V.D

I. Variété topologique

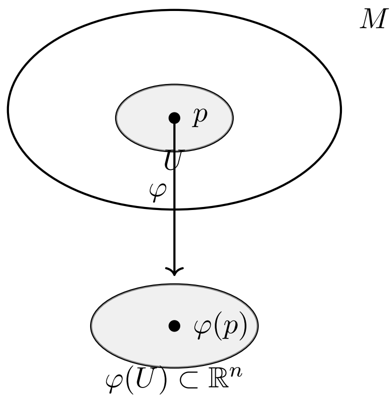
Soit M un espace topologique séparé.

1. Carte

Définition. Une carte locale (sur M en p) est un couple (U, φ), où U est un ouvert contenant p.

$$\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$$

où φ est un homéomorphisme.



Exemple. Soit E un e.v. de dimension n et $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E. Pour tout $v \in E$, on a :

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i.$$

On considère

$$\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}^n, \qquad v \longmapsto (v_1, \dots, v_n)$$

(E, φ) est une carte.

3- Atlas

Déf. Un atlas sur M est la donnée sur M d'une famille

$$\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$$

de cartes telle que

$$M = \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Si toutes les cartes sont de même dimension n, on dit que ...

Ex (Sphère $\mathbb{S}^2$)

$$\mathbb{S}^2 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \sum_{i=1}^{3} x_i^2 = 1 \right\}$$

avec la topologie induite.
Pour $i = 1, 2, 3$, on pose :

$$U_i^+ = \big\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_i > 0 \big\}$$

$$U_i^- = \big\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_i < 0 \big\}$$

$$\begin{array}{rcl} \varphi_i^+ : U_i^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & \check{x}^i \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \varphi_i^- : U_i^- & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & \check{x}^i \end{array}$$

où, par exemple, si $x = (x_1, x_2, x_3)$, alors
$$\check{x}^{\,2} = (x_1, x_3).$$

$$U_1^+ = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 > 0\}$$

Montrer que :

1. U_i^+, U_i^- sont des ouverts de $\mathbb{S}^2$;
2. $\varphi_i^+(U_i^+) = \varphi_i^-(U_i^-) = D_2$ (disque unité) ;
3. φ_i^+, φ_i^- sont des homéomorphismes sur D_2 ;
4. $\big\{(U_i^+, \varphi_i^+), (U_i^-, \varphi_i^-)\big\}$ forme un atlas sur $\mathbb{S}^2$;
5. Écrire les fonctions de transition.

Proposition : Soient M et N deux variétés topologiques et $f : M \to N$, une application et $x_0 \in M$.

Les assertions suivantes sont equivalentes :

1. f est continue en x_0.
2. Il existe (U, φ) en x_0, (V, ψ) en $f(x_0)$ avec $f(U) \subset V$ et
$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$$
est continue en $\varphi(x_0)$.
3. Pour tous (U, φ) en x_0, (V, ψ) en $f(x_0)$ avec $f(U) \subset V$, l'application
$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$$
est continue en $\varphi(x_0)$.