# 第一讲　数字推理

## 第一节 数列型数字推理

### 一、双重分段数列

例 1.**共八项，最有可能双重、二二分段数列。**双重，奇数项成规律，偶数项成规律。C。

例 2.八项，双重或分段，双重试一下似不可行，看分段二二分段，同时结合**口诀：不要忘了加减乘除平方立方等**，此题为加，二二分段后和分别为 1，5，25，（125），答案 D。

练习：1. 双重，B。　2.两两分段差为 6，答案 C。

3.八项很有可能双重或二二分段。两两分段乘起来 120，答案 B。启发：不要忘了加减乘除平方立方等。

### 二、多级、平方立方幂数列

（一）多级

例 1. 数字均匀增大，可能加减法。减一下：32.33.35.39.47，再减：1.2.4.8.（16）。C。

例 2.减一下：1，0，1，1，2，这是什么呢？不要急于再作差，这里其实涉及稍后要讲的“关联数列”，1，0，1，1，2 的规律是①+②＝③。答案 C。

此题也有另外解法：①+②-1＝③，即原题的前两项和-1 等于后面一项，所以 4+6-1＝9。当然，这涉及了后面要说的关联数列。

笔者一直强调：**数字推理有时不止一种方法**，殊途同归，只要快速做出答案就行，“不管白猫黑猫，会抓老鼠就是好猫。”

例 3.此题减可能不行了。一看选项 ABD 都这么大，可能出现乘除法或平方立方，再用上口诀：不要忘了**前两项+.-.×.÷、平方立方等**，除一下：3.6.12，（24），尾数法 D。

例 4.作商，公比 2/3，D。

例 5.通过对该数列的观察，我们估计它是一组多级等比或等差数列，将 ABCD 各项代入，当将 42 代入时，把后一项和前一项作差后新数列为 3，7，21，45，79，再作差为 4，14，24，34 为一公差为 10 的等差数列，所以 B 成立，排除 CD，选 B。此题给我们的启发是：当括号在中间的多级数列等有可能用代入法。

练习：

1. 减了再减，A。　2.除一下：7.5.3.（1）。答案 A。

3.除一下：1.1.2.8，再除一下：1.2.4.（8）。答案 A。考试时此题若实在不会，用“瞎蒙大法”，选一个怪的，当然 A，当然有风险，迫不得已。

4.减一下：17.16.33.49.（82）。C。　5.不要忘了减：6，7，8，6，（7），8，差分段，B。

（二）平方立方幂

例 1.立方+3，答案 B。离平方、立方数越远，难度越大。

例 2.**不要只记得 26＝$3^3$-1（当然也有可能 $5^2$+1 或（-5）$^2$+1）却忘了-26＝（-3）$^3$+1，-6＝**（-2）$^3$+2，…答案 D。

例 3.**分数数列 $\frac{1}{a}$ 有可能看作 $a^{-1}$**，$\frac{1}{5}=5^{-1}$、$\frac{1}{36}=6^{-2}$，从后往前推：$1^3$、$2^2$、$3^1$、$4^0$、$5^{-1}$、$6^{-2}$、（$7^{-3}$），这就是幂数列，指数在变，但变化中有规律。熟记 $7^3$＝343，答案 D。

练习：

1.例题中有类似题目，答案 C。

2.大数入手，629 想到 625，625＝$25^2$+4＝$5^4$+4，…幂数列，答案 $6^5$+5 尾数法 D。

3.幂数列，$2^5$，$4^4$，$6^3$，$8^2$，$10^1$，$12^0$，（$14^{-1}$），C。

4.（-5）$^2$+1，（-3）$^3$+1，（-1）$^2$+1，$1^3$+1，$3^2$+1，（$5^3$+1），A。

### 三、关联数列

例 1.三项关联，①-②×2＝③。D

例 2. 两项关联。3×5-2＝13，13×4-2＝50，50×3-2＝148，…答案 D。注：部分数字推理可用瞎蒙大法：看倍数关系，13 是 3 的 4-5 倍，50 是 13 的 3-4 倍，148 是 50 的 2-3 倍，294 是 148 的 1-2 倍，选项是 294 的 0-1 倍，只有 D。

例 3. 三项关联，①×②＝③。D　　例 4. 三项关联，（①-②）$^2$＝③。D

例 5. A。原数列满足如下规律：$a_{n+2}=a_n-\frac{a_{n+1}}{2}$（n≥1），即 $20=28-\frac{16}{2}$，$6=16-\frac{20}{2}$，$17=20-\frac{6}{2}$。因此原数列未知项为 $6-\frac{17}{2}=-\frac{5}{2}=-2.5$。

例 6. 四项关联，①+②+③＝④，答案 C。**四项关联一般七项。七项以上的数列可能为：多级、三四项关联、双重、分段等。**

练习：1. 有正有负，一般存在减法。①-②-③＝④，答案 D。　2. ①×②+3＝③，B。

3. 前两项相乘分别减 0，1，2，（3）等于后一项，答案 D。其实数字推理数字越小越难，因为可能性多，所以，数字推理有种思路：**从大数入手。**

4. 两项关联，前面一项×2 再分别+1，3，9，27。B。**两项关联最低限是 5 项，三项关联最低限是 6 项。6 项可能多级、关联等。**

5. ①-②＝③，B。三项关联一般 6 项，此题 5 项，是特例，其中一个原因是括号在中间。

**○“三步走”综合练习**

1. 看到 513 想到 512 即 8 的立方，平方立方幂数列，D。2. 关联数列，（①-②）/2＝③，D。
3. 多级数列，减了再减，D。　4. 平方立方幂数列，C。
5. 减一下，差为 26、11、9、26、11、9，A。　6. 双重数列，D。
7. 多级数列，D。或：两项关联，①×3+1=②，结合尾数法。
8. 方法一，作差；方法二，（①+②）÷2＝③；方法三，数位。A。
9. C。原数列满足如下规律：$a_{n+2}=a_n-\frac{a_{n+1}}{2}$，即 $30=38-\frac{16}{2}$，$1=16-\frac{30}{2}$，$29.5=30-\frac{1}{2}$。因此原数列未知项为 $1-\frac{29.5}{2}=-13.75$。　10. 关联数列，前两项差的平方等于第三项，C。
11. 双重，C。12. 平方数列，C。13. 两项关联，B。或：二项加法合并。
14. 立方数加减 2，A。　15。作商，C。16. 前两项商 8，后两项差 15，A。17. 幂数列，A。
18. 三项关联，①×②-②＝③，D。
19. 作差：4，5，9，29，再作差 1，4，20，**猜想**下一项 120，D。更严谨：两项差的 4 倍、5 倍、6 倍、7 倍等于后面一项。
20. 共 8 项，有可能双重和二二分段数列，双重似乎不行，两项两项隔开后，前面一项乘以 3 减去 1 等于后面一项，B。
21. 作差得 2、5、10、17，再作差得 3、5、7，猜想后一项 9，答案应是 59，可选项没有，此路不通。注意 **3、5、7 下一项还有可能 11**，答案 B。
22. 同样作差：1.4.9.49.256，分别为 1.2.3.7.16 的平方，单独看这个很难找规律，可是用我的话说：**“一颗红心两手准备。”**即在作差时留意与原数列关系，所以后面是 65 平方，A。（当然感觉强的同学可发现：①的平方+②＝③）
23. 减一下得到 1，64，大家对 64 一定要有敏感性：$8^2$，$4^3$，$2^6$，研究后本题的差分别为 $1^3$，$2^3$，$3^3$，$4^3$。答案 D。
24. 此题可能对于某些同学来说较难，找不到规律，怎么办？减一下：15，42，87，再减 27，45，瞎蒙下一项 63，答案 A。恭喜蒙对了，但须知这样是有风险的，迫不得已。此题科学解法：1×3，2×9，4×15，7×21，（11×27）。
25. ①$^2$-②=③，C。

26.减一下：**2，3，10，29**，这是什么？这里有点难，分别为**$0^3$+2，$1^3$+2，$2^3$+2，$3^3$+2，**（$4^3$+2）。答案B。**2，3，10，29** 后亦可作差.

27. 减一下：7.9.13.猜想19或21，结果19正确，7.9.13.（19）.（27）。答案A。

28.减一下：5，7，11，不要忘了质数列，下一项应当是13。答案B。

29. 根据有风险的“瞎蒙大法”，答案应当在CD中，否则出现小数干嘛？科学做法应当是：4×6-1＝23，23×3-1＝68，68×1.5-1＝101，（101×0.75-1＝C）。两项关联。

30. 前面一项分别加3、乘3、加3、乘3，C。

31.②$^2$-①＝③，尾数加估算法D。此题启示：**不要总是顺着看，注意倒着看、隔着看等。**

32.减一下：31.37.41.43这是什么呢？可能再减一下：6.5.2.（0），可是没答案。此路不通，换思路，原来31.37.41.43构成质数列，下一项是47。答案B。

33. 平方加减5，答案C。此题难在离平方数较远。当然，**做题不妨浏览选项或许有启发，** 126想到125，144是12的平方，可能跟平方、立方有关。

34.与其中一道例题类似，幂数列，规律是：$6^0$，$5^1$，$4^2$，$3^3$，$2^4$，（$1^5$），A。

35.四级求差数列，A。 36.三三分段数列，A。 37.**不要忘了减，哪怕看似不大可能。**D。

38.读一遍，感觉强的话发觉①+③＝②，③+⑤＝④，⑤+⑦＝⑥，（⑦+⑨＝⑧）答案选3。此题严格说来就是间隔数列，与下文说的“关联数列”有点类似，细微区别同学们自己体会。

39.前两位都是12，后三位是120，60，40，30，分别差60，20，10，下面应当差小于10，瞎蒙A。科学解释：后三位120，60，40，30，比分别为2/1，3/2，4/3，（5/4），答案A。

40.D。原数列后项减前项得到：1、2、9、64、（ ），新数列可写成$1^0$、$2^1$、$3^2$、$4^3$、（$5^4$），底数和指数分别构成等差数列。因此原数列未知项为$5^4$+80，尾数为5，D项符合。

**四、质合数列**

例1.**记住质数列，勿忘合数列。**答案A。 例2.质数列，答案C。

**五、合并数列**

例1.不要忘了加，前两项和121，属敏感数字，规律是两项相加为平方数：121，100，81，64，（49），答案D。 例2.三项合并、三项相加：4，9，16，（25），答案B。

例3.两项乘法合并：两项相乘分别为1，2，4，8，16，32，答案A。

**○四五步（质合、合并数列）综合练习**

1.质数列，A。 2.合数列，B。3.两项加法合并，C。或者：①×3+②×2＝③。

4.三项加法合并，C。 5.两项加法合并后是质数，A。

**六、“怪”题集锦**

例1.分别能被3、4、5、6、（7）、8整除，A或C，进一步分析：3×1，4×4，5×9，6×16，（7×25），可称分拆数列，答案C。分拆数列不详讲，好多分拆数列可用整除法做出。

例2.数位问题，前项数字加上这项数字各数位和等于后一项，如1489+1+4+8+9＝1511，C。

例3.56是8的7倍，…，A。

例4.数位问题，各项千位数和个位数组成一个两位数，除中间两位数，商分别为1、2、3、4、（5）、6，答案B。例5.尾数问题，前两项和的尾数为下面一项，答案A。

例6.对称问题，首尾依次相加和为17，答案D。

例7.整数部分分别为1，2，3，4，5，（6），答案C。

例8. A。本题考查的是二进制数的进位，属于数列的一种类型。数列是由数字1与0、1组合后按从小到大顺序排列得到的，故下一项为111。例9.后面一项是前面各项之和，C。

**七、分数数列**

例1.不把分数当分数看，关联数列，①+②=③，D。当然，此题也可通分母。

例2.通分子，A。

例 3.通分，注意：**通分未必都通成一样**，比如此题通为：$\frac{4}{6}$，$\frac{5}{10}$，$\frac{6}{14}$，$\frac{7}{18}$，（$\frac{8}{22}$）。

例 4.看分子分母特征，指的是并非看一个分数有多大，如此题$\frac{6}{11}$并非看它值的大小，而是 6+11=17，那么 17+29＝46，即 23 两倍，最后项看成$\frac{46}{76}$。分子是前面分子分母和，那分母呢？是对角乘+1，分子是 46+76＝122（不要马上选 B，因为有可能约分，当然要猜就选），分母 76+122+1＝199。B。　　例 5.不把分数当分数。①×②+1＝③，答案 D。

练习：

1.把$\frac{3}{2}$化为$\frac{6}{4}$，C。 2.$\frac{2}{1}$，$\frac{3}{1}$，$\frac{5}{2}$，$\frac{8}{3}$，$\frac{13}{5}$，分子、分母前面两项和都等于第三项，B。

3．看分子分母特征，C。4.除一下，商 3/2，D。若看不出，此题也可这样思路：因为分数，想到通分，最后一项分母是 9，倒数第二项是 3，要是括号里是 1，那第二项应当是 1/3，…即第二项总的变为 8/（1/3），…，这样后分子也成规律。

5.想到通分，分母是 6、8，想到 10、12，分子 1、3、5、6，此路不通，换一思路。其实此题从分子入手简单：0、1、3，想到 6、10，……C。　6.分母 5、6、7、8、9，C。

## 第二节　图表型数字推理

例 1.这种圈形一般指向中间。从大数入手，我们从第二幅看，对角积-对角差＝中间，D。

例 2.外围和等于中间的 4 倍，C。

例 3.这种圈形指向不定。从大数入手，我们从第二幅看，对角和相等，C。（思路同后面要讲的九宫图：**一般是横着看、竖着看、斜着看。**）例 4.对角差＝对角商，A。

例 5.图表型数字推理九宫图很有可能横看前两项怎样转化为第三项，或竖看前两项怎样转化为第三项，实为三项关联数列。还有可能把每行或每列当作整体，如整行的和相等。此题，横看前两项怎样转化为第三项，①+②+1=③，C。　　例 6.每一行的和都是 7，A。

练习：1.横看，前两数和的 2 倍=第三个数。D。

2. 每一行的第二个数加上第三个数再减去第一个数结果都是1。B。

3.每一行的和与每一列的和都为 15。D。　4.左列和-右列和。A。

5.(11+7+5)×2=46，(9+8+7)×2=48，(7+3+6)×2=32，(10+5+4)×2=(38)。B。

6.对角积=对角和，B。

7.指向左下方，D。或对角商=对角积。8.对角和=对角和平方。A。9.外围和=中间的平方，B。

10.左列和＝右列积，C。11.中心数字为周围数字的最小公倍数。B。12.五七三十五。D。

13.D。（前一列的数字-1）÷中间数=后一列对应的数字。

14.上下积分别为 24、25、26、27 的平方，D。　15.对角差乘和。D。

16.上面和-下面和的一半。B。

# 第二讲 数学运算

## 第一节　数学运算方法论

### 一、假设法

例 1.这是浓度问题。盐的质量与盐水质量有关，盐的质量没定死。假设法：设溶质 12，则溶液从 200 变为 300，所以 12/400，A。

例 2.工程问题一般三法：快慢法（部分题目，速度最快）、单位 1 法（本人不喜欢，因为有分数，可能速度慢）、假设法。此题：设总量为 30 和 20 的最小公倍数 60，效率：甲 3、乙 2，甲 14 天完成 42，所以乙完成 18，18 除以 2 得 9，所以 C。

例 3.此题好多参考书解析得较繁。　头脑中重新构造图形，只要满足题目要求就可，我们要特殊化：变为等边，没违背题目条件，所以答案不变。此时角 ANM＝75 度，所以角

MNC＝90-75＝15 度。　　当然，若图画准确，直接用量角器量更投机。

例 4.“每班人数相等”到底是多少？看这道题目应该是没有定死，所以不管多少，一般答案不变。选最简单的，设为 1 人。“二、三班女生总数”设为 0。所以在“二、三班女生总数”上写个 0、“一班男生”上写个 1。即一、二、三班都是 1 男 0 女，共 3 男 0 女。设“七、八、九班男生”为 0，所以“四、五、六班女生总数”为 1。即四五六共 2 男 1 女，七八九共 0 男 3 女。所以 B。

此题也可这样理解：由“一班的男生人数比二、三班两个班的女生总数多 1”可知一二三班男生相当于二三两班人数多 1；由“四、五、六班三个班的女生总数比七、八、九三个班的男生总数多 1”可知：四至九班男生相当于四五六班总人数少 1，所以全部男生人数相当于五个班人数，男女生之比为 5：4。

扩展：这是“容斥原理”题，一般有四法：公式法、画图法（韦恩图）、假设法（部分题适用）、倍区法（部分题适用）。先讲此题的假设法：设 1-12 题甲对，乙也对 1-12 题，丙对 9-20 题，同学们可画图示。这样，仅一人做出的（即难题）是 13-20 共 8 题，三人做出的（即容易题）是 9-12 共 4 题，所以 C。

此题也可用倍区法：先画韦恩图，没有重叠部分记为 A（即一倍区）、两部分重叠的部分记为 B（即两倍区）、三部分重叠的记为 C（即三倍区），这样则有 A+B+C＝20　①，A+2B+3C＝36　②，要求的是 A-C。解法：①×2 得 2A+2B+2C＝40　③，③-②即 A-C＝4。

练习：1.D。 2.假设法，B。

3. 特殊值法，假设总量为 6 和 15 的最小公倍数 30，则共 5 人，男 2 人，则女 3 人，30/3=10。

4. 大正方形面积不定，我们假设它和小正方形一样大，则 S＝6×6/2＝18，A。有些同学提出疑问：一样大怎么可以呢？不是说“大”吗？好，退一步，我们假设大正方形无限接近小正方形，那么三角形的面积不是无限接近 18 吗？所以 A。

5. 特殊值法，当P在A点的时候PE+PF=PF=12×5／13=60／13，选B。

## 二、公式法

例 1. 此题当然可用画图法，所以说考试时最基本的方法也不要忘记。用公式法，绳子数问题：**绳子数＝$2^n$×刀数+1，（n 为对折次数）**。代入公式：$2^3$×6+1＝49。

假如公式忘了还可怎么办？理解：看头数。对折三次，共 8 层，一刀下去 16 个头，六刀 96 个头，再加上原先的两头，共 98 头，49 段。例 2. 99、99、100.

扩展：淘汰赛问题：（1）**决出冠亚军需 N-1 场**；（2）**决出 1、2、3、4 名需 N 场**。

本题：余 2 名，须淘汰 98 人，需 98 场。也可假设男女各为 50 名，则 49+49=98；或假设男 1 女 99，还是 98 场。扩展：六组，每组四人，四人循环赛 C4 取 2 场＝6 场，6 乘 6＝36 场。16 强决出冠亚军和三、四名需 16 场。　　共 52 场。

例 3. 日历问题中的星期几问题：**一年就是 1，闰*日*再加 1；一月就是 2，多少再补算。**

假设一年 365 天，365/7 余 1，所以经过 365 天后星期几相当于经过 1 天后星期几，而实际有可能 366 天，则若闰日在范围内的话再加 1。假设一个月 30 天，30/7 余 2，所以经过 30 天后星期几相当于经过 2 天后星期几，而实际上一个月可能有 31 天，二月份还可能 28 或 29 天，则 31 天再加 1，28 天再减 2，29 天再减 1。

此题：一年就是 1，则两年就是 2，闰*日*再加 1，所以二+2+1=五，C。

扩展 1：4 月加 8。8 月、10 月共再加 2。总共加 10，5+10＝15，即星期一。

扩展 2：好题。枚举有点慢。用口诀。口诀的前提是同一号。本月 29 日是周四。五+4＝九。可实际是周四。九要么减 5（不可能），要么加 2. 说明上月和上上月都是 31 天，那只可能是七八两个月，说明本月是九月。十、十一、十二，还有 3 次。B。

扩展 3：“某年有 53 个星期 N 且元旦不是星期 N，问下一年最后一日星期几”，这种题目秒杀，加一天。此题理由：共 53 个周四，若 365 日，则必为首尾日都是周四。此题说首日非

周四，则最后一日必为周四，则为 366 日，（首日为周三）运用口诀，一年就是 1，一年 366 日之后的一年必为 365 日，∴直接加 1 就行。

例 4.时钟问题：**度数×2/11**。理由：实际是追及问题。路程差＝速度差×时间。追及度数＝5.5×时间，转化一下即度数×2/11。5.5 是什么？是**速度差，即一分钟分针比时针多走 5.5 度。（一分钟分针走 6 度，时针走 0.5 度。相同时间内分针走的度数与时针走的度数之比是 12：1，即速度比是 12。）**这个很重要，必须记住。另还要记住 **1 大格 30 度**。此题：240×2/11＝480/11 分钟。

扩展：**假设时针不动，可很快看出**分针追了 180 度，度数×2/11，B。

例 5.车往返接人问题：（1）当**人速相同、车速不变**时：**x=y=$\frac{2}{3+n}$s.**（x，y 为步行路程，n 为车速与人速的比值，s 为全程）。（2）当**人速相同、车速变化**时：**x=y=$\frac{\frac{1}{v_{空}}+\frac{1}{v_{载}}}{\frac{2}{v_{空}}+\frac{1}{v_{载}}+\frac{1}{v_{人}}}$s.**

（3）当**人速不同时**（不管车速变不变）：**x/y=$\frac{(v_{载}-v_2)v_1}{(v_{载}-v_1)v_2}$**.（$v_1$，$v_2$ 为两人速度）

此题：先确定人速同不同？一看不同，就用第三个公式：x/y=［（39-4）×3］/［（39-3）×4］，D。

**三、归纳法**

例 1.先忽悠一下：请问分得少的人至少几朵？答案 1 朵。继续忽悠：请问分得最多的人至多几朵？答案 11 朵，因为要使多的人越多越好，那么少的人越少越好，其他四人分别为 1，2，3，4 朵，余 11 朵。例 1，要使"最多的人至少"说明越平均越好，21 除以 5 的平均数约为 4，对于这种题型，我们首先把近似平均数写在中间，然后两边分开写。2，3，4，5，6，这样加起来 20，还差 1，这个 1 只能加给 6，否则会出现重复。A。注：奇数个有中间，若偶数呢？中间写两个。比较：此题与例 1 不同之处在于每个部门人数可等，B。 比较：C。

比较：第十最低考了多少，所以前九越高越好，100 分至 92 分，快速求和 192 除 2 乘 9 等于 864。有一人不及格也是越高越好 59。余 20×88-923＝837，即 10 人共 837，每人不同，问最大至少多少？837/10 商 83 有余，中间写 83.84，79.80.81.82.83.84.85.86.87.88，差 2 只能加给后两个，所以 89。

例 2.归纳总结，这种题目一减一除就行，4-1＝3，15/3＝5。可这样理解：4 空＝1 空+1 酒，→3 空＝1 酒。

扩展：X+X/6＝347，解得 X＝297.4…，注意进一法（因为涉及借瓶因素），B。

比较：D。根据空瓶换酒公式可知，11 个空瓶能换 1 瓶酒，101÷11=9……2，即可换 9 瓶酒。

扩展：好题。"归纳法"中谈到"一减一除"，此题易出错，不能 20+20/(7-2)=24，"一减"一定要**转化为学过**的"**几个空瓶换 *1* 瓶啤酒**"，这样，此题相当于 3.5 个空瓶换 1 瓶啤酒，这样后再用"一减一除"，所以答案 20+20/(3.5-1)=28。

扩展：4 盖＝1 空+1 酒+1 盖，推得：3 盖＝1 空+1 酒　（1）
　　　2 空＝1 空+1 酒+1 盖，推得：1 空＝1 酒+1 盖　（2）

由（1）（2）得方程组：3 盖－1 空＝1 酒
　　　　　　　　　　　1 空－1 盖＝1 酒

解得：1 盖＝1 酒
　　　1 空＝2 酒

一开始买 5 瓶酒，喝了五瓶，有 5 盖、5 空。5 盖＝五酒、5 空＝十酒。共二十

顾客：老板，来 20 瓶啤酒！老板：好的，来咧！喝完后...顾客：老板，结账！老板：来咧！顾客递给老板 10 元（5 瓶），给老板 20 个瓶子（10 瓶）和 20 个瓶盖（5 瓶）。5+10+5=20（瓶）

理论上讲，每瓶酒除去瓶子和盖子，酒值 0.5 元，10 元肯定能喝 20 瓶，这就看附加条件了能像你们说的那样借瓶子和盖子而且能等价借还瓶子和盖子去换的话就能喝 20 瓶，不能借的话就是 15 瓶。所以按题目所说最多可以喝多少瓶酒，这里是最多而且没别的限制条件答案就是 20 瓶。

为了便于说明，用以下符号代替：P=酒瓶；G=瓶盖；J=瓶里的酒

已知：　2 元=1P+1G+1J；2 元=2P；2 元=4G 求 10 元能喝道几瓶啤酒，即能消费到多少个“J”。

一、直接从数学的思维来看：

P=1 元，G=0.5 元，J=0.5 元；　10 元=20J。

二、按照实际来看：

1、第一步 10 元，先买回来 5 瓶酒，喝完后剩 5 个瓶子和 5 个盖子；（喝 5 瓶）

2、拿 4 个瓶子，4 个盖子换回 3 瓶酒，喝完后剩下 4 个瓶子和 4 个盖子；（喝 3 瓶）

3、拿 4 个瓶子，4 个盖子换回 3 瓶酒，喝完后剩下 3 个瓶子和三个盖子；（喝 3 瓶）

4、拿 2 个瓶子换 1 瓶酒，喝完后剩下 2 个瓶子，4 个盖子；（喝 1 瓶）

5、拿 2 个瓶子，4 个盖子换 2 瓶酒，喝完后剩下 2 个瓶子，2 个盖子；（喝 2 瓶）

6、拿 2 个瓶子换 1 瓶酒，喝完后剩 1 个瓶子，3 个盖子。（喝 1 瓶）。

一共能够喝 15 瓶啤酒，但是还剩余 1 个瓶子和 3 个瓶盖。

三、如果想喝到理论的 20 瓶，需要老板好心，配合，愿意借瓶子和盖子才行。

因为从理论来算，剩下的 1 个瓶子，3 个盖子还值 2.5 元，还能喝 5 瓶酒。

1、借 1 个瓶子，借 1 个盖子，换 2 瓶酒，喝完后归还欠的瓶和盖，剩 1 个瓶子，1 个盖子；（喝 2 瓶）

2、借 1 个瓶子，换 1 瓶酒，喝完后归还欠的瓶子，剩下 2 个盖子；（喝 1 瓶）

3、借 2 个盖子换 1 瓶酒，喝完后归还欠的盖子，还欠 1 个盖子，剩下 1 个瓶子；（喝 1 瓶）

4、借 1 个瓶子换 1 瓶酒，喝完后归还欠的瓶子盖子，两不相欠。（喝 1 瓶）。

这样，又能用 1 个瓶子和 3 个瓶盖，换 5 瓶啤酒，一起可以喝到 20 瓶啤酒。

## 四、整除法

例 1. 女生的平均分比男生的平均分高 20%，先把百分数化成最简分数，女比男多 1/5，“××比××多几分之几”用整除法，更精确地说用到**份数思想**，男为 5 份，女为 6 份，答案肯定能被 6 除尽，放宽点“瞎蒙大法”一般能被 6 整除（即在取整数情况下能被 6 整除）。A。更放宽点：因为乘 1.2 后得到要求的东西，**一般**能被 12 整除。

例 2. 能被 3，4，5 整除即能被 60 整除，A。

例 3.李四养的猪有 12.5%是黑毛猪→李四养的非黑毛猪能被 7 整除，C。例 4. A。

扩展 1：180N-2，5 个。扩展 1：三个一起来比较慢，两个来，前两个 45N-2，即 45N+43，即除以 45 余 43，与除以 4 余 1 合并，180N+（　），往上推至 133，180N+133，5 个。

例 5. 180N+7，A。　　例 6. 应该能被 3 整除，C。

练习：1. 报考 A 岗位的女生数肯定能被 3 整除，排除 BD。代入 12（此题小的先代，数值小，可能简化），则 A 男 20，B 男 12，B 男 6，正好，所以 C。

2. 1360 能被选项整除，代入排除法，C。

3. 能被 4 整除，排除 C。667 应当被选项加 1 整除，代入排除法，A。

4.　整除秒杀法，能被 47 整除，A。　5.秒杀法，能被 15 整除肯定能被 3 整除，C。

## 五、比例法

例 1.底面积之比为 5：4→上升速度之比 4：5，快速代入，选项减 9 与选项减 5 之比为 4：5，更快速选项减 9 能被 4 整除，B。

例 2.甲：乙：丙=100：98：97，

100：？，　　？=97×100/98，答案是 100-(97/98)×100=100/98，A。

例 3.环比问题。“5 斤肉，7 斤肉”，可在它们上方写个 35，

14　　35　　35　　60　　60　　126

2 斤油可换 5 斤肉，7 斤肉可换 12 斤鱼，10 斤鱼可换 21 斤豆

14：126=1：9

？：27　　A。

例 4.此题看成工程问题用单位 1 法更快，设烧了 X 小时，1-X/5=4(1-X/4)，解得 X=15/4。

例 5.台数与时间成反比。台数比 7：8，1 份 2 台，所以原 14 台。14：12=7：6，1 份 2/3 小时，所以原 4 小时。B。

扩展：D　　原　　现　　　　原　　现

时　　7　：　5　　→ 9/2　：　5　　1/2 份＝2 天→每份＝4 天

→　效　　5　：　7　　　　5　：　3 份+2 份*3/4＝9/2

1/3 甲效+1/2 乙效＝2 份

**甲效+乙效＝5 份**

解得：甲效＝3 份，乙效＝2 份

例 6.比例法。当然，此题可用瞎蒙大法（有风险）：能被 2、3 整除，B。

巩固练习：.此题有投机取巧法，共 6 小时，假设来回各 3 小时，答案并介于 3600 与 4500 之间，C。若选项都 3600 与 4500 之间，怎么办？比例法：速度比 5：4，时间比 4：5，1500 乘 8/3 等于 4000。

例 7.各人钱数比等于**倒数比**。5/3：4/3：3/2=10：8：9，所以张 40、王 32、李 36，C。

## 六、十字交叉法

例 1.

解析：

20%　　　　10%　　2

　　　15%

5%　　　　　5%　　1

说明混合前的溶液质量比是 2：1，C。

巩固练习 1：80 与 82 差 2，90 与 82 差 8，1：4。若选项有 4：1 咋办？**因为十字交叉法要倒过来，为加速，我们可不画图，把后面的先减**，如本题可先看运动员。

巩固练习 2：D。

音乐系：$\frac{1}{4}$　　　　$\frac{2}{5}-30\%=10\%$

　　　　30%

美术系：$\frac{2}{5}$　　　　$30\%-\frac{1}{4}=5\%$

或：列方程组，三个未知数仅两个方程，说明没定死，可假设总数。

巩固练习 3：A。

比较：$\frac{42359}{1.079}\times\frac{1.096}{16021}\approx\frac{42\times1.1}{1.08\times16}\approx\frac{21\times1.1}{1.08\times8}\approx\frac{21}{8}$≈2.6，B。

练习：1.十字交叉法，B。2.十字交叉法，A。3.十字交叉法，C。4.A。

## 七、单位“1”法

例 1. 假设距离为“1”，则 $v_{顺}$=1/3，$v_{逆}$=1/4，$v_{水}$=1/x，A。
例 2. 设去年每册利润为 1，则今年每册利润为 0.8，设去年销量为 1，则今年销量为 1.7，所以今年总利润 136（小数不理了），A。
当然此题可能想不到设利润为 1，可能只想到设去年每册成本为 1，则今年每册成本为 1.1，设售价为 X，（X-1.1）/……。再设去年销量为 1，……。这样速度慢了。
扩展：设降价前每天销量是 1，总利润额是 2，则降价后每天销量是 2，总利润额是 3，每套服装降价的金额是 2-1.5=0.5，相当于利润额的 0.5÷2=1/4。
扩展：每条收入×销量＝总收入

x　　　• 1=x

x+2　　• 0.8=0.8(x+2)　　0.8(x+2)=0.9x　　x=16

练习：1. 设商品购入价为 x 元，则根据题意可得 x-0.6（x＋560）=160，解得 x=1240。
2. **利润问题最通用的方法是单位 1 加列表法，虽然此法有时并不一定最快。**

| 此题： | 成本 | 定价 | 售价 | 利润率 | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | X | 0.8X | 0.8X-1=0.2 | 解得 X=1.5。A。 |

3. 假设法，此题假设成本都为 1，则（1.25+0.87-2）/2=A。
4. 把一个轮胎的寿命看作“1”，则每行驶 1 千米，前轮耗掉 1/5000 寿命，后轮耗掉 1/3000 寿命，2/(1/5000+1/3000)=3750。

## 八、逆向分析法

例 1. 间接法，$C_{11}^5-C_6^5$，C。
扩展 1. **此题绝对不能 $C_4^1C_5^1C_7^1$=140**，因为是组合而非排列，例证：ABCD、EFGHI，按 $C_4^1C_5^1C_7^1$ 意，AEF 应算一种、AFE 也算一种，而实际上却是同一种，所以 140/2=70。
此题更易想到直接法：$C_4^1C_5^2+C_4^2C_5^1$=40+30=70。**或间接法**：$C_9^3-C_4^3-C_5^3$=9×8×7/(3×2)-4-10=70。(**“至多”、“至少”一般用间接法。**)
扩展 2. 似例 12，C31*C31 很有可能要错。看到至少用减法：不考虑至少共 C60+C61+C62+C63+C64+C65+C66＝64. 减去 C60-C61-C32-C32-C33-C33-C32-C32-C61-C60＝36. 或直接法：C31C31+C32C31+C32C31+C31C31＝36. 或者：满足题干条件的有四种情况：（1）第一个部门为 1 男 1 女（剩下的人均分到第二个部门，下同），则有 $C_3^1\times C_3^1$=9 种分配方式；（2）第一个部门为 1 男 2 女，则有 $C_3^1\times C_3^2$=9 种分配方式；（3）第一个部门为 2 男 1 女，则有 $C_3^2\times C_3^1$=9 种分配方式；（4）第一个部门为 2 男 2 女，则有 $C_3^2\times C_3^2$=9 种分配方式。因此满足题干条件的分配方式共有 9+9+9+9=36 种。
例 2. 间接法，更准确地说是排列组合中的除法，$A_5^5/A_3^3$=20。
扩展 1：$A_9^9/(A_3^3)^3$=1680。插入法，繁，略
$C_9^3C_6^3$=1680(可理解为 9 针中先取出三针给甲打再在剩下的 6 针中取出三针给乙打最后 3 针必给丙打。)
扩展 2：**顺序问题可用除法**。先把 7 人全排列，而甲乙丙三人本身构成 6 种顺序，要求顺序一定，所以是 6 种里的一种，所以 $A_7^7/A_3^3$=840。

| 例 3.： | | | |
|---|---|---|---|
| | (26) | 14 | 8 |
| | 4 | 28 | 16 |
| | 8 | 8 | 32 |
| | 16 | 16 | 16 |

例 4. 这种一环扣一环、环环相扣的题目，用倒推。剩下的 3/4 又 2 米，还剩下 2 米→4 米

就是 1/4，此“剩下”为 16，16-0.5=15.5，→31，+3=34 为 2/3，A。

扩展. 倒推法。丁买了最后剩下的鸡蛋的一半多半个。这样鸡蛋刚好卖完。→此“剩下”为 1 个，1+0.5=1.5，×2=3，+0.5=3.5，×2=7，+0.5=7.5，×2=15。

练习：1.倒推法或瞎蒙大法，A。2.倒推法，C。

## 第二节 数学运算各种题型分析

### 一、行程问题(含狗追兔问题、电梯问题、公车问题等)

例 1.小学奥数题。答案应当能被 150 整除，150 含 3，快速判断 D。

此题一般方法：甲丙相遇时，甲比丙多走 140×5=700，700/10=70 分钟，70×150

例 2.**狗追兔问题模式化：它们的速度比应当是最大的乘以最小的比上另两个数的积**，(大家自己去证明)此题 44：36=11：9，**约分后就当成它们的速度**，速度差 2，路程差 8，所以时间 4，4 乘 11 等于 44 米。 巩固练习：速度比 6：5，时间 10，答案 60。

扩展：速度比 36：35，速度差 1，路程差呢？甲先遥 4 次，转化为路程，甲的幅度为 7(注意**约分**后当成它们的幅度，幅度甲比乙=7：9)，转化为路程就是 28，那么时间 28，而乙频率为 4(注意也是约分后)，所以 112。

例 3. 电梯到达时间＝40/1＝40 分钟。电梯静止时，小明到达时间＝40/9 分钟，$V_{明}/V_{梯}=9$。

扩展：$5(20+V_{梯})=6(15+V_{梯})$，解得 $V_{梯}=10$，5(20+10)=150。

扩展：假设法，设女速为 1，则男速为 2，则女时为 40、男时为 40，(在此**转化为学过的“时间”**)，$40(1+V_{梯})=40(2-V_{梯})$，解得 $V_{梯}=0.5$，所以 60。

例 4.秒杀，下坡应大于 12，排除 AB。**整体看**，来回所走的总上坡路=总下坡路，即都是共 60 千米，所以答案应是能整除 60(更严谨点是 60 除选项要除得完)，所以 D。

严谨法：上坡共用 5 小时，则下坡共用 3 小时，60/3=20。

例 5.平均速度公式为 $\dfrac{2ab}{a+b}$，所以平均速度为 48，速度比 24：25，所以时间比 25：24，A。

例 6.据说此题难倒大多数大学生，其实很简单。做此题，先要懂得：**直线往返式，一次相遇一个全程，两次相遇三个全程，三次相遇五个全程，…。封闭式，一次相遇一个全程，两次相遇两个全程，三次相遇三个全程，…N 次相遇，共 2N-1 个全程。**

此题共三个全程，A 在一个全程中走 80，三个全程则走 240，240 减 60 即为一个全程。不熟练的可画图。括号里的思考题：240+60 即为两个全程。

扩展：81+89＝170，170*15＝2550，2550/100＝25.5 个全程，2N-1＝25.5，N＝13.25 次相遇，相遇 13 次。89-81＝8，8*15＝120，120/100＝1.2 个全程，**N 次追及，多走 2N-1 个全程**，2N-1＝1.2，N＝1.1 次追及，追及 1 次。所以最后答案 14.

例 7.“第一辆”。45 分钟内共发出 6 辆，都可以碰到，C。(40 分钟共发出 6 辆，最后**一辆**是在车站碰到，不算，答案 5。)

扩展：路上本来就有车。共 60 分钟，共发出 21 辆，第一辆和最后一辆是在车站碰到，不算，C。 例 8.秒杀，速度 3，求路程，能被 3 整除，D。

扩展：**好多行程可秒杀**。时间 22、26，求路程，能被 22、26 整除，A。

扩展：**整除秒杀**。能被 11 整除，D。有风险地选怪秒杀，D。

例 9.甲乙 5 分钟相遇，速度和 120，所以甲 72、乙 48。甲丙 $5+1\frac{1}{4}$ 分钟=25/4 分钟相遇，甲丙速度和 96，A。 30 秒速解：一般能被 600 整除，排除 CD，$1\frac{1}{4}$ 分钟排除 B。

例 10.秒杀法，答案应当是 45 的倍数即是 9 的倍数，B。(减去 45×3 应当能被 55 整除。**求路程的选择题想想整除秒杀。**)

比例法，时间比 11：9，2 份 12 分钟，1 份 6 分钟，11 份 66 分钟，69×45，9 的倍

数，B。（盈亏法，每分 45，少 315，每分 55，多 275，所以规定时间 59 分钟，45×69，9 的倍数，B。） 附加一句：此题规定时间应是 62 分钟。

例 11. **发车时间间隔（车行两车距时间）$=2t_1t_2/(t_1+t_2)$，人行两车距时间$=2t_1t_2/(t_1-t_2)$，$v_{车}/v_{人}=(t_1+t_2)/(t_1-t_2)$。**此题：2×30×20/（30+20）＝24 分钟。人行两车距时间＝1200/10＝120 分钟。速度比＝50/10＝5。

扩充：12＝20X/10+X，X＝15，注意“再”，15-10＝5。

人行两车距时间＝300/5＝60 分钟，速度比＝25/5＝5。

例 12. A 有时在追 B，有时 AB 距离越拉越大，青蛙跳井问题，第一次 A 追上 B，应该是 A 在追 B 阶段，而不是 AB 距离越拉越长阶段。问题是 A 追 B 阶段，最多可追几米？假设法，$V_a$=5 米/秒，$V_{b上}$＝4 米/秒，$V_{b下}$＝6 米/秒，$S_{上}$＝$S_{下}$＝60 米。A 追 B 最多时可以追（5-4）*15＝15 米。B15 秒，A 追了 15 米；B10 秒，AB 间距离增加了 10 米，即 B 走 1 圈，A 追 B 追了 5 米。120-15＝105 米（此时 B 算走了半圈），前面正常思维，105/（15-10）＝21 圈，即 B 每走 1 圈，A 会追 5 米，要追 105 米，则 B 需要走 21 圈。半圈+21 圈＝B21.5 圈，此时 A 比 B 多走 1 圈，即 A 走了 22.5 圈，A 跑到了第 23 圈。

练习：整除秒杀法，能被 13、12 整除，D。

**二、工程问题（含托尔斯泰问题、牛吃草问题等）**

例 1. 托尔斯泰问题就这种题型，模式化处理：设共 X 人，则有 0.5X+0.5X•0.5=2(0.5X•0.5+1)，解得 X=8。 强化训练：15X+0.5X•20=2(0.5X•20+100)，D。

例 2. 牛吃草问题模式化处理：(10×20-15×10)/(20-10)=5，相当于每天长草量；(10-5)×20=100，相当于原有草量；100/(25-5)=5。

巩固练习：21×12=252，23×9=207，差 45，除以 3 等于 15；8×9=72；72/18=4。

扩展：60 相当于每天长草量，(80-60)×4=80 相当于原有草量，80/(160-60)=0.8。

扩展：**转化为学过的**相同面积，10/3 公顷 12 牛 4 周→**1** 公顷 3.6 牛 4 周

10 公顷 21 牛 9 周 →**1** 公顷 2.1 牛 9 周

18.9-14.4=4.5，÷5=0.9，(3.6-0.9)×4=10.8，10.8/18=0.6，所以 1.5，1 公顷 1.5，24 公顷 C。

例 2. 此题假设法较难做，想其他思路，甲时是乙丙时 2 倍，**转化为效率**，甲效是乙丙效的 1/2，乙效是甲丙效的 1/3，求丙效是甲乙效的几分之几？甲效是总效的 1/3、乙效是总效的 1/4，则丙效是总效的 5/12，所以 B。

扩展. 特殊化似乎不行，“丙休息 2 天，乙就要多做 4 天”**转化为效率**：乙效：丙效=1：2，“丙休息 2 天，甲乙合作 1 天”转化为效率：甲乙效：丙效=2：1，所以甲效：乙效：丙效=3：1：2，6 效 13 天，3 效则为 26 天。

**三、比例问题（含利率问题等）**

例 1. 半径比 2：1，底面积比 4：1，高度比 1：4，C。

例 2. 这位朋友**实际上还** 2X 元，**等于所需还的即本金+第一年利息+第二年利息，**所以 2X=3.12+0.04(3.12-X)，解得 X≈1.5906。扩展. x•0.0245×2×0.8=3136，D。

例 3. 整体看，最终结果浓度相同且总量不变，其浓度实际上相当于两杯溶液混合，选项减 17 与选项减 23 比为 3：2 即可，B。

例 4. “买 400 送 200”即付 400 得 600，即 400：600=2：3，设原价 1，则现价为 1.2，消费者只付 0.8 就可。(0.8：1.2=2：3)。所以 D。

**四、容斥原理（含做对做错问题）**

例 1. 27+28-50=5。（27+28-（50-4）=9，**把都做错的先排除掉**。）此题也可用假设法来解。

例 2. 容斥原理本人一般习惯于公式法。三圆圈的公式是：$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|-|A\cap C|+|A\cap B\cap C|$。此题：17+30+13=60，60+5=65，65-35=30，即$|A\cap B|+|B\cap$

C|+|A∩C|=30，所以 35-(30-5×2)=15。
此题也可用倍区法：只参加一个小组的设为 A，只参加两个小组的设为 B，则 A+B+5=35，A+2B+3×5=17+30+13，解得 A=15。　练习. A。
例 3. 此类题目不止一种解法。在此，我们用往反面想的思路，小明 32×，小刚 42×，小红 22×，要使三人都做对的越少越好，只要三人错得越多越好，三人最多错 96 题，A。
若题目改为三人都做对的题目至多几题？简单，58 题。
若题目改为小明做对 68 题，小刚做对 58 题，小红做对 70 题，问三人都做对至少几题？以后问**三人都做对至少几题？首选往反面想。**小明 32×，小刚 42×，小红 30×，要使三人都对的越少越好，只要三人错得最多，共 104×，最多错 100 题，则三人都做对的至少 0 题。三人都做对的至多也是 58 题。三人都做对的至多几题，简单。
扩展 1. 参加跳远 50 人，参加跳高 40 人，参加赛跑 30 人。题目就变为了“**共 100 人参加比赛项目，每人至少参加一项，参加跳远 50 人、跳高 40 人、赛跑 30 人，问参加不至一个项目的至少几人？或者问参加两个项目或参加三个项目的至少有几人？**”参加两个项目或三个项目的人数尽可能少，则让大家都参加三个项目，即只参加两个项目的人数为 0（**已知条件未说 A∩B、A∩C、B∩C，一般 0 取得到**）。50+40+30-100=20，根据公式推理得这 20 应该是 2 倍的只参加三项的人数。或者这样记：**三圆圈和一并集=二倍区+三倍区的 2 倍**。所以答案 10。此题，“每人至少参加一项”可删。问题若改为：参加两个或三个项目的至多有几人？此时“每人至少参加一项”不能删，根据三圆圈和-并集=二倍区+三倍区的 2 倍，120-100=20，越多越好，就让大家只参加二倍区，所以答案 20。（这种题目三圆圈和肯定大于等于并集，所以题目不会再变。）
扩展 2. 最新解析：并集＝50+50+50-20-12-15+|A∩B∩C|，要求只参加一个小组的越少越好，即参加两个小组或三个小组的越多越好，则尽量参加两个小组，则取参加三个小组的为 0，解得并集＝103。并集-只参加三个小组-只参加两个小组＝只参加一个小组，即 103-0-（20+12+15）＝56，其中 20+12+15＝47 表示仅参加两个小组。
此题不止一种方法。推理：问只参加一个小组的越少越好，则参加两个或三个小组的越多越好，让大家都参加两个小组，即参加三个小组的为 0。（**0 取得到，因为交集和≤圆**）此题已有 A∩B、A∩C、B∩C，则首选公式法，并集=50+50+50-20-12-15+0=103，再根据三圆和-并集=二倍区+三倍区的 2 倍，150-103=二倍区+0，则二倍区=47，（**其实此 47 不必这么麻烦。20、12、15 即只参加二项，其和即为二倍区**）则一倍区=103-47=56。
（此题若问题改为只参加一个兴趣小组的最多有多少人？推理：只参加一个小组越多越好，则参加两个或三个小组的越少越好，即尽量让大家参加三个小组，三个小组都参加的**最大值为 12，简单**，则公式法：并集=50+50+50-20-12-15+12=115 人，则根据三圆和-并集=二倍区+三倍区的 2 倍，得 50+50+50-115=二倍区+12×2，得二倍区=11，（**其实此 11 不必这么麻烦。12 人三个，则两个为 8+3=11**）则一倍区=并集-二倍区-三倍区=115-11-12=92。不知对否？）
扩展 3. 按套路推理：三人都没看过的书越多越好，也就是说一人看过的书或两人看过的书或三人看过的书总和越少越好，常规思路推不下去，换一思维即并集最少。因为已知 A∩B、A∩C、B∩C，想到公式法 60-X=32+26+28-19-16-20+A∩B∩C，要使 X 最大，只要 A∩B∩C 最小。A∩B∩C 未必为 0。若“单位阅览室有 60 本书，小李看了其中的 32 本，小王看了 26 本，小张看了 28 本，问三人都看过的至少几本？”用往反面想，李未看 28 本，王未看 34 本，张未看 32 本，共 94 本，超出了 60，则三人都看过的至少 0 本。但“单位阅览室有 60 本书，小李看了其中的 32 本，小王看了 26 本，小张看了 28 本，小李和小王都看过的有 19 本，小张和小王都看过的有 16 本，小李和小张都看过的有 20 本”，则不可乱来。怎么办？19+16 都有王，图画在心中，三人都看过的≥19+16-26=9，同理三人都看过的≥

19+20-32=7，三人都看过的≥16+20-28=8，交起来得三人都看过的≥9。所以，当 A∩B∩C 最小 9，最终答案 C。（若**交集和≤圆，则 A∩B∩C 最小为 0**）

（原题问题若改为三个人都没看过的至少几人？60-X=32+26+28-19-16-20+ A∩B∩C，要使 X 最小，只需 A∩B∩C 最大，A∩B∩C 最大应该是 16，最终答案 13，不知对否？）

扩展 4. 推理：只会两种的越多越好，则只会一种或只会三种的越少越好，只会一种的 0 人，只会三种的也 0 人，即会跳的人中都只会两种。共 12+8+10=30 人次，除以 2=15。若用三圆和-并集=二倍区+三倍区的 2 倍，30-（30-不会跳）=二倍区+三倍区的 2 倍，得：不会跳=二倍区+三倍区的 2 倍，要使会两种的越多越好，三倍区为 0，得：不会跳=二倍区。还是要推理：三种 0，一种 0，不会跳=二倍区，和为 30，答案 C。

此题若问会跳两种舞蹈的至少几人？0 人。

**推理、公式一、（公式二）**

例 4. 50-［50/4］-［50/6］+［50/12］+［50/12］=38。(注意：此题若同时让 4 和 6 的倍数向后转，答案应该是 34。)

例 5. 反面想，共 5+7+20+15+18=65“√”，每人 1“√”共 60“√”，余 5“√”，要使满分人最多，先凑满分的，把 4“√”分给其中一人，还余 1“√”，无论分给谁都不会满分，D。

例 6. 方法一，做对的尾数为 0 或 5，-偶数=6，只能 0-偶数=6，偶数尾数为 4，排除 BC，假设 D，最多对 13 题，65-14，排除 D，所以 A。

方法二，假设全做对，则 100 分，差 44 分，所以 7X+5Y=44，X=2，Y=6，Z=12，所以 A。

扩展不定方程：D。设需要 39 座客车 x 辆，17 座客车 y 辆，则有 39x+17y=397。397 为奇数，则 39x 和 17y 必为一奇一偶，由此可知 x、y 也为一奇一偶，则两者相加之和为奇数，排除 A、C 项。若 x+y=11，则有 39x+17（11-x）=397，即 22x=210，x 不是整数，不符合题意，排除 B 项；若 x+y=13，则有 39x+17（13-x）=397，解得 x=8，则 y=5，符合题意，D 项当选。

再扩展：32，B。

练习：1. 公式+尾数法，A。 此题也可：756-169-294。

2. 实质做对做错题，不喜欢乒乓球 420 人，不喜欢羽毛球 240 人，不喜欢篮球 350 人，不喜欢足球 560 人，要使都喜欢的最少，即不喜欢的最多，只要这些不喜欢的都不重复即可，不喜欢最多 420+240+350+560＝1570，B。

3. 答案 D 参加两科的一共有有 2（120+80）-260=140 人；女生参加两科的有 140-75=65 人，所以只参加数学没参加语文的女生有 80-65=15 人。

**五、抽屉原理**

例 1. “一副扑克牌有四种花色”题意无大小王，所以 13。

扩展：“一副完整的扑克牌”题意包括大小王，所以 23。

例 2.

解析：- -

- -

- - - - - 答案 B。(**注意：零头只**)

例 3. 在 1-6 号中假设运气最差取了 1，2，3，则不能取 4，5，6，同理 7-12 号也 3 张，…。100/6=16……4，所以(16+1)×3=51，答案 52。实质上相当于构造了抽屉：(1，2，3，4，5，6)、(7，8，9，10，11，12)、…、(91，92，93，94，95，96)、(97，98，99，100)共 17 个抽屉，从每个抽屉中取前三个数共 51 张，所以答案 52。

扩展：实质同例题。答案 2007/18=111…9，111×9+9=1008。

例 4. 构造 25 个抽屉，(1、2)，(3、4)，(5、6)，…，(47、78)，(49、50)，所以 26。

**六、数列问题**

例 1. 结合抽屉原理，假设运气最差，关键问题是第一把要试 100 次还是 99 次，**99 次就行了，因为当 99 把不行，那剩下一把肯定行，不用试**，第一百把也不用试即为 0 次，因为最后剩下的一把肯定配最后一把锁。所以 99+98+97+…+1+0＝4950（次）。**(若问“最多试多少次可以打开所有的锁？”则为 100+99+98+97+…+1＝5050 次)**

例 2. **从 1 开始的 10 个连续奇数和就是 10 的平方，1+3+5+7+…+（2n-1）＝$n^2$,从 1 开始的连续奇数和就等于奇数个数的平方**。（所以 53+55+57+…+143＝$72^2-26^2$）。此题 250/10＝25 即连续偶数的平均数，所以后五项是 26、28、30、32、34，A。

注:**从 2 开始的连续偶数和就等于偶数个数与偶数个数加 1 的积，2+4+6+8+…+2n＝n(n+1)。**

例 3. 3025＝$55^2$，所以中间两项是 7、8，答案 30。（四个连续自然数的积＝（中间两数积-1）$^2$-1。）

例 4. 细节题，注意 **24 点是敲 12 下而非 24 下，因为钟最多是 12 点**，所以（1+12）×12（因为×12/2×2 就是×12）+24＝180。

例 4. 注意细节，$a_1\neq2$。

N 天后的单价：$2+\frac{1}{2}$N 元/千克

费用：400N　　成本：10000 元

N 天后千克数：5000-10N 千克

（$2+\frac{1}{2}$N）（5000-10N）-400N-10000＝39600 化简得：$N^2$-416N+7920＝0 解方程麻烦的话，用选项代入加尾数法，AB 之间。代好算的 B20.或者直接代 20，想到十字相乘法，（N-20）（N-396）＝0，B。

练习：1. 考虑最差的情况：试第一把钥匙需要8次，试第二把需要7次…，试第8把需要1次，第九把无需再试，故配好全部钥匙和锁最多需要试1＋2＋…7＋8＝36次。C。　　2. C。

**七、排列组合问题**

例 1. (1)**不相邻问题插入法，把可相邻的先排好**。四位男生可相邻先排 $A_4^4$，形成了五个空，在五个空中插入 3 个，并且考虑顺序，$A_5^3$。所以 $A_4^4A_5^3$=1440。

(2)**必相邻问题捆绑法**。把四个男生捆绑在一起，并且本身考虑顺序，先排好，$A_4^4$，然后把这四个男生看成整体，与其他三位女生构成全排列。所以 $A_4^4A_4^4$=576。

(3)甲乙本身两排法，然后从剩下的五名学生中选 2 名插入甲乙(或乙甲)中间，最后把甲乙和这两名学生看成整体与其他三位构成全排列。所以 $2A_5^2A_4^4$=960。

例 2. $A_6^6$/6=120，可是项链是可以**翻**转的，所以还要**除以 2**，答案 60。

例 3. 方法一，四种里取一种 $C_4^1$=4，四种里取二种 $C_4^2$=6，四种里取三种 $C_4^3$=4，四种里取四种 $C_4^4$=1，共 15。

方法二，每枚纸币有选或不选两种选法，共 $2^4$=16 种选法，减去全部不选，所以 15。

本质上两种方法是一致的，因为 $C_n^0+C_n^1+C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^n=2^n$。(顺便也可记下：$C_3^1+C_3^2=C_4^2$，$C_8^6+C_8^5=C_9^6$，即 $C_n^m+C_n^{m-1}=C_{n+1}^m$）　扩展：10　　例 4. **分排问题直排法**。答案是 $A_9^9$

例 5. 解析：四个数字在个位、十位、百位都有可能出现，且**每个数字在每个位置出现 $A_3^2$=6 次**，所以和为 6（1000+100+10）=6660。　扩展：1+2+3=6，6+60+600=666，666×2=1332。

扩展. 一位数 6 个，两位数 5×5=25 个，三位数 5×5×4=100 个，四位数 5×5×4×3=300 个，五位数 5×5×4×3×2=600，六位数 5×5×4×3×2×1=600 个，共 1631 个。

观察发现 2101345 是最高位为 2 的最小六位数，最高位≧2 的六位数有 4×$A_5^5$=480，注意**细节**：还要减去 1，答案 479。当然此题也可用间接法。

个位数和 15×4×4=240

十位数和 150×4×4=2400

百位数和 1500×**5×4**=30000(注意：百位数和不是 1500×4×4，**排列组合题一定要细心，否则一不小心就错**。)

所以答案 32640。

例 6．中间一名是确定的，不管，分步，再排左边的，只要从六个中取出三个，排法唯一，最后三个肯定排右边且排法确定，所以答案应是 $C_6^3$=20。扩展：C。

扩展：D。将 6 人随机分成 3 组，每组 2 人，则有 $\frac{C_6^2\times C_4^2\times C_2^2}{A_3^3}$=15 种分组情况。每组成员均来自不同单位，则有 $C_4^1\times C_2^1$=8 种分组情况（假设甲单位员工编号为 A、B，乙单位为 C、D，丙单位为 E、F，则 A 和 C、D、E、F 中的任意一个组合后，B 只能跟除与 A 组合的那个员工所在部门外的另一个部门的 2 个员工组合，例如 A 与 C 组合，则 B 只能与 E 或 F 组合）。因此题干所求为 $\frac{8}{15}$。例 7：$C_{17}^8$ 扩展：$C_{16}^2$

扩展：此题用“隔板法”。先“**垫底**”：每个部门各发 8 份，余 6，C5 取 2，所以 10。

再扩展：可用隔板法，把 9 颗糖排成一排(糖相同)，中间形成 8 个空，一天吃完相当于八个空插入 0 块板、两天吃完相当于八个空插入 1 块板、…、九天吃完相当于八个空插入 8 块板，所以 $C_8^0+C_8^1+C_8^2+C_8^3+\cdots+C_8^8=2^8=256$。

比较：注意此题是大异小异，不用隔板法。分类：

1+1+1+3：$C_6^3\ A_4^4$＝480（从 6 人中选 3 人捆绑在一起当 1 个人与另 3 人构成全排列）。或者：

| 一 | 二 | 三 | 四 |
|---|---|---|---|
| $C_6^3$ | $C_3^1$ | $C_2^1$ | $C_2^1$ |

注意：**右上方一样，直接相乘才考虑了顺序**，即后三个已考虑顺序，但 $C_6^3$ 未考虑顺序，所以还要乘以 4，即 $C_6^3\ C_3^1\ C_2^1\ C_2^1\times1=480$）

1+1+2+2：$\frac{C_6^2C_4^2A_4^4}{A_2^2}$＝1080（$C_6^2C_4^2$ 已经考虑顺序，而 $A_4^4$ 又考虑了他们的顺序，所以要除以 $A_2^2$。或者式子这样列：$\frac{C_6^2C_4^2}{A_2^2}\times A_4^4$，这个叫做先消序）或者：

| 一 | 二 | 三 | 四 |
|---|---|---|---|
| $C_6^2$ | $C_4^2$ | $C_2^1$ | $C_1^1$ |

注意：**右上方一样，直接相乘才考虑了顺序**，即前两个、后两个已考虑顺序，所以还要乘以 $C_4^2$，即 $C_6^2\ C_4^2\ C_2^1\ C_1^1\times C_4^2$＝1080）

此题答案 1560，A。

例 8. 瞎蒙大法，$C_5^3$=10，应当是 10 的倍数，不可能 10，所以 D。

细致解法：$C_5^3$=10，三个瓶贴错的情况是 2，（遵循规律 0，1，2，9，44，265，……，“数

字推理”部分有论及)，所以 D。

例 9.甲乙都不是第一 乙不是第五 首先我们看第一有 3 种选择（丙丁戊），然后第五有 3 种选择（丙丁戊剩下的 2 个人+甲），第四有 3 中选择（剩下的 3 个人），第三有 2 中选择（剩下的 2 个人），第二只有一种选择 一共 3*3*3*2*1=54 种。或：$A_5^5-A_4^4-A_4^4-A_4^4+A_3^3$＝120-72+6＝54。（5 个不同的人，甲乙不 1、丙不 5：第一个位置有 3 种可能性：丙丁戊，最后一个位置：当丙第一时，自然而然推出丙不五，...所以分类讨论：第一丙，自然而然地丙不五，且甲乙不一，所以 $A_4^4$＝24；第一非丙，又因为第一非甲乙，所以第一只能丁戊 2 种可能，最后一个位置：5 人，第一位置拿走了 1 人，剩下 4 人，可是丙不五，所以三种可能性，2*3*$A_3^3$＝36。所以 24+36＝60. 或：$A_5^5-A_4^4-A_4^4-A_4^4+A_3^3+A_3^3$＝120-72+6+6＝60）

例 10.最终得分为 70 分，有以下三类情况：

| 甲（3 道、10 分） | 乙（2 道、20 分） | 丙（1 道、30 分） | 情况数 |
|---|---|---|---|
| 3 | 2 | 0 | 1 种 |
| 2 | 1 | 1 | $C_3^2\times C_2^1$=6 种 |
| 0 | 2 | 1 | 1 种 |

由上表可知，总情况数是：$1+C_3^2C_2^1+1=8$种，未选择丙类题的情况数是1种，故赵某未选择丙类题的概率为 $\frac{1}{8}$。

很容易选 1/3。要注意题目上不同的，第一类有 1 种，第二类有 3*2＝6 种，第三类有 1 种，所以 1/8。还是用原始方法：枚举法。

例 11.最短路线是 ACFB 或 ADEB。AC 有 C51＝5，原因是必经 5 小段，其中必有 1 竖段。AD 有 C52＝10，EB 有 C31＝3，10*3＝30. 共 35，A。

## 八、概率问题

例 1.一只脚停留在大理石上的概率为 1/2，两只脚则为(1/2)×(1/2)，A。

例 2.最快法，这种题目不管有无放回每次抽到的概率都不变。此题白球应为 4/(4+6)=2/5，**不管第几次**。此题也符合常识：抽签时，任何人抽到好签的机会相等(在不知前面抽签结果时)，不管你是第几个抽。(若有放回，按常识也是 4/10。若用分步法：白白(2/5)×(2/5)=4/25，红白(3/5)×(2/5)=6/25，相加也是 2/5。)

分步法：白白(4/10)(3/9)+红白(6/10)(4/9)=2/5。

组合除法：组合对组合，**题目转化**为从 10 个里取 2 个，在取出的 2 个中要求有 2 个白球或指定第一个红第二个白，(组合对组合，不考虑顺序了)，2 个白球 $C_4^2$，一红一白 $C_4^1C_6^1$，则指定第一个红第二个白为 $C_4^1C_6^1/2$(可以这样理解，按组合定义(红$_1$白$_1$)与(白$_1$红$_1$)算一种，而现在指定(红白)还要除以 2)。($C_4^2$+ $C_4^1C_6^1/2$)/$C_{10}^2$=2/5。**此题肯定要求顺序**，所以想用除法还是**排列除法**好理解。

部分排列除法：$A_{10}^2$，在取出的 2 个中都是红的有 $A_4^2$，第一个红第二个白的有 $C_4^1C_6^1$。(或：在取出的 2 个中第二个是红的方法有 4×9，先排第二个特殊位置优先考虑)

全排列除法：$A_{10}^{10}$，第二个位置排白的方法有 4×$A_9^9$。

可见，**除法的分子、分母就是排列组合求法**。

**概率题有较多思路，同学们找最方便的就行**。

例 3.**找准基数**。此题的基数并非简单的四取二，而是从一巧一果两牛四颗糖中取出至少一牛的组合。看到“至少”想到间接法，$C_4^2$- $C_2^2$=5，而牛牛组合只有一种，所以 1/5。

扩展 1：题意即从 6 颗中取 2 颗至少 1 颗牛奶味，$C_6^2$-$C_3^2$＝12。两颗都是牛奶的：$C_3^2$＝3。1/4。一颗牛奶味、一颗果味：$C_3^1C_2^1$＝6。1/2。一颗牛奶味、一颗巧克力味：$C_3^1C_1^1$＝3。1/4。

扩展 2：此题仅考虑甲督查组是可以的，因为其余都是 $C_4^2C_2^2$，$1/C_6^2$=C。或者：分母 $C_6^2C_4^2C_2^2$＝90.分子 $1\times C_4^2C_2^2$＝6.C。

比较：可否仅考虑甲单位 3 人？甲单位三人分在同一队，其余是 $C_9^3$。而甲单位一人在红队、一人在蓝队的话，其余是 $C_9^5$。其余不一样，所以不行。$\frac{1\times C_9^3}{C_{12}^6}=\frac{1}{11}$

分在同一队有可能红队，也有可能蓝队，共有 2 种情况。**每个单位年龄最大的人是定死了的**，不是 $C_3^1$，而是 1。然后其余是：$C_8^2$。$\frac{2\times1\times1\times1\times C_8^2}{C_{12}^6}=\frac{2}{33}$（此题也不能仅考虑年龄最大的四个人）

例 4.像这种打靶、射击型题目有公式，$C_5^4(0.8)^4(1-0.8)$尾数法 5×6×0.2，尾数 6，C。注：公式是 $C_n^kp^k(1-p)^{n-k}$。

例 5.党员概率 35/50，然后判断男党员概率，并非再乘以 3/5，因为在确定好 35/50 后，考虑的范围应当是在 35 人范围。35 人中男的概率为多少？**极端化思想**：要使男的概率最大，则需 35 人中，男的越多越好。男的最多为几人呢？30 人，即假设未入党的 15 人都为女的。35/50*30/35=A。　或：男性概率 3/5，男性中学员最大概率 1，3/5*1=A。扩展：30%

例 6.乙 2 中甲 0 中：0.3×0.3×0.4×0.4=0.0144

乙 2 中甲 1 中：0.3×0.3×0.6×0.4×2=0.0432

乙 1 中甲 0 中：0.3×0.7×2×0.4×0.4=0.0672

和为 0.1248。C。

例 7.A。有且仅有 1 人在培训后返回原分公司，则先将返回原分公司的员工分配好，有 $C_5^1$=5 种情况；剩余 4 个人均未返回原分公司，即将 4 人进行全错位排列，有 $D_4$=9 种情况。因此，有且仅有 1 人在培训后返回原分公司有 5×9=45 种情况，将 5 人随机分配有 $A_5^5$=120 种情况，则满足题干要求的情况发生的概率为 $\frac{45}{120}$×100%=37.5%，大于 35%。

扩展：解法一：总分子除以总分母，大于等于 8 分有两种情况：5 题中对了 4 题或者 5 题都对。5 题对了哪 4 题有 $C_5^4$ 种情况，即这 4 题都选了正确的唯一一个选项，但要考虑另一题选错了，选错的有三种可能性。所以总分子 $C_5^4\times3+1$，总分母是 4×4×4×4×4.C。

解法二：分数乘分数。$C_5^4\times(\frac{1}{4})^4\times\frac{3}{4}+(\frac{1}{4})^5$＝C

例 8.共 8*8*8＝512.**中奖**情况：一、全红① 二、1 绿：3*7*7＝147；2 绿：3*7＝21；3 绿：①。三、无红绿：4*4*4＝64；有红或绿：（1）有绿无红：0（已经算过）；（2）有红无绿：第一种情况 1 红无绿：3*4*4＝48，第二种情况 2 红无绿：3*4＝12，第三种情况 3 红无绿已被算过。（3）红且绿，已经被算过。1+147+21+1+64+48+12＝294.**不中奖**概率（512-294）/512＝218/512，B。

或：一：1/8*1/8*1/8=1/512

二：1 绿：3*1/8*7/8*7/8=147/512

2 绿：3*1/8*1/8*7/8=21/512

3 绿：1/8*1/8*1/8=1/512

三：无红无绿：4/8*4/8*4/8=64/512

1 红无绿：3*1/8*4/8*4/8=48/512

2 红无绿：3*1/8*1/8*4/8=12/512

**九、统筹问题**

例 1.心算，发现甲厂善于长裤、乙善于上衣，（实战时可划线做记号），甲 30 天长裤共 32×30=960，乙 30 天上衣 60×30＞960，所以乙先做 960 上衣与甲配套，余 14 天，30 天做 720 套，平均 1 天 24 套，14 天 336 套，所以 960+336=1296。

扩充：甲擅长裤子，注意：**乙 15 天 600 件上衣、15 天 600 件裤子，不能认为同样擅长**，因为擅长与否是**相对来说**的。当然可瞎蒙，这种题型一般一个人擅长这另一个人擅长那，所以乙擅长上衣。稍科学点：甲 18 天 600 件上衣、乙 15 天 600 件上衣，当然乙擅长上衣。这样，让乙 30 天上衣共 1200 件上衣。让甲先配 1200 条裤，需乙 24 天，那么乙余 6 天，30 天 600 套，6 天 120 套。所以答案 1320。

| 模式化： | 每天上衣 | 每天裤子 | *比值* |
|---|---|---|---|
| 甲 | 100/3 | 50 | *2：3* |
| 乙 | 40 | 40 | *1：1(这里 1：1 并非一样，而是前面大)* |
| *综合* | *220/3* | *90* | *22：27* |

例 2.215 不大于其他之和，所以非四。要用**通用方式——模式化处理：**线段三四两边和分别为 300、215，所以向“三”；线段二三两边和分别为 220、295，所以向“三”。那么，结果就是“三”。(即使路程不相等也是“三”）　　“通用方式——模式化处理”证明略。

例 3.**逆向分析法，把两个人带的食物和水看成整体，为不浪费人力物力，最后的 24 天食物和水让一个人走**，这样才会走得最远。走得远的那个人最后一个人可走 12 天行程远的路程。把两个人看成整体，最后用去了 24 天的食物和水，那么前面共同的用去了 48-24=24 天的食物和水，注意：每个人都是往返，所以 24/4=6 天，那么走得远的那个人共 18 天行程即 540

例 4.　第一分钟：1 正、2 正

第二分钟：1 反、3 正

第三分钟：2 反、3 反

例 5.易错点】根据满 200 省 30 得出该衬衫的原价为 175+30=205 元，则未参加活动前购买 3 件衬衫需要 205×3=615 元。将 600 元满百的部分折算为 2 个 300 元，则省下来 50×2=100 元，因此需要支付 615-100=515 元，误选 D 项。需要注意的是，题干要求的是最少需要花费的金额，则在满足题干条件的前提下，衬衫的原价应该尽可能低。

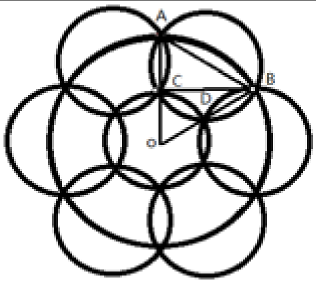
【答　案】B。解析：根据题意可知，这款衬衫的原价最低为 175+10=185 元，未参加活动之前买 3 件衬衫需要支付 185×3=555 元＞400 元。将 555 元满百的部分折算为 200、300 的加和，则共省 30+50=80 元，因此最少需要支付 555-80=475 元。

**十、推理问题**

例1.一天1米，六天6米，第七天爬出井口。

例 2.　瞎蒙大法，59：一二；58：一三；57：二三(有点不严谨)。差 1，所以(59+1)/2=30。或者总和/4=134 即 5 只羊总重，134-47-59=28 即第三羊重，又因为 58 肯定是一三，三 28，则一 30。

例 3.

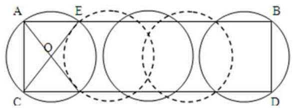



第一，我们考虑究竟是“从内往外”还是“从外往里”，我们应该尝试，并且考虑到哪个更难满足，显然外圈更难满足

第二，应该考虑怎么样才能用最少的圆，覆盖上最外圈的圆周，将小圆的直径当成大圆的弦，最外圈需要 6 个小圆

第三，首先要求出 AC，看 OC 的长是多少，就知道究竟需要多少个圆才能全覆盖，我们可以看出△AOB 为等边△，AC 为小圆直径，C 为小圆弦上一点，则 BC⊥OA，可以知道 AC 的长为 AB 的一半，即为小圆的半径，因此只要满足 OC 也为半径，就可以满足全覆盖，因此只需要 1 个小圆　　总结，共需要 6+1=7 个小圆

扩展：C。要使哨塔数量最少，则哨塔应恰好覆盖四个顶点。如图所示，AC=8，CE=10，则 AE=6。AB=25，25÷6=4……1，故至少需要 5 个哨塔。




例 4.共 $C_6^2$=15 场，总分最高 15×3=45 分，最低 2×15=30 分，每人 5 场，每人最高 15 分，每人最低 0 分。**枚举猜测法**，等差数列第三大是 8，有可能公差 1，则总分 45 分，无平局，无答案，排除；(再说，不可能无平局，若无平局，不可能 8 分。)公差 2，则总分 42 分，用鸡兔同笼方法，假设全是胜负，则总分 45，与 42 差 3，3/(3-2)=3，A。不可能公差 3，因为导致第六名-1 分。

扩展.用假设法，可心算。此题假设 A、B、C 胜的场数最方便，假设 A、B、C 各胜一场，共 3 场，那么 D 胜 6-3=3 场，排除。假设 A、B、C 各胜两场，共 6 场，则 D 为 0。A。

扩展.解析：此种题型先罗列：共 $C_6^2$=15 场，共 30 分，

一
二三
四
五六

他们的得分应当都是偶数，又因为**在循环赛中不可能两人都全部输**，所以五六≥2，接下去当然可用枚举法，也可**假设**二三=8，则一不可能为所以二三=6，则一=10、四=4。

扩展：单循环赛按套路，先列好：共 45 场　　每人 9 场

共 45 分　　每人最多 9 分

最少 0 分

（此题当然还可推出:**每人的分数特点**为整数或 a.5 分,**N 人分数和特点**也为整数或 a.5 分。）单循环赛还要记住：1.不可能两人全部赢，也不可能两人全部输。（即**全赢的只能有 1 人，全输的也只能有 1 人**。或者说满分的最多一个人，0 分的也最多一个人）2.**没有人全赢，有没可能有人全输呢？有可能的。**或者说在没有人满分的前提下，是有人 0 分的。此题丙队平均 9 分，则丙队只能有 1 人。甲队+乙队＝9 人，甲队+乙队＝36 分，接下去可用鸡兔同笼法。或：由乙队平均 3.6 得乙队 5 人，（∵此题 **N 个选手分数和**只能是整数或 a.5 分，此题乙队人数不可能为 0 人、10 人、15 人等），这样甲队 4 人。此题确定了丙队 1 人后，接下去也可：**总平均** 45/10=4.5 分，而甲队平均 4.5，说明乙丙队合在一起平均 4.5 分，

十字交叉法得乙人数：丙人数=（9-4.5）/（4.5-3.6）=5：1，∴乙 5 人。（得出丙 1 人后十字交叉法这里也可解方程组）当然此题一开始就可用解不定方程来做，只是稍慢。

扩展.“小赵休息了 2 局”说明钱孙 2 局，则钱赵 6 局、孙赵 3 局，共 11 局。11 局里钱赵 6 局，而钱赵不可能连续，所以第一、三、五、七、九、十一局是钱赵。B。

扩展. C。解析：A 队得 1 分，其胜负情况只能为平 1 场、负 3 场；B 队得 4 分，其胜负情况可能为胜 1 场、平 1 场、负 2 场或者平 4 场；C 队得 7 分，其胜负情况只能为胜 2 场、平 1 场、负 1 场；D 队得 8 分，其胜负情况只能为胜 2 场、平 2 场。A、C、D 队总的胜负情况为胜 4 场、平 4 场、负 4 场，**5 个足球队的胜负场次应相同且平局数为偶数**，则 B 队应该胜 1 场、平 1 场、负 2 场，A、B、C、D 队总的胜负情况为胜 5 场、平 5 场、负 6 场，则 E 队胜 2 场、平 1 场、负 1 场或者胜 1 场平 3 场，得分分别为 2×3+1=7 分和 3+1×3=6 分。因此 E 队最多可能得 7 分。

**十一、页码问题**

例 1. 方法一，一位数 9(即 9×1)，二位数 180(即 90×2)，三位数 2700(即 900×3)，所以此数是四位数，前三者和 2889，6869-2889=3980，3980/4=995，995**+999**=1994。

方法二，**看选项应该是四位数**，X+X-9+X-99+X-999=6869，(设页数 X，则个位 X 个数码，十位 X-9 个，百位 X-99 个，千位 X-999 个)，4X-1107=6869，4X=7976，X=1994(至 4X=7976 后，也可用代入法得 X=1994)。

方法二**若是主观题或选项有三位数、四位数等，要先估算几位数**，否则就有可能出错，如若共 2502 个数码，问几页，若不估算的话，就 X+X-9+X-99+X-999=2502，此法错，因为若估算，知其三位数，所以无 X-999，因为无千位数，所以 X+X-9+X-99=2502，3X-108=2502，3X=2610，X=870。

**提倡方法二**，且数码越大，方法二快速更能体现。

例 2. 实质跟上题差不多，数字大，用方法二，先估算几位数：四位数 36000，五位数 450000，应该是五位数，所以 X+X-9+X-99+X-999+X-9999=206788，5X-11106=206788，5X=217894，X=43578…4，所以是 43579 的第四个数码，C。

这种方法可以说 X 就差不多是结果，而方法一要加…9，而且数值大计算繁，此题不妨用方法一试试看：一 9，二 180，三 2700，四 36000，五 450000，所以五位数，前四者和=38889，206788-38889=167899，167899/5=33579…4，33579+9999=43578，所以是 43579 中的“7”。应该还是方法二快点吧。

例 3. 模式化处理，**1 到整十、整百或整千等，不是问 0，则$\frac{总数}{10}$×（位数-1）+首位次数。**

此题 50×2+100＝200（理由：个位——每 10 个出现 1 次；十位——每 100 个出现 10 次；百位——每 1000 个出现 100 次。相当于都除以 10 就行了，首位另作考虑很简单。）

**1 到整十、整百或整千等，问 0：$\frac{总数}{10}$＋（$\frac{总数}{10}$-9）＋（$\frac{总数}{10}$-99）+……，加到不能减为止。**则此题 50+50-9＝91(个位——每 10 个数出现 1 次 0；十位——每 100 个数出现 10 次 0，但 1-100 出现 1 次 0，所以-9。)（注：**若不是整十、整百或整千等，要转化**。如问 1-983 中出现几次 0？间接法更快，1000 是 100+100-9+100-99＝192 次，减去 990 里的一次、**1000 里的三次**，答案 188。或直接法，900：90+81＝171 次。80：8。**还有 01-09**：9 次。所以 188 次。）

扩展：1-2000 里共有 2000/10*3+1000＝1600 个 1，共有 2000/10*3+1＝601 个 2，共有 600 个 3 到 9，所以各数字和是 1600+1202+25200。2001-2015 所有数字和可以用枚举，B。（当然此题可用尾数法，1-2000 所有数字和的尾数是 2，2001-2015 可用枚举，和为 96，所以最终尾数是 8）

例 4. 模式化处理，**页数**：1-499 出现 500-4×9×9＝500-324＝176 页。（理由：□□□3 至少出现一次，用间接法，包括 000 共 500 个，减去 4×9×9。）

页数：1-499，500-4×9×9-9×9-9-1（或这样记方便点：$500-4\times9^2-9^2-9^1-9^0$）＝85 页。（包括 000 总数 500，减去都不是的 4×9×9，减去第一位是 0 后两位不是 0 的 9×9，再减去前两位是 0 第三位不是 0 的 9，最后减去三位都是 0 的 1）。+1＝86 页。（也可间接法：91-5＝86 页。）

### 十二、鸡兔同笼问题

例 1. 鸡兔同笼问题，模式化处理：问兔，假设全是鸡；问鸡，假设全是兔。此题问兔，假设全是鸡，应当有 176 只脚，少了 24 只脚，因为每只鸡比每只兔少 2 只脚，所以 24/2=12，这就是兔的只数。

例 2. 鸡兔同笼法再结合尾数法：5×7＝5，0-5＝5，5÷5 选项只有 5。（完整法：假设全是乙，45×27＝1215（所有两位乘两位数可一步等出，方法是个位乘个位是个位，然后十位乘个位，个位乘十位，即对角乘，然后相加再加要进的数所得结果的个位就是十位数字，最后十位乘十位加要进的数），1290-1215＝75，75 除 5 等于 15）

例 3. 秒杀法，小和尚人数应当是 3 的倍数，100 减去选项是 3 的倍数，只有 B。

鸡兔同笼法，假设全是小和尚，则吃 100/3 个，差 200/3 个，除以 8/3，等于 25。

例 4. 此题当然可用代入法。用鸡兔同笼法更快，发现蜻蜓和蝉都是 6 条腿，看成同一东西，问蜘蛛，假设全是蜻蜓和蝉，则共有 108，差 10，除 2 等于 5，所以 C。

### 十三、方阵问题

例 1. 秒杀法，**方阵总人数应当是个完全平方数**，所以 C。

(死板解法：最外层共 96，则最外层每边 (96+4)/4=25，$25^2$=625。)

例 2. **方阵外层比里面一层总数多 8**，所以 (2008+8)/2=1008。

例 3.　间接法。设调整前边长 X，则 $X^2-(X-8)^2=(X-16)^2-(X-16-16)^2$，注：**方阵外层比里层每边多 2**，8(2X-8)=16(2X-48)，X-4=2X-48，X=44，8(88-8)=640。

### 十四、植树问题

例 1. 31 比较：30 再比较：3 例 2. 72/18+1=5 楼。例 3.　15×4-4=56 棵。

例 4. 分别为 9 刀、11 刀、14 刀，假设法设总长 60，则每段长分别为 6、5、4，**转化为刀数**，利用容斥原理公式有 9+11+14-1(注:60/30=2,刀数应当是 1)-4(注:60/**12**=5 刀数是 4)-2(注:60/20=3 刀数是 2)+0(注：60/60=1 刀数是 0)=27 刀，答案 C。此题一定要细心。

例 5. 转化为段数，乙：X 段+5 段；甲：2X 段+(X-5)段。则 2(X+5)=3X-5，解得 X=15 段。因为封闭型，所以 15×4=60 棵。

练习：尾数法，C。

### 十五、年龄问题

例 1. 此种题型秒杀，模式式化处理，39-3=36，36/3=12，3+12=15，39-12=27，“3”**小**，指甲，“15”**小**，所以 15 是甲，27 是乙。

(理由：

| | 现在 | 时刻 1 | 时刻 2 |
|---|---|---|---|
| 甲 | X | Y | 3 |
| 乙 | Y | 39 | X |

根据年龄差不变得 39-Y=Y-X=X-3，可知 39、Y、X、3 成等差数列，39-3 即三个公差，…。注：**年龄问题一般通过列表都可解**。)

练习：列表法，答案 18。

例 2. 抓住“年龄差永不变”，差 5 份、4 份、3 份，差 60 岁，C。

### 十六、平均数问题

例 1. 22+25+27=74 即三人年龄和，74-22**×2**(注：**平均数问题千万不要忘了个数**)=30 丙，则

乙20、甲24。例2.［5.75，5.85），总和[189.75，193.05），和肯定是偶数，取190，A。

**十七、最值问题**

例1.**千万不能6×6=36**。若周长18，则4.5×4.5。现在是长+2宽=18，根据“**若*两数*和为定值，则*两数*相等时，乘积最大**”，所以长9、宽4.5，面积40.5。

例2.x奇数，+1后必为偶数，即p.q为偶数，则p.q中必有一数为2，设q=2，则x=2p-1，又因为x是小于1000的质数，要使x最大，p取**1000以内的最大质数997**，所以答案1993。

例3. **注意第一位不一定是**1。这样理解：位数应当越少越好，所以取9，2003/9=222……5，所以59999……9999(后面共222个9)。

例4. K个奇数的和是1949（奇数），则K为奇数，A或C。此题要使K最大，即使所取的奇数越小越好，则取1、3、5、7……，即从1开始的连续奇数，其和为$K^2$，代$45^2$=2025>1949，所以A。

**十八、代数问题**

例1.设$\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}$=k，C。 例2.添一项（2-1）。（$2^{16}$-1）例3. $\frac{8}{5}$。

例4.因为选项末两位不同(注意-60与60也属末两位不同)，所以可用“两位尾数法”：02×03-03×02=0。

两位尾数法扩充：同样是末两位不同，可用“两位尾数法”，94×02末两位88，93×03末两位是79。88-79末两位是09，A。

例5. 3145的去九数（除以9后的余数）是4，92653的去九数是7，4×7＝28的去九数是1，所以等号右边的去九数也是1，去掉99、81、63余下25，所以去九数是7，再加3就是1，所以B。（本题也可去三数） 扩展：同样用“**去九法**”，能被9整除，D。

例6：**记住$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=1-\frac{1}{4}$，$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=1-\frac{1}{8}$，$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=1-\frac{1}{16}$，…。即以$\frac{1}{2}$开头公比为$\frac{1}{2}$的等比数列之和为1-最后一项。**

**联想：以1开头公比为2的等比数列之和为最后一项+（最后一项-1）。**其实可用“**补项法**”证明（当然也可用等比数列求和公式证明）。$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}-\frac{1}{16}=1-\frac{1}{16}$。 1+2+4+8+16＝1+2+4+8+16+1-1＝16×2-1。

**若不以2、$\frac{1}{2}$开头，除公式法外，通用法是“补项法”**。

当然可用公式法，也可原式＝$\frac{1}{216}+\frac{1}{432}+\frac{1}{864}+\frac{1}{1728}+\frac{1}{3456}+\frac{1}{6912}+\frac{1}{6912}-\frac{1}{6912}=\frac{1}{108}-\frac{1}{6912}=\frac{63}{6912}=\frac{7}{768}$。

再例如：当然可用公式法，也可原式＝216+432+864+1728+3456+6912+216-216＝6912×2-216＝13824-216＝13608

扩展：当然可用等比数列求和公式算，但是慢了。简便方法：原式＝$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\cdots+\frac{1}{4096}=1-\frac{1}{4096}=\frac{4095}{4096}$。

例7. 原式=2（1-$\frac{1}{100}$）＝$\frac{99}{50}$。理由：加数通项$\frac{1}{\frac{(1+n)n}{2}}=\frac{2}{n(n+1)}$。

例 8.AB 肯定错，代第一个加数试试，肯定 C。正规：也是把加式通项求出来，

$\frac{n}{(n+1)!}=\frac{(n+1)-1}{(n+1)!}=\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$，则原式$=\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots\cdots+\frac{1}{9!}-\frac{1}{10!}=1-\frac{1}{10!}$，C。

例 9. 110。

**十九、几何问题**

例 1. $C_4^2C_3^2$＝18（个）

例 2. 如图，平行四边形 ABCD，BC＝10 厘米，EC⊥BC 且 EC＝8 厘米，两块阴影部分的面积比三角形 EFG 的面积大 15 平方厘米，求 CG 的长。

解析：阴影-EFG=阴影+**FGCB**-（EFG+**FGCB**）=15，

……，答案 5.5。

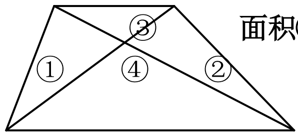
**注：像这种当求一个图形的面积缺少条件时，可用相等的另一图形代替，或将两个图形的面积差换成另两个图形的面积差的方法叫等量替换。**

扩展：这种题型，CG 肯定是对称轴，……，答案 24。

扩展：三角形面积 24，则长方形面积 48，

所以答案 29.6。

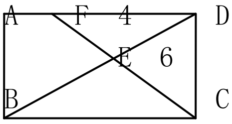
插入：请记住：**在梯形中（如图），**




**面积①＝②，①×②＝③×④**

例：如图，长方形 ABCD，

△ EFD 的面积是 4，△ECD 的面积是 6。求长方形的面积。




解析：连接 FB，则 $S_{\triangle BEF}$＝6，则 $S_{\triangle BEC}$＝9，所以答案＝（**6+9**）×**2**＝30。

**练习：**

1. 鸡兔同笼法，B。11. $A_6^n$=120，n=3。 2. A　3. C。

4. D。100：95：90。然后 95：90＝100：？，解出问号，再用 100 减就行了。

5. 特殊值法。假设问题为 60，则 A+B+C=5，B+C+D=4，A+D=3，三式相加得 A+B+C+D=6，所以答案 10。D。

6. 100/4=25，25×8=125。　　7. 18-6=12，12/2=6，6+1=7，C。

8. C。解析：从 8 个男生中选择 3 个，共有$C_8^3$种选法，从 5 个女生中选择 2 个，共有$C_5^2$种选法。所求为$C_8^3\times C_5^2$＝560 种选法。

9. 当然可用单位“1”法。

现用假设法：假设总量 60，则要灌 50。甲、乙、丙、丁：+20、-15、+12、-10，一轮+7，五轮 35，还差 15，轮到甲 3/4 小时，所以 C。　　此题类似青蛙跳井问题。

10. 比例法。当抄完 2/5 时，将工作效率提高 40%，即工作效率之比为 5:7，则完成剩余 3/5 的时间之比为 7:5，相差 2 份，2 份＝30 分钟，则每份 15 分钟，则原来完成剩余 3/5 的时间＝7 份＝105 分钟，完成整份报告的时间＝175 分钟，整份报告的字数＝175×30＝5250。因此，答案选择 D 选项。此题整除秒杀法可知答案一般被 30 整除，答案在 B、D 中。

11. B。根据题意可知三人跑 200 米所需要的时间分别是 12/5、12/7、12/9 分钟，那么每过一个 12 分钟他们三人都恰好在 A 点，所以第四次相遇 A 点是 12×4=48 分钟。 12. D。

13. “同样钱数”到底多少？设为 12 元，所以甲 100 克 12 元，乙 150 克 12 元，所以 250 克 24 元，所以 50 克 4.8 元。（当然也可设为 1 元，只是会出现分数，本人不喜欢。）

14. “每隔 5 天”即每 6 天，同理每 12、18、30 天，最小公倍数是 180，约 6 个月，

但绝不会刚好 6 个月，所以 D。
15.A。原题等同于从 1－9 中无放回地抽签，每次抽中的概率都是 1/9。故答案选 A。
16.一次后，浓度变为原来的 60%，所以 $0.8\times0.6^3$，D。
17.任意两根旗杆之间的距离最大为(5-1)×10=40 米，此时再添加任何长度的旗杆，都必须在这两根旗杆形成的线段上插，故最少需要准备 40×2=80 米长的绳子。
18.A。

**补充：解数量关系最牛十招**

【例 1】D。此题出题人考的是考生整体把握的能力，A、B、C 三个水管打开向水池放水，水池 12 分钟可灌满，而现在加入 D 管，帮助 A、B、C 三个水管放水，∴时间一定低于 12 分钟。

【例 2】A。此题问的是两车的速度相差，因此，做题时找与问题直接相关的数据，客车与货车的速度之比是 5：3，而 B、C 比值正好是 5：3，推断分别为客货车速度，而两车速度相差为 10 米/秒。

【例 3】A。足球和篮球的数量比为 8∶7，A、B 选项刚刚为 8：7，推断它们分别为足球与篮球的数量，而且只有 48 是 8 的倍数。

【例 4】D。此题注意到题目中工作 3 天之后，因此，当我们在算出剩下的工作天数时，很多考生会在考试的高强度，高紧张的情况下而选择错误选项，因此出题人给我们设置了一个陷阱。注意选项中的 16+3=19，因此，大胆推断 19 为正确选项。

【例 5】B。时钟问题如果题干或选项的时间分母为 11，提醒考生思考时针与分钟角度差；时间的分母出现 13，提醒时针与分钟的角度和。此题如果在考试时最直接的方法，是带上一块手表直接拨或画图，观察后不难发现角度为 B，当然如果有的题目角度相差不是很大，建议广大考生带上一块手表和量角器，便可解决。

【例 6】D。此题最大的难点在于题干比较长，考生在一分钟之内把题读下来 也就差不多了，因此我们建议考生在读数学运算时，直接读与问题直接相关的数据部分的相关内容。此题，因为大女儿可得 1/2，二女儿可得 1/3，三女儿可得 1/4，三个女儿因排名前后而一个比一个多，而 C 项总和不等于 13。

【例 7】B。此题如果根据题意，列出不定方程，28X+30Y+31Z=365，再通过整除、代入、尾数等方法，解出答案选择 B。但是如果广大考生对数字敏感，此题可变为：平月每月 28 天，小月每月 30 天，大月每月 31 天，一年 365 天，问一年共有多少个月？如果出题人这样问，那所有人相信都能很快解出答案。

【例 8】A。提醒广大考生朋友，在行测的考试中，像 C、D 这样的选项，在 90%以上的题目中都是不会选择。此题我们可使用特值求解，而最好的特值便是极限，假设某天的水流速度无限大，以至于船永远都回不去了，而之前是一个有限大的时间，之后是一个无限大的时间，因此时间变大。