сжимающих отображений дает и фактический метод приближенного нахождения этого решения (*метод последовательных приближений*). Рассмотрим следующие простые примеры.

1. Пусть f — функция, которая определена на сегменте $[a, b]$, удовлетворяет условию Липшица

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leqslant K|x_2 - x_1|,$$

с константой $K < 1$ и отображает сегмент $[a, b]$ в себя. Тогда f есть сжимающее отображение и, согласно доказанной теореме, последовательность x_0, $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, ... сходится к единственному корню уравнения $x = f(x)$.

В частности, условие сжимаемости выполнено, если функция имеет на сегменте $[a, b]$ производную $f'(x)$, причем $|f'(x)| \leqslant \leqslant K < 1$.

На рис. 9 и 10 изображен ход последовательных приближений в случае $0 < f'(x) < 1$ и в случае $-1 < f'(x) < 0$.

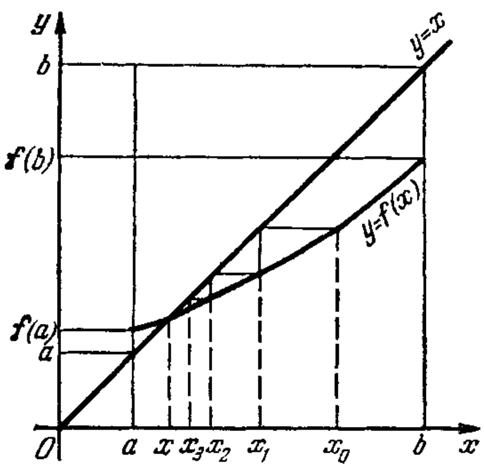

Рис. 9.

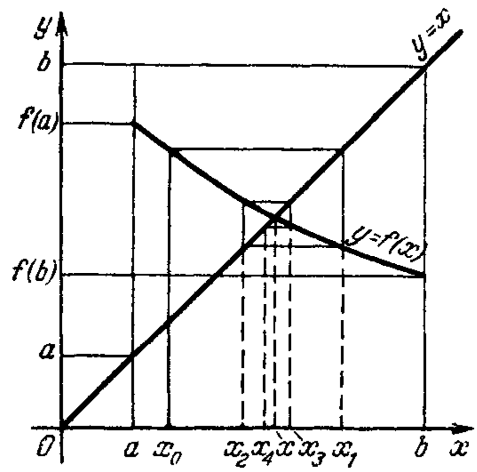

Рис. 10.

Пусть теперь мы имеем дело с уравнением вида $F(x) = 0$, причем $F(a) < 0$, $F(b) > 0$ и $0 < K_1 \leqslant F'(x) \leqslant K_2$ на $[a, b]$. Введем функцию $f(x) = x - \lambda F(x)$ и будем искать решение уравнения $x = f(x)$, равносильного уравнению $F(x) = 0$ при $\lambda \neq 0$. Так как $f'(x) = 1 - \lambda F'(x)$, то $1 - \lambda K_2 \leqslant f'(x) \leqslant 1 - \lambda K_1$ и нетрудно подобрать число λ так, чтобы можно было действовать методом последовательных приближений. Это — распространенный метод отыскания корня.

2. Рассмотрим отображение A n-мерного пространства в себя, задаваемое системой линейных уравнений

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Если A есть сжатие, то мы можем применить метод последовательных приближений к решению уравнения $x = Ax$.

При каких же условиях отображение A будет сжатием? Ответ на этот вопрос зависит от выбора метрики в пространстве. Рассмотрим три варианта.

а) Пространство $\mathbf{R}^n_\infty$, т. е. $\rho(x, y) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - y_i|$;

$$\rho(y', y'') = \max_i |y'_i - y''_i| = \max_i \left| \sum_j a_{ij}(x'_j - x''_j) \right| \leqslant$$
$$\leqslant \max_i \sum_j |a_{ij}| |x'_j - x''_j| \leqslant \max_i \sum_j |a_{ij}| \max_j |x'_j - x''_j| =$$
$$= \left(\max_i \sum_j |a_{ij}| \right) \rho(x', x'').$$

Отсюда условие сжимаемости

$$\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \leqslant \alpha < 1, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

б) Пространство $\mathbf{R}^n_1$, т. е. $\rho(x, y) = \sum\limits_{i=1}^n |x_i - y_i|$;

$$\rho(y', y'') = \sum_i |y'_i - y''_i| = \sum_i \left| \sum_j a_{ij}(x'_j - x''_j) \right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_i \sum_j |a_{ij}| |x'_j - x''_j| \leqslant \left(\max_j \sum_i |a_{ij}| \right) \rho(x', x'').$$

Отсюда условие сжимаемости

$$\sum_i |a_{ij}| \leqslant \alpha < 1, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

в) Пространство $\mathbf{R}^n$, т. е. $\rho(x, y) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$. На основании неравенства Коши — Буняковского имеем

$$\rho^2(y', y'') = \sum_i \left(\sum_j a_{ij}(x'_j - x''_j) \right)^2 \leqslant \left(\sum_i \sum_j a_{ij}^2 \right) \rho^2(x', x'').$$

Отсюда условие сжимаемости

$$\sum_i \sum_j a_{ij}^2 \leqslant \alpha < 1. \tag{4}$$

Таким образом, если выполнено хотя бы одно из условий[1]) (2)—(4), то существует одна и только одна точка $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

[1]) В частности, из любого из условий (2)—(4) вытекает, что

$$\begin{vmatrix} a_{11} - 1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - 1 & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$