

南 京 邮 电 大 学

实 验 报 告

课程名称： 计算物理实践

专 业： 应用物理学

学 号：

姓 名：

完成日期： 2018 年 7 月

目 录

第一章 简单物理实验的模拟及实验数据处理	1
1.1 问题描述.....	1
1.2 原理分析.....	1
1.2.1 特殊情况.....	1
1.2.2 一般情况.....	3
1.3Matlab 程序仿真.....	4
1.4Matlab 仿真结果.....	4
第二章 方程组的解	5
2.1 问题描述.....	5
2.2 原理分析.....	5
2.2.1 迭代公式的建立及其几何意义.....	5
2.2.2 解题过程.....	5
2.3 流程图.....	6
2.4Matlab 程序仿真.....	6
2.5Matlab 仿真结果.....	6
第三章 静电场问题的计算	7
3.1 问题描述.....	7
3.2 原理分析.....	7
3.3Matlab 程序仿真.....	9
3.4Matlab 仿真结果.....	9
第四章 热传导方程和波动方程的差分解法	10
4.1 问题描述.....	10
4.2 原理分析.....	10
4.3 解题步骤.....	13
4.4Matlab 程序仿真.....	13
4.5Matlab 仿真结果.....	13
第五章 矩量法在静电场边值问题计算中的应用	16
5.1 问题描述.....	16
5.2 原理分析.....	16
5.3Matlab 程序仿真.....	18
5.4Matlab 仿真结果.....	18

结束语 19

参考文献 20

附录一 21

附录二 22

附录三 23

附录四 25

附录五 26

第一章 简单物理实验的模拟及实验数据处理

1.1 问题描述

模拟电偶极子的场和等位线。

设在 (a,b) 处有电荷 $+q$, 在 $(-a,-b)$ 处有电荷 $-q$ 。那么在电荷所在平面上任

何一点的电势和场强分别为 $V(x,y)=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}(\frac{1}{r_+}-\frac{1}{r_-})$, $\vec{E}=-\nabla V$ 。 其中

$r_+=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$, $r_-=\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2}$, $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}=9\times 10^9$ 。 又设电荷

$q=2\times 10^{-6}$, $a=1.5$, $b=-1.5$ 。

1.2 原理分析

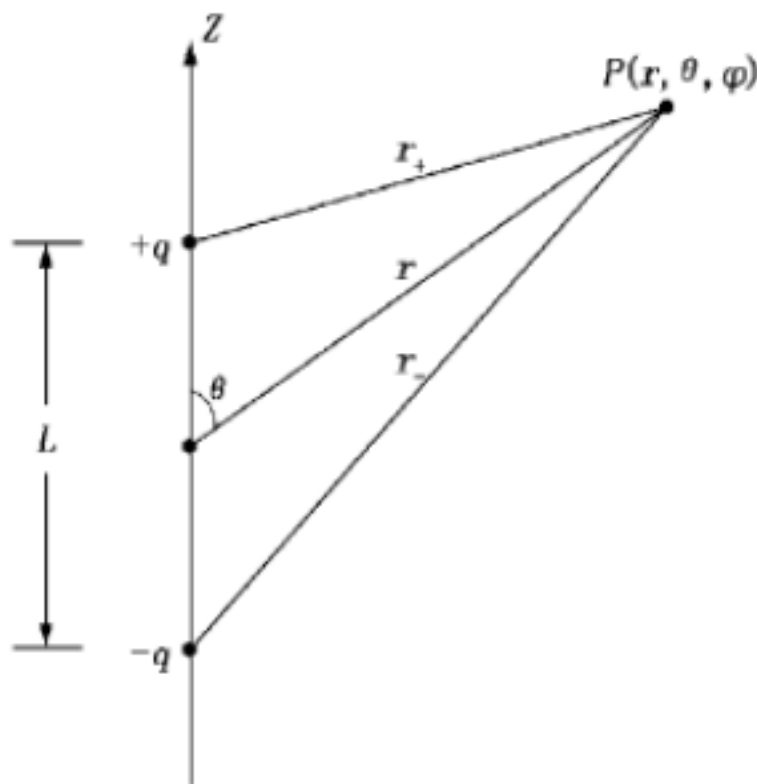
电偶极子是指一对等值异号的点电荷相距一微小距离所构成的电荷系统，它是一种常见的场源存在形式。

1.2.1 特殊情况

图（1）表示中心位于坐标系原点上的一个电偶极子，它的轴线与 Z 轴重合，两个点电荷 q 和 $-q$ 间的距离为 L 。此电偶极子在场点 P 处产生的电位等于两个点电荷在该点的电位之和，即

$$\phi(r)=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}(\frac{1}{r_+}-\frac{1}{r_-}) \tag{1}$$

其中 r_+ 与 r_- 分别是 q 和 $-q$ 到 P 点的距离。



图（1） 电偶极子

一般情况下，我们关心的是电偶极子产生的远区场，即负偶极子到场点的距离 r 远远大于偶极子长度 L 的情形，此时可以写出电偶极子的远区表达式

$$\phi(r) = \frac{ql \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (2)$$

可见电偶极子的远区电位与 ql 成正比，与 r 的平方成反比，并且和场点位置矢量 r 与 z 轴的夹角 θ 有关。

为了便于描述电偶极子，引入一个矢量 \vec{p} ，模为 qL ，方向由 $-q$ 指向 q ，称之为电偶极子的电矩矢量，简称为偶极矩，记作

$$\vec{p} = ql \quad (3)$$

此时 (2) 式又可以写成

$$\phi(r) = \frac{ql \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{pe_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (4)$$

电偶极子的远区电场强度可由 (4) 式求梯度得到。因电位 $\phi(r)$ 只是坐标 r 和 θ 的函数，于是有

$$\vec{E} = -\nabla\phi = e_r \frac{p \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 r^2} + e_\theta \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (5)$$

从 (4) 式和 (5) 式可以看到，电偶极子的远区电位和电场分别与 r 的平方和 r 的三次方成反比。因此，其电位和场强随距离 r 的下降比单个点电荷更为迅速，这是由于两个点电荷 q 和 $-q$ 的作用在远区相互抵消的缘故。

根据 (4) 式，电偶极子的等电位面方程可由

$$\phi(r) = \frac{ql \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

为定值得到。

将电力线微分方程写成球坐标形式，并注意此时电场只有 r 和 θ 两个分量，则有：

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{r d\theta}{E_\theta} \quad (6)$$

把电场表达式 (5) 代入上式，得：

$$\frac{dr}{r} = 2 \frac{\cos \theta d\theta}{\sin \theta} = \frac{d(\sin^2 \theta)}{\sin^2 \theta} \quad (7)$$

解上式得：

$$\frac{1}{r} \sin^2 \theta = C \quad (8)$$

式 (8) 即是电偶极子远区场的电力线方程。

图 (2) 绘出了电偶极子 φ 为常数的平面内 (8) 式取不同的常数所对应的等电位线和电场线。

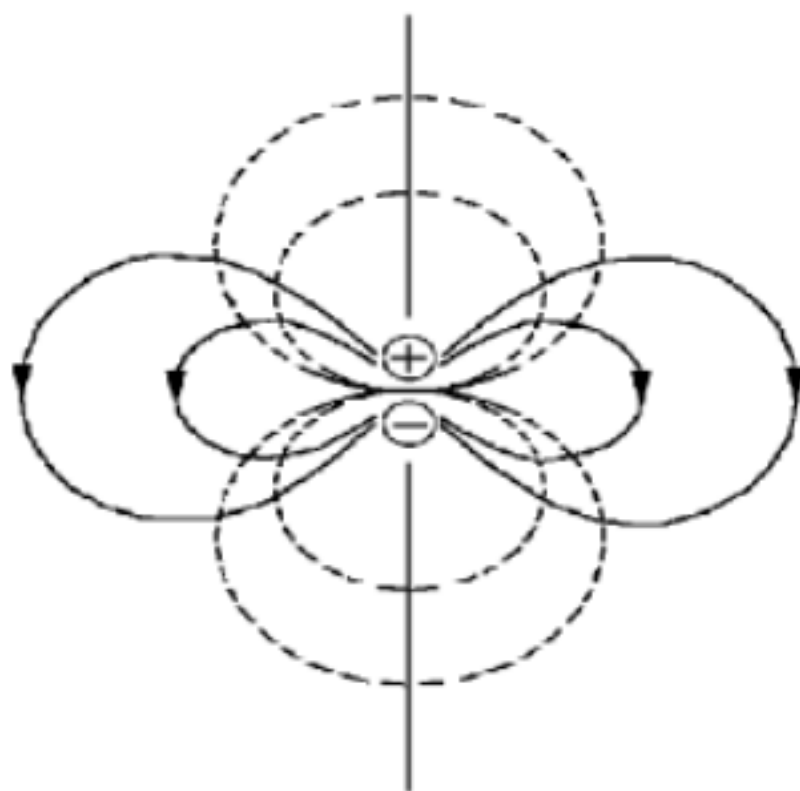


图 (2) 电偶极子的场与等电位线

说明 :图中准确的只是电力线的形状 , 电力线的疏密并不严格与场强成正比 , 只是疏的地方场强小些 , 密的地方场强大些而已。

1.2.2 一般情况

前面讨论了电偶极子的中点位于坐标系原点且偶极矩方向为 Z 的情况。对于中点不在原点和偶极矩非 Z 的方向的一般情况 , 通过与前面类似的推导 , 可以得到远区的电位 :

$$\varphi(r) = \frac{ql \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (9)$$

其中 , r 是电偶极子中心指向场点 P 的相对单位位置矢量 , 偶极矩 $P=ql$, L 的方向依然规定为从 $-q$ 到 q 。

经推导还可得到远区场的电场强度表达式 :

$$\mathbf{E} = -\nabla V = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r}_0 + \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \boldsymbol{\vartheta}_0 \quad (10)$$

由上式可以看出 , 电偶极子的电场线均分布于由 r 、 $\boldsymbol{\vartheta}_0$ 构成的平面上 , 并且任意一个平面上的电场线分布都相同。

从以上几种不同情况下电偶极子在空间激发的电场结果来看 , 电场强度与 p

成正比，与源点到场点的距离 r^3 成反比，电偶极子在远处的性质是由其电偶极矩来表征的，电偶极矩是电偶极子的重要特征。

设电荷所在平面上任意一点的电势为

$$V(x,y)=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_+}-\frac{1}{r_-}\right) \tag{11}$$

其中

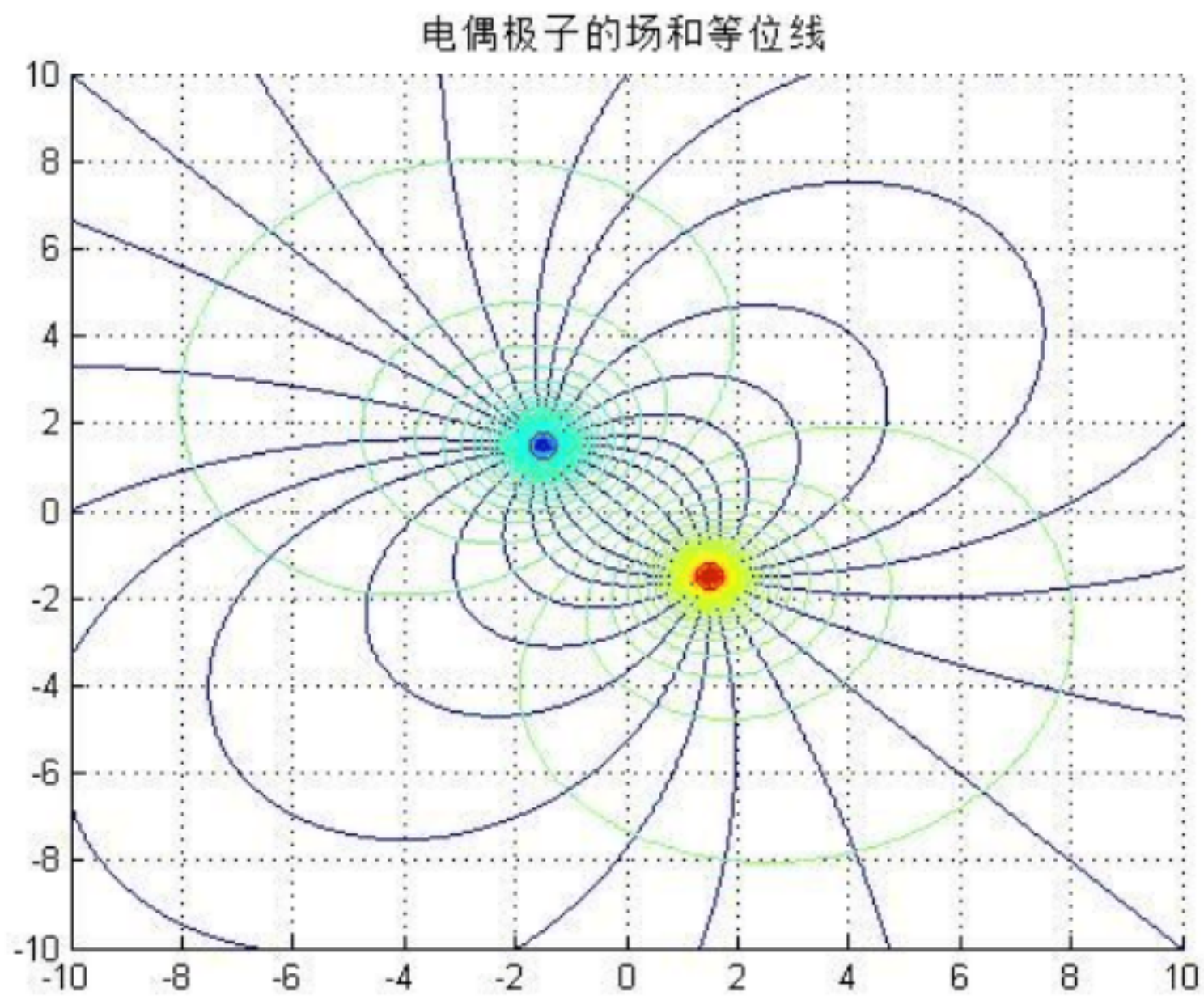
$$r_+=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2},r_-=\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2} \tag{12}$$

因此，只要给定空间任意一点的位置坐标 $P(x,y)$ ，就可以算出这一点的电势。

1.3Matlab 程序设计仿真

源程序见附录一

1.4Matlab 仿真结果



第二章 方程组的解法

2.1 问题描述

用牛顿法解方程 $xe^x - 1 = 0$ ，精度自设。

2.2 原理分析

2.2.1 迭代公式的建立及其几何意义

(1) 建立公式

将 $f(x)$ 在 x_n 点 Taylor 展开

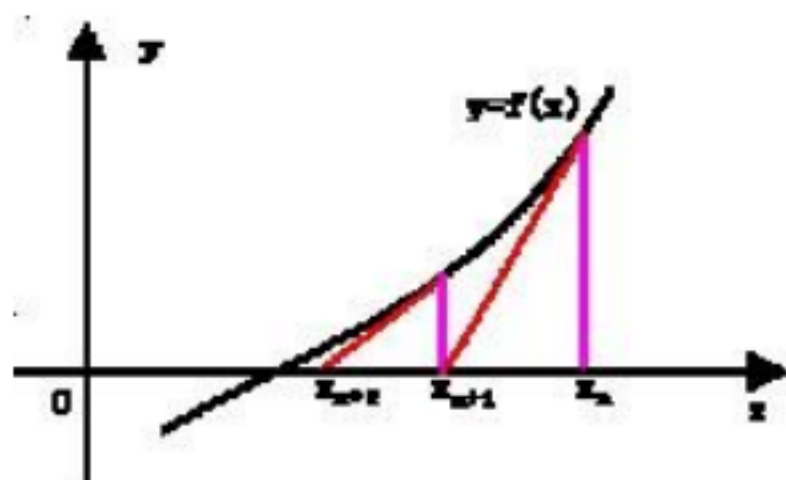
$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{f''(x_n)}{2!}(x - x_n)^2 + \dots$$

$$f(x) \approx f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) \text{ —— Taylor 展开线性化}$$

$$f(x) = 0 \text{ 近似于 } f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) = 0$$

$$\text{解出 } x \text{ 记为 } x_{n+1}, \text{ 则 } x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n=0,1,2,\dots)$$

(2) 几何意义



过 $(x_n, f(x_n))$ 切线 $y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$ 与 $y = 0$ 求交点，解出 $x = x_{n+1}$ ，

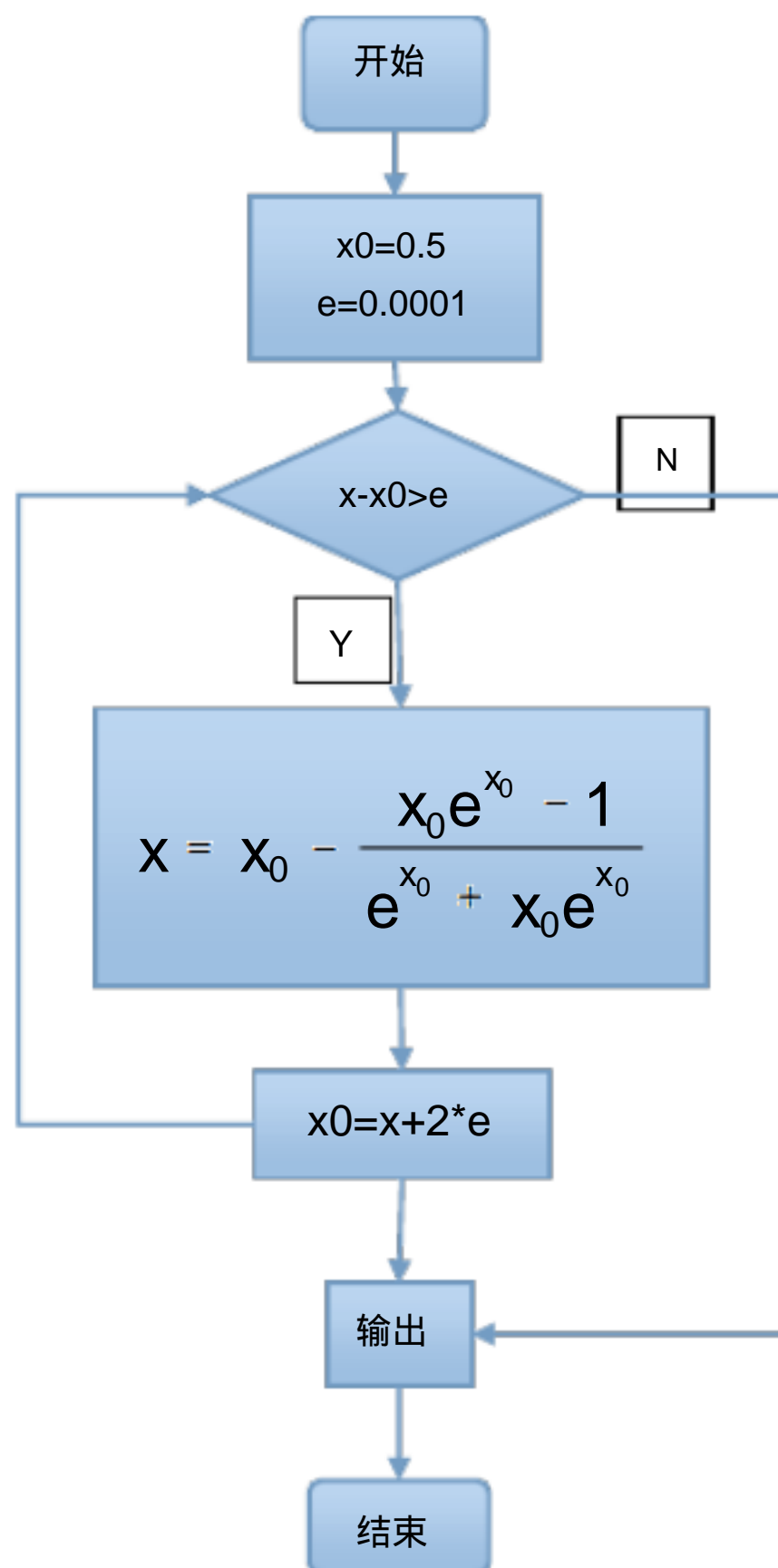
$$\text{则 } x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

2.2.2 解题过程

令 $f(x) = xe^x - 1$ ，有 $f'(x) = e^x + xe^x$ ，那么根据 Newton 迭代法建立迭代公式

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{xe^x - 1}{e^x + xe^x}$$

2.3 流程图



2.4 Matlab 程序设计仿真

源程序见附录二

2.5 Matlab 仿真结果

$x = 0.5671$

```
Command Window

Elapsed time is 0.032000 seconds.

ans =

    0.5671
```

第三章 静电场问题的计算

3.1 问题描述

长直接地金属槽，如图 3-2 所示，其侧壁和底面电位为零，顶盖电位为 $\varphi = 100\sin \pi x$ ，求槽内电位，并绘出电位分布图。

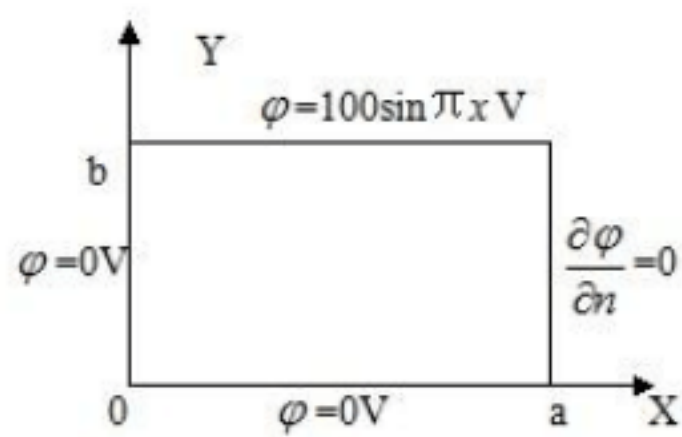


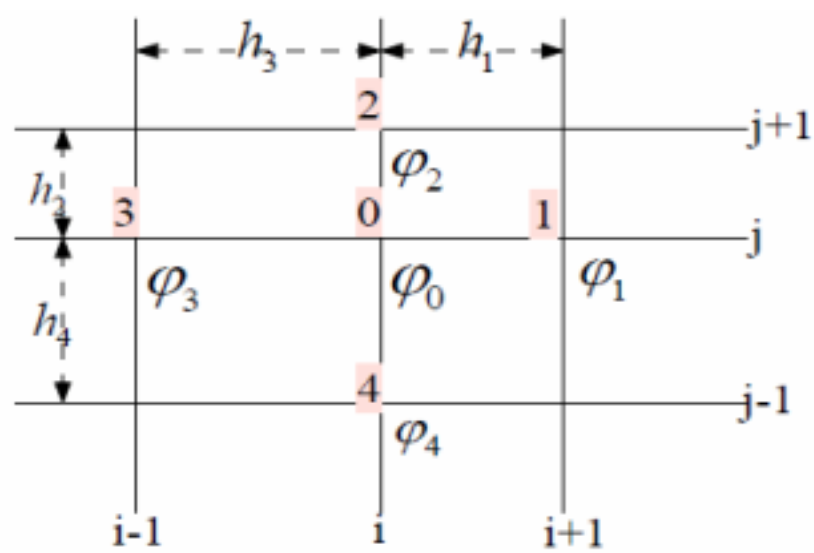
图 3-2 题 11 图

3.2 原理分析

(1) 原理分析：
二维拉普拉斯方程

$$\nabla^2 \varphi(x,y) = \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = f(x,y) \tag{1}$$

有限差分法的网格划分，通常采用完全有规律的分布方式，这样可使每个离散点上得到相同形式的差分方程，有效的提高解题速度，经常采用的是正方形网格划分。



设网格节点 (i,j) 的电位为 $\varphi_{i,j}$ ，其上下左右四个节点的电位分别为 $\varphi_{i,j+1}$ ， $\varphi_{i,j-1}$ ， $\varphi_{i+1,j}$ ， $\varphi_{i-1,j}$ 在 h 充分小的情况下，可以 $\varphi_{i,j}$ 为基点进行泰勒级数展开：

$$\varphi_{i,j+1} = \varphi_{i,j} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} h^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3} h^3 + \dots$$

$$\varphi_{i,j-1} = \varphi_{i,j} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} h^2 - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3} h^3 + \dots$$

$$\varphi_{i-1,j} = \varphi_{i,j} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} h^2 - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} h^3 + \dots$$

$$\varphi_{i+1,j} = \varphi_{i,j} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} h^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} h^3 + \dots$$

把以上四式相加，在相加的过程中， h 的所有奇次方项都抵消了。得到的结果的精度为 h 的二次项。

$$\varphi_{i,j+1} + \varphi_{i,j-1} + \varphi_{i-1,j} + \varphi_{i+1,j} = 4\varphi_{i,j} + h^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

由于场中任意点 (i, j) 都满足泊松方程：

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = F(x, y)$$

式中 $F(x, y)$ 为场源，则式 (2) 可变为：

$$\varphi_{i,j} = \frac{1}{4} (\varphi_{i,j+1} + \varphi_{i,j-1} + \varphi_{i-1,j} + \varphi_{i+1,j}) - \frac{h^2}{4} F(x, y) \quad (3)$$

对于无源场， $F(x, y) = 0$ ，则二维拉普拉斯方程的有限差分形式为：

$$\varphi_{i,j} = \frac{1}{4} (\varphi_{i,j+1} + \varphi_{i,j-1} + \varphi_{i-1,j} + \varphi_{i+1,j}) \quad (4)$$

上式表示任一点的电位等于围绕它的四个等间距点的电位的平均值，距离 h 越小则结果越精确，用式 (4) 可以近似的求解二维拉普拉斯方程。

边界条件：

$$\begin{cases} \Delta \varphi(x, y) = \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0 \\ \varphi(0, y) = \varphi(a, y) = \varphi(x, 0) = 0V \\ \varphi(x, b) = 100 \sin \pi x V \end{cases}$$

(2) 解题过程：

在直角坐标系中，金属槽中的电位函数 φ 满足拉普拉斯方程：

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

其边界条件满足混合型边值问题的边界条件：

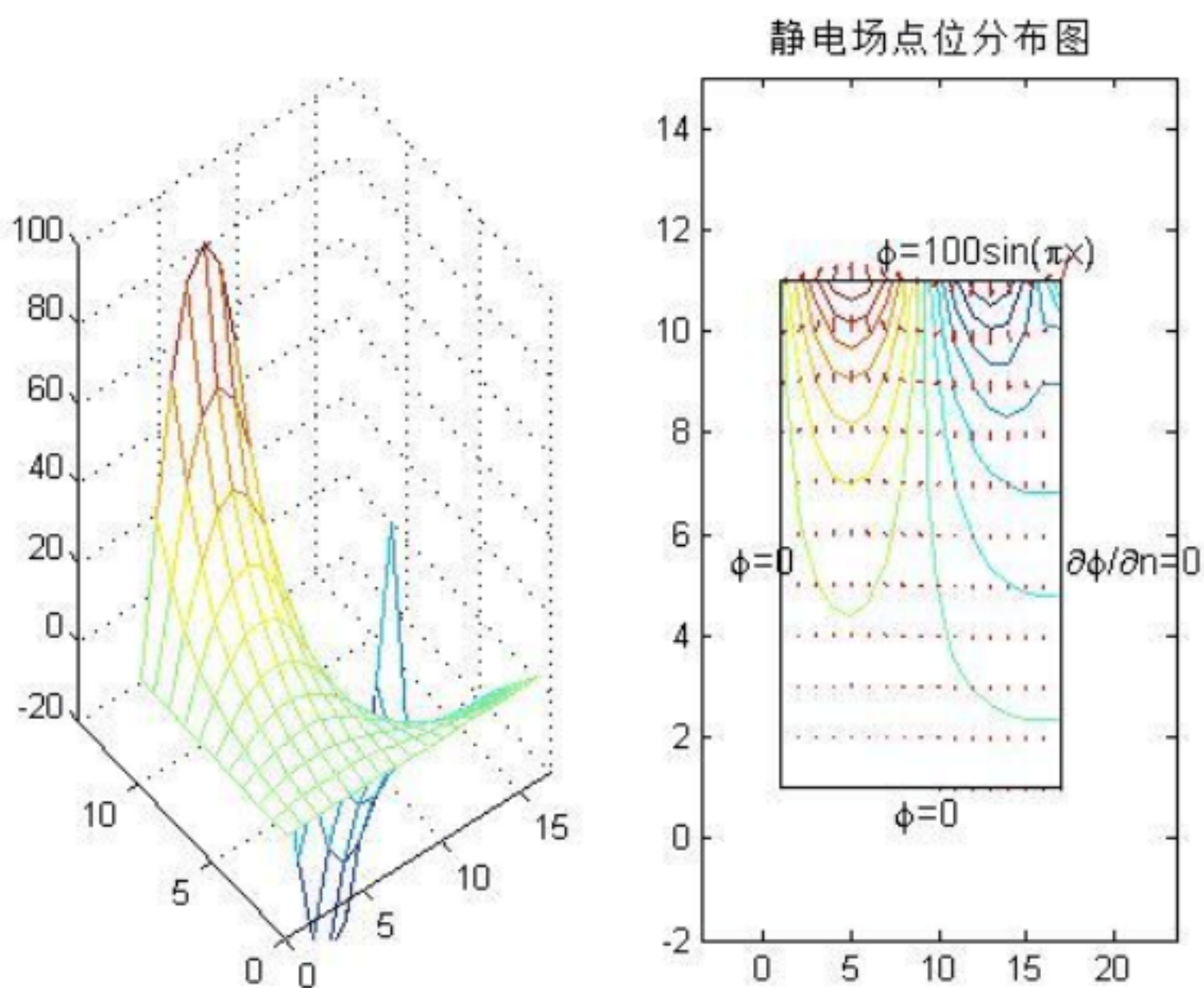
$$\begin{cases} \Delta \phi(x, y) = \phi_{xx} + \phi_{yy} = 0 \\ \phi(0, y) = \phi(a, y) = \phi(x, 0) = 0V \\ \phi(x, b) = 100\sin\pi xV \end{cases}$$

取步长 $h = 1$ ， x, y 方向上的网格数为 $m = 16, n = 10$ ，共有 160 个网孔和 $17 \times 11 = 187$ 个节点，其中槽内的节点（电位待求点）有 $15 \times 9 = 135$ 个，边界节点 52 个，设迭代精度为 10^{-6} ，利用 MATLAB 编程求解。

3.3 Matlab 程序设计仿真

源程序见附录三

3.4 Matlab 仿真结果



第四章 热传导方程和波动方程的差分法

4.1 问题描述

求有限空间内的热传导问题：
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ u(x, y, 0) = xy \end{cases}$$
 的数值解，边界条件如教材

中图 9.2所示，其他参数可以自取，将计算结果图形化。

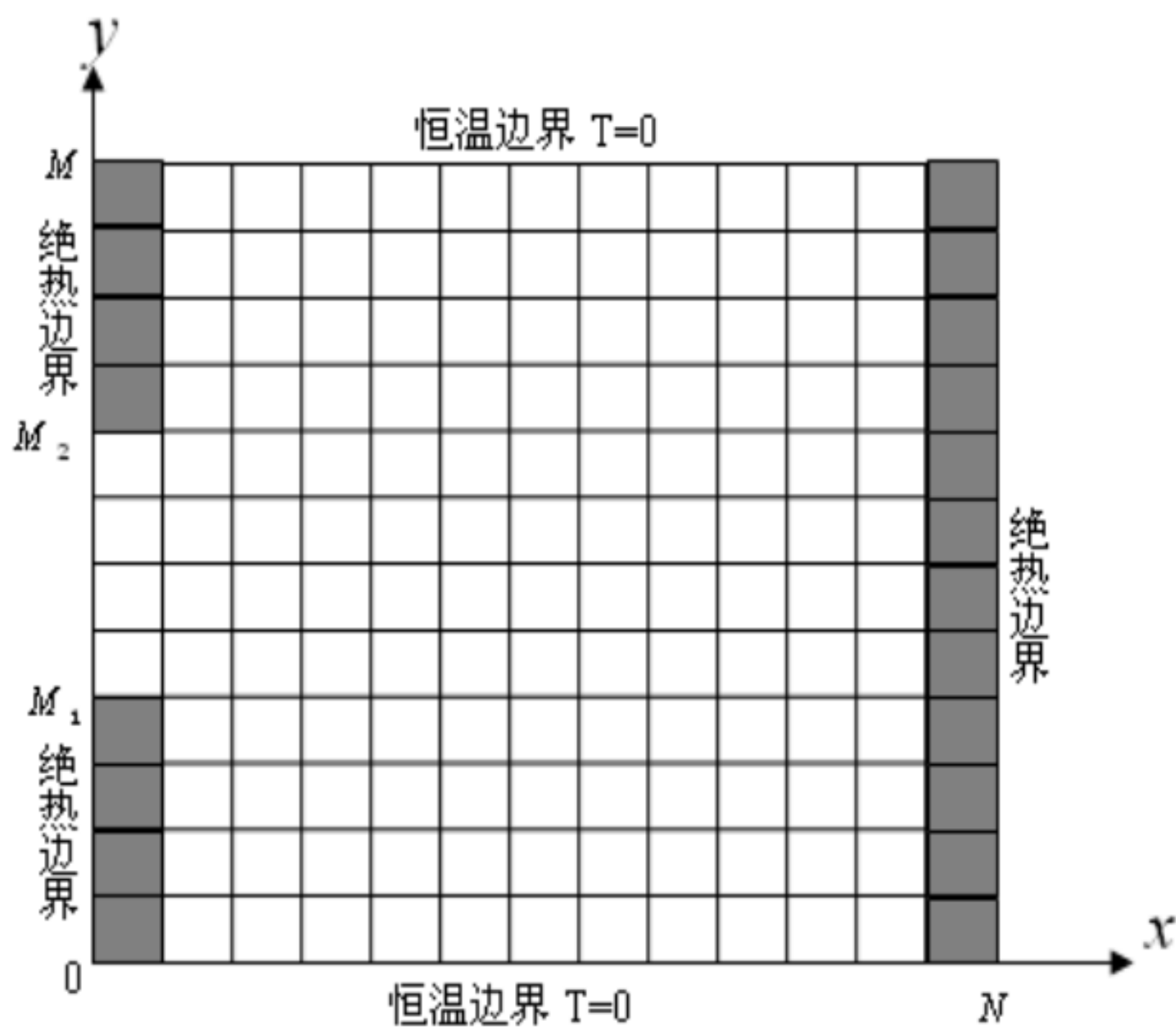


图 9-3 二维热传导例子

4.2 原理分析

二维热传导方程的初、边值混合问题与一维的类似，在确定差分格式并给出定解条件后，按时间序号分层计算，只是每一层是由二维点阵组成，通常称为网格。

内部无热源均匀介质中二维热传导方程为：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \lambda \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (0 < x < l \quad 0 < y < s \quad 0 < t < T) \quad (1)$$

$$\text{其初始条件为： } u(x, y, 0) = \varphi(x, y) \quad (2)$$

现在设时间步长为 τ ，空间步长为 h ，如图 9.3 所示，将 xOy 平面均分为 $M \times N$ 的网格，并使 $Nh = l$ $Mh = s$ 则有：

$$t = k\tau \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$x = ih \quad i = 0, 1, 2, \dots, N$$

$$y = jh \quad j = 0, 1, 2, \dots, M$$

对节点 (i, j) ，在 k 时刻（即 $k\tau$ 时刻）有：

$$\begin{cases} \frac{\partial u_{i,j,k}}{\partial t} = \frac{u_{i,j,k+1} - u_{i,j,k}}{\tau} \\ \frac{\partial^2 u_{i,j,k}}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i-1,j,k}}{h^2} \\ \frac{\partial^2 u_{i,j,k}}{\partial y^2} = \frac{u_{i,j+1,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j-1,k}}{h^2} \end{cases} \quad (3)$$

将差分格式（3）代入偏微分方程（1）中，可得：

$$u_{i,j,k+1} = (1 - 4\alpha)u_{i,j,k} + \alpha(u_{i+1,j,k} + u_{i-1,j,k} + u_{i,j+1,k} + u_{i,j-1,k}) \quad (4)$$

$$\text{式中 } \alpha = \frac{\tau\lambda}{h^2}$$

式（4）为二维热传导方程的显式差分格式，运用式（4）和边界条件就可以由初始条件逐次计算出任意时刻温度的分布。

下面讨论边界条件：

如图 9.3 所示阴影部分，即在 $x = 0$ 边界的 $0 < y < M_1h$ 和 $M_2h < y < Mh$ 区域以及整个 $x = Nh$ ， $0 < y < Mh$ 边界均为绝热壁；而在 $x = 0$ 边界的 $M_1h \leq y \leq M_2h$ 区域为与恒温热源相连的口。 $y = 0$ 和 $y = Mh$ 两边界温度始终为 0，实际上也是与恒温源相连的。也就是说，对于绝热壁应满足：

$$\frac{\partial u_{0,j,k}}{\partial x} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, M_1 - 1, M_2 + 1, \dots, M - 1 \quad k = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\frac{\partial u_{N,j,k}}{\partial x} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, M - 1 \quad k = 1, 2, 3, \dots)$$

上述边界条件的差分近似式为：

$$\frac{u_{1,j,k} - u_{0,j,k}}{h} = 0$$

$$\frac{u_{N,j,k} - u_{N-1,j,k}}{h} = 0$$

$$\text{即： } u_{0,j,k} = u_{1,j,k} \quad (j = 1, 2, \dots, M_1 - 1, M_2 + 1, \dots, M - 1 \quad k = 1, 2, 3, \dots)$$

$$u_{N,j,k} = u_{N-1,j,k} \quad (j = 1, 2, \dots, M - 1 \quad k = 1, 2, 3, \dots) \quad (5)$$

对于与恒温源相连的边界，在热传导过程中始终有恒定的热流，常可取归一化值，例如高温热源可取“1”，而低温热源可取“0”。按图 9.3 的情况，边界条件还有：

$$u_{0,j,k} = 1 \quad j = M_1, \dots, M_2$$

$$u_{i,0,k} = u_{i,M,k} = 0 \quad i = 0, 1, 2, \dots, N$$

综合上述初值、边值混合问题，并设初始时刻各点温度均为零，则上述差分格式可归纳为：

$$\begin{cases} u_{i,j,k+1} = (1 - 4\alpha)u_{i,j,k} + \alpha(u_{i+1,j,k} + u_{i-1,j,k} + u_{i,j+1,k} + u_{i,j-1,k}) \\ u_{i,j,0} = 0 \quad i = 0, 1, 2, \dots, N; j = 0, 1, 2, \dots, M \\ u_{0,j,k} = u_{1,j,k} \quad j = 1, 2, \dots, M_1 - 1, M_2 + 1, \dots, M - 1; k = 1, 2, 3, \dots \\ u_{N,j,k} = u_{N-1,j,k} \quad j = 1, 2, \dots, M - 1; k = 1, 2, 3, \dots \\ u_{i,0,k} = u_{i,M,k} = 0 \quad i = 0, 1, 2, \dots, N \\ u_{0,j,k} = 1 \quad j = M_1, \dots, M_2 \end{cases} \quad (6)$$

可以证明，对于二维热传导方程，若满足

$$\alpha = \frac{\tau\lambda}{h^2} \leq \frac{1}{4}$$

则差分格式式（4）或式（6）就是稳定的差分格式，一般的讲，对于 n 维抛物线型微分方程差分格式稳定的充分条件是：

$$\alpha = \frac{\tau\lambda}{h^2} \leq \frac{1}{2n}$$

4.3 解题步骤

- 1. 给定 λ 、 h 、 α 和 T 以及 XN 和 YM ，题目中已知 $h = 0.5$ ， $\alpha = \frac{1}{4}$ ， T 的值分别取 0s,10s,100s，120s，150s，200s和1000s， XN 和 YM 取18和16；
- 2. 计算 $N = \frac{XN}{h}$ 为36； $M = \frac{YM}{h}$ 为32； $\tau = \frac{\alpha h^2}{\lambda}$ 为0.05； k 的上界 $\frac{T}{\tau}$ ；
- 3. 计算初值和边值： $u_{i,j,0} = \varphi(ih, jh)$ ； $u_{0,j,k} = g_1(k\tau, jh)$ ； $u_{N,j,k} = g_2(k\tau, jh)$ ；
 $u_{i,0,k} = g_3(k\tau, ih)$ ； $u_{i,N,k} = g_4(k\tau, ih)$ ；
- 4. 用差分格式计算 $u_{i,j,k+1}$ ；

4.4Matlab 程序设计仿真

源程序见附录四

4.5Matlab 仿真结果

通过 Matlab 画出 0s 到1000s 之间的一些温度场的分布图，如下图 4.1 —图 4.7 分别为 0s,10s,100s,120s,150s,200s,1000s 的温度场分布图。

结论：很明显可以看出，温度呈整体下降的趋势。由于低温热源的范围比高温热源的更大，所以热量的流入大于流出。可以断定，只要时间足够长，整个温度场除高温热源外，其他地方的温度都要与低温热源相同（设为 0）。1000s 时，如图 4.7 所示的场分布与无限长时间之后的场分布就已经很接近了。

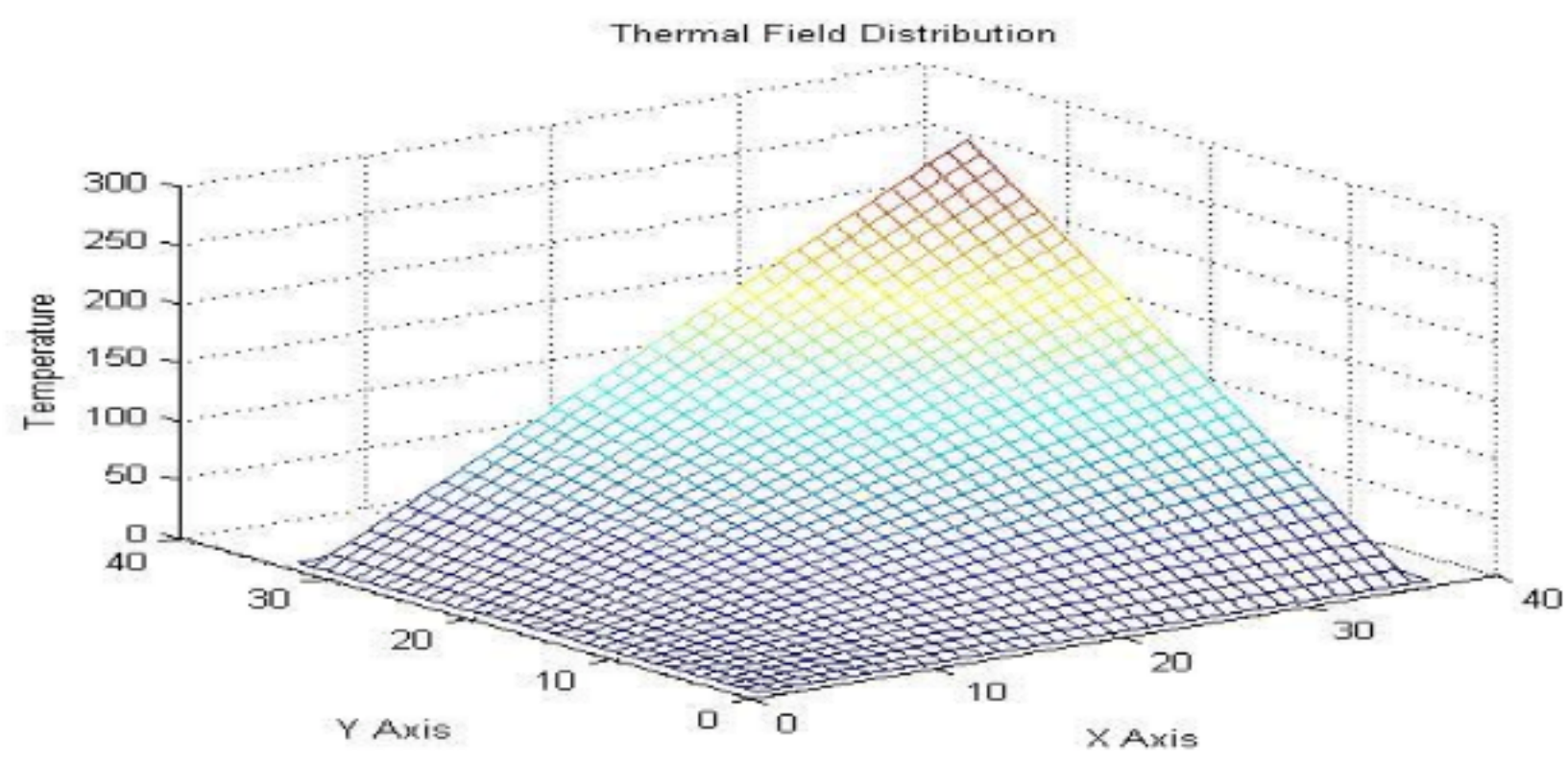


图4.1 0s时的场分布

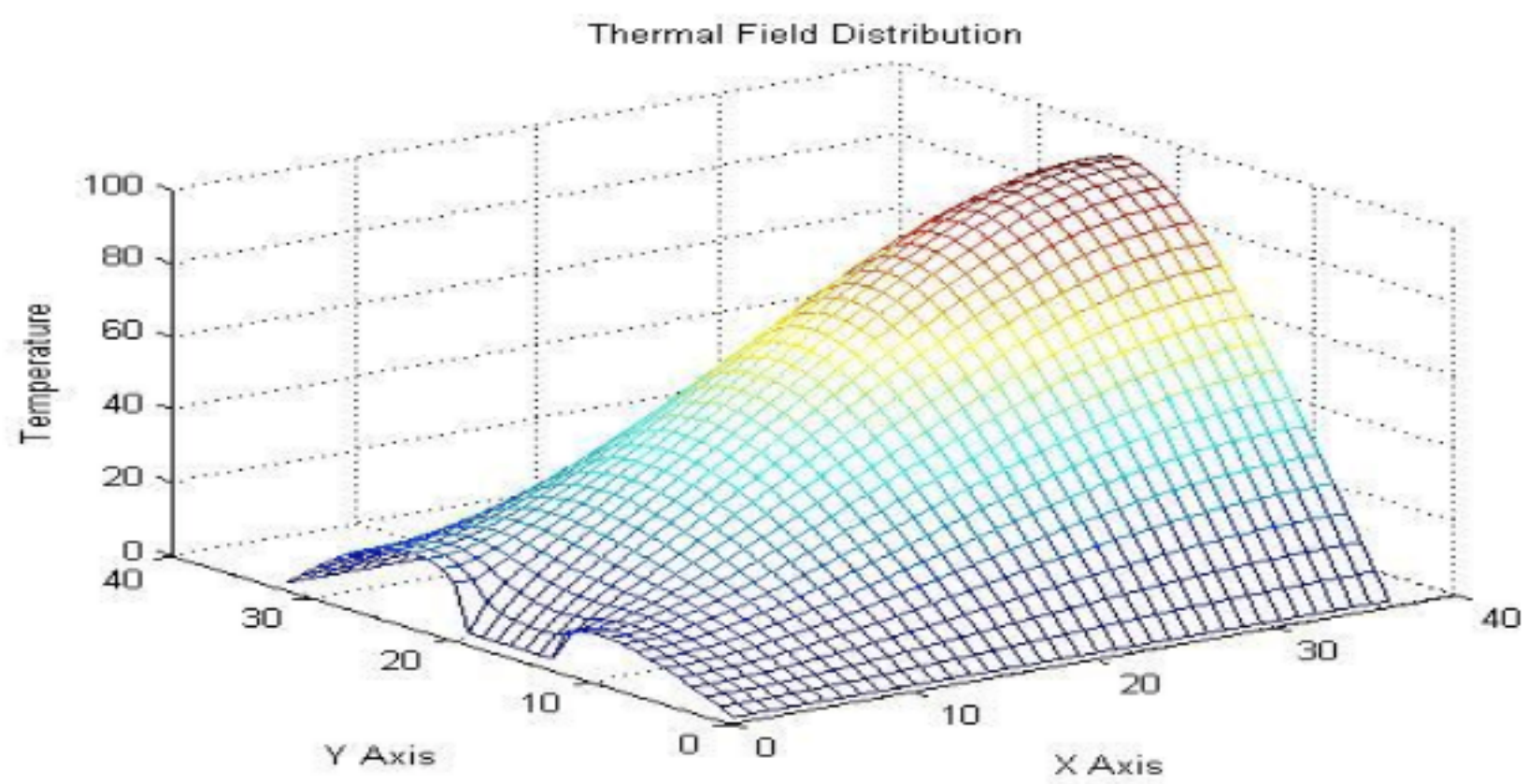


图4.2 10s 时的场分布

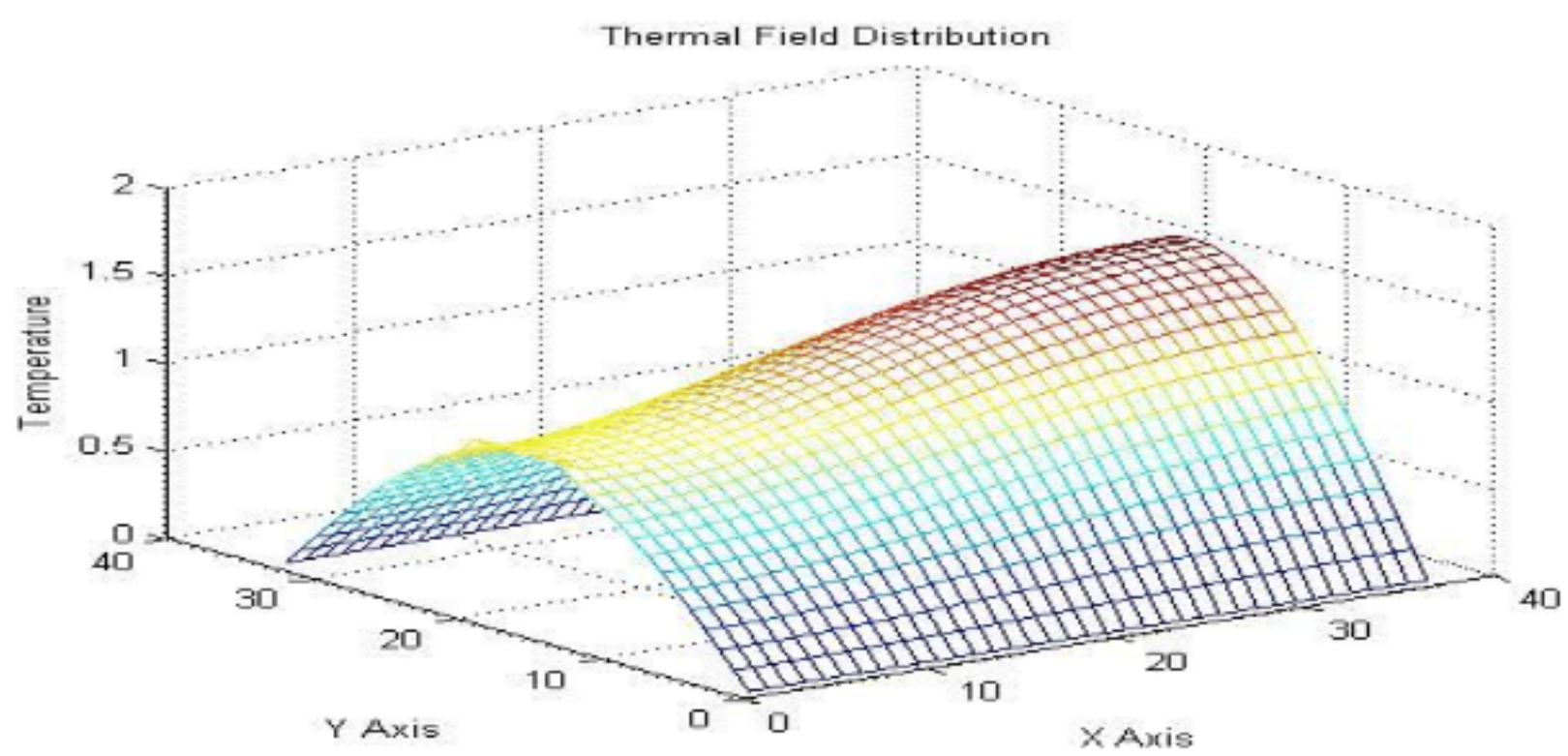


图4.3 100s时的场分布

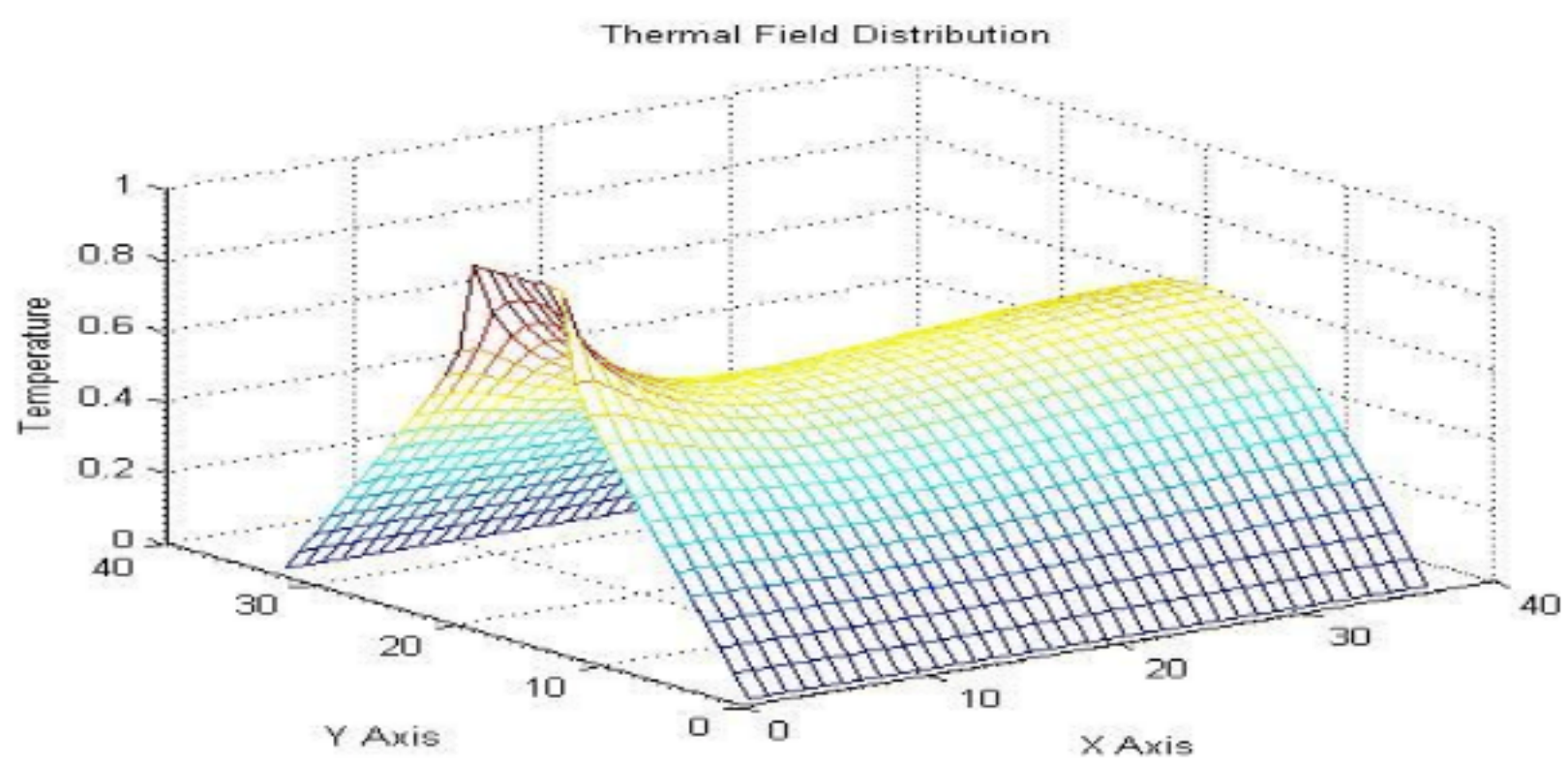


图4.4 120s时的场分布

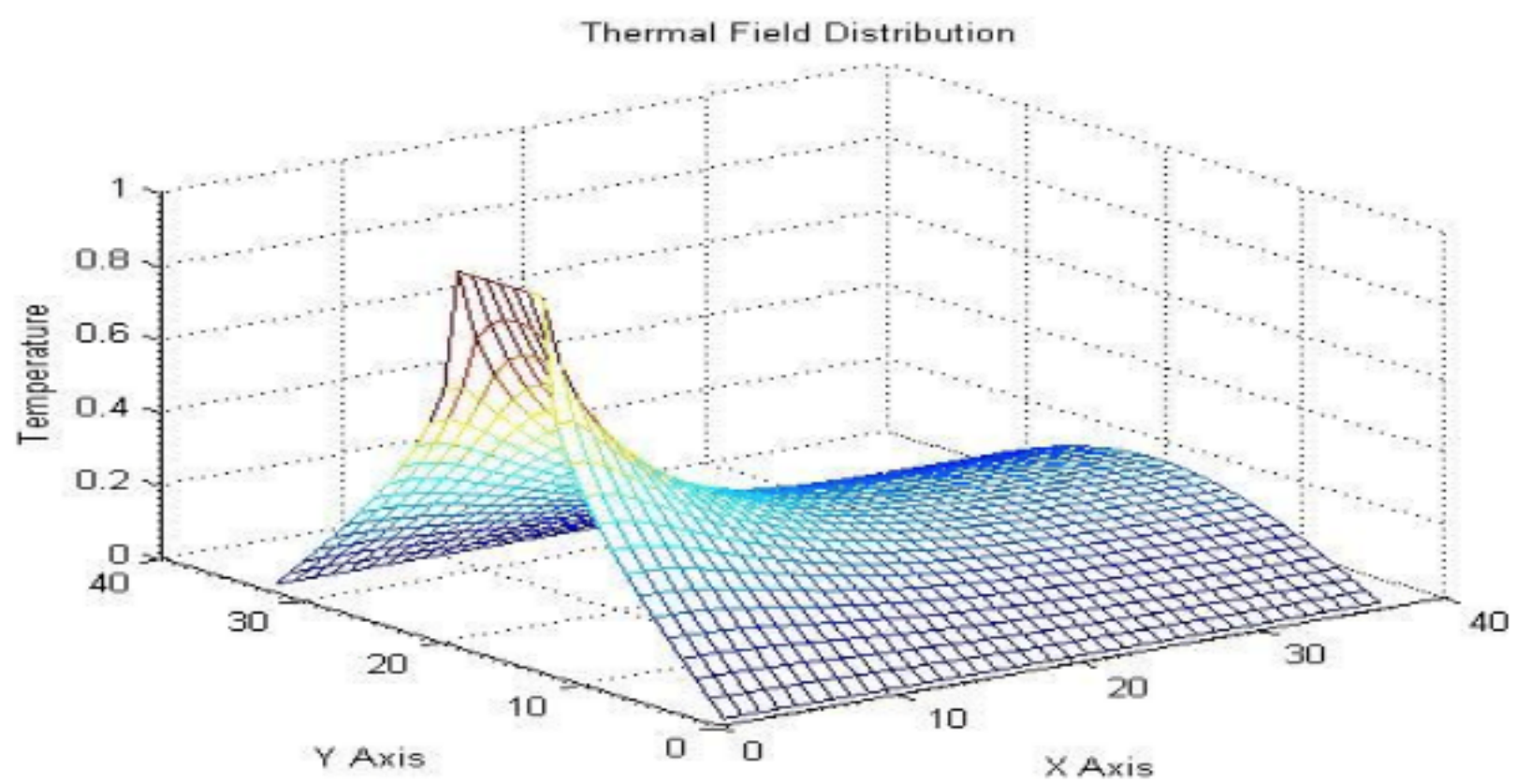


图4.5 150s时的场分布

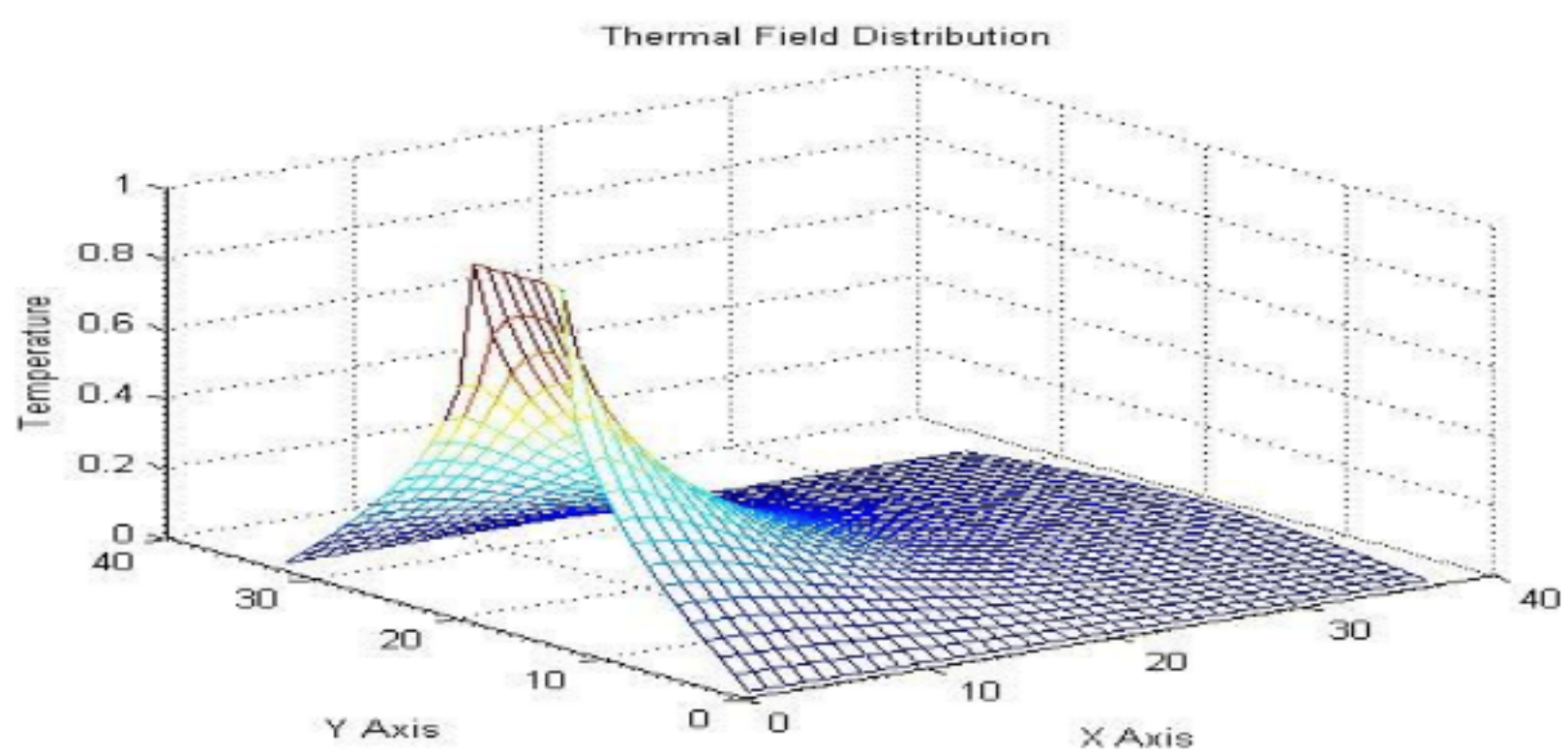


图4.6 200s 时的场分布

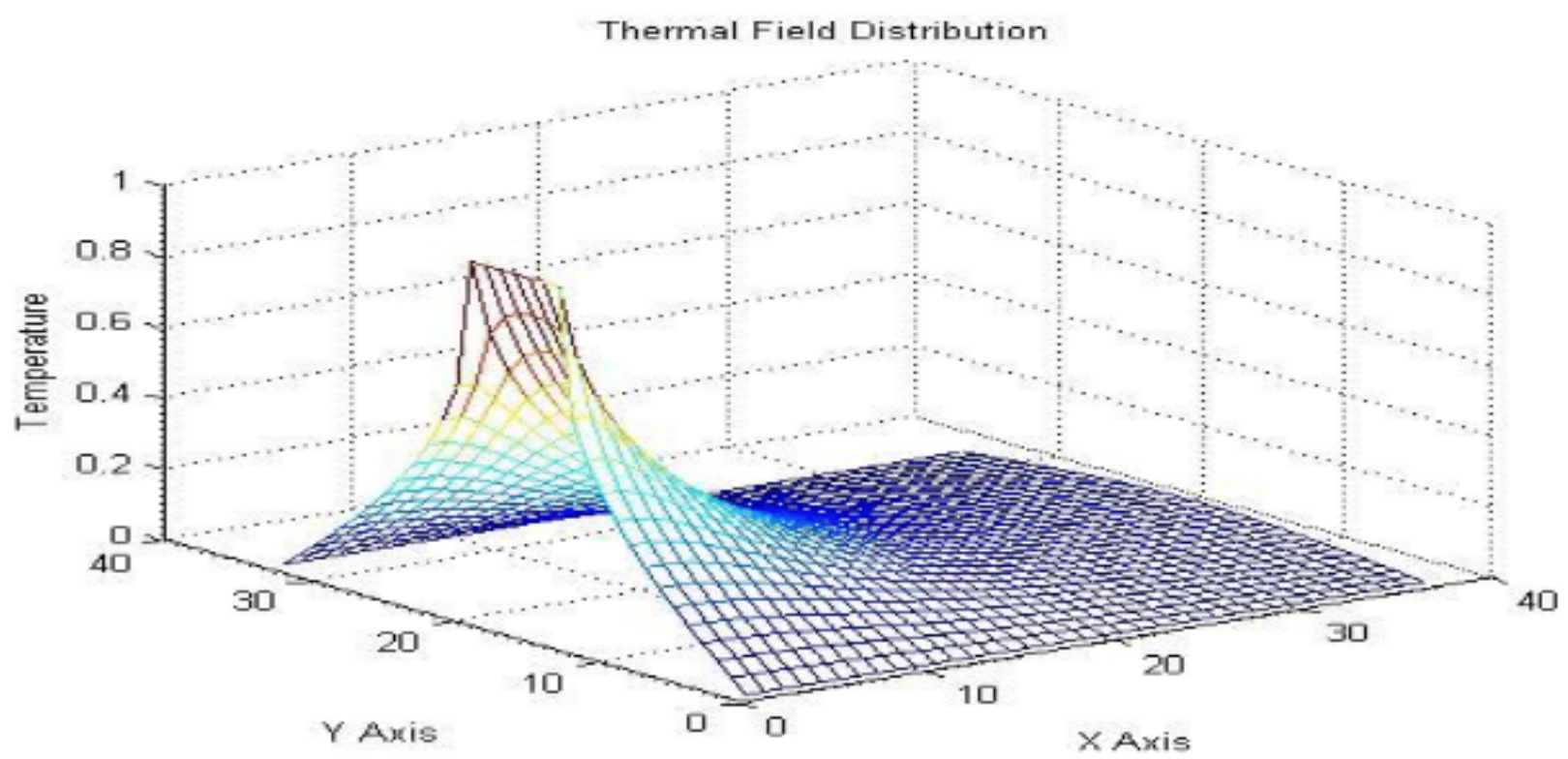


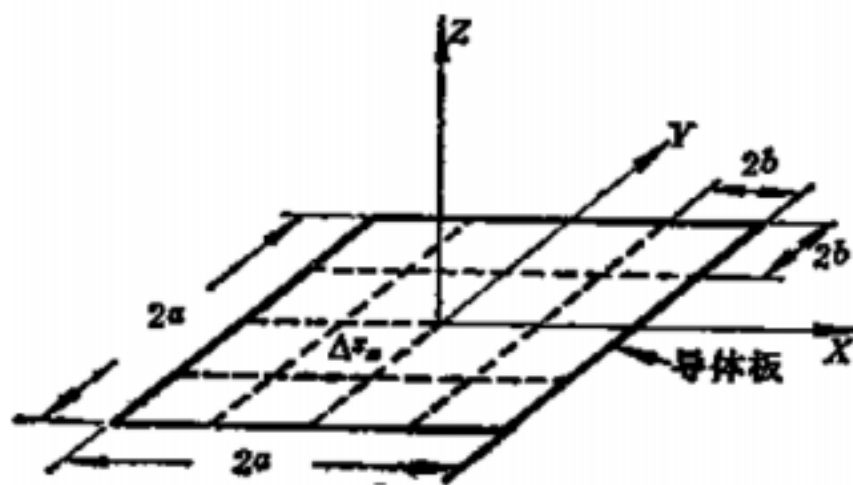
图4.7 1000s 时的场分布

第五章 矩量法在静电场边值问题计算中的应用

5.1 问题描述

利用矩量法求无界空间中边长为 $2a$ 的正方形导电薄板的电容。

5.2 原理分析



一块正方形导体板，如上图所示。边长为 $2a$ 米，位于 $z=0$ 平面，中心坐标在原点，设 $\sigma(x, y)$ 表示导电板上电荷密度，板的厚度为零，则空间任意一点的静电位是

$$\phi(x, y, z) = \int_{-a}^a d\xi \int_{-a}^a d\eta \frac{\sigma(\xi, \eta)}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (1)$$

式中 $R = [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2]^{1/2}$ ， $\sigma(\xi, \eta)$ 为待求的面电荷密度。

边界条件： $\phi(x, y, 0) = \phi_0$ ($|x| \leq a, |y| \leq a$)

导体板电容： $C = \frac{q}{V} = \frac{1}{V} \int_{-a}^a d\xi \int_{-a}^a d\eta \sigma(\xi, \eta)$

算子方程： $\phi_0 = \int_{-a}^a d\eta \int_{-a}^a d\xi \frac{\sigma(\xi, \eta)}{4\pi\epsilon_0 R} = L(\sigma)$

算子： $L = \int_{-a}^a d\xi \int_{-a}^a d\eta \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R}$

(1) 将导体板分为 N 个均匀小块 ΔS_n ，并选基函数为分域脉冲函数。

$$\sigma = \sum_{n=1}^N \alpha_n p_n \quad \text{其中 } p_n = \begin{cases} 1 & \text{在 } \Delta S_n \text{ 上} \\ 0 & \text{在其它 } \Delta S_n \text{ 上} \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{将式 (2) 代入式 (1) 得 } V = \sum_{n=1}^N I_{mn} \alpha_n \quad m=1, 2, 3, \dots, N \quad (3)$$

$$\text{式中 } I_{mn} = \int_{-a}^a d\xi \int_{-a}^a d\eta \frac{1}{4\pi\epsilon \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}$$

据此电荷密度由逼近，平行板电容相应地近似为：

$$C \approx \frac{1}{V} \sum_{n=1}^N \alpha_n \Delta S_n = \sum_{mn} I_{mn}^{-1} \Delta S_n \quad (4)$$

若令 $2b = 2a/\sqrt{N}$ 表示的边长，由 ΔS_n 本身面上的单位电荷密度在其中心处产生的电位是：

$$I_{mn} = \int_{-b}^b dx \int_{-b}^b dy \frac{1}{4\pi\epsilon \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{2b}{\pi\epsilon} (0.8814)$$

(2) 用点匹配法选权函数为 $w_m = \delta(x - x_m) \delta(y - y_m)$ (x_m, y_m) 为

ΔS_m 的中心点，求内积：

$$I_{mn} = \langle w_m, L(p_n) \rangle = \iint_{\substack{|x| \leq a \\ |y| \leq a}} \delta(x - x_m) \delta(y - y_m) L(p_n) dx dy$$

$$I_{mn} = L(p_n)|_{x=x_m, y=y_m} = \int_{\Delta\xi} d\xi \int_{\Delta\eta} d\eta \frac{1}{4\pi\epsilon \sqrt{(x_m - \xi)^2 + (y_m - \eta)^2}} \quad (5)$$

I_{mn} 是 ΔS_n 处单位均匀电荷密度 ($p_n = 1$) 在 ΔS_m 处中心的电位。

$$g_m = \langle w_m, g \rangle = \iint_{\substack{|x| \leq a \\ |y| \leq a}} \delta(x - x_m) \delta(y - y_m) \phi_0 dx dy = \phi_0$$

$$[g_m] = \phi_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

式(5)适用于 $m \neq n$ 时 I_{mn} 的求解，当 $m=n$ 时

$$I_{mn} = \int_{-b}^b d\xi \int_{-b}^b d\eta \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{\xi^2 + \eta^2}} = \frac{2b}{\pi\epsilon_0} \ln(1 + \sqrt{2}) \quad (6)$$

其中 $2b = \frac{2a}{\sqrt{N}}$

(3) 矩阵求逆解得：

$$[\alpha_n] = [I_{mn}]^{-1} [g_m]$$

$$\sigma = \sum_{n=1}^N \alpha_n p_n$$

5.3 Matlab 程序设计仿真

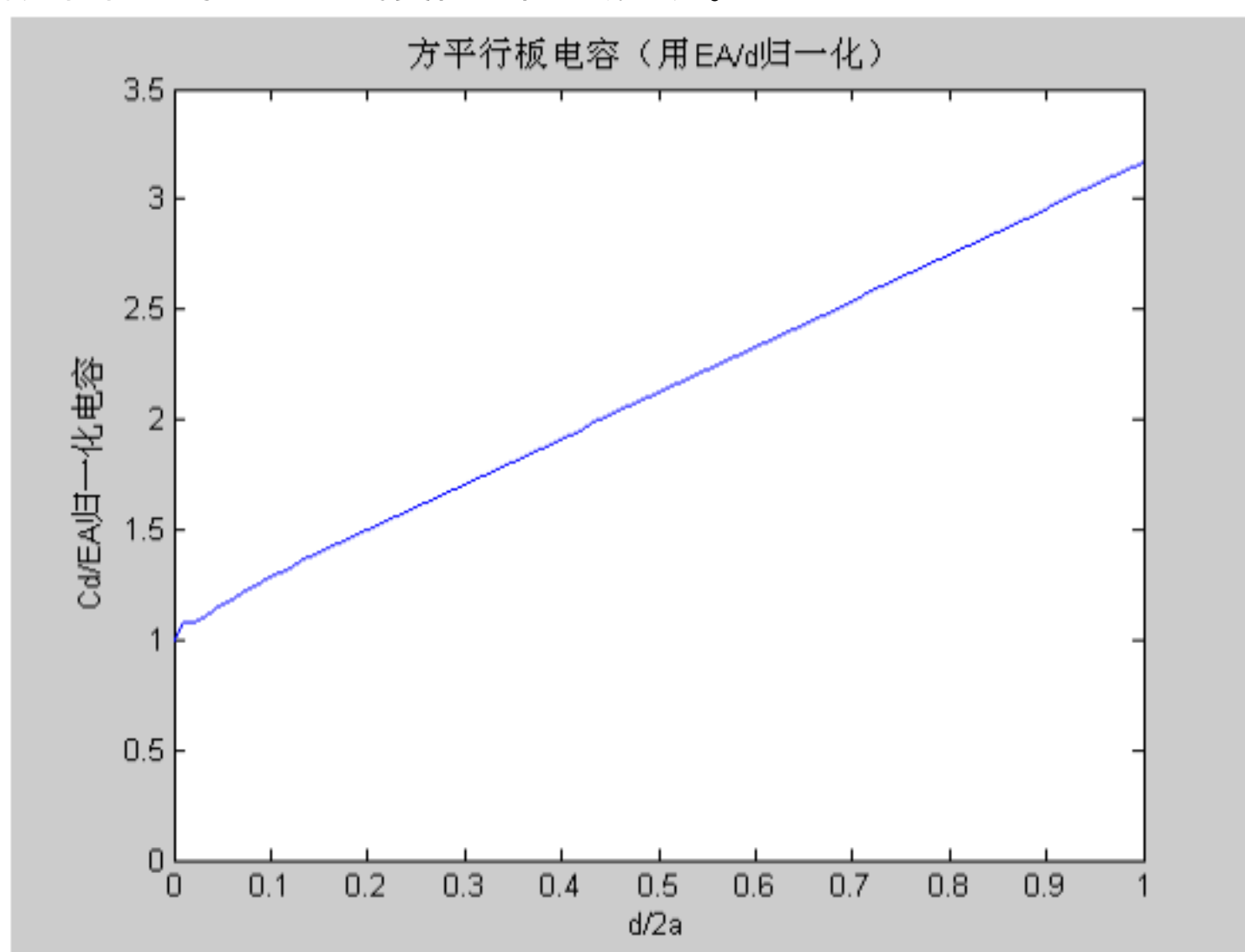
源程序见附录五

5.4 Matlab 仿真结果

当边长 $2a=10$ 时，电容 $C=7.9556e-010$

由公式推导可知：C 的变化和 a 成正比；

有实验验证可知：C 的变化也和 a 成正比。



结束语

经过这次计算物理学实验周的学习，我认识到自己对于以前学习过的一些课程掌握得还不够透彻，Matlab 编程语言的运用也不够熟练。通过这次实验也很好的巩固了以前学习的一些知识点，并且使我了解了如何利用计算机来模拟和计算一些物理问题。这次实验让我认识到数理方程的实用性，掌握了利用差分代替微分来求解波动方程、热传导方程、拉普拉斯方程等的基本原理和方法。

本次实践涉及到的二维拉普拉斯方程以及二维热传导方程的解题方法，都是先将连续的方程以及边界条件离散化，再用计算机进行计算，因为计算机智能对离散的数值进行计算。

对于非线性方程的求解往往是采用迭代的方法求解，本次实践主要涉及了 Newton 迭代法的重要思想，也是将连续的方程离散化后再进行计算。

矩量法主要分为三个步骤：（1）离散化；（2）取样检测；（2）矩阵求逆；适用于场源分布不确定的情况，用未知场的积分方程来计算给定媒质中的场的分布。

这次的实践，使我对 Matlab 的使用变得熟练了，并且在报告的写作过程中也熟练掌握了数学公式的录入，文章的排版等技能。

总的来说，这次实践带给了我很多的收获。

参考文献

- [1] 陈锺贤 . 计算物理学 . 哈尔滨工业大学出版社 .2001.3
- [2] 杨振华 , 郦志新 . 数学实验 . 科学出版社 .2018.2
- [3] 林亮 , 吴群英 . 数值分析方法与实验 : 基于 MATLAB实现 . 高等教育出版社 .2018.9
- [4] 李庆杨 , 王能超 , 易大义 . 数值分析 . 华中科技大学出版社 .2006.7
- [5] 钟季康 , 鲍鸿吉 . 大学物理习题计算机解法— MATLAB编程应用 . 机械工业出版社 .2018.1
- [6] 何红雨 . 电磁场数值算法与 MATLAB实现 . 华中科技大学出版社

附录一：

```
close all; clear; clc;
k = 9e+9;
e_p = 2e-6;
e_n = -e_p;
d = -10:0.1:10;
[x, y] = meshgrid(d);%    产生格点矩阵
a=1.5,b=-1.5;
x_n = -a; y_n = -b;
x_p = a; y_p = b;
V1 = k * e_n ./ sqrt((x-x_n).^2 + (y-y_n).^2);
V2 = k * e_p ./ sqrt((x-x_p).^2 + (y-y_p).^2);
V1_min = k * e_n /0.1; V2_max = k * e_p /0.1;
V1(V1== -Inf) = V1_min; V1(V1<V1_min) = V1_min;
V2(V2== Inf) = V2_max; V2(V2>V2_max) = V2_max;
V = V1 + V2;
[E_x, E_y] = gradient(-V);
hold on; grid on;
t=linspace(-pi, pi, 25);
px = 0.1 * cos(t) + x_p;
py = 0.1 * sin(t) + y_p;
streamline(x, y, E_x, E_y, px, py);%    画出电场线
sx=[min(d)/3*2,min(d),min(d),min(d),min(d)/3*2,min(d),min(d),min(d)/3
*1,0,max(d)/3*1,max(d)/3*2];
sy=[min(d),min(d)/3*1, 0,max(d)/3*1,
max(d),max(d)/3*2,max(d),max(d),max(d),max(d),max(d)];
streamline(x, y, E_x, E_y, sx, sy);%    画出电场线
contour(x, y, V, linspace(min(V(:)), max(V(:)), 180));%    画出等位线
plot(x_n, y_n, 'ro', x_n, y_n, 'r-', 'MarkerSize', 16);
plot(x_p, y_p, 'ro', x_p, y_p, 'r+', 'MarkerSize', 16);
axis([min(d), max(d), min(d), max(d)]);
title('    电偶极子的场和等位线 ');
hold off;
```

附录二：

```
function x=newton(fname,dfname,x0,e)
if nargin<4,e=1e-4;end
fname=inline('x*exp(x)-1');
dfname=inline('exp(x)+x*exp(x)');
x0=0.5;
x=x0;x0=x+2*e;
tic
while abs(x0-x)>e
    x0=x;x=x0-feval(fname,x0)/feval(dfname,x0);
end
toc
```

附录三：

```
hx=17;hy=11;%设置网格
v1=ones(hy,hx);%设置二维数组
for j=1:hx% 设置边界条件
    v1(hy,j)=100*sin(pi*(2*(j-1)/(hx-1)));% 假设恰好为一个周期
    v1(1,j)=0;
end
v1(:,1)=0;
v2=v1;maxt=1;t=0;k=0;% 初始化
while(maxt>0.00001) %迭代精度
    k=k+1;% 计算迭代总次数
    maxt=0;
    for i=2:hy-1
        for j=2:hx-1
            v2(i,j)=(v1(i,j+1)+v1(i+1,j)+v2(i-1,j)+v2(i,j-1))/4;% 拉普拉斯方程差分形式
            t=abs(v2(i,j)-v1(i,j));
            if(t>maxt) maxt=t;
        end
    end
end
v2(2:hy-1,hx)=v2(2:hy-1,hx-1);% 右边界边界条件
v1=v2;
end
subplot(1,2,1),mesh(v2) %3D网格图
axis([0,17,0,14,-20,100])
subplot(1,2,2),contour(v2,16)
hold on
x=1:1:hx;y=1:1:hy;
[xx,yy]=meshgrid(x,y);
[Gx,Gy]=gradient(v2,0.6,0.6);% 计算梯度
quiver(xx,yy,Gx,Gy,0.5,'r') %根据梯度画箭头
axis([-3.5,hx+6.5,-2,15])
```

```
plot([1,1,hx,hx,1],[1,hy,hy,1,1],'k')%画导体框
text(hx/2-2,hy+0.6,'\phi=100sin(\pix)','fontsize',11);%上标注
text(hx/2-1,0.5,'\phi=0','fontsize',11);%下标注
text(-1.8,hy/2,'\phi=0','fontsize',11);%左标注
text(hx+0.2,hy/2,'\partial\phi\partial n=0','fontsize',11);%右标注
title('静电场点位分布图');
hold off
```

附录四：

```
N=36;M=32;M1=12;M2=20;D=1;H=0.5;T=0.05;time=10;% 初始参数定义
u=zeros(M+1,N+1);% 定义场矩阵
u(M1+2:M2,1)=ones(M2-M1-1,1);% 边界条件
for i=2:M
    for j=2:N
        u(i,j)=(i-1)*H*(j-1)*H;% 初始条件
    end
end
u2=u;%差分方程运算开始
for k=1:time/T%k 为时间步数
    for i=2:M
        for j=2:N
            u2(i,j)=(1-4*D*T/H/H)*u(i,j)+D*T/H/H*(u(i+1,j)+u(i-1,j)+u(i,j+1)+
u(i,j-1));
        end
    end
    for i=1:M+1
        for j=1:N+1
            u(i,j)=u2(i,j);
        end
        u(i,N+1)=u2(i,N);
    end
    for i=1:M1+1
        u(i,1)=u2(i,2);
    end
    for i=M2+1:M+1
        u(i,1)=u2(i,2);
    end
end%差分方程运算结束
mesh(u)%画图
xlabel('X Axis'),ylabel('Y Axis'),zlabel('Temperature'),title('Thermal
Field Distribution')
```

附录五：

```
a=10;
N=100;
n1=sqrt(N);
l1t=ones(N,N);
b=a/n1;
e1=1e-9;
E=1/36/pi*e1; % 介电常数
for i=1:n1 % 获取各小块中心坐标
    for j=1:n1
        k=n1*(i-1)+j;
        x(k)=(2*i-1)*b;
        y(k)=(2*j-1)*b;
    end
end
for m=1:N
    for n=1:N
        if m==n
            l1t(m,n)=2*b/pi/E*0.8814;
        else
            l1t(m,n)=b^2/pi/E/sqrt((x(m)-x(n))^2+(y(m)-y(n))^2);
        end
    end
end
L1=l1t;
L2=inv(L1);
Lsum=sum(sum(L2));
C=4*b^2*Lsum
```

精品推荐 强力推荐 值得拥有

精品推荐 强力推荐 值得拥有

精品推荐 强力推荐 值得拥有

精品推荐 强力推荐 值得拥有

[illegible]