

## V.D

### I. Variété topologique

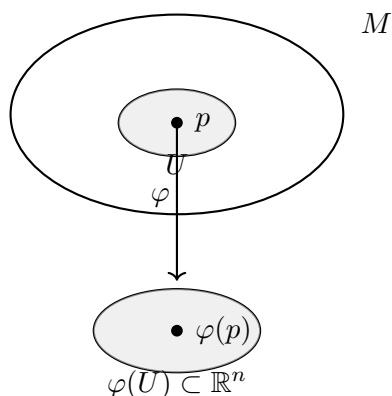
Soit  $M$  un espace topologique séparé.

#### 1. Carte

**Définition.** Une carte locale (sur  $M$  en  $p$ ) est un couple  $(U, \varphi)$ , où  $U$  est un ouvert contenant  $p$ .

$$\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$$

où  $\varphi$  est un homéomorphisme.



**Exemple.** Soit  $E$  un e.v. de dimension  $n$  et  $\{e_1, \dots, e_n\}$  une base de  $E$ . Pour tout  $v \in E$ , on a :

$$v = \sum_{i=1}^n v_i e_i.$$

On considère

$$\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad v \longmapsto (v_1, \dots, v_n)$$

$(E, \varphi)$  est une carte.

#### 3- Atlas

**Déf.** Un atlas sur  $M$  est la donnée sur  $M$  d'une famille

$$\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$$

de cartes telle que

$$M = \bigcup_{i \in I} U_i.$$

*Si toutes les cartes sont de même dimension  $n$ , on dit que ...*

**Ex (Sphère  $\mathbb{S}^2$ )**

$$\mathbb{S}^2 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \sum_{i=1}^3 x_i^2 = 1 \right\}$$

avec la topologie induite.

Pour  $i = 1, 2, 3$ , on pose :

$$U_i^+ = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_i > 0\}$$

$$U_i^- = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_i < 0\}$$

$$\begin{array}{ccc} \varphi_i^+ : U_i^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & \check{x}^i \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \varphi_i^- : U_i^- & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & \check{x}^i \end{array}$$

où, par exemple, si  $x = (x_1, x_2, x_3)$ , alors  
 $\check{x}^2 = (x_1, x_3)$ .

$$U_1^+ = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 > 0\}$$

**Montrer que :**

1.  $U_i^+, U_i^-$  sont des ouverts de  $\mathbb{S}^2$  ;
2.  $\varphi_i^+(U_i^+) = \varphi_i^-(U_i^-) = D_2$  (disque unité) ;
3.  $\varphi_i^+, \varphi_i^-$  sont des homéomorphismes sur  $D_2$  ;
4.  $\{(U_i^+, \varphi_i^+), (U_i^-, \varphi_i^-)\}$  forme un atlas sur  $\mathbb{S}^2$  ;
5. Écrire les fonctions de transition.

**Proposition** : Soient  $M$  et  $N$  deux variétés topologiques et  $f: M \rightarrow N$ , une application et  $x_0 \in M$ .

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1.  $f$  est continue en  $x_0$ .
2. Il existe  $(U, \varphi)$  en  $x_0$ ,  $(V, \psi)$  en  $f(x_0)$  avec  $f(U) \subset V$  et

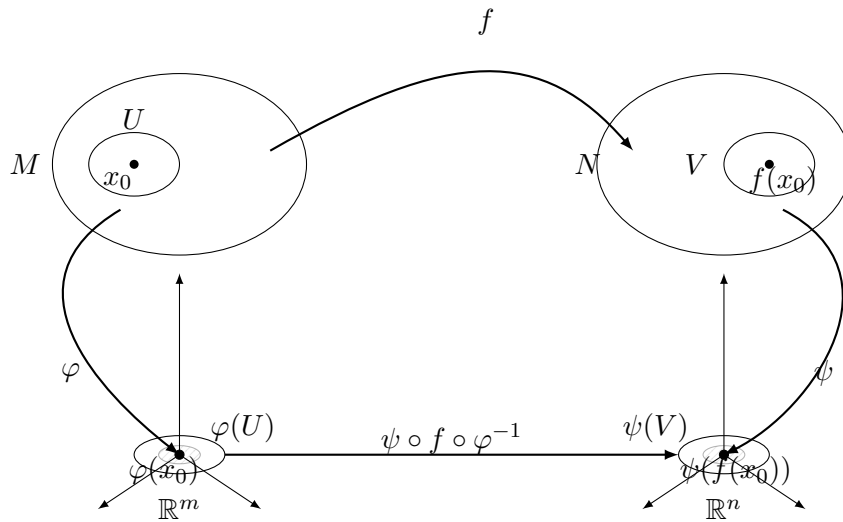
$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$$

est continue en  $\varphi(x_0)$ .

3. Pour tous  $(U, \varphi)$  en  $x_0$ ,  $(V, \psi)$  en  $f(x_0)$  avec  $f(U) \subset V$ , l'application

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$$

est continue en  $\varphi(x_0)$ .



## 1 04.07.2025

### Exercice sur $S^3 \subset \mathbb{R}^4$

$$X = -x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial}{\partial x^2} + x^4 \frac{\partial}{\partial x^3} - x^3 \frac{\partial}{\partial x^4}$$

$$Y = -x^3 \frac{\partial}{\partial x^1} - x^4 \frac{\partial}{\partial x^2} + x^1 \frac{\partial}{\partial x^3} + x^2 \frac{\partial}{\partial x^4}$$

$$Z = -x^4 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^3 \frac{\partial}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial}{\partial x^3} + x^1 \frac{\partial}{\partial x^4}$$

1. S'assurer que ce sont des champs de vecteurs sur  $S^3$ .

2. Montrer qu'ils sont linéairement indépendants.

2. **Crochet de Lie de Champ de vecteur** Soient

$$X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i} = X^i \partial_i$$

et

$$Y = \sum_{j=1}^n Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} = Y^j \partial_j$$

où  $\partial_k = \frac{\partial}{\partial x^k}$

$$\begin{aligned} TM &= \bigcup_{p \in M} T_p M \\ &= \bigcup_{p \in M} T_p M \\ &\equiv \text{Fibré tangent de } M \end{aligned}$$

Comme  $T_p M$  est un e.v., on note  $T_p^* M$  son dual. On pose

$$T^* M = \bigcup_{p \in M} T_p^* M$$

(Fibré cotangent.)

On définit une projection naturelle :

$$\begin{aligned} \pi : TM &\rightarrow M \\ (p, v_p) &\mapsto p, \text{ si } v_p \in T_p M \end{aligned}$$

Def. Un champ de vecteurs sur  $M$  est une application

$$X : M \rightarrow TM$$

vérifiant :

$$\pi \circ X = \text{id}_M$$

(En fait  $TM$  est une variété de dimension  $2 \dim M$ )

Si  $X$  est un champ de vecteurs sur  $M$ ,  $X(p) \in T_p M$ ,  
 $\forall p \in M$ , donc en c.l.

$$X(p) = \sum_{i=1}^n X^i(p) \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p$$

On peut donc écrire :

$$X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

où  $X^i$  sont des fonctions lisses sur un ouvert de  $M$ .

**Notation**

- $\mathcal{X}(M)$  = champs lisses sur  $M$ .
- Si  $X \in \mathcal{X}(M)$ ,  $p \in M$ ,  $X_p := X(p)$ .
- Si  $f : M \rightarrow N$  est différentiable en  $p \in M$  et  $X \in \mathcal{X}(M)$ ,

$$T_p f \cdot X|_p = X|_p(f)$$

désignera l'action de la différentielle en  $p$  de  $f$  sur le vecteur tangent  $X|_p$ .

Ex Sur  $\mathbb{R}^3$

$$X = xz \frac{\partial}{\partial x} + x^2 y \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$$

**Exercice** sur  $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ ,

$$\begin{aligned} X &= -x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial}{\partial x^2} + x^4 \frac{\partial}{\partial x^3} - x^3 \frac{\partial}{\partial x^4} \\ Y &= -x^3 \frac{\partial}{\partial x^1} - x^4 \frac{\partial}{\partial x^2} + x^1 \frac{\partial}{\partial x^3} + x^2 \frac{\partial}{\partial x^4} \\ Z &= -x^4 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^3 \frac{\partial}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial}{\partial x^3} + x^1 \frac{\partial}{\partial x^4} \end{aligned}$$

1. S'assurer que ce sont des champs de vecteurs sur  $S^3$ .
2. Montrer qu'ils sont linéairement indépendants.

$$\begin{aligned} XY &= \left( \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \left( \sum_{j=1}^n Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \left( Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X^i \left[ \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + Y^j \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \right] \\ &= \left( X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j} + X^i Y^j \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot \quad YX &= (Y^j \partial_j X^i) \partial_i + X^i Y^j \partial_{ji}^2 \\ \cdot \quad XY - YX &= [X^i \partial_i Y^j - Y^i \partial_i X^j] \partial_j \end{aligned}$$

On pose  $[X, Y] = XY - YX =$  *crochet de Lie de X et Y*.

## 2 07.07.2025

Pour tout  $g \in G$ , on définit  
 $L_g : G \rightarrow G, R_g : G \rightarrow G$

$$\begin{aligned} L_g : \quad h &\mapsto gh \\ R_g : \quad h &\mapsto hg \end{aligned}$$

Elles sont  $C^\infty$  et vérifient :

$$\begin{aligned} L_g \circ R_h &= R_h \circ L_g, \quad \forall g, h \\ L_g \circ L_h &= L_{gh} \\ R_g \circ R_h &= R_{hg} \\ L_e &= R_e = Id_G \end{aligned}$$

\* Les translations sont des difféo.

$$\begin{aligned} L_{g^{-1}} &= L_g^{-1} \\ \text{et } R_{g^{-1}} &= R_g^{-1} \end{aligned}$$

### Exemple

$GL(n, \mathbb{R})$

$$H_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

\* On rappelle qu'une transformation affine de  $\mathbb{R}$  est une application

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto ax + b$$

où  $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ .

Si  $g : x \mapsto a'x + b'$  est une autre transformation affine, on a :

$$(f \circ g)(x) = f(a'x + b') = a(a'x + b') + b = aa'x + ab' + b$$

$f \circ g$  est un T.A.

$$\text{Aff}(\mathbb{R}) = \{f : x \mapsto ax + b, a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}\}$$

est un groupe.

L'inverse  $f : x \mapsto ax + b$  est

$$f^{-1} : x \mapsto \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$$

En fait  $\text{Aff}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^* \ltimes \mathbb{R}$ . Avec la structure différentielle induite par celle de  $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ ,  $\text{Aff}(\mathbb{R})$  est un groupe de Lie.

$$\text{Aff}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$$

avec la loi

$$(a, b)(a', b') = (aa', ab' + b)$$

**Déf.** Soit  $G$  un groupe de Lie.

Un sous-groupe de Lie de  $G$  est une partie  $H$  de  $G$  vérifiant :

- $H$  est un sous-groupe de  $G$ ,
- $H$  est une sous-variété immergée de  $G$  :  $H \hookrightarrow G$  est une immersion.

**Thm (É. Cartan)**

Tout sous-groupe fermé d'un groupe de Lie est un sous-groupe de Lie.

En conséquence, tout sous-groupe fermé de  $GL_n(\mathbb{R})$  est un groupe de Lie, dit groupe de Lie linéaire.

**Exemple**

- $SL_n(\mathbb{R}), SL_n(\mathbb{C})$
- $O(n), O(n, \mathbb{C})$
- $SO(n), U(n)$

sont des groupes de Lie linéaires.

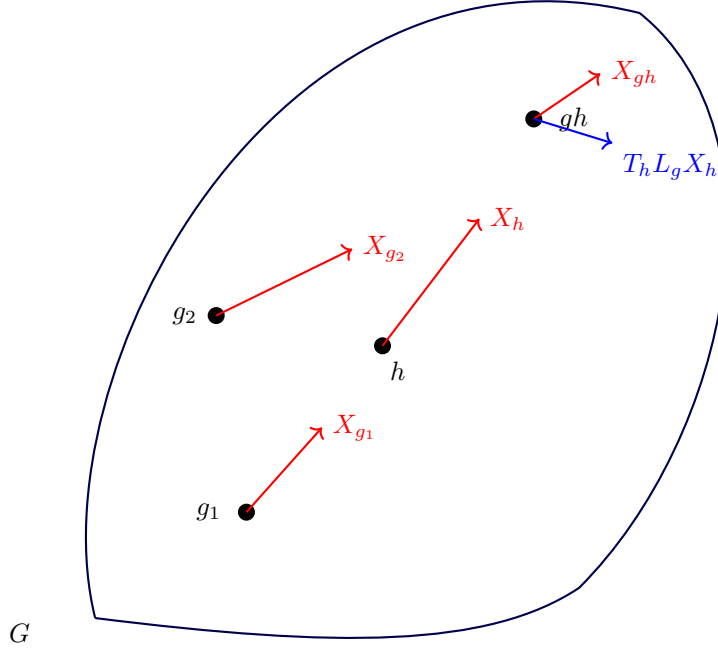
### III. Algèbre de Lie d'un groupe de Lie.

#### **1. Champ de vecteurs invariant à gauche.**

$G, e, \mathfrak{X}(G)$  (algèbre de Lie)

Déf.  $X \in \mathfrak{X}(G)$  est dit invariant à gauche si :

$$T_h L_g \cdot X_h = X_{gh}, \quad \forall g, h \in G$$



On note  $\mathfrak{X}_L(G) \equiv$  champs inv. à gauche.

**Prop :**  $\mathfrak{X}_L(G)$  est une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{X}(G)$ .

Def.

$\mathfrak{X}_L(G) =$  algèbre de Lie de  $G$ .

Soit  $\xi \in T_e G$ . On définit  
(uniquement)  $X^\xi \in \mathfrak{X}_L(G)$  :

$$(X^\xi)_g := T_e L_g \cdot \xi$$

On montre que  $X^\xi \in \mathfrak{X}_L(G)$ .

En effet,  $\forall g, h \in G$ ,

$$\begin{aligned} (X^\xi)_{gh} &= T_e L_{gh} \xi \\ &= T_e (L_g \circ L_h) \xi \\ &= T_h L_g \circ T_e L_h \xi = T_h L_g (X_h^\xi) \quad \square \end{aligned}$$

**Prop.** L'application

$$\begin{aligned} T_e G &\longrightarrow \mathfrak{X}_L(G) \\ \xi &\longmapsto X^\xi \end{aligned}$$



est un isomorphisme d'espaces vectoriels (d'e.v.).

On peut dès lors transporter le crochet de Lie de  $\mathfrak{X}_L(G)$  sur  $T_e G$ .  
Pour tous  $\xi, \eta \in T_e G$ ,

$$[\xi, \eta]_L := [X^\xi, X^\eta]|_e$$

Ainsi,  $(T_e G, [\cdot, \cdot]_L)$  est une algèbre de Lie isomorphe à l'algèbre de Lie  $\mathfrak{X}_L(G)$  du groupe de Lie  $G$ .

### 3 08.07.2025

**Exo (Algèbre du Lie  $\mathbb{H}_3$ )**

$$\mathbb{H}_3 = \mathbb{R}^3, \quad (a, b, c), (x, y, z) = (a + x, b + y, c + z + ay)$$

$$e = (0, 0, 0)$$

$$\mathfrak{h} = \text{Lie}(\mathbb{H}_3) = \mathbb{R}^3 = \text{vect}\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$$

$$S_1 \xi = (\xi^1, \xi^2, \xi^3) \in \mathbb{R}^3, \quad \text{et } g = (x, y, z)$$

$$\text{on a : } X|_g = T_e L_g \xi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ x\xi^2 + \xi^3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} L_g(h) &= g \cdot h \\ &= (x, y, z)(u, v, w) \\ &= (x + u, y + v, z + w + xv) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [H, P] &= HP - PH \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial y} + x \frac{\partial}{\partial z} \right) - \left( \frac{\partial}{\partial y} + x \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{\partial}{\partial x} \\ &= \frac{\partial}{\partial z} = Q \end{aligned}$$

$$\mathfrak{h}_3 = \text{vect}\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\} \quad \text{avec} \quad [\xi_1, \xi_2] = \xi_3.$$

$$\underline{\text{Ex :}} \quad \text{Déterminer } af(\mathbb{R}) = \text{Lie}(Af(\mathbb{R}))$$

$$\begin{aligned} X_{(x_1, y_1, z_1)}^\xi &= \xi^1 \frac{\partial}{\partial x} + \xi^2 \frac{\partial}{\partial y} + (x\xi^2 + \xi^3) \frac{\partial}{\partial z} \\ &= \xi^1 \frac{\partial}{\partial x} + \xi^2 \left( \frac{\partial}{\partial y} + x \frac{\partial}{\partial z} \right) + \xi^3 \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

Le champ  $X^\xi$  s'écrit :

$$X = \xi^1 \frac{\partial}{\partial x} + \xi^2 \frac{\partial}{\partial y} + x \xi^2 \frac{\partial}{\partial z} + \xi^3 \frac{\partial}{\partial z}$$

Posons  $H = \frac{\partial}{\partial x}$ ,  $P = \frac{\partial}{\partial y} + x \frac{\partial}{\partial z}$   
on a :

$$Q = \frac{\partial}{\partial z}$$

### III. Application exponentielle

Soit  $G$  un groupe de Lie,  
 $\mathfrak{g} = T_e G$  son algèbre de Lie.

Si  $\xi \in \mathfrak{g}$ ,  $X \in \mathcal{X}_L(G)$

On note  $\gamma_X : \mathbb{R} \longrightarrow G$   
la courbe intégrale de  $X$ .

$$\begin{cases} \dot{\gamma}(t) = X_{\gamma(t)}^\xi \\ \gamma(0) = e \end{cases}$$

**Déf.**

$$\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$$

$$\xi \longmapsto \gamma_\xi(1)$$

**Prop.**  $\exp$  est un difféo local (d'inv. réciproque).

$$T_0 \exp = \text{id}_{\mathfrak{g}}$$

**Ex :** Déterminer  $\exp_{\mathcal{G}}$  dans les cas suivants :

1/  $\mathcal{G} = (\mathbb{R}, +)$

1' bis :  $\mathcal{G} = (\mathbb{R}^*, \times)$

2/  $\mathbb{H}_3$ ,  $\text{Aff}(\mathbb{R})$

**Thm.** Soit  $G$  un groupe de Lie,  $H$  un sous-groupe de Lie.

$$\mathfrak{h} = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid \exp(t\xi) \in H, \forall t \in \mathbb{R}\}$$

**Ex.** Déterminer les algèbres de Lie de  $SL(n)$ ,  $SO(n)$ ,  $O(n)$ , tous sous-groupes de Lie de  $GL(n, \mathbb{R})$ .

## IV - 2ème Thm de Lie

Étant donné  $G$ , on sait lui associer une algèbre de Lie  $\mathfrak{g} = T_e G \simeq \mathcal{X}(\mathfrak{g})$ .

Question. Étant donnée une algèbre de Lie  $\mathfrak{A}$ , existe-t-il  $G$  tel que  $\mathfrak{A} = \text{Lie}(G)$  ?

**Thm. (3ème de Lie)**

Soit  $A$  une algèbre de Lie de dimension finie. Il existe un groupe de Lie  $G$  d'algèbre de Lie isomorphe à  $A$ .

Quid de l'unicité ?

$(\mathbb{R}, +)$  et  $S^1$  sont des groupes de Lie de même algèbre de Lie  $\mathbb{R}$ .

Mais ces deux groupes de Lie ne sont pas isomorphes.

**Thm (Lie-Cartan)**

Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie de dimension finie. Il existe, à isomorphisme près, un unique groupe de Lie connexe et simplement connexe  $\tilde{G}$  d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ .

Tout autre groupe de Lie connexe  $G$  d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  est de la forme  $G = \tilde{G}/\Gamma$ ,

où  $\Gamma$  est un sous-groupe discret du centre de  $\tilde{G}$ .

**Ex.**  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_3 = \text{Heisenberg}$

—  $H_3 = \mathbb{R}^3$  (Heisenberg group)

—  $\mathcal{Z}(H_3) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \simeq \mathbb{R}$

Des sous-groupes discrets sont  $\Gamma_k \simeq k\mathbb{Z}$

Les groupes connexes correspondants sont :

$$G_k = H_3/\Gamma_k$$

On va prendre  $k = 1$  :

$$G_1 = H_3/(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{Z})$$

On obtient :

$$G_1 = \mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z}) = \mathbb{R}^2 \times S^1$$

**Exercice :** Écrire le produit sur  $G_1$ .