

# L'informatique des entrepôts de données

Daniel Lemire



## SEMAINE 4

### Les techniques d'indexation

#### 4.1. Présentation de la semaine

Les entrepôts de données exploitent diverses techniques d'indexation pour optimiser les performances des requêtes. Après avoir abordé la sélection des vues la semaine précédente, nous nous concentrons cette semaine sur les index traditionnels tels que les arbres B et les tables de hachage. L'objectif est de comprendre leur utilisation dans le contexte des entrepôts de données, sans nécessiter leur implémentation.

Nous explorerons également l'indexation de données hétérogènes, comme le texte et les fichiers XML, qui dépassent le cadre des tables relationnelles. Enfin, nous aborderons l'indexation des jointures, introduisant les index multidimensionnels qui seront étudiés la semaine prochaine.

## 4.2. Arbres B et tables de hachage

Dans une colonne contenant  $n$  éléments, il est courant de vouloir identifier rapidement les éléments correspondant à un critère spécifique, comme `nom=Jean`. Sans index, une recherche exhaustive nécessite de parcourir tous les  $n$  éléments, mais des structures comme les arbres B et les tables de hachage permettent d'améliorer les performances.

### 4.2.1. Arbres B

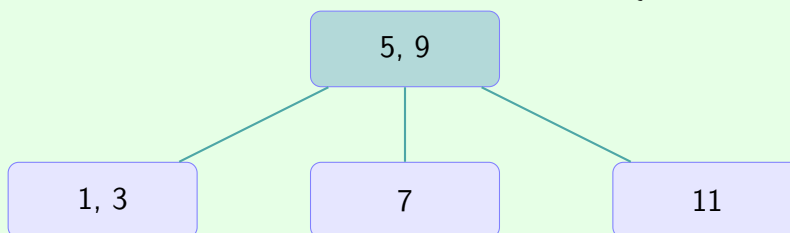
Les arbres B sont des structures arborescentes équilibrées, optimisées pour les accès disques dans les bases de données. Introduits en 1972 par Rudolf Bayer et Edward M. McCreight, ils offrent une recherche en  $O(\log n)$ , comparable à la recherche binaire, tout en permettant un accès ordonné aux valeurs. En Java, la classe `java.util.TreeMap` illustre une telle structure.

Un arbre B d'ordre  $m$  ( $m \geq 2$ ) respecte les propriétés suivantes :

- (a) Chaque nœud contient entre  $m - 1$  et  $2m - 2$  clés, sauf la racine (1 à  $2m - 2$  clés).
- (b) Un nœud interne avec  $k$  clés possède  $k + 1$  enfants.
- (c) Toutes les feuilles sont au même niveau.
- (d) Les clés sont stockées en ordre croissant.
- (e) Les clés des enfants respectent un ordre strict par rapport aux clés parentes.

#### Exemple 1: Exemple d'arbre B

Voici un exemple d'arbre B d'ordre 3 avec les clés  $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$  :



Les opérations principales incluent :

- **Recherche** : Navigation arborescente similaire à un arbre binaire.
- **Insertion** : Ajout dans une feuille, avec division des nœuds pleins.
- **Suppression** : Suppression et rééquilibrage si nécessaire.

#### 4.2.2. Tables de hachage

Les tables de hachage offrent une recherche en  $O(1)$  (amorti), mais ne permettent pas un accès ordonné. En Java, `java.util.HashMap` est un exemple. Leur fonctionnement repose sur :

- (a) Une **fonction de hachage**  $h(k)$  mappant une clé à un indice.
- (b) La gestion des **collisions** par chaînage ou sondage.
- (c) Le **facteur de charge**, influençant les performances.

Pour une table de taille  $m = 7$  avec  $h(k) = k \bmod 7$  et les clés  $\{15, 22, 8, 29\}$ , toutes tombent à l'indice 1, gérées par chaînage.

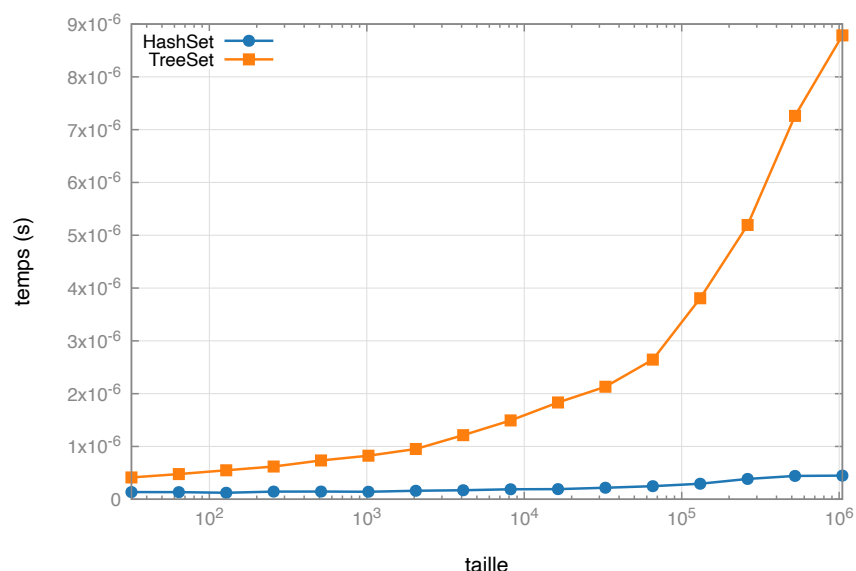
#### 4.2.3. Comparaison des performances

Considérons un programme Java comparant `TreeMap` et `HashMap` pour sélectionner des éléments uniques :

```
1 import java.util.*;  
2  
3 public class Comparaison {  
4     public static void main(String[] args) {  
5         TreeMap<Integer, String> treeMap = new  
6             TreeMap<>();  
7         HashMap<Integer, String> hashMap = new  
8             HashMap<>();  
9         // Code de test  
10    }  
11 }
```

La Figure 1 montre que `HashMap` reste stable avec l'augmentation des données, contrairement à `TreeMap`, qui ralentit. Pour un million d'éléments, `HashMap` est jusqu'à 20 fois plus rapide. Cependant, pour des recherches par plage (ex. : âge > 20 ans), les arbres B sont préférables. Sur disque, les arbres B minimisent les accès aléatoires, rendant leur performance compétitive.

Certaines bases de données, comme SQLite, utilisent principalement des index de type B-tree pour leurs index. En effet, les arbres B sont adaptés aux systèmes de fichiers, car ils minimisent les accès disques en regroupant les données de manière hiérarchique. Ils sont particulièrement efficaces pour les requêtes nécessitant un accès ordonné ou des plages de valeurs.



**Figure 1.** Comparaison des performances entre `TreeMap` et `HashMap` pour la sélection aléatoire d'éléments.

### 4.3. Indexation du texte

L'indexation textuelle repose sur l'*index inversé*, qui associe un mot à la liste des documents où il apparaît, souvent avec ses positions. Par exemple, pour les textes :

- D1 = "La vie est belle"
- D2 = "Belle belle"

l'index inversé est :

- la → D1,1
- vie → D1,2
- est → D1,3
- belle → D1,4; D2,1; D2,2

Avec une table de hachage, la recherche est en  $O(1)$ , mais la construction ou mise à jour peut être en  $O(n)$ . La compression réduit l'espace requis, souvent à 10 % des documents originaux. Un exemple d'implémentation avec `HashMap` :

```

1 import java.util.*;
2
3 public class IndexInverse {
4     HashMap<String, List<String>> index = new
5         HashMap<>();
6     public void indexer(String docId, String texte) {
7         String[] mots = texte.split(" ");
8     }
9 }

```

```

7      for (int i = 0; i < mots.length; i++) {
8          index.computeIfAbsent(mots[i], k -> new
              ArrayList<>()).add(docId + "," + (i+1));
9      }
10 }
11 }

```

Les stratégies d'indexation incluent :

- Exclusion des mots vides via un *antidictionnaire*.
- *Lemmatisation* pour regrouper les variantes d'un mot (ex. : "courais" → "courir").
- Pondération par *TF-IDF* pour classer les résultats par pertinence.

#### 4.4. Indexation XML

Les bases de données comme IBM DB2 ou Oracle indexent les documents XML, interrogés via XPath ou XQuery. XPath sélectionne des nœuds, tandis que XQuery permet des transformations complexes avec des expressions FLWOR.

Pour le document XML :

```

1 <livres>
2   <livre>
3     <titre>Le Petit Prince</titre>
4     <auteur>Antoine de Saint-Exupery</auteur>
5     <annee>1943</annee>
6   </livre>
7   <livre>
8     <titre>1984</titre>
9     <auteur>George Orwell</auteur>
10    <annee>1949</annee>
11  </livre>
12 </livres>

```

Une requête XPath `/livres/livre[annee > 1945]/titre` retourne 1984. Une requête XQuery trie les livres après 1940 :

```

1 for $livre in /livres/livre
2 where $livre/annee > 1940
3 order by $livre/annee
4 return
5   <resultat>
6     <titre>{$livre/titre/text()}</titre>

```

```

7   <auteur>{$livre/auteur/text()}</auteur>
8   </resultat>

```

L'indexation XML avec ORDPATH attribue des identifiants hiérarchiques (ex. : 1, 1.1, 1.1.1). Pour le document :

```

1 <liste temps="janvier">
2   <bateau />
3   <bateau>
4     <canard />
5   </bateau>
6 </liste>

```

la table ORDPATH est :

ORDPATH	Nom	Type	Valeur
1	liste	élément	aucune
1.1	temps	attribut	janvier
1.2	bateau	élément	aucune
1.3	bateau	élément	aucune
1.3.1	canard	élément	aucune

**Table 1.** Représentation ORDPATH du document XML.

Un index sur la colonne **valeur** accélère les requêtes comme `@temps="janvier"`.

## 4.5. Indexation des jointures

Les jointures SQL sont coûteuses sans index. L'algorithme SORT-MERGE (voir Algorithme 1) trie les tables en  $O(n \log n)$ , puis fusionne en  $O(n)$ . Considérons les tables suivantes.

Nom	Profit
Jean	531.00
Pierre	132.00
Marie	32.00

Nom	Ville
Jean	Montréal
Marie	Québec
Pierre	Roberval

Après tri, la jointure produit le résultat suivant.

Nom	Profit	Nom	Ville
Jean	531.00	Jean	Montréal
Marie	32.00	Marie	Québec
Pierre	132.00	Pierre	Roberval

**Entrées :** Deux relations  $R$  et  $S$  à joindre sur l'attribut  $A$

**Sorties :** La jointure de  $R$  et  $S$

Trier  $R$  par ordre croissant sur  $A$ ; Trier  $S$  par ordre croissant sur  $A$ ; Initialiser  $i \leftarrow 1$ ,  $j \leftarrow 1$ ; Résultat  $\leftarrow$  ensemble vide;

```

while  $i \leq |R|$  et  $j \leq |S|$  do
  if  $R[i].A < S[j].A$  then
     $i \leftarrow i + 1$ ;
  else
    if  $R[i].A > S[j].A$  then
       $j \leftarrow j + 1$ ;
    else
       $k \leftarrow i$ ; while  $k \leq |R|$  et  $R[k].A = R[i].A$  do
         $l \leftarrow j$ ; while  $l \leq |S|$  et  $S[l].A = S[j].A$  do
          Ajouter le tuple joint  $(R[k], S[l])$  à Résultat;
           $l \leftarrow l + 1$ ;
        end
         $k \leftarrow k + 1$ ;
      end
       $i \leftarrow k$ ;  $j \leftarrow l$ ;
    end
  end
end
return Résultat;

```

**Algorithme 1 :** Algorithme Sort-Merge Join

L'algorithme HASH JOIN (voir Algorithme 2) utilise une table de hachage pour associer les enregistrements en  $O(n)$ , mais nécessite des accès aléatoires. Dans les entrepôts de données, minimiser les jointures non-indexées est préférable.

Certains moteurs de bases de données, comme PostgreSQL, utilisent des algorithmes de jointure adaptatifs, combinant les approches SORT-MERGE et HASH JOIN selon les statistiques des données. Par exemple, si une table est indexée sur l'attribut de jointure, le moteur peut choisir la jointure par hachage.

**Entrées :** Deux relations  $R$  et  $S$  (supposons  $S$  plus petite que  $R$ ), jointure sur l'attribut  $A$

**Sorties :** La jointure de  $R$  et  $S$

Créer une table de hachage  $H$  vide; **pour** chaque tuple  $s$  dans  $S$

**faire**

        Calculer  $h = \text{hash}(s.A)$ ; Ajouter  $s$  à la liste dans  $H[h]$

**fin**

Résultat  $\leftarrow$  ensemble vide; **pour** chaque tuple  $r$  dans  $R$  **faire**

    Calculer  $h = \text{hash}(r.A)$ ; **pour** chaque  $s$  dans  $H[h]$  tel que

$s.A = r.A$  **faire**

            Ajouter le tuple joint  $(r, s)$  à Résultat;

**fin**

**fin**

**retourner** Résultat;

**Algorithme 2 :** Algorithme Hash Join

Heureusement, plusieurs jointures sont naturellement indexées, comme les jointures sur les clés primaires et étrangères. Par exemple, dans une base de données de ventes, la table des ventes peut être jointe à la table des clients via l'ID client, qui est souvent indexé.

## 4.6. Activité pratique

Nous vous invitons maintenant à mettre en pratique les concepts abordés. Rendez-vous à l'adresse suivante pour accéder à l'activité pratique :

<https://github.com/lemire/sunshine>

## 4.7. Questions d'approfondissement

- (a) Quel type d'index utiliser pour identifier les événements dans une plage temporelle ?



- (b) Si un arbre B et une table de hachage ont des performances équivalentes pour un million de rangées, combien de rangées sont nécessaires pour que la table de hachage soit deux fois plus rapide ?
- (c) Pourquoi utiliser un arbre B plutôt qu'une recherche binaire sur une liste triée ?
- (d) Un index inversé peut-il trouver les textes contenant un mot se terminant par *ent* ?
- (e) Quels sont les inconvénients de la représentation ORDPATH par rapport au stockage direct d'un document XML ?

**4.8. Réponses suggérées**

- (a) Arbre B.
- (b) En théorie, une table de hachage a une complexité de  $O(1)$ , et un arbre B de  $O(\log n)$ . Pour  $\log_2 n = 2 \log_2 10^6$ , on a  $n = 10^{12}$ .
- (c) Un arbre B permet des mises à jour en  $O(\log n)$ , contrairement à une liste triée.
- (d) Non, sauf avec une indexation spécifique des suffixes.
- (e) La reconstruction d'un document XML à partir d'ORDPATH est coûteuse si le document entier est requis.

### Votre avis compte !

Chers étudiants,

Si vous repérez une erreur dans ce document ou si vous avez une suggestion pour l'améliorer, nous vous invitons à remplir notre **formulaire anonyme**.

Votre contribution est précieuse pour nous !

[Cliquez ici pour accéder au formulaire](#)