Teoría de Números 1

Ejercicios del 1 al 40.

1.- a) Determinar los valores de n para los cuales $8n^3 + 12n^2 - 2n - 3$ es múltiplo de 5

b) Demostrar su afirmación por Inducción.

2.- a) Determinar los valores de n para los cuales $2^n > n^2 + 4n + 5$

b) Demostrar su afirmación por Inducción.

3.- Probar por Inducción que $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + \cdots + n(n+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$

4.- Demostrar por Inducción que el producto de 3 números consecutivos es múltiplo de 6.

5.- a) Determine los valores de n para los cuales $n! > 2n$

b) Demuestre su afirmación por Inducción

6.- a) Determine los valores de n para los cuales $7^n + 1$ es múltiplo de 8

b) Demuestre su afirmación por Inducción.

7.- Demuestre por Inducción que si n > 1, el dígito de las unidades de $2^{2^n} + 1$ es 7.

8.- Demostrar por Inducción que si $n \geq 2$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} > \sqrt{n}$$

9.- Demostrar por Inducción que $\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2n+2}$

En los ejercicios 10, 11 y 12, demostrar por Inducción que a_n es múltiplo de b.

10.-$a_n = 2^{2n}$-1, b = 3

11.- $a_n = n^2(n^4 - 1)$, b = 60

12.-$a_n = n^3 + 5n$, b = 6

13.- Demostrar por Inducción que $4^n + 15n - 1$ es múltiplo de 9

14.-Demostrar por Inducción que $\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^n+\left(2-\sqrt{3}\right)^n}{2}$ es entero

15.- Demostrar por Inducción que $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

16.- Demostrar por Inducción que $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

17.- Demostrar por Inducción que $\left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{1}{n}$

18.- Probar por Inducción que si n > 3, $2^n < n!$

19. Demostrar por Inducción que $n(n^2 + 5)$ es múltiplo de 6.

20.- Demostrar por Inducción que $n(n + 1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)$ es múltiplo de 30

En los ejercicios 21 al 28, demostrar por Inducción o dar 3 contraejemplos.

21.- $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

22.- $n^2 + n + 41$ es primo

23.- $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^k = 2^{k+1} - 1$

24.- $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \begin{cases} \frac{(n+1)(2n+1)}{3} & si\ n\ es\ par \\ \frac{2^{n-1}(n+1)(2n+1)}{6} & si\ n\ es\ impar \end{cases}$

25.- $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$

26.- $1 + 5^n + 5^{n+1} + 5^{n+2} + 5^{n+3}$ es múltiplo de 71

27.- $n^2 - n + 41$ es primo

28.- $E_n = 1 + \prod_{i=1}^{n} p_i$ es primo, donde p_i es el i-ésimo primo

En las preguntas 29 a 34, calcular los primeros 10 términos de las sucesiones definidas recursivamente.

29.- $a_1 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + 3$ **30.-** $a_1 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + n$

31.- $a_1 = 1, \quad a_n = \left(\frac{n}{n-1}\right) a_{n-1}$ **32.-** $a_1 = 1, \ a_2 = 2, \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

33.- $a_1 = 1, \ a_2 = 2, \ a_3 = 2, \quad a_n = 3a_{n-1} + 2a_{n-2} - a_{n-3}$

34.- $a_1 = 1, \ a_2 = 36, \ a_n = 34a_{n-1} - a_{n-2} + 2$

En los ejercicios 35 a 38, definir recursivamente cada secuencia numérica

35.- 1,4,7,10,13, . . . 36.- 3,8,13,18, . . . 37.- 0,3,9,21,45, . . .
38.- 1,2,5,26,677, . ..

39.- Considere el siguiente arreglo numérico}

1

2 3

4 5 6

7 8 9 10

. . .

a) Si a_n denota al primer término del n-ésimo renglón, definir a_n recursivamente.
b) Encontrar una fórmula explícita para a_n .
c) ¿En qué renglón se encuentra el 2019?
d) Calcular la suma de los elementos del renglón 2019.

40.- Los números de Bell B_n se definen recursivamente como sigue:
B_0 = 1,

$$B_n = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i}, \quad n \geq 1$$

Calcular B_2, B_3, B_4 y B_5.