Operations Research

Lena Thuy Trang Vo

Wintersemester 2024/25

Inhaltsverzeichnis

Einführung

Kapitel 1

Session 1 und 2: Was sind Optimierungsmodelle und wofür kann man sie einsetzen?

Ein Modell ist ein vereinfachtes - isomorphes oder homomorphes - Abbild eines realen Systems.

- Entscheidungs- bzw. Optimierungsmodell: formale Darstellung eines Entscheidungs- oder Planungsproblems, das in seiner einfachsten Form mindestens eine Alternativenmenge und eine diese bewertende Zielfunktion enthält
  - wird entwickelt, um mit geeigneten Verfahren optimale oder suboptimale Lösungsvorschläge ermitteln zu können
- Simulationsmodelle: sind häufig sehr komplexe Optimierungsmodelle, für die keine analytischen Lösungsverfahren existieren
  - dienen dem Zweck, die Konsequenzen einzelner Alternativen zu bestimmen
- Beschreibungsmodelle: beschreiben Elemente und deren Beziehungen in realen Systemen
  - sie enthalten keine Hypothesen üner reale Wirkungszusammenhänge und erlauben daher keine Erklärung oder Prognose realer Vorgänge
- Erklärungsmodelle: werten empirische Gesetzesmäßigkeiten oder Hypothesen zur Erklärung von Sachverhalten aus
- Prognosemodelle: werden in der Regel zur Gruppe der Erklärungsmodelle gezählt
  - sie dienen der Vorhersage von zukünfitgen Entwicklungen

Definition

Optimierungsmodelle dienen als **Entscheidungsunterstützung** zum Finden von **Lösungen**, welche hinsichtlich eines oder mehrerer Ziele **optimiert** sind und gleichzeitig alle Restriktionen einhalten.

Bestandteile von Optimierungsmodellen

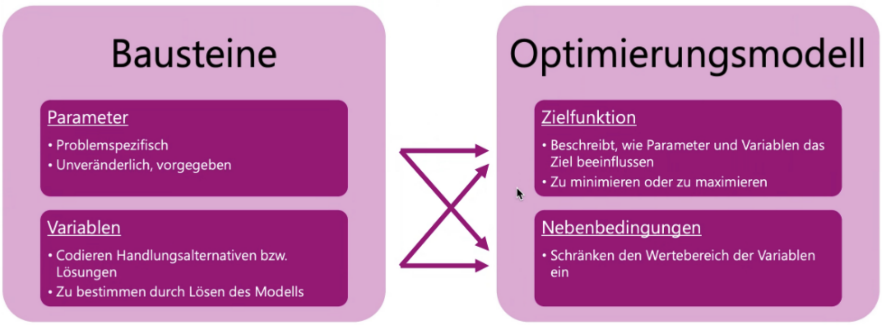

Abbildung 1: Bestandteile von Optimierungsmodellen

- Anwendungen: E-Commerce Lagerhaltung und Fahrzeugroutenplanung

Definition

Ein Optimierungsmodell, welches bezüglich der Variablen ausschließlich lineare Beziehungen enthält, nennt man **lineares Programm (LP).**

Session 3: Graphisches Lösen eines Optimierungsmodells

- kann man graphisch lösen, wenn es zweidimensional ist
- Nebenbedingungen einzeichnen
- bei 2 Variablen, eine einfach gleich 0 setzen, dann die andere

Definition

Der durch die Nebenbedingungen aufgespannte **zulässige Bereich** enthält **alle gültigen Lösungen** des Optimierungsproblems.

- ISO-Linien: Linien, die durch den Lösungsraum laufen; alle Lösungen, die auf diesen Linien liegen sind gleich gut (**selbe Lösungsqualität**)
  - ISO-Linien haben eine **Optimierungsrichtung**
  - bei einer Maximierung: möglichst weit rechts oben
  - bei einer Minimierung: möglichst weit links unten

Definition

Dort, wo die **Zielfunktion** in Optimierungsrichtung gerade noch den **zulässigen Bereich** berührt, befindet sich die optimale Lösung x^*.

Zusammenfassung des Vorgehens

Für jede Nebenbedingung:

- Überführe die Nebenbedingung in eine Geradengleichung
- Zeichne die Gerade in ein Koordinatensystem ein
- Zeichne die Wirkrichtung der Nebenbedingung ein
- Ergebnis: Zulässiger Bereich

Für die Zielfunktion:

- Setze die Zielfunktion mit einem beliebigen Wert gleich
- Zeichne die daraus resultierende Gerade in das Koordinatensystem ein
- Verschiebe die ISO-Linie parallel in Optimierungsrichtung, sodass sie gerade noch den zulässigen Bereich berührt

Bestimmen der optimalen Lösung:

- Gleichsetzen der Nebenbedingungen, die sich im Berührpunkt von zulässigem Bereich und ISO-Linie schneiden
- Bestimmen des optimalen Zielfunktionswert durch Einsetzen der optimalen Variablenwerte

Session 4: Abstrakte Optimierungsmodelle

Definition

Ein durch **allgemeine Parameter** formuliertes Optimierungsmodell nennt man **abstraktes Modell**. Befüllt man das abstrakte Modell mit Werten, so erhält man eine **konkrete Modellinstanz**.

Session 5: Summenzeichen und All-Quantoren in Optimierungsmodellen

Definition

Mit einem **Summenzeichen** lassen sich Terme **innerhalb von Zielfunktionen oder Nebenbedingungen** zusammenfassen.

- das Modell kann auch mithilfe von Indexmengen vereinfacht werden
  - Bsp. $I = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$
- durch den Elementoperator $\in$ lässt sich dabei ausdrücken, dass eine Laufvariable Element einer Menge ist
  - $i \in I$ (i ist eine Element der Menge I)
- die Anzahl der Elemente einer Menge lässt sich durch die Kardinalität ausdrücken
  - $|I| = 100$ (Die Menge I enthält 100 Elemente)

Definition

Mit **Indexmengen** und **All-Quantoren** lassen sich **mehrere Nebenbedingungen gleicher Struktur** kompakt definieren.

Definition

Ein **abstraktes und kompaktes Optimierungsmodell** kann leichter an eine **veränderte Problemstellung** (wie bspw. neue Maschinen oder neue Sorten) angepasst werden. Im besten Fall ändern sich nur die **Modellbestandteile** (bspw. die Indexmengen oder Parameterwerte), nicht jedoch die **Formulierung**.

Session 6: Ganzzahligkeit

Definition

Ein Optimierungsmodell mit ausschließlich **ganzzahligen Variablen** heißt **IP (Integer Program)**. Ist es zusätzlich **linear**, heißt es **ILP (Integer Linear Program)**.

- LP: **Jedes Wertepaar** (x_1, x_2) innerhalb der Nebenbedingungen ist eine zulässige Lösung.

- ILP: **Nur ganzzahlige Wertepaare** (x_1, x_2) innerhalb der Nebenbedinungen sind zulässige Lösungen.

Definition

Ein Optimierungsmodell, welches sowohl **ganzzahlige** als auch **kontinuierliche Variablen** enthält, heißt **MIP (Mixed-Integer Program)**. Ist es zusätzlich linear, heißt es **MILP (Mixed-Integer Linear Program)**.

- MILP: **nur Wertepaare** (x_1, x_2) **mit ganzzahligem** x_1 innerhalb der Nebenbedingungen sind zulässige Lösungen.

Session 7: Big-M Bedingungen

Definition

Durch **binäre Variablen** lassen sich Entscheidungen mit genau **zwei Alternativen** modellieren.

Definition

M sollte grundsätzlich **so groß wie nötig**, aber **so klein wie möglich** gewählt werden. Bei zu großen M droht **numerische Instabilität**.

Definition

Optimierungsmodelle sind in der Regel **leichter lösbar**, wenn sie **weniger Variablen** und **weniger Nebenbedingungen** enthalten.