**浅谈重排与反演**

作者：李明洋

指导老师：杨力

班级：高2016级11 班

# 摘要

随着抽象数学的潮流日益兴盛（说的就是你，拓扑），越来越多的学生开始把目光投注到没那么“数字”的“抽象”的逻辑上，而渐渐地忽略了连续数学和离散数学等较为“具体”实在的数学技巧。回归高中课堂，巧妙地排列组合与错位相减带给我们以启迪，数学竞赛上美妙的容斥原理还震撼人心，信息学竞赛的线性与非线性反演让人着迷。将这些原本纯粹的数学技巧结合在一起时，就构成了“水门汀”的一角。

## 关键词 重排 差分 反演

# 记号注释

记录本文中一些非国际标准的符号。国家标准符号请参见GB 789-65.

|  |  |
| --- | --- |
| 记号 | 名称 |
|  | 以2为底的对数： |
|  | 以10为底的对数： |
|  | 底：x向下取整 |
|  | 顶：x向上取整 |
|  | 无限和式 |
|  | 有限和式 |
|  | m与n互素 |
|  |  |
|  | 总量为n，有k个位置不变的排列数 |
|  | n的倒阶乘,即 |
|  | 余数： |
|  |  |

# 一、重排

当听说重排的英文单词是derangement时，我整个人就沸腾了。

本人并没有使用信息学竞赛和离散数学中错排的叫法，总感觉用“错”排听起来不舒服。就用了具体数学里的重排叫法。至于倒阶乘的符号，就综合了一下，使用了，而不是西班牙符号¡。

言归正传，在高中学习了排列组合初步，所以组合公式使用高中教材上的。我们都知道：

那么组合与重排有什么不同呢？举个例子吧[1]。

某场球赛后，胜利一方的n个球迷将他们的帽子高高抛向空中（假设每人都有），这些帽子在风中摇曳后随即落下，n个球迷每人重新获得了一顶帽子，问有多少种方式使得恰好有k个球迷得到了他们原本的帽子？

例如n=4，帽子被命名为A,B,C,D，那么落下的总情况数为4!=24。

ABCD ABDC ACBD ACDB ADBC ADCB

BACD BADC BCAD BCDA BDAC BDCA

CABD CADB CBAD CBDA CDAB CDBA

DABC DACB DBAC DBCA DCAB DCBA

不难看出所以可以引入一个新的定义：，我们定义，些许你已经看出点什么猫腻了，但是不急，我们可以通过容斥原理轻松推得：

模仿着组合的递归式，我们可以推出的隐式递归式：

杨辉三角中我们得知了组合的递推式，类比一下，我们亦可以得到一个新的三角形：

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| n |  |  |  |  |  |  |  |
| 0 | 1 |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 0 | 1 |  |  |  |  |  |
| 2 | 1 | 0 | 1 |  |  |  |  |
| 3 | 2 | 3 | 0 | 1 |  |  |  |
| 4 | 9 | 8 | 6 | 0 | 1 |  |  |
| 5 | 44 | 45 | 20 | 10 | 0 | 1 |  |
| 6 | 265 | 264 | 135 | 40 | 15 | 0 | 1 |

公式（1.2）中的D(k)!与D(n-k)!的转化利用了排列的第二定理。以n=3举例，当有1个球迷获得了之前的相同的帽子时就是3,两个时就是==0，类比一下就可以推测：

然后因为不知道接下来该做什么，戛然而止。

# 二．反演

反演是invertion,而有害烟雾的来源是inversion。

先来谈谈这里说的反演是什么。设有两个多项式簇。每个多项式都是k次的，若满足：

且系数满足正交性：,那么下面两式即可相互推导：

对于这两个整标函数来说，这个相互推导的式子就是**离散变化，**即**反演**。

由此我们可以大概明白什么傅里叶变换及其逆变换，第一类斯特林数，第二类斯特林数亦是如此。

1.莫比乌斯反演（见附件 证明mu.docx）

2.牛顿级数（亦或者说是高阶差分）

并不准备展开谈论牛顿级数，设有：

令，那么可以推导出

而这个被表示成二项式系数的倍数之和的展开式就称为的**牛顿级数。**某方面来讲，牛顿级数是有限微积分对无限微积分中泰勒级数的回应。利用加法公式原则，我们可以知道（类似于错位相减的原理）：

那么对于泰勒级数对于，可写成

由于对于所有的，都有，所以

令，则

整理化简一下就可以得到

对于(2.8)，我们可以看做存在特殊情况[2]

其证明即是一个隐性的**容斥定理**的运用，在此不给予证明。我们可以把它化成一个更加常见的形式：

# 三．应用

从重排那里我们学到了排列组合、二项式定理……又经过反演，捡起了遗忘已久的错位相减与容斥原理，关键的材料已经就位，现在就是见证奇迹的时刻。

由于是离散数学，就不是狄拉克海上的涟漪了，而是逆温层(inversion)上的波澜壮阔。

那么对的递归式,我们将它带入到。

取,就可以解为：

我们尝试化简一下：

写成展开的形式就是：

就如刚刚用3来举的例子：

# 三．扩展

既然递归式写成了，就起兴算算收敛的速度吧！

经典的裂项相消后括号中的值。所以Dn!与n!/e相差无几：

所以当n很大时那顶帽子没有回到它原主人的手中的概率约为37%。而且这个式子在n很小时误差可以忽略，实在是考试填空选择的一把利器。

谈了这么多有趣的东西，再把眼光移回那个“未命名”三角形，哪里有很显眼的斜着的两行，一行全为1，一行全为0。我们可以揣测出（不！是推出）：

所以是不是有了一个大胆的想法！

我们华丽丽地得到了一个更加简单的递归式子。

# 五．结语

自此，本文关于重排反演，高阶差分的内容已经全部结束。可能文中或多或少有不足之处，但就如我摘要中所述，本文目的在于唤醒沉迷抽象数学而忘记数学最本真的计算及其技巧的读者。

感谢您的阅读，本文中所出现的学术问题以及相关技巧方法的交流可联系本人邮箱（lemonoil@yeah.net）。

# 参考文献

[1].Donald E. Knuth, “Bracket notation for the coefficient-of operator,” in *A Classical Mind*, essays in honour of C.A.R Hoare, edited by A. W. Roscoe, Prentice-Hall, 1994, 247-258. Reprinted with an addendum in his *Selected Papers on Discrete Mathematics*, 45-59.

[2].James Stirling, *Methodus Differentialis.* London, 1730. English translation, *The Differetial Method,* 1749.