V.D

I. Variété topologique

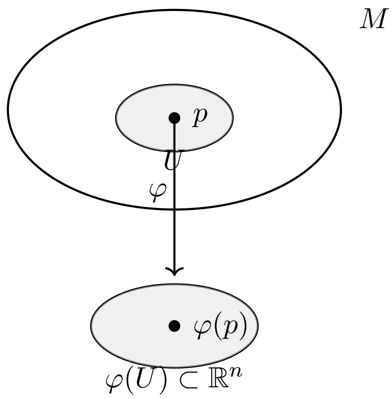
Soit M un espace topologique séparé.

1. Carte

Définition. Une carte locale (sur M en p) est un couple (U, φ), où U est un ouvert contenant p.

$$\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$$

où φ est un homéomorphisme.



Exemple. Soit E un e.v. de dimension n et $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E. Pour tout $v \in E$, on a :

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i.$$

On considère

$$\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}^n, \qquad v \longmapsto (v_1, \ldots, v_n)$$

(E, φ) est une carte.

3- Atlas

Déf. Un atlas sur M est la donnée sur M d'une famille

$$\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$$

de cartes telle que

$$M = \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Si toutes les cartes sont de même dimension n, on dit que ...

Ex (Sphère $\mathbb{S}^2$)

$$\mathbb{S}^2 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \sum_{i=1}^{3} x_i^2 = 1 \right\}$$

avec la topologie induite.
Pour $i = 1, 2, 3$, on pose :

$$U_i^+ = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_i > 0\}$$

$$U_i^- = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_i < 0\}$$

$$\begin{array}{rcl} \varphi_i^+ : U_i^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & \check{x}^i \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \varphi_i^- : U_i^- & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & \check{x}^i \end{array}$$

où, par exemple, si $x = (x_1, x_2, x_3)$, alors

$$\check{x}^{\,2} = (x_1, x_3).$$

$$U_1^+ = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 > 0\}$$

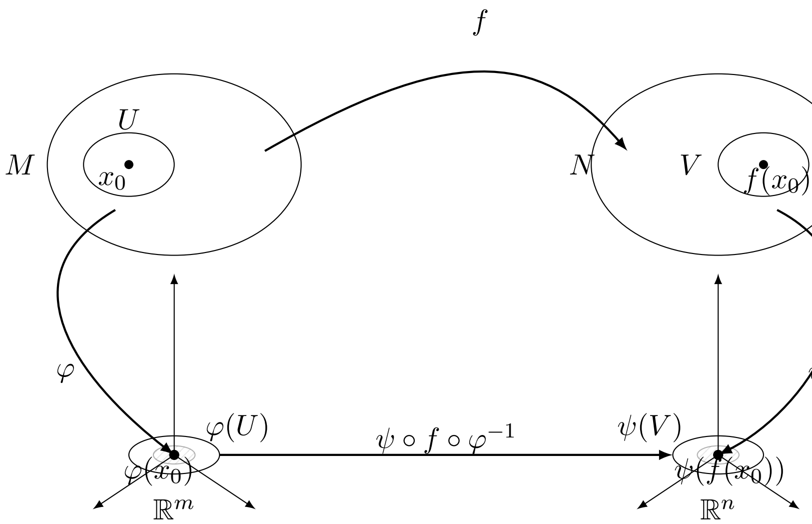
Montrer que :

1. U_i^+, U_i^- sont des ouverts de $\mathbb{S}^2$;
2. $\varphi_i^+(U_i^+) = \varphi_i^-(U_i^-) = D_2$ (disque unité) ;
3. φ_i^+, φ_i^- sont des homéomorphismes sur D_2 ;
4. $\left\{(U_i^+, \varphi_i^+), (U_i^-, \varphi_i^-)\right\}$ forme un atlas sur $\mathbb{S}^2$;
5. Écrire les fonctions de transition.

Proposition : Soient M et N deux variétés topologiques et $f\colon M \to N$, une application et $x_0 \in M$.

Les assertions suivantes sont equivalentes :

1. f est continue en x_0.
2. Il existe (U, φ) en x_0, (V, ψ) en $f(x_0)$ avec $f(U) \subset V$ et
$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$$
est continue en $\varphi(x_0)$.
3. Pour tous (U, φ) en x_0, (V, ψ) en $f(x_0)$ avec $f(U) \subset V$, l'application
$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$$
est continue en $\varphi(x_0)$.



1 04.07.2025

Exercice sur $S^3 \subset \mathbb{R}^4$

$$X = -x^2\frac{\partial}{\partial x^1} + x^1\frac{\partial}{\partial x^2} + x^4\frac{\partial}{\partial x^3} - x^3\frac{\partial}{\partial x^4}$$
$$Y = -x^3\frac{\partial}{\partial x^1} - x^4\frac{\partial}{\partial x^2} + x^1\frac{\partial}{\partial x^3} + x^2\frac{\partial}{\partial x^4}$$
$$Z = -x^4\frac{\partial}{\partial x^1} + x^3\frac{\partial}{\partial x^2} - x^2\frac{\partial}{\partial x^3} + x^1\frac{\partial}{\partial x^4}$$

1. S'assurer que ce sont des champs de vecteurs sur S^3.

2. Montrer qu'ils sont linéairement indépendants.

2. **Crochet de Lie de Champ de vecteur** Soient

$$X = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x^i} = X^i \partial_i$$

et

$$Y = \sum_{j=1}^{n} Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} = Y^j \partial_j$$

où $\partial_k = \frac{\partial}{\partial x^k}$

$$\begin{aligned} TM &= \bigcup_{p \in M} T_p M \\ &= \bigcup_{p \in M} T_p M \\ &\equiv \text{Fibré tangent de } M \end{aligned}$$

Comme T_pM est un e.v., on note T_p^*M son dual. On pose

$$T^*M = \bigcup_{p \in M} T_p^* M$$

(Fibré cotangent.)

On définit une projection naturelle :

$$\begin{aligned} \pi : TM &\to M \\ (p, v_p) &\mapsto p, \text{ si } v_p \in T_pM \end{aligned}$$

<u>Def.</u> Un champ de vecteurs sur M est une application

$$X : M \to TM$$

vérifiant :

$$\pi \circ X = \mathrm{id}_M$$

(En fait TM est une variété de dimension $2 \dim M$)

Si X est un champ de vecteurs sur M, $X(p) \in T_pM$, $\forall p \in M$, donc en c.l.

$$X(p) = \sum_{i=1}^{n} X^i(p) \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p$$

On peut donc écrire :

$$X = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

où X^i sont des fonctions lisses sur un ouvert de M.

<u>**Notation**</u>

— $\mathscr{X}(M)$ = champs lisses sur M.

— Si $X \in \mathscr{X}(M)$, $p \in M$, $X_p := X(p)$.

— Si $f : M \longrightarrow N$ est différentiable en $p \in M$ et $X \in \mathscr{X}(M)$,

$$T_p f \cdot X|_p = X|_p(f)$$

désignera l'action de la différentielle en p de f sur le vecteur tangent $X|_p$.

<u>Ex</u> Sur $\mathbb{R}^3$

$$X = xz\frac{\partial}{\partial x} + x^2 y \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$$

<u>**Exercice**</u> sur $S^3 \subset \mathbb{R}^4$,

$$\begin{aligned}
X &= -x^2\frac{\partial}{\partial x^1} + x^1\frac{\partial}{\partial x^2} + x^4\frac{\partial}{\partial x^3} - x^3\frac{\partial}{\partial x^4} \\
Y &= -x^3\frac{\partial}{\partial x^1} - x^4\frac{\partial}{\partial x^2} + x^1\frac{\partial}{\partial x^3} + x^2\frac{\partial}{\partial x^4} \\
Z &= -x^4\frac{\partial}{\partial x^1} + x^3\frac{\partial}{\partial x^2} - x^2\frac{\partial}{\partial x^3} + x^1\frac{\partial}{\partial x^4}
\end{aligned}$$

1. S'assurer que ce sont des champs de vecteurs sur S^3.
2. Montrer qu'ils sont linéairement indépendants.

$$\begin{aligned}
XY &= \left(\sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(X^i\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\left(Y^j\frac{\partial}{\partial x^j}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X^i\left[\frac{\partial Y^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j} + Y^j\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}\right] \\
&= \left(X^i\frac{\partial Y^j}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial x^j} + X^i Y^j \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}
\end{aligned}$$

$$\cdot \quad YX = (Y^j \partial_j X^i)\partial_i + X^i Y^j \partial^2_{ji}$$
$$\cdot \quad XY - YX = \left[X^i \partial_i Y^j - Y^i \partial_i X^j\right] \partial_j$$

On pose $[X, Y] = XY - YX =$ *crochet de Lie de* X *et* Y.

2 07.07.2025

Pour tout $g \in G$, on définit
$L_g : G \to G$, $R_g : G \to G$

$$\begin{aligned} L_g : &\quad h \mapsto gh \\ R_g : &\quad h \mapsto hg \end{aligned}$$

Elles sont C^∞ et vérifient :

$$\begin{aligned} &L_g \circ R_h = R_h \circ L_g, \quad \forall g, h \\ &L_g \circ L_h = L_{gh} \\ &R_g \circ R_h = R_{hg} \\ &L_e = R_e = Id_G \end{aligned}$$

$*$ Les translations sont des difféo.
$L_{g^{-1}} = L_g^{-1}$
et $R_{g^{-1}} = R_g^{-1}$

Exemple
$GL(n, \mathbb{R})$

$$H_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \, x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$*$ On rappelle qu'une transformation affine de $\mathbb{R}$ est une application

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto ax + b$$

où $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.
Si $g : x \mapsto a'x + b'$ est une autre transformation affine, on a :

$$(f \circ g)(x) = f(a'x + b') = a(a'x + b') + b = aa'x + ab' + b$$

$f \circ g$ est un T.A.

$$\mathrm{Aff}(\mathbb{R}) = \{f : x \mapsto ax + b,\ a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}\}$$

est un groupe.

L'inverse $f : x \mapsto ax + b$ est

$$f^{-1} : x \mapsto \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$$

En fait $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^* \ltimes \mathbb{R}$. Avec la structure différentielle induite par celle de $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, $\mathrm{Aff}(\mathbb{R})$ est un groupe de Lie.

$$\mathrm{Aff}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$$

avec la loi

$$(a, b)(a', b') = (aa', ab' + b)$$

Déf. Soit G un groupe de Lie.
Un sous-groupe de Lie de G est une partie H de G vérifiant :

— H est un sous-groupe de G,

— H est une sous-variété immergée de G : $H \hookrightarrow G$ est une immersion.

Thm (É. Cartan)

Tout sous-groupe fermé d'un groupe de Lie est un sous-groupe de Lie.

En conséquence, tout sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{R})$ est un groupe de Lie, dit groupe de Lie linéaire.

Exemple

— $SL_n(\mathbb{R})$, $SL_n(\mathbb{C})$

— $O(n)$, $O(n, \mathbb{C})$

— $SO(n)$, $U(n)$

sont des groupes de Lie linéaires.

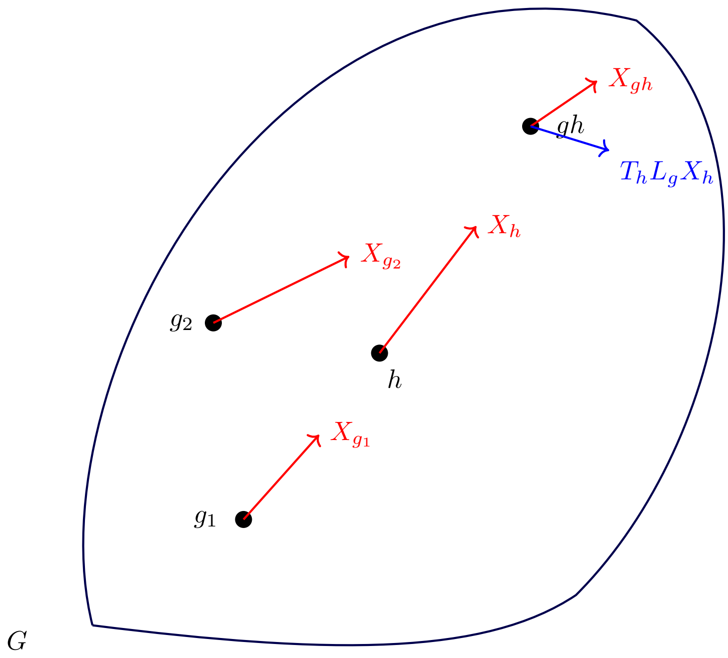
III. Algèbre de Lie d'un groupe de Lie.

1. Champ de vecteurs invariant à gauche.

G, e, $\mathfrak{X}(G)$ (algèbre de Lie)

Déf. $X \in \mathfrak{X}(G)$ est dit invariant à gauche si :

$$T_h L_g \cdot X_h = X_{gh}, \quad \forall g, h \in G$$



On note $\mathfrak{X}_L(G) \equiv$ champs inv. à gauche.

Prop : $\mathfrak{X}_L(G)$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{X}(G)$.

Def.

$\mathfrak{X}_L(G) =$ algèbre de Lie de G.

Soit $\xi \in T_eG$. On définit (uniquement) $X^\xi \in \mathfrak{X}_L(G)$:

$$(X^\xi)_g := T_e L_g \cdot \xi$$

On montre que $X^\xi \in \mathfrak{X}_L(G)$.
En effet, $\forall g, h \in G$,

$$\begin{aligned}(X^\xi)_{gh} &= T_e L_{gh}\, \xi \\ &= T_e(L_g \circ L_h)\, \xi \\ &= T_h L_g \circ T_e L_h\, \xi = T_h L_g(X^\xi_h) \quad \square\end{aligned}$$

Prop. L'application

$$\begin{aligned} T_eG &\longrightarrow \mathfrak{X}_L(G) \\ \xi &\longmapsto X^\xi \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels (d'e.v.).

On peut dès lors transporter le crochet de Lie de $\mathfrak{X}_L(G)$ sur T_eG.
Pour tous $\xi, \eta \in T_eG$,

$$[\xi, \eta]_L := [X^\xi, X^\eta]\big|_e$$

Ainsi, $(T_eG, [\,,\,]_L)$ est une algèbre de Lie isomorphe à l'algèbre de Lie $\mathfrak{X}_L(G)$ du groupe de Lie G.