第一讲　数字推理

第一节 数列型数字推理

一、双重分段数列

例 1.**共八项，最有可能双重、二二分段数列。**双重，奇数项成规律，偶数项成规律。C。

例 2.八项，双重或分段，双重试一下似不可行，看分段二二分段，同时结合**口诀：不要忘了加减乘除平方立方等**，此题为加，二二分段后和分别为 1，5，25，（125），答案 D。

练习：1. 双重，B。　2.两两分段差为 6，答案 C。

3.八项很有可能双重或二二分段。两两分段乘起来 120，答案 B。启发：不要忘了加减乘除平方立方等。

二、多级、平方立方幂数列

（一）多级

例 1. 数字均匀增大，可能加减法。减一下：32.33.35.39.47，再减：1.2.4.8.（16）。C。

例 2.减一下：1，0，1，1，2，这是什么呢？不要急于再作差，这里其实涉及稍后要讲的“关联数列”，1，0，1，1，2 的规律是①+②＝③。答案 C。

此题也有另外解法：①+②-1＝③，即原题的前两项和-1 等于后面一项，所以 4+6-1＝9。当然，这涉及了后面要说的关联数列。

笔者一直强调：**数字推理有时不止一种方法**，殊途同归，只要快速做出答案就行，“不管白猫黑猫，会抓老鼠就是好猫。”

例 3.此题减可能不行了。一看选项 ABD 都这么大，可能出现乘除法或平方立方，再用上口诀：不要忘了**前两项+.-.×.÷、平方立方等**，除一下：3.6.12，（24），尾数法 D。

例 4.作商，公比 2/3，D。

例 5.通过对该数列的观察，我们估计它是一组多级等比或等差数列，将 ABCD 各项代入，当将 42 代入时，把后一项和前一项作差后新数列为 3，7，21，45，79，再作差为 4，14，24，34 为一公差为 10 的等差数列，所以 B 成立，排除 CD，选 B。此题给我们的启发是：当括号在中间的多级数列等有可能用代入法。

练习：

1. 减了再减，A。　2.除一下：7.5.3.（1）。答案 A。

3.除一下：1.1.2.8，再除一下：1.2.4.（8）。答案 A。考试时此题若实在不会，用“瞎蒙大法”，选一个怪的，当然 A，当然有风险，迫不得已。

4.减一下：17.16.33.49.（82）。C。 5.不要忘了减：6，7，8，6，（7），8，差分段， B。

（二）平方立方幂

例 1.立方+3，答案 B。离平方、立方数越远，难度越大。

例 2.**不要只记得 26＝3^3-1（当然也有可能 5^2+1 或（-5）^{2}+1）却忘了-26＝（-3）^{3}+1，-6＝**（-2）^{3}+2，…答案 D。

例 3.**分数数列 $\frac{1}{a}$ 有可能看作 a^{-1}，**$\frac{1}{5}$＝5^{-1}、$\frac{1}{36}$＝6^{-2}，从后往前推：1^3、2^2、3^1、4^0、5^{-1}、6^{-2}、（7^{-3}），这就是幂数列，指数在变，但变化中有规律。熟记 7^3＝343，答案 D。

练习：

1.例题中有类似题目，答案 C。

2.大数入手，629 想到 625，625＝25^2+4＝5^4+4，…幂数列，答案 6^5+5 尾数法 D。

3.幂数列，2^5，4^4，6^3，8^2，10^1，12^0，（14^{-1}），C。

4.（-5）^{2}+1，（-3）^{3}+1，（-1）^{2}+1，1^3+1，3^2+1，（5^3+1），A。

三、关联数列

例 1.三项关联，①-②×2＝③。D

例 2. 两项关联。3×5-2＝13，13×4-2＝50，50×3-2＝148，…答案 D。注：部分数字推理可用瞎蒙大法：看倍数关系，13 是 3 的 4-5 倍，50 是 13 的 3-4 倍，148 是 50 的 2-3 倍，294 是 148 的 1-2 倍，选项是 294 的 0-1 倍，只有 D。

例 3. 三项关联，①×②＝③。D　例 4. 三项关联，（①-②）^{2}＝③。D

例 5. A。原数列满足如下规律：$a_{n+2}=a_n-\frac{a_{n+1}}{2}$（n≥1），即 $20=28-\frac{16}{2}$，$6=16-\frac{20}{2}$，$17=20-\frac{6}{2}$。因此原数列未知项为 $6-\frac{17}{2}=-\frac{5}{2}=-2.5$。

例 6. 四项关联，①+②+③＝④，答案 C。**四项关联一般七项。七项以上的数列可能为：多级、三四项关联、双重、分段等。**

练习：1. 有正有负，一般存在减法。①-②-③＝④，答案 D。　2. ①×②+3＝③，B。

3. 前两项相乘分别减 0，1，2，（3）等于后一项，答案 D。其实数字推理数字越小越难，因为可能性多，所以，数字推理有种思路：**从大数入手。**

4. 两项关联，前面一项×2 再分别+1，3，9，27。B。**两项关联最低限是 5 项，三项关联最低限是 6 项。6 项可能多级、关联等。**

5. ①-②＝③，B。三项关联一般 6 项，此题 5 项，是特例，其中一个原因是括号在中间。

〇“三步走”综合练习

1. 看到 513 想到 512 即 8 的立方，平方立方幂数列，D。2. 关联数列，（①-②）/2＝③，D。

3. 多级数列，减了再减，D。 4. 平方立方幂数列，C。

5. 减一下，差为 26、11、9、26、11、9，A。 6. 双重数列，D。

7. 多级数列，D。或：两项关联，①×3+1=②，结合尾数法。

8. 方法一，作差；方法二，（①+②）÷2＝③；方法三，数位。A。

9. C。原数列满足如下规律：$a_{n+2}=a_n-\frac{a_{n+1}}{2}$，即 $30=38-\frac{16}{2}$，$1=16-\frac{30}{2}$，$29.5=30-\frac{1}{2}$。因此原数列未知项为 $1-\frac{29.5}{2}=-13.75$。　10. 关联数列，前两项差的平方等于第三项，C。

11. 双重，C。12. 平方数列，C。13. 两项关联，B。或：二项加法合并。

14. 立方数加减 2，A。　15。作商，C。16. 前两项商 8，后两项差 15，A。17. 幂数列，A。

18. 三项关联，①×②-②＝③，D。

19. 作差：4，5，9，29，再作差 1，4，20，**猜想**下一项 120，D。更严谨：两项差的 4 倍、5 倍、6 倍、7 倍等于后面一项。

20. 共 8 项，有可能双重和二二分段数列，双重似乎不行，两项两项隔开后，前面一项乘以 3 减去 1 等于后面一项，B。

21. 作差得 2、5、10、17，再作差得 3、5、7，猜想后一项 9，答案应是 59，可选项没有，此路不通。注意 **3、5、7 下一项还有可能 11**，答案 B。

22. 同样作差：1.4.9.49.256，分别为 1.2.3.7.16 的平方，单独看这个很难找规律，可是用我的话说：**“一颗红心两手准备。”**即在作差时留意与原数列关系，所以后面是 65 平方，A。（当然感觉强的同学可发现：①的平方+②＝③）

23. 减一下得到 1，64，大家对 64 一定要有敏感性：8^2，4^3，2^6，研究后本题的差分别为 1^3，2^3，3^3，4^3。答案 D。

24. 此题可能对于某些同学来说较难，找不到规律，怎么办？减一下：15，42，87，再减 27，45，瞎蒙下一项 63，答案 A。恭喜蒙对了，但须知这样是有风险的，迫不得已。此题科学解法：1×3，2×9，4×15，7×21，（11×27）。

25. ①^2-②=③，C。

26.减一下：**2，3，10，29**，这是什么？这里有点难，分别为0^3+2，1^3+2，2^3+2，3^3+2，（4^3+2）。答案B。**2，3，10，29**后亦可作差.
27. 减一下：7.9.13.猜想19或21，结果19正确，7.9.13.（19）.（27）。答案A。
28.减一下：5，7，11，不要忘了质数列，下一项应当是13。答案B。
29. 根据有风险的“瞎蒙大法”，答案应当在CD中，否则出现小数干嘛？科学做法应当是：4×6-1＝23，23×3-1＝68，68×1.5-1＝101，（101×0.75-1＝C）。两项关联。
30. 前面一项分别加3、乘3、加3、乘3，C。
31.$②^2$-①＝③，尾数加估算法D。此题启示：**不要总是顺着看，注意倒着看、隔着看等。**
32.减一下：31.37.41.43这是什么呢？可能再减一下：6.5.2.（0），可是没答案。此路不通，换思路，原来31.37.41.43构成质数列，下一项是47。答案B。
33. 平方加减5，答案C。此题难在离平方数较远。当然，**做题不妨浏览选项或许有启发**，126想到125，144是12的平方，可能跟平方、立方有关。
34.与其中一道例题类似，幂数列，规律是：6^0，5^1，4^2，3^3，2^4，（1^5），A。
35.四级求差数列，A。 36.三三分段数列，A。 37.**不要忘了减，哪怕看似不大可能。**D。
38.读一遍，感觉强的话发觉①+③＝②，③+⑤＝④，⑤+⑦＝⑥，（⑦+⑨＝⑧）答案选3。此题严格说来就是间隔数列，与下文说的“关联数列”有点类似，细微区别同学们自己体会。
39.前两位都是12，后三位是120，60，40，30，分别差60，20，10，下面应当差小于10，瞎蒙A。科学解释：后三位120，60，40，30，比分别为2/1，3/2，4/3，（5/4），答案A。
40.D。原数列后项减前项得到：1、2、9、64、（　　），新数列可写成1^0、2^1、3^2、4^3、（5^4），底数和指数分别构成等差数列。因此原数列未知项为5^4+80，尾数为5，D项符合。

四、质合数列

例1.**记住质数列，勿忘合数列。**答案A。　　例2.质数列，答案C。

五、合并数列

例1.不要忘了加，前两项和121，属敏感数字，规律是两项相加为平方数：121，100，81，64，（49），答案D。　　例2.三项合并、三项相加：4，9，16，（25），答案B。
例3.两项乘法合并：两项相乘分别为1，2，4，8，16，32，答案A。

〇四五步（质合、合并数列）综合练习

1.质数列，A。 2.合数列，B。3.两项加法合并，C。或者：①×3+②×2＝③。
4.三项加法合并，C。 5.两项加法合并后是质数，A。

六、“怪”题集锦

例1.分别能被3、4、5、6、（7）、8整除，A或C，进一步分析：3×1，4×4，5×9，6×16，（7×25），可称分拆数列，答案C。分拆数列不详讲，好多分拆数列可用整除法做出。
例2.数位问题，前项数字加上这项数字各数位和等于后一项，如1489+1+4+8+9＝1511，C。
例3.56是8的7倍，…，A。
例4.数位问题，各项千位数和个位数组成一个两位数，除中间两位数，商分别为1、2、3、4、（5）、6，答案B。例5.尾数问题，前两项和的尾数为下面一项，答案A。
例6.对称问题，首尾依次相加和为17，答案D。
例7.整数部分分别为1，2，3，4，5，（6），答案C。
例8. A。本题考查的是二进制数的进位，属于数列的一种类型。数列是由数字1与0、1组合后按从小到大顺序排列得到的，故下一项为111。例9.后面一项是前面各项之和，C。

七、分数数列

例1.不把分数当分数看，关联数列，①+②=③，D。当然，此题也可通分母。
例2.通分子，A。

例 3. 通分，注意：**通分未必都通成一样**，比如此题通为：$\frac{4}{6}$，$\frac{5}{10}$，$\frac{6}{14}$，$\frac{7}{18}$，（$\frac{8}{22}$）。

例 4. 看分子分母特征，指的是并非看一个分数有多大，如此题 $\frac{6}{11}$ 并非看它值的大小，而是 6+11=17，那么 17+29＝46，即 23 两倍，最后项看成 $\frac{46}{76}$。分子是前面分子分母和，那分母呢？是对角乘+1，分子是 46+76＝122（不要马上选 B，因为有可能约分，当然要猜就选），分母 76+122+1＝199。B。　　　　　例 5. 不把分数当分数。①×②+1＝③，答案 D。

练习：

1. 把 $\frac{3}{2}$ 化为 $\frac{6}{4}$，C。 2. $\frac{2}{1}$，$\frac{3}{1}$，$\frac{5}{2}$，$\frac{8}{3}$，$\frac{13}{5}$，分子、分母前面两项和都等于第三项，B。

3. 看分子分母特征，C。4. 除一下，商 3/2，D。若看不出，此题也可这样思路：因为分数，想到通分，最后一项分母是 9，倒数第二项是 3，要是括号里是 1，那第二项应当是 1/3，…即第二项总的变为 8/（1/3），…，这样后分子也成规律。

5. 想到通分，分母是 6、8，想到 10、12，分子 1、3、5、6，此路不通，换一思路。其实此题从分子入手简单：0、1、3，想到 6、10，……C。　6. 分母 5、6、7、8、9，C。

第二节　图表型数字推理

例 1. 这种圈形一般指向中间。从大数入手，我们从第二幅看，对角积-对角差＝中间，D。

例 2. 外围和等于中间的 4 倍，C。

例 3. 这种圈形指向不定。从大数入手，我们从第二幅看，对角和相等，C。（思路同后面要讲的九宫图：**一般是横着看、竖着看、斜着看。**）例 4. 对角差＝对角商，A。

例 5. 图表型数字推理九宫图很有可能横看前两项怎样转化为第三项，或竖看前两项怎样转化为第三项，实为三项关联数列。还有可能把每行或每列当作整体，如整行的和相等。此题，横看前两项怎样转化为第三项，①+②+1=③，C。　　　例 6. 每一行的和都是 7，A。

练习：1. 横看，前两数和的 2 倍=第三个数。D。

2. 每一行的第二个数加上第三个数再减去第一个数结果都是1。B。

3. 每一行的和与每一列的和都为 15。D。　4. 左列和-右列和。A。

5. (11+7+5)×2=46，(9+8+7)×2=48，(7+3+6)×2=32，(10+5+4)×2=(38)。B。

6. 对角积=对角和，B。

7. 指向左下方，D。或对角商=对角积。8. 对角和=对角和平方。A。9. 外围和=中间的平方，B。

10. 左列和＝右列积，C。11. 中心数字为周围数字的最小公倍数。B。12. 五七三十五。D。

13. D。（前一列的数字-1）÷中间数=后一列对应的数字。

14. 上下积分别为 24、25、26、27 的平方，D。　　15. 对角差乘和。D。

16. 上面和-下面和的一半。B。

第二讲 数学运算

第一节　数学运算方法论

一、假设法

例 1. 这是浓度问题。盐的质量与盐水质量有关，盐的质量没定死。假设法：设溶质 12，则溶液从 200 变为 300，所以 12/400，A。

例 2. 工程问题一般三法：快慢法（部分题目，速度最快）、单位 1 法（本人不喜欢，因为有分数，可能速度慢）、假设法。此题：设总量为 30 和 20 的最小公倍数 60，效率：甲 3、乙 2，甲 14 天完成 42，所以乙完成 18，18 除以 2 得 9，所以 C。

例 3. 此题好多参考书解析得较繁。　　头脑中重新构造图形，只要满足题目要求就可，我们要特殊化：变为等边，没违背题目条件，所以答案不变。此时角 ANM＝75 度，所以角

MNC＝90-75＝15 度。　　当然，若图画准确，直接用量角器量更投机。

例 4.“每班人数相等”到底是多少？看这道题目应该是没有定死，所以不管多少，一般答案不变。选最简单的，设为 1 人。“二、三班女生总数”设为 0。所以在“二、三班女生总数”上写个 0、“一班男生”上写个 1。即一、二、三班都是 1 男 0 女，共 3 男 0 女。设“七、八、九班男生”为 0，所以“四、五、六班女生总数”为 1。即四五六共 2 男 1 女，七八九共 0 男 3 女。所以 B。

此题也可这样理解：由“一班的男生人数比二、三班两个班的女生总数多 1”可知一二三班男生相当于二三两班人数多 1；由“四、五、六班三个班的女生总数比七、八、九三个班的男生总数多 1”可知：四至九班男生相当于四五六班总人数少 1，所以全部男生人数相当于五个班人数，男女生之比为 5：4。

扩展：这是“容斥原理”题，一般有四法：公式法、画图法（韦恩图）、假设法（部分题适用）、倍区法（部分题适用）。先讲此题的假设法：设 1-12 题甲对，乙也对 1-12 题，丙对 9-20 题，同学们可画图示。这样，仅一人做出的（即难题）是 13-20 共 8 题，三人做出的（即容易题）是 9-12 共 4 题，所以 C。

此题也可用倍区法：先画韦恩图，没有重叠部分记为 A（即一倍区）、两部分重叠的部分记为 B（即两倍区）、三部分重叠的记为 C（即三倍区），这样则有 A+B+C＝20　①，A+2B+3C＝36　②，要求的是 A-C。解法：①×2 得 2A+2B+2C＝40　③，③-②即 A-C＝4。

练习：1.D。　2.假设法，B。

3. 特殊值法，假设总量为 6 和 15 的最小公倍数 30，则共 5 人，男 2 人，则女 3 人，30/3=10。

4. 大正方形面积不定，我们假设它和小正方形一样大，则 S＝6×6/2＝18，A。有些同学提出疑问：一样大怎么可以呢？不是说“大”吗？好，退一步，我们假设大正方形无限接近小正方形，那么三角形的面积不是无限接近 18 吗？所以 A。

5. 特殊值法，当P在A点的时候PE+PF=PF=12×5／13=60／13，选B。

二、公式法

例 1. 方法一：画图去数。方法二：转化为“头”数。本来就有两个头，一刀下去会增加 16 个头（不是 8 个头），六刀下去共增加 96 个头。加上原来的两个头，共 98 个头，那么有 49 段。方法三：用公式，**绳子数＝2^n×刀数+1，（n 为对折次数）**。代入公式：2^3×6+1＝49。

例 2. 99、99、100.

扩展：淘汰赛问题：（1）**决出冠亚军需 N-1 场**；（2）**决出 1、2、3、4 名需 N 场**。

本题：余 2 名，须淘汰 98 人，需 98 场。也可假设男女各为 50 名，则 49+49=98；或假设男 1 女 99，还是 98 场。扩展：六组，每组四人，四人循环赛 C4 取 2 场＝6 场，6 乘 6＝36 场。16 强决出冠亚军和三、四名需 16 场。　　共 52 场。

例 3. 日历问题中的星期几问题：**一年就是 1，闰*日*再加 1；一月就是 2，多少再补算。**

假设一年 365 天，365/7 余 1，所以经过 365 天后星期几相当于经过 1 天后星期几，而实际有可能 366 天，则若闰日在范围内的话再加 1。假设一个月 30 天，30/7 余 2，所以经过 30 天后星期几相当于经过 2 天后星期几，而实际上一个月可能有 31 天，二月份还可能 28 或 29 天，则 31 天再加 1，28 天再减 2，29 天再减 1。

此题：一年就是 1，则两年就是 2，闰*日*再加 1，所以二+2+1=五，C。

扩展 1：4 月加 8。8 月、10 月共再加 2。总共加 10，5+10＝15，即星期一。

扩展 2：好题。枚举有点慢。用口诀。口诀的前提是同一号。本月 29 日是周四。五+4＝九。可实际是周四。九要么减 5（不可能），要么加 2. 说明上月和上上月都是 31 天，那只可能是七八两个月，说明本月是九月。十、十一、十二，还有 3 次。B。

扩展 3：“某年有 53 个星期 N 且元旦不是星期 N，问下一年最后一日星期几”，这种题目秒杀，加一天。此题理由：共 53 个周四，若 365 日，则必为首尾日都是周四。此题说首日非

周四，则最后一日必为周四，则为 366 日，（首日为周三）运用口诀，一年就是 1，一年 366 日之后的一年必为 365 日，∴直接加 1 就行。

例 4.时钟问题：**度数×2/11**。理由：实际是追及问题。路程差＝速度差×时间。追及度数＝5.5×时间，转化一下即度数×2/11。5.5 是什么？是**速度差，即一分钟分针比时针多走 5.5 度。（一分钟分针走 6 度，时针走 0.5 度。相同时间内分针走的度数与时针走的度数之比是 12：1，即速度比是 12。）**这个很重要，必须记住。另还要记住 **1 大格 30 度**。此题：240×2/11＝480/11 分钟。

扩展：**假设时针不动，可很快看出**分针追了 180 度，度数×2/11，B。

例 5.车往返接人问题：（1）当**人速相同、车速不变**时：**x=y=**$\frac{2}{3+n}$**s.**（x, y 为步行路程，n 为车速与人速的比值，s 为全程）。（2）当**人速相同、车速变化**时：**x=y=**$\frac{\frac{1}{v_{空}}+\frac{1}{v_{载}}}{\frac{2}{v_{空}}+\frac{1}{v_{载}}+\frac{1}{v_{人}}}$**s.**

（3）当**人速不同时**（不管车速变不变）：**x/y=**$\frac{(v_{载}-v_2)v_1}{(v_{载}-v_1)v_2}$.（$v_1$, v_2 为两人速度）

此题：先确定人速同不同？一看不同，就用第三个公式：x/y=［（39-4）×3］/［（39-3）×4］，D。

三、归纳法

例 1.先忽悠一下：请问分得少的人至少几朵？答案 1 朵。继续忽悠：请问分得最多的人至多几朵？答案 11 朵，因为要使多的人越多越好，那么少的人越少越好，其他四人分别为 1，2，3，4 朵，余 11 朵。例 1，要使“最多的人至少”说明越平均越好，21 除以 5 的平均数约为 4，对于这种题型，我们首先把近似平均数写在中间，然后两边分开写。2，3，4，5，6，这样加起来 20，还差 1，这个 1 只能加给 6，否则会出现重复。A。注：奇数个有中间，若偶数呢？中间写两个。比较：此题与例 1 不同之处在于每个部门人数可等，B。比较：C。

比较：第十最低考了多少，所以前九越高越好，100 分至 92 分，快速求和 192 除 2 乘 9 等于 864。有一人不及格也是越高越好 59。余 20×88-923＝837，即 10 人共 837，每人不同，问最大至少多少？837/10 商 83 有余，中间写 83.84，79.80.81.82.83.84.85.86.87.88，差 2 只能加给后两个，所以 89。

例 2.归纳总结，这种题目一减一除就行，4-1＝3，15/3＝5。可这样理解：4 空＝1 空+1 酒，→3 空＝1 酒。

扩展：X+X/6＝347，解得 X＝297.4…，注意进一法（因为涉及借瓶因素），B。

比较：D。根据空瓶换酒公式可知，11 个空瓶能换 1 瓶酒，101÷11=9……2，即可换 9 瓶酒。

扩展：好题。“归纳法”中谈到“一减一除”，此题易出错，不能 20+20/(7-2)=24，“一减”一定要**转化为学过的“几个空瓶换 *1* 瓶啤酒”**，这样，此题相当于 3.5 个空瓶换 1 瓶啤酒，这样后再用“一减一除”，所以答案 20+20/(3.5-1)=28。

扩展：4 盖＝1 空+1 酒+1 盖，推得：3 盖＝1 空+1 酒　（1）
2 空＝1 空+1 酒+1 盖，推得：1 空＝1 酒+1 盖　（2）

由（1）（2）得方程组：3 盖－1 空＝1 酒
1 空－1 盖＝1 酒

解得：1 盖＝1 酒
1 空＝2 酒

一开始买 5 瓶酒，喝了五瓶，有 5 盖、5 空。5 盖＝五酒、5 空＝十酒。共二十
顾客：老板，来 20 瓶啤酒！老板：好的，来咧！喝完后...顾客：老板，结账！老板：来咧！顾客递给老板 10 元（5 瓶），给老板 20 个瓶子（10 瓶）和 20 个瓶盖（5 瓶）。5+10+5=20（瓶）

理论上讲，每瓶酒除去瓶子和盖子，酒值 0.5 元，10 元肯定能喝 20 瓶，这就看附加条件了能像你们说的那样借瓶子和盖子而且能等价借还瓶子和盖子去换的话就能喝 20 瓶，不能借的话就是 15 瓶。所以按题目所说最多可以喝多少瓶酒，这里是最多而且没别的限制条件答案就是 20 瓶。

为了便于说明，用以下符号代替：P=酒瓶；G=瓶盖；J=瓶里的酒

已知： 2 元=1P+1G+1J；2 元=2P；2 元=4G 求 10 元能喝道几瓶啤酒，即能消费到多少个“J”。

一、直接从数学的思维来看：

P=1 元，G=0.5 元，J=0.5 元； 10 元=20J。

二、按照实际来看：

1、第一步 10 元，先买回来 5 瓶酒，喝完后剩 5 个瓶子和 5 个盖子；（喝 5 瓶）
2、拿 4 个瓶子，4 个盖子换回 3 瓶酒，喝完后剩下 4 个瓶子和 4 个盖子；（喝 3 瓶）
3、拿 4 个瓶子，4 个盖子换回 3 瓶酒，喝完后剩下 3 个瓶子和三个盖子；（喝 3 瓶）
4、拿 2 个瓶子换 1 瓶酒，喝完后剩下 2 个瓶子，4 个盖子；（喝 1 瓶）
5、拿 2 个瓶子，4 个盖子换 2 瓶酒，喝完后剩下 2 个瓶子，2 个盖子；（喝 2 瓶）
6、拿 2 个瓶子换 1 瓶酒，喝完后剩 1 个瓶子，3 个盖子。（喝 1 瓶）。

一共能够喝 15 瓶啤酒，但是还剩余 1 个瓶子和 3 个瓶盖。

三、如果想喝到理论的 20 瓶，需要老板好心，配合，愿意借瓶子和盖子才行。

因为从理论来算，剩下的 1 个瓶子，3 个盖子还值 2.5 元，还能喝 5 瓶酒。

1、借 1 个瓶子，借 1 个盖子，换 2 瓶酒，喝完后归还欠的瓶和盖，剩 1 个瓶子，1 个盖子；（喝 2 瓶）
2、借 1 个瓶子，换 1 瓶酒，喝完后归还欠的瓶子，剩下 2 个盖子；（喝 1 瓶）
3、借 2 个盖子换 1 瓶酒，喝完后归还欠的盖子，还欠 1 个盖子，剩下 1 个瓶子；（喝 1 瓶）
4、借 1 个瓶子换 1 瓶酒，喝完后归还欠的瓶子盖子，两不相欠。（喝 1 瓶）。

这样，又能用 1 个瓶子和 3 个瓶盖，换 5 瓶啤酒，一起可以喝到 20 瓶啤酒。

四、整除法

例 1. 女生的平均分比男生的平均分高 20%，先把百分数化成最简分数，女比男多 1/5，“××比××多几分之几”用整除法，更精确地说用到**份数思想**，男为 5 份，女为 6 份，答案肯定能被 6 除尽，放宽点“瞎蒙大法”一般能被 6 整除（即在取整数情况下能被 6 整除）。A。更放宽点：因为乘 1.2 后得到要求的东西，**一般**能被 12 整除。

例 2. 能被 3，4，5 整除即能被 60 整除，A。

例 3.李四养的猪有 12.5%是黑毛猪→李四养的非黑毛猪能被 7 整除，C。例 4. A。

扩展 1：180N-2，5 个。扩展 1：三个一起来比较慢，两个来，前两个 45N-2，即 45N+43，即除以 45 余 43，与除以 4 余 1 合并，180N+（ ），往上推至 133，180N+133，5 个。

例 5. 180N+7，A。 例 6. 应该能被 3 整除，C。

练习：1. 报考 A 岗位的女生数肯定能被 3 整除，排除 BD。代入 12（此题小的先代，数值小，可能简化），则 A 男 20，B 男 12，B 男 6，正好，所以 C。

2. 1360 能被选项整除，代入排除法，C。

3. 能被 4 整除，排除 C。667 应当被选项加 1 整除，代入排除法，A。

4. 整除秒杀法，能被 47 整除，A。 5.秒杀法，能被 15 整除肯定能被 3 整除，C。

五、比例法

例 1. 底面积之比为 5：4→上升速度之比 4：5，快速代入，选项减 9 与选项减 5 之比为 4：5，更快速选项减 9 能被 4 整除，B。

例 2. 甲：乙：丙=100：98：97，

100：？，　　？=97×100/98，答案是 100-(97/98)×100=100/98，A。

例 3. 环比问题。“5 斤肉，7 斤肉”，可在它们上方写个 35，

14　　　35　　35　　60　　60　　　126

2 斤油可换 5 斤肉，7 斤肉可换 12 斤鱼，10 斤鱼可换 21 斤豆

14：126=1：9

？：27　　　A。

例 4. 此题看成工程问题用单位 1 法更快，设烧了 X 小时，1-X/5=4(1-X/4)，解得 X=15/4。

例 5. 台数与时间成反比。台数比 7：8，1 份 2 台，所以原 14 台。14：12=7：6，1 份 2/3 小时，所以原 4 小时。B。

扩展：D　　原　　现　　　　　原　　现

时　　7　：　5　　　→ 9/2　：　5　　1/2 份＝2 天→每份＝4 天

→　效　　5　：　7　　　　5　：　3 份+2 份*3/4＝9/2

1/3 甲效+1/2 乙效＝2 份

甲效+乙效＝5 份

解得：甲效＝3 份，乙效＝2 份

例 6. 比例法。当然，此题可用瞎蒙大法（有风险）：能被 2、3 整除，B。

巩固练习：. 此题有投机取巧法，共 6 小时，假设来回各 3 小时，答案并介于 3600 与 4500 之间，C。若选项都 3600 与 4500 之间，怎么办？比例法：速度比 5：4，时间比 4：5，1500 乘 8/3 等于 4000。

例 7. 各人钱数比等于**倒数比**。5/3：4/3：3/2=10：8：9，所以张 40、王 32、李 36，C。

六、十字交叉法

例 1.

解析：

20%　　　　10%　　2

　　　15%

5%　　　　　5%　　1

说明混合前的溶液质量比是 2：1，C。

巩固练习 1：80 与 82 差 2，90 与 82 差 8，1：4。若选项有 4：1 咋办？**因为十字交叉法要倒过来，为加速，我们可不画图，把后面的先减**，如本题可先看运动员。

巩固练习 2：D。

音乐系：$\frac{1}{4}$　　　　$\frac{2}{5}-30\%=10\%$

　　　30%

美术系：$\frac{2}{5}$　　　　$30\%-\frac{1}{4}=5\%$

或：列方程组，三个未知数仅两个方程，说明没定死，可假设总数。

巩固练习 3：A。

比较：$\frac{42359}{1.079}\times\frac{1.096}{16021}\approx\frac{42\times1.1}{1.08\times16}\approx\frac{21\times1.1}{1.08\times8}\approx\frac{21}{8}$≈2.6，B。

练习：1.十字交叉法，B。2.十字交叉法，A。3. 十字交叉法，C。4. A。

第二节　数学运算各种题型分析

一、行程问题(含狗追兔问题、电梯问题、公车问题等)

例 3. 电梯到达时间＝40/1＝40 分钟。电梯静止时，小明到达时间＝40/9 分钟，$V_{明}/v_{梯}=9$。

扩展：$5(20+V_{梯})=6(15+V_{梯})$，解得 $V_{梯}=10$，$5(20+10)=150$。

扩展：假设法，设女速为 1，则男速为 2，则女时为 40、男时为 40，(在此**转化为学过的“时间”**)，$40(1+V_{梯})=40(2-V_{梯})$，解得 $V_{梯}=0.5$，所以 60。

例 8. 秒杀，速度 3，求路程，能被 3 整除，D。

例 10. 秒杀法，答案应当是 45 的倍数即是 9 的倍数，B。(减去 45×3 应当能被 55 整除。**求路程的选择题想想整除秒杀。**)

比例法，时间比 11：9，2 份 12 分钟，1 份 6 分钟，11 份 66 分钟，69×45，9 的倍数，B。（盈亏法，每分 45，少 315，每分 55，多 275，所以规定时间 59 分钟，45×69，9 的倍数，B。） 附加一句：此题规定时间应是 62 分钟。

四、容斥原理(含做对做错问题)

例 1. 27+28-50=5。（27+28-（50-4）=9，**把都做错的先排除掉**。）此题也可用假设法来解。

例 2. 容斥原理本人一般习惯于公式法。三圆圈的公式是：$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|-|A\cap C|+|A\cap B\cap C|$。此题：17+30+13=60，60+5=65，65-35=30，即 $|A\cap B|+|B\cap C|+|A\cap C|=30$，所以 35-(30-5×2)=15。

此题也可用倍区法：只参加一个小组的设为 A，只参加两个小组的设为 B，则 A+B+5=35，A+2B+3×5=17+30+13，解得 A=15。　　练习. A。

例 3. 此类题目不止一种解法。在此，我们用往反面想的思路，小明 32×，小刚 42×，小红 22×，要使三人都做对的越少越好，只要三人错得越多越好，三人最多错 96 题，A。

若题目改为三人都做对的题目至多几题？简单，58 题。

若题目改为小明做对 68 题，小刚做对 58 题，小红做对 70 题，问三人都做对至少几题？以后问**三人都做对至少几题？首选往反面想。**小明 32×，小刚 42×，小红 30×，要使三人都对的越少越好，只要三人错得最多，共 104×，最多错 100 题，则三人都做对的至少 0 题。三人都做对的至多也是 58 题。三人都做对的至多几题，简单。

练习：1. 公式+尾数法，A。 此题也可：756-169-294。

2. 实质做对做错题，不喜欢乒乓球 420 人，不喜欢羽毛球 240 人，不喜欢篮球 350 人，不喜欢足球 560 人，要使都喜欢的最少，即不喜欢的最多，只要这些不喜欢的都不重复即可，不喜欢最多 420+240+350+560＝1570，B。

3. 答案 D　参加两科的一共有有 2（120+80）-260=140 人；女生参加两科的有 140-75=65 人，所以只参加数学没参加语文的女生有 80-65=15 人。

七、排列组合问题

例 1. (1)**不相邻问题插入法，把可相邻的先排好**。四位男生可相邻先排 A_4^4，形成了五个空，在五个空中插入 3 个，并且考虑顺序，A_5^3。所以 $A_4^4A_5^3=1440$。

(2)**必相邻问题捆绑法**。把四个男生捆绑在一起，并且本身考虑顺序，先排好，A_4^4，然后把这四个男生看成整体，与其他三位女生构成全排列。所以 $A_4^4A_4^4=576$。

(3)甲乙本身两排法，然后从剩下的五名学生中选 2 名插入甲乙(或乙甲)中间，最后把甲乙和这两名学生看成整体与其他三位构成全排列。所以 $2A_5^2A_4^4=960$。

例 2. $A_6^6/6=120$，可是项链是可以**翻**转的，所以还要**除以 2**，答案 60。

例 7：C_{17}^8　扩展：C_{16}^2

扩展：此题用“隔板法”。先“**垫底**”：每个部门各发 8 份，余 6，C5 取 2，所以 10。

再扩展：可用隔板法，把 9 颗糖排成一排(糖相同)，中间形成 8 个空，一天吃完相当于八个空插入 0 块板、两天吃完相当于八个空插入 1 块板、…、九天吃完相当于八个空插入 8 块板，所以 $C_8^0+C_8^1+C_8^2+C_8^3+\cdots+C_8^8=2^8=256$。

比较：注意此题是大异小异，不用隔板法。分类：

1+1+1+3：$C_6^3 A_4^4$=480（从 6 人中选 3 人捆绑在一起当 1 个人与另 3 人构成全排列）。或者：

一	二	三	四
C_6^3	C_3^1	C_2^1	C_2^1

注意：**右上方一样，直接相乘才考虑了顺序**，即后三个已考虑顺序，但C_6^3未考虑顺序，所以还要乘以 4，即$C_6^3 C_3^1 C_2^1 C_2^1 \times 1$=480）

1+1+2+2：$\frac{C_6^2 C_4^2 A_4^4}{A_2^2}$=1080（$C_6^2 C_4^2$已经考虑顺序，而$A_4^4$又考虑了他们的顺序，所以要除以$A_2^2$。或者式子这样列：$\frac{C_6^2 C_4^2}{A_2^2}\times A_4^4$，这个叫做先消序）或者：

一	二	三	四
C_6^2	C_4^2	C_2^1	C_1^1

注意：**右上方一样，直接相乘才考虑了顺序**，即前两个、后两个已考虑顺序，所以还要乘以C_4^2，即$C_6^2 C_4^2 C_2^1 C_1^1 \times C_4^2$=1080）

此题答案 1560，A。

例 8.瞎蒙大法，C_5^3=10，应当是 10 的倍数，不可能 10，所以 D。

细致解法：C_5^3=10，三个瓶贴错的情况是 2，（遵循规律 0，1，2，9，44，265，……，“数字推理”部分有论及），所以 D。

八、概率问题

例 7.A。有且仅有 1 人在培训后返回原分公司，则先将返回原分公司的员工分配好，有C_5^1=5 种情况；剩余 4 个人均未返回原分公司，即将 4 人进行全错位排列，有 D_4=9 种情况。因此，有且仅有 1 人在培训后返回原分公司有 5×9=45 种情况，将 5 人随机分配有 A_5^5=120 种情况，则满足题干要求的情况发生的概率为$\frac{45}{120}$×100%=37.5%，大于 35%。

扩展：解法一：总分子除以总分母，大于等于 8 分有两种情况：5 题中对了 4 题或者 5 题都对。5 题对了哪 4 题有 C_5^4 种情况，即这 4 题都选了正确的唯一一个选项，但要考虑另一题选错了，选错的有三种可能性。所以总分子 C_5^4 ×3+1，总分母是 4×4×4×4×4.C。

解法二：分数乘分数。$C_5^4 \times (\frac{1}{4})^4 \times \frac{3}{4} + (\frac{1}{4})^5$=C

十二、鸡兔同笼问题

例 1.鸡兔同笼问题，模式化处理：问兔，假设全是鸡；问鸡，假设全是兔。此题问兔，假

设全是鸡，应当有 176 只脚，少了 24 只脚，因为每只鸡比每只兔少 2 只脚，所以 24/2=12，这就是兔的只数。

例 2. 鸡兔同笼法再结合尾数法：5×7＝5，0-5＝5，5÷5 选项只有 5。（完整法：假设全是乙，45×27＝1215（所有两位乘两位数可一步等出，方法是个位乘个位是个位，然后十位乘个位，个位乘十位，即对角乘，然后相加再加要进的数所得结果的个位就是十位数字，最后十位乘十位加要进的数），1290-1215＝75，75 除 5 等于 15）

例 3. 秒杀法，小和尚人数应当是 3 的倍数，100 减去选项是 3 的倍数，只有 B。

鸡兔同笼法，假设全是小和尚，则吃 100/3 个，差 200/3 个，除以 8/3，等于 25。

例 4. 此题当然可用代入法。用鸡兔同笼法更快，发现蜻蜓和蝉都是 6 条腿，看成同一东西，问蜘蛛，假设全是蜻蜓和蝉，则共有 108，差 10，除 2 等于 5，所以 C。

十三、方阵问题

例 1. 秒杀法，**方阵总人数应当是个完全平方数**，所以 C。

(死板解法：最外层共 96，则最外层每边(96+4)/4=25，25^2=625。)

例 2. **方阵外层比里面一层总数多 8**，所以(2008+8)/2=1008。

例 3. 间接法。设调整前边长 X，则 $X^2-(X-8)^2=(X-16)^2-(X-16-16)^2$，注：**方阵外层比里层每边多 2**，8(2X-8)=16(2X-48)，X-4=2X-48，X=44，8(88-8)=640。

十四、植树问题

例 1. 31 比较：30 再比较：3 例 2. 72/18+1=5 楼。例 3. 15×4-4=56 棵。

例 4. 分别为 9 刀、11 刀、14 刀，假设法设总长 60，则每段长分别为 6、5、4，**转化为刀数**，利用容斥原理公式有 9+11+14-1(注:60/30=2,刀数应当是 1)-4(注:60/12=5 刀数是 4)-2(注：60/20=3 刀数是 2)+0(注：60/60=1 刀数是 0)=27 刀，答案 C。此题一定要细心。

例 5. 转化为段数，乙：X 段+5 段；甲：2X 段+(X-5)段。则 2(X+5)=3X-5，解得 X=15 段。因为封闭型，所以 15×4=60 棵。

练习：尾数法，C。

十五、年龄问题

例 1. 此种题型秒杀，模式式化处理，39-3=36，36/3=12，3+12=15，39-12=27，“3”小，指甲，“15”小，所以 15 是甲，27 是乙。

(理由：

	现在	时刻 1	时刻 2
甲	X	Y	3
乙	Y	39	X

根据年龄差不变得 39-Y=Y-X=X-3，可知 39、Y、X、3 成等差数列，39-3 即三个公差，…。注：**年龄问题一般通过列表都可解。**)

练习：列表法，答案 18。

例 2. 抓住“年龄差永不变”，差 5 份、4 份、3 份，差 60 岁，C。

十六、平均数问题

例 1. 22+25+27=74 即三人年龄和，74-22×2(注：**平均数问题千万不要忘了个数**)=30 丙，则乙 20、甲 24。例 2. [5.75，5.85），总和[189.75，193.05），和肯定是偶数，取 190，A。

十七、最值问题

例 1. **千万不能 6×6=36**。若周长 18，则 4.5×4.5。现在是长+2 宽=18，根据“**若*两数*和为定值，则*两数*相等时，乘积最大**”，所以长 9、宽 4.5，面积 40.5。

例 2. x 奇数，+1 后必为偶数，即 p．q 为偶数，则 p．q 中必有一数为 2，设 q=2，则 x=2p-1，又因为 x 是小于 1000 的质数，要使 x 最大，p 取 **1000 以内的最大质数 997**，所以答案 1993。

例 3. **注意第一位不一定是** 1。这样理解：位数应当越少越好，所以取 9，2003/9=222……5，所以 59999……9999(后面共 222 个 9)。

例 4. K 个奇数的和是 1949（奇数），则 K 为奇数，A 或 C。此题要使 K 最大，即使所取的奇数越小越好，则取 1、3、5、7……，即从 1 开始的连续奇数，其和为 K^2，代 45^2=2025>1949，所以 A。

十八、代数问题

例 1. 设 $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}$=k，C。 例 2. 添一项（2-1）。（$2^{16}$-1）例 3. $\frac{8}{5}$。

例 4. 因为选项末两位不同(注意-60 与 60 也属末两位不同)，所以可用“两位尾数法”：02×03-03×02=0。

两位尾数法扩充：同样是末两位不同，可用“两位尾数法”，94×02 末两位 88，93×03 末两位是 79。88-79 末两位是 09，A。

补充练习：

5. 特殊值法。假设问题为 60，则 A+B+C=5，B+C+D=4，A+D=3，三式相加得 A+B+C+D=6，所以答案 10。D。