \dim M$ es una variedad de Banach separable.

Una prueba detallada de todo lo dicho anteriormente en un contexto más general se puede encontrar en [Eli67].

Notemos que por definición si X es una variedad de Banach C^k y $\{(U_i, \phi_i, E_i)\}_{i \in I}$ es un atlas compatible, entonces si denotamos $\phi_{ij} = \phi_j \circ \phi_i^{-1}$ a los mapas de transición y a $V_i = \phi_i(U_i)$:

$$X \cong \left(\bigsqcup_{i \in I} V_i \right) / x \sim \phi_{ij}(x),$$

donde \cong significa difeomorfos. Esto nos sirve de motivación para definir al espacio tangente de X ya que simplemente basta construir los espacios tangentes TV_i y pegarlos. Definamos $TV_i = V \times E_i$, si $f : V_i \rightarrow V_j$ es diferenciable definamos $Tf : TV_i \rightarrow TV_j$ como $Tf(x, v) = (f(x), df(x)v)$. Finalmente el fibrado tangente de X es la variedad de Banach:

$$TX = \left(\bigsqcup_{i \in I} TV_i \right) / (x, v) \sim T\phi_{ij}(x, v).$$

Observación. • Tenemos que $\pi : TX \rightarrow X$ la proyección canónica es C^k , vamos a denotar a las fibras como $T_p X = \pi^{-1}(p)$. Por construcción TX es un fibrado sobre X en el sentido usual, decimos que es un *fibrado de Banach* ya que la fibra es un espacio de Banach.

- Todo mapa suave $f : X \rightarrow Y$ induce un mapa $Tf : TX \rightarrow TY$ suave y se restringe a las fibras como el mapa $d_p f : T_p X \rightarrow T_{f(p)} Y$.

Esto nos da cierta noción de geometría, de hecho nos permite definir la noción de transversalidad. Antes que nada:

Definición 7.13. Sea X una variedad de Banach C^k , un subconjunto $A \subset X$ es una *subvariedad de Banach* si $\forall p \in A$ existe una carta (U, ϕ, E) donde U es un entorno de p tal que $\phi(U \cap A) = \phi(U) \cap F$, donde $F \subset E$ es un subespacio cerrado de E *complementado*.

Observación. • Una subvariedad de Banach es una variedad de Banach en si misma.

- La hipótesis de complementado es para hacer pruebas como la que hicimos cuando probamos la forma local.

Definición 7.14. Sea $f : X \rightarrow Y$ un mapa suave entre variedades de Banach y $N \subset Y$ una subvariedad, decimos que N es transversal a f si $\forall p \in f^{-1}(N)$ la composición:

$$T_p X \xrightarrow{d_p f} T_{f(p)} Y \xrightarrow{\pi} T_{f(p)} Y / T_{f(p)} N,$$

tiene una inversa a derecha.

Observación. • Si $p \in f^{-1}(N)$ como arriba, entonces el subespacio $\ker(\pi \circ d_p f)$ es complementado, ya que $\pi \circ d_p f$ tiene inversa a derecha.

- Si la subvariedad es un punto, esto es justamente la definición de valor regular.

Con esta definición tenemos lo esperable:

Proposición 7.14. Sea $f : X \rightarrow Y$ diferenciable y $N \subset Y$ una subvariedad transversal a f , entonces $f^{-1}(N)$ es una subvariedad de X .

Demostración. A menos de tomar cartas centradas en $x \in f^{-1}(y)$ donde $y \in N$, suponemos que X, Y son espacios de Banach, $Y = F \oplus G$ con $F \oplus 0 = N$ y G el subespacio complementado a F y $f : U \subset X \rightarrow F \oplus G$. Escribamos $f = (f_1, f_2)$ respecto a esta descomposición. Por hipótesis $d_0 f_2 : X \rightarrow G$ es sobreyectivo y $\ker d_0 f_2$ es complementado por la primera observación de antes.

Sea E su complemento, entonces $\partial_2 f_2(0) : E \rightarrow G$ es un isomorfismo (respecto a la descomposición $X = \ker d_0 f \oplus E$). Por el teorema de la función implícita tenemos que el conjunto $f^{-1}(N) = f_2^{-1}(0)$ es localmente de la forma $x_2 = g(x_1)$ (el gráfico de g), para cierta $g : U' \subset \ker d_0 f \rightarrow E$. Luego si consideramos el mapa:

$$(x, y) \mapsto (x, y - g(x)).$$

Por el teorema de la función inversa lleva localmente el gráfico de g a $\ker d_0 f \oplus 0$. □

7.3.2 Operadores de Fredholm

Definición 7.15. Sean E, F espacios de Banach y $D \in \mathcal{L}(E, F)$. Consideremos las propiedades:

1. $\ker D$ tiene dimensión finita.
2. $\text{Im} D$ es cerrado.
3. $\text{coker} D := F/\text{Im} D$ tiene dimensión finita.

Si D cumple con 1 y 2 o 2 y 3, vamos a decir que D es L-Fredholm o R-Fredholm respectivamente (o semi-Fredholm en ambos casos). Si D cumple las tres propiedades decimos que es un mapa *Fredholm*.

Observación. Si D cumple con 1 y 3 entonces automáticamente cumple con 2.

Demostración. Recordar que por Hahn-Banach todos los subespacios finito dimensionales son complementados, por lo tanto podemos tomar A el subespacio complementario a $\ker D$. Por otro lado consideremos un subespacio $B \subset F$ generado por los representantes de una base de $F/\text{Im} D$, claramente $F = \text{Im} D \oplus B$. Definamos el mapa:

$$\begin{aligned} T : A \oplus B &\rightarrow F \\ T(x, y) &= D|_A(x) + y. \end{aligned}$$

Este operador es claramente biyectivo, y como es continuo tiene una inversa continua por el teorema de Banach. Ahora observar que $T(A \oplus 0) = \text{Im} D$ es cerrado ya que $A \oplus 0$ lo es. □

A los mapas Fredholm entre E y F los vamos a denotar como $\mathcal{F}(E, F)$. El siguiente teorema nos da un criterio sencillo para chequear que un mapa es Fredholm (vease por ejemplo en la prueba de Riemann-Roch 2.5).

Teorema 7.15. Sea $D \in \mathcal{L}(E, F)$ y $K \in \mathcal{K}(E, G)$ el conjunto de operadores compactos. Supongamos que tenemos una desigualdad del tipo:

$$\|x\|_E \leq C(\|Dx\|_F + \|Kx\|_G).$$

Entonces D es L-Fredholm.

Demostración. Comencemos con ver que $\ker D$ es finito dimensional, la idea es observar que su bola unidad es compacta. Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B_E(0, 1) \cap \ker D$, como K es un operador compacto, existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ tal que $Kx_{n_k} \rightarrow_k y \in G$. Usando la desigualdad y que la subsucesión está en $\ker D$ obtenemos:

$$\|x_{n_k} - x_{n_{k'}}\|_E \leq C \|Kx_{n_k} - Kx_{n_{k'}}\|_G.$$

Por lo tanto la subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy. Por completitud de E concluimos que esta converge a algún $x \in B_E(0, 1) \cap \ker D$ (recordar que $\ker D$ es cerrado). Por lo tanto la bola unitaria de $\ker D$ es compacta, esto solamente puede pasar si $\ker D$ es de dimensión finita.

Ahora veamos que $\text{Im} D$ es cerrada. $\ker D$ es de dimensión finita por lo tanto es complementado, esto nos permite asumir que D es inyectivo a menos de considerar la restricción de D a un subespacio complementario a $\ker D$. Sea $Dx_n \rightarrow_n y \in F$, tenemos dos casos posibles:

1. $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada, en cuyo caso usando la compacidad de K tiene una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $Kx_{n_k} \rightarrow_k z \in G$. Pero entonces como $\{Dx_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ y $\{Kx_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ convergen, la desigualdad nos dice que la sucesión $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy y por completitud converge a cierto $x \in E$. Por continuidad obtenemos que $Dx = y \in \text{Im} D$.
2. $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ no está acotada, tomemos $y_n := x_n / \|x_n\|_E$. Esta sucesión sí está acotada, por lo tanto podemos tomar una subsucesión $\{y_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $\{Ky_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge. Pero entonces $Dy_{n_k} \rightarrow_k 0$ y $\{Ky_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy, nuevamente la desigualdad nos dice que $\{y_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy y converge a un punto de la esfera unidad $y \in \partial B_E(0, 1)$. Por continuidad $Dy = 0$, pero esto es absurdo ya que D supusimos que era inyectivo.

□

Este teorema nos permite una prueba elegante de:

Corolario 7.15.1. Sea $D : E \rightarrow F$ un mapa L -Fredholm, entonces:

1. Si $K \in \mathcal{K}(E, F)$ entonces $D + K$ es L -Fredholm.
2. Existe $C > 0$ tal que si $P \in \mathcal{L}(E, F)$ es tal que $\|P\| < 1/C$ entonces $D + P$ es L -Fredholm.

Demostración. Tomemos $K_0 : \ker D \rightarrow \mathbb{R}^n$ un isomorfismo cualquiera, notar que es un mapa compacto. Luego si $A \subset E$ es un subespacio complementario a $\ker D$, definamos el mapa:

$$\begin{aligned} T : \ker D \oplus A &\rightarrow \text{Im} D \oplus \mathbb{R}^n \\ T(x, y) &= D|_A(x) + K_0(y). \end{aligned}$$

Por construcción este mapa es un isomorfismo, y por el teorema de Banach tiene una inversa continua. Esta inversa nos da la cota:

$$\|x\|_E \leq C (\|Dx\|_E + \|K_0 x\|).$$

Con esta observación el corolario es casi automático, probemos solo 2. ya que 1. es incluso más sencillo. Por la cuenta de arriba tenemos que:

$$\|x\| \leq C(\|(D + P)x\|_E + \|Px\|_E + \|K_0x\|).$$

Por lo tanto usando $\|Px\|_E \leq \|P\| \|x\|_E$ y despejando tenemos:

$$\|x\|_E(1 - C\|P\|) \leq C(\|(D + P)x\|_E + \|K_0x\|),$$

en particular si $\|P\| < 1/C$, usando el Teorema tenemos lo deseado. \square

Podemos reformular la segunda condición diciendo que los mapas L-Fredholm son abiertos en $\mathcal{L}(E, F)$ (con la norma del operador). Supongamos ahora que tenemos un mapa R-Fredholm, recordar que $\text{Coker}(D) \cong \ker D^*$ y $\ker D \cong \text{Coker} D^*$ donde D^* es el adjunto. En particular D es R-Fredholm si y solamente si D^* es L-Fredholm, por lo tanto si dualizamos recuperamos los resultados anteriores para mapas R-Fredholm. En particular concluimos:

Corolario 7.15.2. *El conjunto $\mathcal{F}(E, F) \subset \mathcal{L}(E, F)$ es abierto con la topología inducida por la norma de operadores.*

Los mapas de Fredholm tienen naturalmente un entero asociado llamado el *índice*:

$$\text{Ind}(D) := \dim \ker D - \dim \text{Coker} D,$$

este número cumple un rol fundamental en la teoría. Algunas propiedades básicas del índice son:

Proposición 7.16. 1. Sean $T \in \mathcal{F}(E, F)$ y $S \in \mathcal{F}(F, G)$ entonces $S \circ T \in \mathcal{F}(E, G)$ y $\text{Ind}(S \circ T) = \text{Ind}(S) + \text{Ind}(T)$.

2. Sea $T \in \mathcal{F}(E, F)$ entonces $T^* \in \mathcal{F}(F^*, G^*)$ y $\text{Ind} T^* = -\text{Ind} T$.

Omitiremos las pruebas ya que esencialmente es álgebra lineal. La propiedad que es verdaderamente fundamental es la siguiente:

Proposición 7.17. $\text{Ind} : \mathcal{F}(E, F) \rightarrow \mathbb{Z}$ es continuo

Demostración. Tomemos $T \in \mathcal{F}(E, F)$, como ya vimos $\ker T$ e $\text{Im } T$ son subespacios complementados, tomemos A y B subespacios complementarios a cada uno respectivamente. Denotemos por $i : A \rightarrow A \oplus \ker T$ y $P : \text{Im}(T) \oplus B \rightarrow \text{Im}(T)$ a la inclusión y a la proyección respectivamente. Notar que i y P son operadores de Fredholm donde $\text{Ind}(i) = -\dim \ker T$ e $\text{Ind}(P) = \dim B = \dim \text{Coker}(T)$. Además el operador $P \circ T \circ i : A \rightarrow \text{Im}(T)$ es invertible, sin embargo los operadores invertibles son un abierto en la norma del operador. Tomando $T' \in \mathcal{F}(E, F)$ en un abierto suficientemente pequeño, $P \circ T' \circ i$ también es invertible, en particular es Fredholm con índice 0, pero entonces usando la proposición anterior:

$$\text{Ind}(P) + \text{Ind}(T') + \text{Ind}(i) = 0.$$

Despejando obtenemos que $\text{Ind}(T') = -\text{Ind}(P) - \text{Ind}(i) = \text{Ind}(T)$ como queríamos. \square

Observación. Notar que entonces $\mathcal{F}(E, F)$ es desconexo. Sin embargo si comenzamos con un $T \in \mathcal{F}(E, F)$ y $K \in \mathcal{K}(E, F)$ entonces $T + K$ está en la misma componente conexa que T . Esto es porque el camino $\{T + sK\}_{s \in [0,1]}$ está en $\mathcal{F}(E, F)$. En particular el índice es invariante por perturbaciones compactas, es decir $\text{Ind}(T) = \text{Ind}(T + K)$.

7.3.3 El teorema de Sard-Smale

Un mapa C^k entre variedades de Banach $f : X \rightarrow Y$ es Fredholm si $\forall p \in X$ tenemos que $d_p f : T_p X \rightarrow T_{f(p)} Y$ es un operador de Fredholm. Notar que por la continuidad del índice, si X es conexas podemos definir $\text{Ind}(f) = \text{Ind}(d_p f)$ en cualquier punto y esto queda bien definido. Una de las propiedades bonitas de estos mapas es que podemos generalizar el teorema de Sard, la exposición sigue el artículo original de Smale [Sma73]:

Teorema 7.18 (Sard-Smale). *Sea $f : X \rightarrow Y$ un mapa de Fredholm C^k con $k > \{\text{Ind}(f), 0\}$, denotemos $\mathcal{R}(f)$ al conjunto de valores regulares. Entonces si X tiene base numerable $\mathcal{R}(f)$ es un residual.*

La prueba se basa en las buenas propiedades topológicas de los mapas de Fredholm. Recordemos que si X e Y son espacios topológicos, una función $f : X \rightarrow Y$ continua se dice que es *propia* si $f^{-1}(K)$ es compacto para todo $K \subset Y$ compacto.

Proposición 7.19. *Todo mapa $f : X \rightarrow Y$ de Fredholm es localmente propio. Esto significa que $\forall p \in X$ existe un entorno V tal que $f|_V$ es un mapa propio.*

Demostración. Como la proposición es local, basta tomar la forma local de un mapa en una variedad de Banach, denotando $\text{Ind}(f) = k$ obtenemos que basta probar para: $f : U_1 \oplus U_2 \subset E \oplus \mathbb{R}^n \rightarrow E \oplus \mathbb{R}^{n-k}$ donde $f(x, y) = (x, g(x, y))$

Para ver que es propio, basta ver que para toda sucesión $\{(x_n, y_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $f(x_n, y_n)$ converge a cierto (x, z) , tiene una subsucesión convergente. Pero por la forma de f tenemos que $x_n \rightarrow_n x$ automáticamente, y a menos de achicar U_2 la sucesión $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ esta en un acotado de un espacio de dimensión finita por lo tanto tiene subsucesión convergente. □

Decimos que un espacio topológico Y es *compactamente generado* si se cumple que $A \subset Y$ es cerrado si y solo si $A \cap K$ es cerrado para todo compacto $K \subset Y$. El siguiente lema topológico nos da una caracterización de ser propio:

Lema 7.20. 1. *Sea $f : X \rightarrow Y$ continua, cerrada tal que $f^{-1}(y)$ compacto $\forall y \in Y$ entonces es propia.*

2. *El recíproco es verdad si Y es compactamente generado.*

Demostración. 1. Sea $K \subset Y$ un compacto. Tomemos $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ un cubrimiento por abiertos de $f^{-1}(K)$. Dado $y \in K$, como $f^{-1}(y)$ es compacto, existen una cantidad finita de entornos de los anteriores $U_1^y, \dots, U_{n_y}^y$ que lo cubren. Sea $U_y = U_1^y \cup \dots \cup U_{n_y}^y$ y $C_y = (U_y)^c$ un cerrado, notar que por hipótesis $f(C_y)$ es un cerrado y no contiene a y , tomando la componente conexa de $f(C_y)^c$ que contiene a y obtenemos un abierto V_y .

Tenemos entonces que $\{V_y\}_{y \in K}$ es un cubrimiento de K , por lo tanto tiene un subcubrimiento finito, digamos V_{y_1}, \dots, V_{y_k} . Es claro entonces que $\{U_k^{y_j} : j = 1, \dots, k, k = 1, \dots, n_j\}$ es un subcubrimiento finito de $f^{-1}(K)$.

2. Sea $C \subset X$ un cerrado, queremos ver que $f(C)$ es un cerrado. Usando la definición de compactamente generado basta ver que $f(C) \cap K$ es cerrado para todo compacto $K \subset Y$, pero notar que $f^{-1}(f(C) \cap K) = C \cap f^{-1}(K)$ que es un compacto, luego la imagen de un compacto por una continua es compacta.

□

Observación. La condición de ser compactamente generado no es tan rara, por ejemplo todo espacio Y con base local numerable lo es. Esto es por lo siguiente: supongamos que $A \cap K$ es cerrado para todo compacto K pero A no lo es, entonces existe $y \in \bar{A} - A$. Como el espacio tiene base local numerable, existe $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ con $y_k \rightarrow y$, consideremos entonces $K = \{y\} \cup \{y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, este es un compacto pero $A \cap K$ no es cerrado lo que contradice la hipótesis.

Demostración: Sard-Smale. Tomando un entorno N suficientemente pequeño de $p \in X$ para que funcione la forma local y donde sea propia $f|_N$, a menos de tomar cartas suponemos X, Y espacios de Banach donde $X = E \oplus \mathbb{R}^n$, $Y = E \oplus \mathbb{R}^{k-n}$ y $f = (Id, g) : U \oplus V \subset E \oplus \mathbb{R}^n \rightarrow E \oplus \mathbb{R}^{k-n}$ propia donde $k = \text{Ind } f$. Respecto a estas descomposiciones tenemos:

$$d_{(x,y)}f = \begin{pmatrix} Id & 0 \\ \partial_1 g(x, y) & \partial_2 g(x, y) \end{pmatrix}.$$

Entonces $(x, z) \in Y$ es un valor regular de f si y solo si $\partial_2 g(x, y)$ es sobreyectivo, pero eso pasa si y solo si z es un valor regular de la función: $y \mapsto g(x, y)$. Por el Teorema de Sard clásico, tenemos que los valores regulares son densos en $\{x\} \times \mathbb{R}^{k-n}$. Como son densos en cada fibra, concluimos que los valores regulares son densos en $E \oplus \mathbb{R}^{k-n}$.

Ahora notar que el conjunto $Z = \{(x, y) \in U \oplus V : d_{(x,y)}f \text{ no es sobreyectivo}\}$ es cerrado (el complemento es un abierto por continuidad del diferencial), por lo tanto $f(Z)$ es un cerrado por la caracterización de los mapas propios, y por lo tanto el conjunto $\mathcal{R}(f|_N)$ es un abierto denso.

Para rematar el teorema construyamos una base numerable de abiertos como arriba $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Entonces tenemos que $\mathcal{R}(f) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{R}(f|_{U_n})$ es una intersección numerable de abiertos densos.

□

7.4 Breve introducción a las clases de Chern

Voy a asumir que el lector está familiarizado con la teoría de cohomología y la dualidad de Poincaré, al menos a un nivel intuitivo (vease [Hat02] para un tratamiento excelente del tema). No voy a hacer todas las pruebas sino simplemente una guía de las ideas involucradas, un tratamiento al detalle del tema puede encontrarse en [JWM74].

Tomemos M una variedad diferenciable compacta y orientable, tenemos la clase fundamental $[M]$ que es un generador de $H_n(M, \partial M, \mathbb{Z})$ y el isomorfismo de Poincaré:

$$D_M : H^k(M, \partial M, \mathbb{Z}) \rightarrow H_{n-k}(M, \mathbb{Z})$$

$$D_M \alpha = \alpha \cap [M].$$

Esto nos permite definir el número de intersección entre dos clases de homología $\alpha \in H_i(M, \mathbb{Z})$ y $\beta \in H_{n-i}(M, \mathbb{Z})$ como:

$$\alpha \# \beta = \langle D_M^{-1} \alpha \cup D_M^{-1} \beta, [M] \rangle.$$

En el caso en que α y β estén representadas por variedades diferenciales N^i y L^{n-i} que se intersectan transversalmente, este número coincide con la cantidad de intersecciones contadas con signo dependiendo de la orientación en la intersección.

Esto puede ser usado para calcular puntos fijos de mapas $f : M \rightarrow M$. Si denotamos a $\Delta \subset M \times M$ a la diagonal, los puntos fijos de f pueden ser vistos $M \times M$ como la intersección entre Δ y $\Gamma_f \subset M \times M$ el gráfico de la función. Sea $\Delta : M \hookrightarrow M \times M$ la inclusión en la diagonal y $\iota_f : M \rightarrow M \times M$ el mapa $\iota_f(p) = (p, f(p))$, las clases de homología correspondientes a la diagonal y al gráfico son $\Delta_*[M] := [\Delta]$ y $(\iota_f)_*[M] = [\Gamma_f]$. Un resultado clásico en estas líneas es:

Teorema 7.21 (Lefschetz). *Sea $f : M \rightarrow M$ continuo entonces:*

$$[\Gamma_f] \# [\Delta] = \sum_{i=0}^n (-1)^i \text{Tr}(f_*^i : H_i(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H_i(X, \mathbb{Q})).$$

En particular si f es un difeomorfismo y los puntos fijos son no degenerados, esto coincide con la suma de los puntos fijos contados con signo dependiendo si estos preservan o revierten orientación.

Un corolario inmediato de este teorema es:

Teorema 7.22 (Poincaré-Hopf). *Sea $X \in \Gamma(TM)$ un campo cuyas singularidades son no degeneradas (es decir que $X : M \rightarrow TM$ es transversal a la sección nula) entonces:*

$$\chi(M) = \sum_{p: X(p)=0} \text{ind}_p X,$$

donde $\text{ind}_p X$ depende de si la intersección con la sección nula preserva o revierte orientación.

Demostración. Las singularidades de X las podemos ver como fijos de ϕ_t su flujo asociado. Usando Lefschetz con ϕ_t y notando que este mapa es homotópico a la identidad (por definición) tenemos lo deseado. □

Esto es bastante profundo porque nos dice que si tenemos una sección del fibrado (genérica) entonces el número de la derecha de la fórmula anterior no depende de que sección elegí. Es decir parece hablarnos de la topología del fibrado, en lo que resta de esta discusión vamos a estudiar esto.

Supongamos que tenemos $\pi : E \rightarrow M$ un fibrado vectorial *orientable* de dimensión k sobre M . Pongámosle a E una métrica Riemanniana y consideremos:

$$B(E) = \{(p, v) \in TM : \|v\| \leq 1\}.$$

Intuitivamente esto contiene toda la información de E ya que las fibras re-traen por deformación en una bola. Movamos un poco las manos y vamos a convencernos de que es sencillo entender la estructura de $B(E)$.

Supongamos que M tiene una descomposición simplicial y que a menos de hacer subdivisión baricéntrica cada símplice esta dentro de un entorno donde E se trivializa. Esto nos lleva a pensar que le podemos dar una estructura simplicial a $D(E)$ como el producto $e^l \times e^k$ donde e^l es un l -símplice de M y e^k es simplemente un disco, en particular si esto es verdad $D(E)$ es homológicamente trivial debajo de la dimensión k y además la homología de grado l de M sería isomorfa a la de grado $l + k$ en E . Esto es lo que hay detras del teorema:

Teorema 7.23 (Isomorfismo de Thom). *Sea $\pi : E \rightarrow M$ un fibrado vectorial orientable de dimensión k . Entonces existe una única clase $U_E \in H^k(D(E), S(E))$ llamada la clase de Thom tal que:*

1. U_E restricto a una fibra es un generador de $H^k(D(E)_p, S(E)_p) \cong \mathbb{Z}$.
2. El mapa:

$$\begin{aligned} \phi_E : H^i(M, \mathbb{Z}) &\rightarrow H^{k+i}(D(E), S(E)) \\ \phi_E(\alpha) &= \pi^* \alpha \cup U_E. \end{aligned}$$

Es un isomorfismo

Bosquejo. Una prueba estandar sigue las siguientes líneas. Tenemos los háces $H(B(E)|_U, S(E)|_U, \mathbb{Z})$ que son localmente \mathbb{Z} (es decir localmente constantes), de hecho se puede probar que son constantes por la hipótesis de orientabilidad del fibrado. Luego el isomorfismo en una trivialización sigue de la fórmula de Kunnetth y hay que pegar estos resultados usando un argumento de cubrimientos y Mayer-Vietoris.

□

Del análisis celda por celda que hicimos anteriormente, podemos llegar a sospechar que el dual de Poincaré de la clase de Thom es la sección nula. Supongamos que M es cerrada, entonces tenemos los siguientes isomorfismos:

$$\mathbb{Z} \cong H^0(M, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\pi^*(\cdot) \cup U_E} H^k(B(E), S(E)) \xrightarrow{D_{B(E)}} H_n(B(E)) \xrightarrow{\pi_*} H_n(M) \cong \mathbb{Z}.$$

Por lo tanto $D_{B(E)}$ lleva un generador de $H^k(B(E), S(E))$, es decir U_E en un generador de $H_n(B(E))$, que es justamente $\iota_*[M]$ siendo $\iota : M \hookrightarrow TM$ la inclusión en la sección nula. Acá solo logramos probar que $D_{B(E)}U_E = \pm \iota_*[M]$, sin embargo con un poco más de trabajo podemos ver que el signo correcto es el más.

Juntando esta discusión con lo anterior tenemos que si $s \in \Gamma(B(E))$ entonces el número de intersección $s_*[M] \# \iota_*[M] = \chi(E)$ donde definimos $\chi(E)$ como aquel tal que:

$$U_E \cup U_E = \chi(E)\phi_E([M]).$$

En el caso $E = TM$ este número coincide con la característica de Euler. Motivados por esto:

Definición 7.16. Sea $\pi : E \rightarrow M$ un fibrado vectorial de dimensión n orientable sobre una variedad compacta y orientable. Definimos la *clase de Euler* de E como:

$$e(E) = \phi_E^{-1}(U_E \cup U_E) \in H^n(X, \mathbb{Z}).$$

Se puede probar que:

Proposición 7.24. *La clase de Euler satisface:*

1. *Es functorial respecto a pullbacks, esto significa que si $E \rightarrow N$ es un fibrado vectorial orientable y $f : M \rightarrow N$ es un mapa (continuo es suficiente) entonces $e(f^*E) = f^*e(E)$.*
2. *Si E es un fibrado trivial entonces $e(E) = 0$.*
3. *Si E y F son dos fibrados vectoriales orientables de dimensión m y n respectivamente sobre M , entonces $e(E \oplus F) = e(E) \cup e(F) \in H^{n+m}(M, \mathbb{Z})$. A esto se le llama la fórmula de la suma de Whitney.*

De hecho estas tres propiedades sumadas a que si M es una variedad diferenciable compacta y orientable entonces $e(TM) = \chi(M)[M]$, nos caracterizan únicamente a la clase de Euler.

Supongamos ahora que estamos en el contexto $E \rightarrow M$ un fibrado vectorial complejo donde M es como antes. Supongamos en un principio que $\dim_{\mathbb{C}} E = 1$ (un fibrado por líneas) entonces definamos la primera clase de Chern como:

$$c_1(E) := e(E_{\mathbb{R}}) \in H^2(M, \mathbb{Z}),$$

donde denotamos a $E_{\mathbb{R}}$ al fibrado visto como fibrado real.

Supongamos ahora que tenemos un fibrado complejo de dimensión n sobre M , si proyectivizamos todas las fibras de E obtenemos otro fibrado $\pi : P(E) \rightarrow M$. Siempre que tenemos un espacio proyectivo, viene con un fibrado por líneas canónico $\pi : \lambda_E \rightarrow P(E)$ cuyas fibras son:

$$\pi^{-1}[v]_p = \{([v]_p, w) : w \in \text{span}\{v\} \subset E_p\},$$

donde $[v]_p \in P(E)$. Si equipamos a E con una métrica hermitiana, entonces el fibrado $\pi^*E \rightarrow P(E)$ hereda la anterior. Observar que el fibrado λ_E está incluido en π^*E , por lo tanto tenemos definido el fibrado ortogonal a λ_E según la métrica Hermitiana. Concluimos que $E \cong \lambda_E \oplus F$ donde F es un fibrado complejo de dimensión $n - 1$.

Con una inducción probaríamos entonces que existe N una variedad diferenciable y $f : N \rightarrow M$ un mapa diferenciable tal que $f^*E = L_1 \oplus \dots \oplus L_n$ suma directa de fibrados por rectas. Definamos:

$$c_1(E) := \sum_{i=1}^n c_1(L_i).$$

- Observación.* 1. De hecho el teorema de Leray-Hirsch nos dice que si el mapa f es construido mediante el proceso descrito anteriormente, entonces $f^* : H^*(M, \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(N, \mathbb{Z})$ es inyectivo. Esto se usa para ver que la clase de Chern es única.
2. El rol fundamental de c_1 es que es un morfismo del espacio de fibrados por rectas sobre un espacio topológico X (Hausdorff, paracompacto con base numerable) a menos de isomorfismo en $H^2(X, \mathbb{Z})$. El producto en los fibrados es el producto tensorial.

7.5 Algunas cuentas en variedades casi complejas

Sea (M, J) una variedad casi compleja, tomemos $\langle \cdot, \cdot \rangle$ una métrica Riemanniana para la cual J es una isometría y consideremos ∇ la conexión de Levi-Civita para $\langle \cdot, \cdot \rangle$. En estas condiciones definamos $\omega(X, Y) = \langle JX, Y \rangle$, es claro que $\omega \in \Omega^2(M)$ (a priori no sabemos que ω sea una forma simpléctica porque nos falta la condición $d\omega = 0$).

Nuestro objetivo será encontrar expresiones para los tensores $d\omega$ y N_J (el tensor de Nijenhuis presentado en 2.2) en términos de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y ∇ .

Observación. Sabemos que $J^2 = -Id$ y que ω es alternada, es decir $\langle JX, Y \rangle + \langle X, JY \rangle = 0$. Derivando ambas condiciones obtenemos:

$$J \circ \nabla J = -\nabla J \circ J, \langle (\nabla J)X, Y \rangle + \langle X, (\nabla J)Y \rangle = 0. \quad (9)$$

Estas identidades las usaremos todo el tiempo.

Comencemos con calcular $d\omega$:

$$\begin{aligned} d\omega(X, Y, Z) &= X(\omega(Y, Z)) - Y(\omega(X, Z)) + Z(\omega(X, Y)) \\ &\quad + \omega([Y, Z], X) - \omega([X, Z], Y) + \omega([X, Y], Z). \end{aligned} \quad (10)$$

Tomando X, Y, Z campos tal que $\nabla_X Y(p) = \nabla_X Z(p) = \dots = 0$ entonces como $d\omega$ es un tensor concluimos que:

$$d\omega(X, Y, Z) = \langle (\nabla_X J)Y, Z \rangle + \langle (\nabla_Y J)Z, X \rangle + \langle (\nabla_Z J)X, Y \rangle. \quad (11)$$

Ahora estudiemos el tensor de Nijenhuis. Por definición:

$$N_J(X, Y) = [X, Y] + J[JX, Y] + J[X, JY] - [JX, JY].$$

Usando la simetría de la métrica obtenemos que:

$$\begin{aligned} N_J(X, Y) &= \nabla_X Y - \nabla_Y X + J(\nabla_{JX} Y - \nabla_Y(JX)) \\ &\quad + J(\nabla_X(JY) - \nabla_{JY} X) - (\nabla_{JX}(JY) - \nabla_{JY}(JX)). \end{aligned}$$

Simplificando esta expresión concluimos:

$$N_J(X, Y) = (J(\nabla_X J) - \nabla_{JX} J)Y - (J(\nabla_Y J) - \nabla_{JY} J)X. \quad (12)$$

De las ecuaciones 11 y 12 podemos deducir:

Proposición 7.25. *En las condiciones anteriores, si J es paralela para ∇ (es decir $\nabla J = 0$) entonces $d\omega = 0$ y $N_J = 0$. En otras palabras (M, J, ω) es Kähler (vease los ejemplos de 2.3).*

Veremos ahora que el recíproco también es verdad, por lo tanto J es paralela para ∇ si y solo si (M, J, ω) es Kähler.

Supongamos ahora que $d\omega = 0$, entonces por la ecuación 11 podemos hacer ciertas permutaciones cíclicas que nos son útiles por ejemplo para calcular:

$$\begin{aligned} \langle N_J(X, Y), Z \rangle &= \langle J(\nabla_X J)Y, Z \rangle - \langle (\nabla_{JX} J)Y, Z \rangle \\ &\quad - \langle J(\nabla_Y J)X, Z \rangle + \langle (\nabla_{JY} J)X, Z \rangle. \end{aligned} \quad (13)$$

Usando las permutaciones cíclicas en el segundo y cuarto término obtenemos:

$$\begin{aligned} \langle N_J(X, Y), Z \rangle &= \langle J(\nabla_X J)Y, Z \rangle - \langle J(\nabla_Y J)X, Z \rangle + \langle (\nabla_Y J)Z, JX \rangle \\ &\quad + \langle (\nabla_Z J)JX, Y \rangle - \langle (\nabla_X J)Z, JY \rangle - \langle (\nabla_Z J)JY, X \rangle. \end{aligned} \quad (14)$$

Simplificando y usando reiteradamente las ecuaciones 9 tenemos que:

$$\langle N_J(X, Y), Z \rangle = 2\langle J(\nabla_Z J)X, Y \rangle. \quad (15)$$

Gracias a esta ecuación concluimos:

Teorema 7.26. *En las condiciones anteriores, J es paralela para ∇ si y solamente si (M, J, ω) es Kähler.*

La igualdad anterior nos da una última identidad interesante, como N_J es antilineal complejo en ambas coordenadas ($N_J(JX, Y) = N_J(X, JY) = -JN_J(X, Y)$), entonces:

$$\begin{aligned} 2\langle J(\nabla_{JZ} J)X, Y \rangle &= \langle N_J(X, Y), JZ \rangle = -\langle J \circ N_J(X, Y), Z \rangle \\ &= \langle N_J(X, JY), Z \rangle = 2\langle J \circ \nabla_Z X, JY \rangle \end{aligned}$$

Y usando $J^* = J^{-1}$ nuevamente obtenemos:

$$\langle J(\nabla_{JZ} J)X, Y \rangle = \langle \nabla_Z X, Y \rangle \quad (16)$$

Y como esto es verdad para todos X, Y podemos concluir que $J \circ \nabla_{JZ} J = \nabla_Z J$. En particular por 12:

$$N_J(X, Y) = 2(J(\nabla_Y J)X - J(\nabla_X J)Y) \quad (17)$$

Resumiendo estas cuentas:

Teorema 7.27. *Supongamos que (M, ω) es una variedad simpléctica y $J \in \mathcal{J}(M, \omega)$. Tomemos $\langle \cdot, \cdot \rangle_J = \omega(J\cdot, \cdot)$ y ∇ la conexión de Levi-Civita. En estas condiciones tenemos que $J(\nabla_{JX} Y) = \nabla_X Y$ y el tensor de Nijenhuis se puede calcular con la ecuación 17.*

Referencias

- [AL94] M. Audin and J. Lafontaine. *Holomorphic curves in symplectic geometry*. Springer Basel AG, 1994.
- [Arn86] V. I. Arnold. First steps in symplectic topology. *Russian Math Surveys*, 1:1–21, 1986.
- [DK90] S. K. Donaldson and P. B. Kronheimer. *The Geometry of Four Manifolds*. Clarendon Press, Oxford, 1990.
- [Eli67] H. I. Eliasson. Geometry of manifolds of maps. *J. Differential Geometry*, 1:169–194, 1967.
- [Gro85] M. Gromov. Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds. *Invent. Math.*, 82:307–347, 1985.
- [GT98] D. Gilbarg and N. S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1998.
- [Ham82] R. S. Hamilton. The inverse function theorem of nash and moser. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 7:65–222, 1982.
- [Hat02] A. Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [Hor90] L. Hormander. *An introduction to complex Analysis in several variables*. North Holland Mathematical library, 1990.
- [HZ94] H. Hofer and E. Zehnder. *Symplectic invariants and Hamiltonian Dynamics*. Birkhauser Verlag, 1994.
- [JWM74] J. D. Stasheff J. W. Milnor. *Characteristic classes*. Princeton University Press, 1974.
- [MS04] D. McDuff and D. Salamon. *J-holomorphic Curves and Symplectic Topology*. American Mathematical Society colloquium publications, 2004.
- [Nel69] E. Nelson. *Topics in Dynamics I: Flows*. Princeton University Press, 1969.
- [Sma73] S. Smale. An infinite dimensional version of sard’s theorem. *Am. Journal Math.*, 87:213–221, 1973.
- [SS11] E. Stein and R. Shakarchi. *Princeton Lectures in Analysis IV, Functional Analysis*. Princeton University Press, 2011.
- [Tau96] C. H. Taubes. Counting pseudo-holomorphic submanifolds in dimension 4. *J. Differential Geometry*., 44:818–893, 1996.
- [Voi02] C. Voisin. *Hodge Theory and Complex Algebraic Geometry*, volume 1. Cambridge University Press, 2002.
- [Weh04] K. Wehreim. Energy quantization and mean value inequalities for nonlinear boundary value problems. <https://arxiv.org/abs/math/0405484v1>., 2004.