Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Tarea 1:
Ejercicios

Luis Erick Montes Garcia - 419004547

Trabajo presentado como parte del curso de **Teoría de Números I** impartido por el profesor **Javier Valdez Quijada**.

Entrega 18 de Febrero del 2019

Link al código fuente: git@github.com:lemg98/Teoria-De-Numeros-I.git

1. *a*) Determinar los valores de n para los cuales $8n^3 + 12n^2 - 2n - 3$ es múltiplo de 5.
Solución: Observamos los resultados de los números de $n \in [1, 10]$ y en el siguiente renglón $n \in [2, 20]$.
(1,15) (2,105) (3,315) (4,693) (5,1287) (6,2145) (7,3315) (8,4845) (9,6783) (10,9177)
(11,12075) (12,15525) (13,19575) (14,24273) (15,29667) (16,35805) (17,42735) (18,50505) (19,59163) (20,68757)
Basta con que el resultado tenga 5 o 0 en sus unidades para que sea múltiplo de 5. Podemos notar que si las unidades de n son $1, 2, 3, 6, 7, 8$ entonces el resultado es múltiplo de 5. Daremos esta proposición.

b) Demostrar su afirmación por inducción.
Solución: Observamos

$$\begin{aligned}(2n-1)(2n+1)(2n+3) &= (4n^2-1)(2n+3)\\ &= 4n^2(2n+3) - (2n+3)\\ &= 8n^3 + 12n^2 - 2n - 3\end{aligned}$$

por tanto usaremos esta factorización para demostrar inductivamente nuestra proposición.
Decimos que los factores son de la forma $(2n + x)$ con $x \in \{-1, 1, 3\}$, nos referiremos a estos en las siguientes afirmaciones, basta con que alguno de estos factores sea múltiplo de 5 para que el resultado lo sea. Procedemos a demostrar ambas afirmaciones.

- Podemos dar por ciertos los casos base por los resultados del inciso anterior.
- Suponemos que n cumple que algún factor $(2n+x)$ es múltiplo de 5. Decimos que el siguiente número natural con las mismas unidades que n es $n + 10$.
  Observamos que $2(n+10)+x = 2n+20+x = (2n+x)+5(4)$, ya que ambos son múltiplos de 5 entonces el resultado es múltiplo de 5. Por tanto si n cumple la proposición $n+10$ también.

Una vez demostradas ambas afirmaciones podemos usar el principio de inducción matemática para concluir que si las unidades de n son $1, 2, 3, 6, 7, 8$ entonces $8n^3 + 12n^2 - 2n - 3$ es múltiplo de 5.

2. *a*) Determinar los valores de n para los cuales $2^n > n^2 + 4n + 5$.
Solución: Observamos los primeros 8 casos de n
(1,2,10) (2,4,17) (3,8,26) (4,16,37) (5,32,50) (6,64,65) (7,128,82) (8,256,101)
Determinamos que a partir de $n = 7$ se cumple la desigualdad.

b) Demostrar su afirmación por Inducción.
Solución: Sea n un número natural podemos decir que

$$\begin{aligned}n > 0 &\Rightarrow n^2 > 0\\ &\Rightarrow n^2 + 4n > 2n\\ &\Rightarrow n^2 + 4n + (4+1) > 2n + (4+1)\end{aligned}$$

llamaremos (*) a esta afirmación. Demostraremos las siguientes dos afirmaciones.

- Para $n = 7$ se cumple la desigualdad como vimos en el inciso anterior.
- Suponemos que se cumple para n. Partimos de

$$\begin{aligned}2^n &> n^2 + 4n + 5 \text{ por hipótesis},\\ 2^n + 2^n &> (n^2 + 4n + 5) + (n^2 + 4n + 5),\\ 2^n + 2^n &> (n^2 + 4n + 5) + 2n + (4+1) \text{ por (*)},\\ 2(2^n) &> (n^2 + 2n + 1) + (4n + 4) + 5,\\ 2^{n+1} &> (n+1)^2 + 4(n+1) + 5\end{aligned}$$

  Por tanto si n cumple la desigualdad $n + 1$ también la cumple.

Demostradas ambas afirmaciones podemos usar el Principio de Inducción Matemática para concluir que si $n > 6$ entonces $2^n > n^2 + 4n + 5$.