

**Dérivées de l'interpolation itérative de Lagrange et les ondelettes**

***b*-adiques de Cohen-Daubechies-Feauveau**

Gilles Deslauriers, Serge Dubuc et Daniel Lemire

Rapport technique EPM/RT-97/28, École Polytechnique de Montréal, Montréal,

avril 1997

Gilles Deslauriers et Daniel Lemire

Département de mathématiques et de génie industriel

École Polytechnique de Montréal

Case postale 6079, succursale centre-ville

Montréal (Québec) H3C 3A7, Canada

Serge Dubuc

Département de mathématiques et de statistique

Université de Montréal

Case postale 6128, succursale centre-ville

Montréal (Québec) H3C 3J7, Canada

## Résumé

Nous construisons l'équivalent des ondelettes biorthogonales de Cohen-Daubechies-Feauveau dans le contexte  $b$ -adique. Utilisant les schémas d'interpolation itérative de Lagrange  $b$ -adiques, nous procédons en appliquant de multiples dérivées sur les B-splines et en utilisant l'intégration par parties.

### 1. L'interpolation itérative de Lagrange

Nous rappelons brièvement les schémas d'interpolation  $b$ -adiques discutés dans [3] ( $b > 0$  est un entier). Nous appelons les nombres réels dans la forme  $k/b^j$  où  $k$  et  $j$  sont entiers, des *nombres  $b$ -adiques*. Si  $j$  est le plus petit entier tel que  $x = k/b^j$  pour un entier  $k$ , alors nous disons que  $x$  est un *nombre  $b$ -adique de profondeur  $j$* . Étant donné une fonction  $y$  définie sur les entiers, nous voulons prolonger cette fonction aux nombres  $b$ -adiques. Pour des entiers  $r$  et  $n$  satisfaisant  $0 < r < b$ ,  $y(n + r/b)$  est définie comme  $p(n + r/b)$  où  $p$  est le polynôme de Lagrange de degré maximal  $2N - 1$  tel que  $p(k) = y(k) \forall k \in [n - N + 1, n + N] \cap \mathbf{Z}$ . Ceci peut être itéré à tous les nombres  $b$ -adiques.

Si nous fixons  $b$  et  $N$ , commençant avec  $y(k) = \delta_{k,0}$ , alors nous obtiendrons,

comme produit final, la fonction fondamentale  $F_{b,2N-1}$ . Nous allons aussi écrire  $F_{2,2N-1} = F_{2N-1}$ .  $F_{b,2N-1}$  peut toujours être prolongée aux nombres réels parce qu'elle sera uniformément continue sur les nombres  $b$ -adiques (un ensemble dense) et, étant donné un entier positif  $k$ , il existe  $N_0$  suffisamment grand pour que  $N \geq N_0 \Rightarrow F_{b,2N-1} \in C^k$ . En d'autres mots, on peut accroître la régularité de  $F_{b,2N-1}$  en augmentant  $N$ . On peut voir que ce schéma d'interpolation permet la reconstruction exacte des polynômes de degré  $2N - 1$ .

**Remarque 1.** *Nous utilisons l'interpolation itérative de Lagrange classique pour plus de clarté, cependant, tout ce dont nous avons besoin est un schéma différentiable et permettant la reconstruction exacte des polynômes d'un certain degré. Par exemple, de nombreux schémas  $M - \text{band}$  peuvent être utilisés [6] mais aussi des schémas beaucoup plus généraux.*

On peut montrer que nous avons la relation

$$F_{b,2k+1}(t) = \sum_n F_{b,2k+1}(n/b) F_{b,2k+1}(bt - n)$$

Appliquant la transformée de Fourier, nous obtenons

$$\widehat{F_{b,2k+1}}(\xi) = p_{b,2k+1}(\xi) \widehat{F_{b,2k+1}}(\xi/b)$$

où

$$p_{b,2k+1}(\xi) = \sum_n F_{b,2k+1}(n/b) e^{-in\xi}.$$

## 2. La fonction de corrélation

Notons par  $F_{\tilde{\phi},\phi}^{\sim}$  la fonction de corrélation du couple  $(\tilde{\phi}, \phi)$ ,

$$F_{\tilde{\phi},\phi}^{\sim}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\phi}(x) \phi(x-y) dx.$$

Nous disons que  $\tilde{\phi}$  et  $\phi$  sont des fonctions duales si

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\phi}(x) \phi(x-k) dx = \delta_{0,k}$$

On peut vérifier facilement que lorsque  $\tilde{\phi}$  et  $\phi$  sont des fonctions duales, alors  $F_{\tilde{\phi},\phi}^{\sim}(k) = \delta_{k,0}$  pour tout entier  $k$ . C'est pourquoi nous disons que la fonction de corrélation de deux fonctions duales est aussi la fonction fondamentale d'un schéma d'interpolation.

Notons la transformée de Fourier par

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx$$

**Lemme 2.1.** Si  $\tilde{\phi}, \phi \in L^2$ , alors  $\widehat{F_{\phi,\phi}^\sim}(\xi) = \sqrt{2\pi} \widehat{\phi}(\xi) \widehat{\tilde{\phi}}(\xi)$

**Preuve.** Parce que la transformée de Fourier est unitaire dans  $L^2$ ,

$$\begin{aligned}
\widehat{F_{\phi,\phi}^\sim}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-i\xi y} F_{\phi,\phi}^\sim(y) dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \tilde{\phi}(x) \left( \int e^{-i\xi y} \phi(x-y) dy \right) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \tilde{\phi}(x) \left( \int e^{-i\xi(-u+x)} \phi(u) du \right) dx \\
&= \widehat{\tilde{\phi}}(\xi) \int \tilde{\phi}(x) e^{-i\xi x} dx \\
&= \sqrt{2\pi} \widehat{\tilde{\phi}}(\xi) \widehat{\phi}(\xi) \blacksquare
\end{aligned}$$

Dans ce qui suit, nous allons supposer que  $\tilde{\phi}$  et  $\phi$  sont des fonctions duales dans  $L^2(\mathbf{R})$  et qu'elles satisfont

$$\widehat{\phi}(\xi) = m_0(\xi/b) \widehat{\phi}(\xi/b) \quad (2.1)$$

$$\widehat{\tilde{\phi}}(\xi) = \widetilde{m}_0(\xi/b) \widehat{\tilde{\phi}}(\xi/b) \quad (2.2)$$

**Lemme 2.2.** Si  $\tilde{\phi}$  et  $\phi$  satisfont les équations 2.1 et 2.2, alors  $F_{\phi,\phi}^\sim$  satisfait une équation similaire,

$$\widehat{F_{\phi,\phi}^\sim}(\xi) = p(\xi/b) \widehat{F_{\phi,\phi}^\sim}(\xi/b)$$

où

$$p(\xi) = \overline{m_0}(\xi) \widetilde{m_0}(\xi) \quad (2.3)$$

**Preuve.**

$$\begin{aligned} \widehat{F}_{\widetilde{\phi}, \phi}(\xi) &= \sqrt{2\pi \overline{\widehat{\phi}}(\xi)} \widehat{\widetilde{\phi}}(\xi) \\ &= \overline{m_0}(\xi/b) \widetilde{m_0}(\xi/b) \sqrt{2\pi \overline{\widehat{\phi}}(\xi/b)} \widehat{\widetilde{\phi}}(\xi/b) \\ &= \overline{m_0}(\xi/b) \widetilde{m_0}(\xi/b) \widehat{F}_{\widetilde{\phi}, \phi}(\xi/b) \blacksquare \end{aligned}$$

**Exemple 2.3.** Supposons que  $\phi = \widetilde{\phi} =_N \phi$  est une fonction d'échelle de Daubechies.

(Il y a une version  $b$ -adique des ondelettes de Daubechies mais nous ne considérons que l'originale où  $b = 2$  [6].) On sait que la fonction de corrélation correspondante  $F_{_N \phi, _N \phi}$  sera une fonction fondamentale de l'interpolation itérative de Lagrange ([2, section 6.5], [9], [10]), en fait,  $F_{_N \phi, _N \phi} = F_{2N-1}$ . Nous connaissons le filtre de la fonction d'échelle  $_N \phi$ : nous avons

$$m_0(\xi) = \left( \frac{1 + e^{-i\xi}}{2} \right)^N \mathcal{L}(\xi)$$

où  $|\mathcal{L}(\xi)|^2 = L(\xi)$  satisfait

$$L(\xi) = P(\sin^2 \xi/2)$$

avec

$$P(y) = P_N(y)$$

où

$$P_N(y) = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N-1+k}{k} y^k.$$

Notre formule 2.3 donne

$$p_{2N-1}(\xi) = \cos^{2N} \xi/2 \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N-1+k}{k} \sin^{2k} \xi/2. \quad (2.4)$$

**Exemple 2.4.** Supposons maintenant que  $\phi$  et  $\tilde{\phi}$  sont des fonctions d'échelle de Cohen-Daubechies-Feauveau [1, section 6] (i.e.  $\tilde{\phi} =_{N,\tilde{N}} \tilde{\phi}$  et  $\phi =_N \phi$ ). Puisque  $N + \tilde{N}$  est toujours pair, définissons  $n = (N + \tilde{N})/2$ . Les filtres sont donnés par

$${}_N m_0(\xi) = e^{-i\kappa\xi/2} \cos^N \xi/2 \quad (2.5)$$

$$_{N,\tilde{N}}\widetilde{m}_0(\xi) = e^{-i\kappa\xi/2} \cos^{\tilde{N}} \xi/2 \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1+k}{k} \sin^{2k} \xi/2 \quad (2.6)$$

avec  $\kappa = 1$  si  $N$  est impair et  $\kappa = 0$  si  $N$  est pair. En multipliant ces équations, nous obtenons

$$\overline{{}_Nm_0}(\xi)_{N,\tilde{N}} \widetilde{m}_0(\xi) = (\cos \xi/2)^{N+\tilde{N}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1+k}{k} \sin^{2k} \xi/2.$$

Nous voyons que

$$p_{N+\tilde{N}-1}(\xi) = \overline{{}_Nm_0}(\xi)_{N,\tilde{N}} \widetilde{m}_0(\xi)$$

(voir l'équation 2.4) ce qui implique que

$$F_{N+\tilde{N}-1}(y) = \int {}_{N,\tilde{N}}\tilde{\phi}(x) {}_N\phi(x-y) dx. \quad (2.7)$$

### 3. L'interpolation dyadique des moyennes de Donoho

David Donoho [5] a construit une famille de multirésolutions duales à la fonction de Haar. Il est facile de vérifier que ses ondelettes sont les premières dérivées des fonctions fondamentales de l'interpolation itérative de Lagrange  $(F_n)$ . En effet, il



montre que

$$\frac{d}{dx} F_{n+1}(x) = \varphi_n(x+1) - \varphi_n(x)$$

où  $\varphi_n$  est la fonction d'échelle satisfaisant

$$\int_k^{k+1} \varphi_n(x) dx = \delta_{k,0}$$

et telle qu'elle permet la reconstruction exacte des polynômes de degré  $n$ . Il observe aussi[5, section 3.2.2] que  $\varphi_2, \varphi_4$  et  $\varphi_6$  ont, numériquement, les mêmes filtres que les fonctions d'échelle de Cohen-Daubechies-Feauveau[1, section 6] notées par  $_{1,3}\tilde{\phi}$ ,  $_{1,5}\tilde{\phi}$  et  $_{1,7}\tilde{\phi}$ . En fait, nous savons maintenant qu'il existe un résultat plus général. Par exemple, après un changement d'échelle, nous avons que

$$_{N,\tilde{N}}\tilde{\psi} \sim \frac{d^N}{dx^N} F_{\tilde{N}+N-1}$$

où  $_{N,\tilde{N}}\tilde{\psi}$  est une ondelette de Cohen-Daubechies-Feauveau. Nous allons montrer ce résultat (voir théorème 5.1).

## 4. Les multirésolutions $b$ -adiques

Rappelons qu'une multirésolution  $b$ -adique [2] est donnée d'abord par une famille de sous-espaces fermés  $\{V_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$  satisfaisant

$$\dots V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \subset \dots$$

et

$$\overline{\cup_{j \in \mathbf{Z}} V_j} = L^2(\mathbf{R}),$$

$$\cap_{j \in \mathbf{Z}} V_j = \{0\}.$$

L'aspect " $b$ -adique" surgit lorsque l'on exige que  $f \in V_j \Leftrightarrow f(b^j \cdot) \in V_0$ . Supposons maintenant que nous avons deux multirésolutions de la sorte :  $\{V_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$  et  $\{\tilde{V}_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$ . De plus, il nous faut deux *fonctions d'échelle* duales  $\phi$  et  $\tilde{\phi}$  avec  $2(b-1)$  *ondelettes*  $\{\psi_1, \dots, \psi_{b-1}\}$  et  $\{\tilde{\psi}_1, \dots, \tilde{\psi}_{b-1}\}$ . Nous appelons  $\phi$  et  $\tilde{\phi}$  des *fonctions d'échelle* parce  $\{\phi(\cdot - n)\}_{n \in \mathbf{Z}}$  et  $\{\tilde{\phi}(\cdot - n)\}_{n \in \mathbf{Z}}$  doivent former des bases pour  $V_0$  et  $\tilde{V}_0$  respectivement. Les ondelettes forment des ensembles duals  $\langle \psi_k, \tilde{\psi}_l \rangle = \delta_{k,l}$  et elles doivent être perpendiculaires aux fonctions d'échelles  $\langle \psi_k, \tilde{\phi} \rangle = \langle \phi, \tilde{\psi}_k \rangle = 0$

$\forall k = 1, \dots, b-1$ . Toutes ces fonctions doivent avoir des filtres, c'est-à-dire que

$$\widehat{\phi}(\xi) = m(\xi/b) \widehat{\phi}(\xi/b),$$

$$\widetilde{\widehat{\phi}}(\xi) = \widetilde{m}(\xi/b) \widetilde{\widehat{\phi}}(\xi/b)$$

et

$$\widehat{\psi_k}(\xi) = g_k(\xi/b) \widehat{\phi}(\xi/b),$$

$$\widetilde{\widehat{\psi_k}}(\xi) = \widetilde{g_k}(\xi/b) \widetilde{\widehat{\phi}}(\xi/b)$$

$\forall k = 1, \dots, b-1$ .  $\{\psi_k(\cdot - n)\}_{n \in \mathbf{Z}}$  et  $\{\widetilde{\psi_k}(\cdot - n)\}_{n \in \mathbf{Z}}$  sont des bases pour les espaces  $W_0^k$  et  $\widetilde{W}_0^k$  qui satisfont

$$V_{-1} = V_0 \oplus W_0^1 \oplus \dots \oplus W_0^{b-1},$$

$$\widetilde{V}_{-1} = \widetilde{V}_0 \oplus \widetilde{W}_0^1 \oplus \dots \oplus \widetilde{W}_0^{b-1}.$$

On peut vérifier que les B-splines de degré  $N$  peuvent être utilisées comme fonctions d'échelle où les  $V_j$  correspondant sont les espaces de splines avec pour noeuds les nombres  $b$ -adiques de profondeur  $j$ . De plus, comme nous allons le

montrer, une multirésolution duale à la multirésolution des splines est donnée par

$$\tilde{V}_0 = \overline{\text{span} \left\{ F_b^{(N)} (\cdot - n) : n \in \mathbf{Z} \right\}}$$

où  $F_b^{(N)}$  est la  $N^{\text{ième}}$  dérivée de la fonction fondamentale  $b$ -adique. On peut voir à quel point c'est naturel simplement en utilisant l'intégration par parties et en observant que la  $N^{\text{ième}}$  dérivée d'une B-spline de degré  $N$  est une combinaison de fonctions de Dirac sur les entiers. Dans le cas dyadique, cela nous mène aux ondelettes de Cohen-Daubechies-Feauveau.

## 5. Ondelettes de CDF $b$ -adiques

**Remarque 2.** *Notons que dans le cas dyadique, une partie de ce qui suit peut être fait en utilisant la formule de commutation de Lemarié [7, Proposition 2].*

Si  ${}_N\phi$  est la B-spline de degré  $N$ , nous avons

$$\frac{d^N}{dx^N} {}_N\phi(x) = \sum_{l=0}^N \binom{N}{l} (-1)^l \delta(x - l + [N/2]) \quad (5.1)$$

Supposons que  $\tilde{N}$  est choisi suffisamment grand de telle manière à ce que  $F_{N+\tilde{N}-1} \in$

$C^N$ . Appliquons  $N$  dérivées à l'équation 2.7, nous avons alors

$$\begin{aligned} \frac{d^N}{dy^N} F_{N+\tilde{N}-1}(y) &= \int_{N,\tilde{N}} \tilde{\phi}(x) \frac{d^N}{dy^N} {}_N\phi(x-y) dx \\ &= \sum_{l=0}^N \binom{N}{l} (-1)^{N+l} {}_{N,\tilde{N}}\tilde{\phi}(y+l-[N/2]). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Donc, on peut prendre

$${}_{N,\tilde{N}}\tilde{\psi}_k(z) = a F_{N+\tilde{N}-1}^{(N)}(bz-k) \text{ where } k = 1, \dots, b-1$$

pour  $a \in \mathbf{R}/\{0\}$ , un coefficient de normalisation. En effet, utilisant l'intégration par parties, on peut voir que

$$\int {}_N\phi(x) F_{N+\tilde{N}-1}^{(N)}(bx-k) dx = 0$$

puisque  $F_{N+\tilde{N}-1}(bn-k) = 0$  pour  $n \in \mathbf{Z}$  et  $k = 1, \dots, b-1$ . Finalement, il est pratique de choisir

$$a = 1 / \left\| F_{N+\tilde{N}-1}^{(N)}(b \cdot) \right\|_{L^2}.$$

Les filtres correspondants peuvent être facilement calculés (voir les tableaux I, II et II où nous avons choisi  $a = 1$  et  $b = 3$ ).

### 5.1. Cas dyadique

Nous prenons maintenant la transformée de Fourier de l'équation 5.2 pour obtenir

$$\widehat{F_{N+\tilde{N}-1}^{(N)}}(\xi) = \left( \sum_{l=0}^N \binom{N}{l} (-1)^{N+l} e^{i\xi(l-[N/2])} \right) {}_{N,\tilde{N}}\tilde{\phi}(\xi). \quad (5.3)$$

Laissons  $q_N(\xi)$  être la fonction définie par

$$\widehat{F_{N+\tilde{N}-1}^{(N)}}(\xi) = q_N(\xi) {}_{N,\tilde{N}}\tilde{\phi}(\xi). \quad (5.4)$$

L'équation 5.3 nous donne une formule pour  $q_N(\xi)$ ,

$$\begin{aligned} q_N(\xi) &= \sum_{l=0}^N \binom{N}{l} (-1)^{N+l} e^{-i\xi(-l+[N/2])} \\ &= z^{[N/2]} \sum_{l=0}^N \binom{N}{l} (-1)^{N+l} z^{-l} \end{aligned}$$

avec  $z = e^{-i\xi}$ . Nous pouvons alors calculer que

$$\begin{aligned} q_N(\xi) &= (-1)^N z^{[N/2]} (1 - z^{-1})^N \\ &= (-1)^N z^{-\kappa/2} (z^{\frac{1}{2}} - z^{-\frac{1}{2}})^N \end{aligned}$$

$$= (-2i)^N e^{i\kappa\xi/2} \sin^N \xi/2$$

avec  $\kappa = 1$  si  $N$  est impair et  $\kappa = 0$  si  $N$  est pair.

Rappelons que Cohen, Daubechies et Feauveau ont choisi les filtres suivants pour leurs ondelettes :

$$\begin{aligned} {}_{N,\tilde{N}}m_1(\xi) &= \overline{{}_{N,\tilde{N}}\widetilde{m}_0(\xi + \pi)} e^{-i\xi}, \\ {}_N\widetilde{m}_1(\xi) &= \overline{{}_Nm_0(\xi + \pi)} e^{-i\xi}. \end{aligned}$$

Nous sommes spécialement intéressé par le filtre de l'ondelette duale,

$$\begin{aligned} {}_N\widetilde{m}_1(\xi) &= i^\kappa e^{i\kappa\xi/2} e^{-i\xi} \cos^N \left( \frac{\xi + \pi}{2} \right) \\ &= (-1)^N e^{-i\xi} i^\kappa e^{i\kappa\xi/2} \sin^N \xi/2 \\ &= (-1)^{\lfloor N/2 \rfloor} 2^{-N} e^{-i\xi} q_N(\xi). \end{aligned}$$

Donc, nous avons que

$$\begin{aligned} \widehat{{}_{N,\tilde{N}}\widetilde{\psi}}(\xi) &= (-1)^{\lfloor N/2 \rfloor} 2^{-N} e^{-i\xi/2} q_N(\xi/2) {}_{N,\tilde{N}}\widetilde{\phi}(\xi/2) \\ &= (-1)^{\lfloor N/2 \rfloor} 2^{-N} e^{-i\xi/2} \widehat{F_{N+\tilde{N}-1}^{(N)}}(\xi/2) \end{aligned}$$

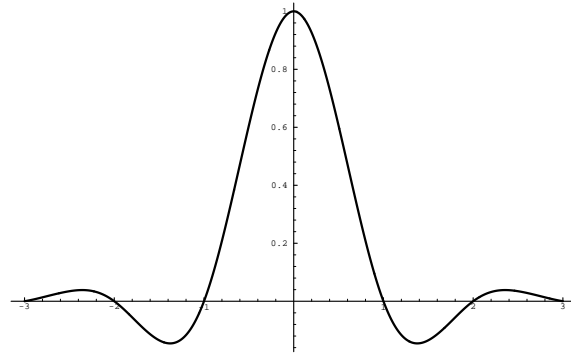
Nous pouvons maintenant prendre la transformée inverse pour obtenir une formule explicite.

**Théorème 5.1.** *Supposons que  $\widetilde{N}$  est suffisamment grand pour avoir  $F_{N+\widetilde{N}-1} \in C^N$ , si  $_{N,\widetilde{N}}\widetilde{\psi}$  est une ondelette de Cohen-Daubechies-Feauveau et si  $F_{N+\widetilde{N}-1}^{(N)}$  est la  $N^{ième}$  dérivée de la fonction fondamentale de l'interpolation itérative de Lagrange de degré  $N + \widetilde{N} - 1$  alors*

$$_{N,\widetilde{N}}\widetilde{\psi}(z) = (-1)^{[N/2]} 2^{1-N} F_{N+\widetilde{N}-1}^{(N)}(2z - 1).$$

Nous pouvons utiliser ce résultat pour comprendre comment la régularité et la géométrie des ondelettes  $_{N,\widetilde{N}}\widetilde{\psi}$  varient selon  $N$  et  $\widetilde{N}$  (voir les graphiques 5.1, 5.2, 5.3 et 5.4). Par exemple, nous pouvons maintenant voir clairement pourquoi lorsque l'on accroît  $\widetilde{N}$  pour  $N$  fixe, la forme de  $_{N,\widetilde{N}}\widetilde{\psi}$  demeure la même pour  $\widetilde{N}$  grand (voir [2] p.271).



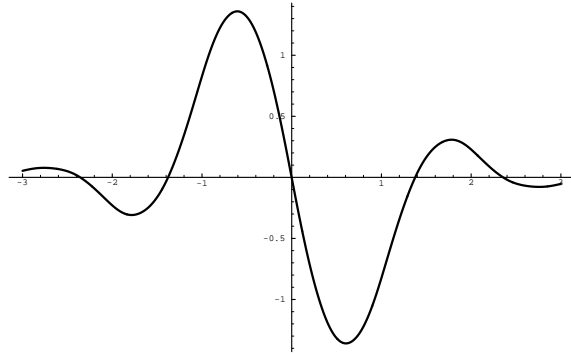


Graphique 5.1:  $F_9(x)$

## 6. Relèvement interpolatoire des B-splines

En général, on peut choisir

$${}_{N,\tilde{N}}\tilde{\phi}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{N-1+k}{N-1} F_{N+\tilde{N}-1}^{(N)}(x - k - \kappa - [N/2])$$



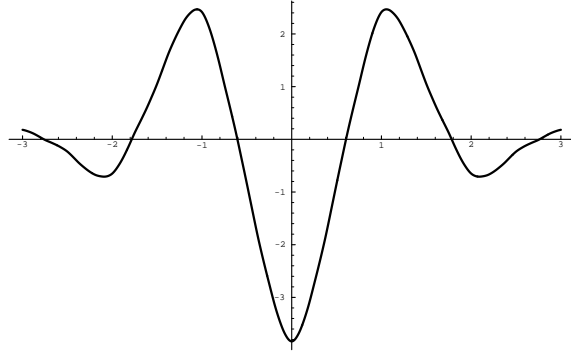
Graphique 5.2:  $\frac{d}{dx}F_9(x) = {}_{1,9}\tilde{\psi}\left(\frac{x+1}{2}\right)$

puisque l'intégration par parties nous permet de vérifier facilement que

$$\int {}_N\phi(x) {}_{N,\tilde{N}}\tilde{\phi}(x-n) dx = \delta_{0,n}$$

(en utilisant l'équation 5.1). Si nous écrivons

$$D^{-1}f(x) = \int_{-\infty}^x f(s) ds$$

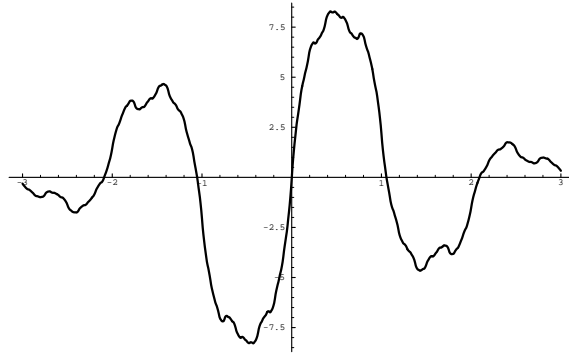


Graphique 5.3:  $\frac{d^2}{dx^2} F_9(x) = -2.8 \tilde{\psi}\left(\frac{x+1}{2}\right)$

et  ${}_N\psi^0(x) = \frac{(-1)^N}{a} D^{-N} \delta(x)$ , alors on peut obtenir les ondelettes primaires par la formule générale

$${}_{N,\tilde{N}}\tilde{\psi}_k(x) = {}_N\psi^0(bx - k) - \sum_n {}_N\phi(x - n) \int {}_N\psi^0(by - k) {}_{N,\tilde{N}}\tilde{\phi}(y - n) dy$$

où  $k = 1, \dots, b - 1$  puisque  ${}_N\psi^0(bx - l)$  est dual avec  ${}_{N,\tilde{N}}\tilde{\psi}_k$ .



Graphique 5.4:  $\frac{d^3}{dx^3} F_9(x) = -4 \, {}_{3,7}\tilde{\psi}\left(\frac{x+1}{2}\right)$

**Remarque 3.** Nous pouvons maintenant voir que  ${}_{N,\tilde{N}}\tilde{\phi}$  et par conséquent  ${}_{N,\tilde{N}}\tilde{\psi}_k$ , ont un support compact. Voir la preuve de la proposition 6.1.

### 6.1. Cas dyadique

Il nous reste à montrer comment on peut écrire  ${}_{N,\tilde{N}}\tilde{\phi}$  (la fonction d'échelle duale de Cohen-Daubechies-Feauveau) comme la  $N^{\text{ième}}$  dérivée de l'interpolation itérative de Lagrange. Cependant, puisque nous prenons  $N$  dérivées, il est entendu qu'une

telle formule ne sera pas unique.

**Proposition 6.1.** *Supposons que  $\widetilde{N}$  est suffisamment grand pour avoir  $F_{N+\widetilde{N}-1} \in C^N$ , nous avons alors*

$${}_{N,\widetilde{N}}\widetilde{\phi}(x) = f_{N,\widetilde{N}}(x)$$

où

$$f_{N,\widetilde{N}}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{N-1+k}{N-1} F_{N+\widetilde{N}-1}^{(N)}(x - k - \kappa - [N/2]).$$

**Preuve.** Premièrement, il nous faut montrer que  $f_{N,\widetilde{N}}(x) \in L^2(\mathbf{R})$ . Puisqu'il s'agit d'une fonction continue, il suffit de montrer qu'elle a un support compact.

Pour ce faire, observons que

$$g_N(k) = \binom{N-1+k}{N-1}$$

est un polynôme de degré  $N-1$  sur  $\mathbf{N}$ . L'interpolation itérative de Lagrange de degré  $N + \widetilde{N} - 1$  préserve les polynômes du degré correspondant et les fonctions fondamentales ont toujours un support compact, en conséquence  $f_{N,\widetilde{N}}(x)$  doit avoir un support compact.

On peut maintenant prendre la transformée de Fourier de  $f_{N,\tilde{N}}$

$$\widehat{f_{N,\tilde{N}}}(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{N-1+k}{N-1} z^{k+\kappa+[N/2]} \widehat{F_{N+\tilde{N}-1}^{(N)}}(\xi)$$

où  $z = e^{-i\xi}$ . Si nous substituons la formule 5.4, alors nous avons

$$\widehat{f_{N,\tilde{N}}}(\xi) = \alpha(\xi) {}_{N,\tilde{N}}\widehat{\phi}(\xi)$$

où

$$\alpha(\xi) = q_N(\xi) \sum_{k=0}^{\infty} \binom{N-1+k}{N-1} z^{k+\kappa+[N/2]}.$$

Rappelons que

$$\begin{aligned} q_N(\xi) &= (-1)^N z^{[N/2]} (1 - z^{-1})^N \\ &= z^{-[N/2]-\kappa} (1 - z)^N \end{aligned}$$

et notre somme est la série de Taylor de  $(1 - z)^{-N}$  et donc, nous avons pour  $z \neq 1$  que

$$(1 - z)^N \times \sum_{k=0}^{\infty} \binom{N - 1 + k}{N - 1} z^k = 1.$$

En conséquence  $\alpha(\xi) = 1$  pour  $\xi \neq 0$  ce qui est suffisant pour écrire que dans  $L^2$ ,

$$\widehat{f_{N,\tilde{N}}}(\xi) = {}_{N,\tilde{N}}\widehat{\phi}(\xi)$$

Il ne nous reste plus qu'à prendre la transformée inverse pour montrer le résultat.

■

## 7. Conclusion

Alors que ce qui précède repose sur des idées bien comprises (voir par exemple [7]), nous pensons que notre dérivation des ondelettes de Cohen-Daubechies-Feauveau rend plus limpide certaines de leurs propriétés. En particulier, puisque la régularité de l'interpolation itérative de Lagrange est connue [3], la régularité des ondelettes correspondantes est automatiquement établie. Nous obtenons aussi un algorithme différent pour calculer ces fonctions. Nous savons [3] que les dérivées des fonctions fondamentales peuvent être calculées exactement sur les nombres

$b$ -adiques d'une certaine profondeur en un nombre fini d'opérations par la formule

$$F^{(r)}\left(k/b^j\right)/b^{rj} = \sum_n F\left(n/b^j\right) F^{(r)}\left(k-n\right).$$

Notons que l'on peut facilement calculer  $F^{(r)}$  sur les entiers en utilisant les propriétés de l'interpolation itérative de Lagrange.

Il serait intéressant d'étudier d'autres schémas d'interpolation itérative  $C^k$  et de voir quels types d'ondelettes ils pourraient donner (les filtres "  $M$ -band" mais aussi d'autres cas où la transformée de Fourier échoue à cause du manque de symétrie). Ces travaux sont liés au schéma de relèvement de Wim Swelden [11]. En effet, dans un autre document [4], nous avons montré que ces idées mènent à la construction d'ondelettes sur l'intervalle sans l'utilisation d'un processus de Gram-Schmidt en faisant usage de certains schémas d'interpolation itérative sur l'intervalle (voir [8] et [5]). En utilisant la remarque 1, il suffit de choisir un schéma d'interpolation itérative qui "vit" sur la subdivision choisie. Par exemple, ceci pourrait mener à des ondelettes sur des subdivisions irrégulières.



Tableau I : Quelques filtres tryadiques ( $b = 3$ ) ( $z = e^{-i\xi}$ )

$\widetilde{N}$	$N$	filtres primaires ( $\widetilde{m}_0$ )	filtres duals ( $\widetilde{m}_0$ )
1	3	$\frac{1}{3} + \frac{z}{3} + \frac{z^2}{3}$	$-\frac{4}{81z^3} - \frac{1}{81z^2} + \frac{5}{81z} + \frac{26}{81} + \frac{29}{81}z$ $+ \frac{26}{81}z^2 + \frac{5}{81}z^3 - \frac{1}{81}z^4 - \frac{4}{81}z^5$
1	5	$\frac{1}{3} + \frac{z}{3} + \frac{z^2}{3}$	$\frac{7}{729z^8} + \frac{1}{729z^7} - \frac{8}{729z^6} - \frac{49}{729z^5} - \frac{13}{729z^4}$ $+ \frac{62}{729z^3} + \frac{77}{243z^2} + \frac{89}{243z} + \frac{77}{243} + \frac{62}{729}z$ $- \frac{13}{729}z^2 - \frac{49}{729}z^3 - \frac{8}{729}z^4 + \frac{1}{729}z^5 + \frac{7}{729}z^6$
2	2	$\frac{1}{9z^2} + \frac{2}{9z} + \frac{1}{3} + \frac{2}{9}z + \frac{1}{9}z^2$	$-\frac{4}{27z^3} + \frac{1}{9z^2} + \frac{2}{9z} + \frac{17}{27} + \frac{2}{9}z$ $+ \frac{1}{9}z^2 - \frac{4}{27}z^3$
2	4	$\frac{1}{9z^2} + \frac{2}{9z} + \frac{1}{3} + \frac{2}{9}z + \frac{1}{9}z^2$	$\frac{7}{243z^6} - \frac{2}{81z^5} - \frac{1}{27z^4} - \frac{34}{243z^3}$ $+ \frac{10}{81z^2} + \frac{22}{81z} + \frac{5}{9} + \frac{22}{81}z + \frac{10}{81}z^2$ $- \frac{34}{243}z^3 - \frac{1}{27}z^4 - \frac{2}{81}z^5 + \frac{7}{243}z^6$

Tableau II : Quelques filtres d'ondelettes duales tryadiques ( $b = 3$ )

$\widetilde{N}$	filtres $\widetilde{m}_1$
1	$1 - z, z - z^2$
2	$1 - 2z + z^2, z - 2z^2 + z^3$

Tableau III : Quelques filtres d'ondelettes primaires tryadiques ( $b = 3$ )

$\widetilde{N}$	$N$	filtres $_{\widetilde{N},N}m_1$
2	2	$\frac{4}{81z^2} + \frac{8}{81z} - \frac{4}{27} - \frac{14}{81}z - \frac{40}{81}z^2 + \frac{5}{27}z^3 + \frac{10}{81}z^4 + \frac{5}{81}z^5$
		$\frac{5}{81z^2} + \frac{10}{81z} + \frac{5}{27} - \frac{40}{81}z - \frac{14}{81}z^2 + \frac{4}{27}z^3 + \frac{8}{81}z^4 + \frac{4}{81}z^5$
2	4	$-\frac{8}{729z^5} - \frac{16}{729z^4} - \frac{8}{243z^3} + \frac{38}{729z^2} + \frac{100}{729z} + \frac{2}{9} - \frac{112}{243}z$
		$-\frac{35}{243}z^2 + \frac{14}{81}z^3 + \frac{77}{729}z^4 + \frac{28}{729}z^5 - \frac{7}{243}z^6 - \frac{14}{729}z^7 - \frac{7}{729}z^8$
		$-\frac{7}{729z^5} - \frac{14}{729z^4} - \frac{7}{243z^3} + \frac{28}{729z^2} + \frac{77}{729z} + \frac{14}{81} - \frac{35}{243}z$
		$-\frac{112}{243}z^2 + \frac{2}{9}z^3 + \frac{100}{729}z^4 + \frac{38}{729}z^5 - \frac{8}{243}z^6 - \frac{16}{729}z^7 - \frac{8}{729}z^8$

## Bibliographie

- [1] Albert Cohen, Ingrid Daubechies and J.-C. Feauveau, Biorthogonal bases of compactly supported wavelets, *Comm. Pure and Appl. Math.* **45** (1992), 485-560.
- [2] Ingrid Daubechies, **Ten Lectures on Wavelets**, CBMF Conference Series in Applied Mathematics, Vol.61, SIAM, Philadelphia, 1992.

- [3] Gilles Deslauriers and Serge Dubuc, Symmetric Iterative Interpolation Processes, *Constructive Approximation* **5** (1989), 49-68.
- [4] Gilles Deslauriers, Serge Dubuc et Daniel Lemire, Une famille d'ondelettes biorthogonales sur l'intervalle obtenue par un schéma d'interpolation itérative, January 1997, preprint.
- [5] D.L. Donoho, Smooth wavelet decompositions with blocky coefficient kernels, in "Recent Advances in Wavelet Analysis", Larry L. Schumaker and Glenn Webb (ed.), Academic Press, Inc., Boston, 1993.
- [6] Peter Niels Heller, Rank  $M$  wavelets with  $N$  vanishing moments, *SIAM J. Math. Analysis* **16** (1995).
- [7] Pierre Gilles Lemarié-Rieusset, Analyses multi-résolutions non orthogonales, commutation entre projecteurs et dérivation et ondelettes vecteurs à divergence nulle, *Revista matemática iberoamericana* **8** no. 2 (1992).
- [8] Jean-Pierre Mongeau, Serge Dubuc et Gilles Deslauriers, "Interpolation itérative et compression de données", technical report, Département de mathématiques appliquées, École Polytechnique de Montréal, Montréal, April 1990.

- [9] Naoki Saito & Gregory Beylkin, Multiresolution Representations Using the Auto-Correlation Functions of Compactly Supported Wavelets, *IEEE Transactions of Signal Processing* **41** no. 2 (1993), 3584-3589.
- [10] M.J. Shensa, The discrete wavelet transform : Wedding the à trous and Mallat algorithms, *IEEE Trans. Signal Processing*, **40** (1992), 2464-2482.
- [11] Wim Sweldens, The lifting scheme: a construction of second generation wavelets, *SIAM J. Math. Analysis*, to appear.