сжимающих отображений дает и фактический метод приближенного нахождения этого решения (метод последовательных приближений). Рассмотрим следующие простые примеры.

1. Пусть f - функция, которая определена на сегменте $[a, b]$, удовлетворяет условию Липшица

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leqslant K|x_2 - x_1|,$$

с константой $\mathrm{K} < 1$ и отображает сегмент $[a, b]$ в себя. Тогда f есть сжимающее отображение и, согласно доказанной теореме, последовательность x_0, $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, $\ldots$ сходится к единственному корню уравнения $x = f(x)$.

В частности, условие сжимаемости выполнено, если функция имеет на сегменте $[a, b]$ производную $f'(x)$, причем $|f'(x)| \leqslant K < 1$.

На рис. 9 и 10 изображен ход последовательных приближений в случае $0 < f'(x) < 1$ и в случае $-1 < f'(x) < 0$.

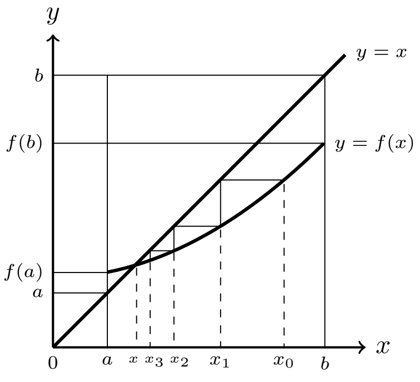

Рис. 9

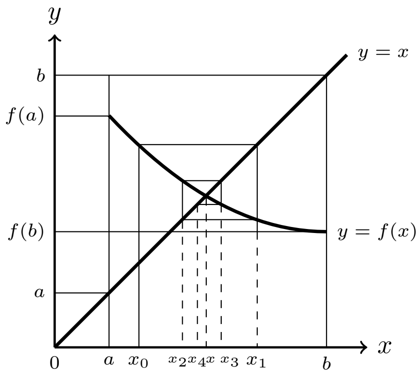

Рис. 10

Пусть теперь мы имеем дело с уравнением вида $F(x) = 0$, причём $F(a) < 0$, $F(b) > 0$ и $0 < K_1 \leqslant F'(x) \leqslant K_2$ на $[a, b]$. Введём функцию $f(x) = x - \lambda F(x)$ и будем искать решение уравнения $x = f(x)$, равносильного уравнению $F(x) = 0$ при $\lambda \neq 0$. Так как $f'(x) = 1 - \lambda F'(x)$, то $1 - \lambda K_2 \leqslant f'(x) \leqslant 1 - \lambda K_1$ и нетрудно подобрать число λ так, чтобы можно было действовать методом последовательных приближений. Это - распространенный метод отыскания корня.

2. Рассмотрим отображение A n-мерного пространства в себя, задаваемое системой линейных уравнений

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i + b_i \qquad (i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n).$$

Если A есть сжатие, то мы можем применить метод последовательных приближений к решению уравнения $x = Ax$.

При каких же условиях отображение A будет сжатием? Ответ на этот вопрос зависит от метрики в пространстве. Рассмотрим три варианта.

а) Пространство $\boldsymbol{R}^n_\infty$, то есть $\rho(x,y) = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i - y_i|$;

$$\rho(y', y'') = \max_i |y'_i - y''_i| = \max_i |\sum_j a_{ij}(x'_j - x''_j)| \leqslant \max_i \sum_j |a_{ij}||x'_j - x''_j| \leqslant$$
$$\leqslant \max_i \sum_j |a_{ij}| \max_j |x'_j - x''_j| = (\max_i \sum_j |a_{ij}|)\rho(x', x'').$$

Отсюда условие сжимаемости

$$\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \leqslant \alpha < 1, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

б) Пространство $\boldsymbol{R}^n_1$, т. е. $\rho(x,y) = \sum\limits_{i=1}^n |x_i - y_i|$;

$$\rho(y', y'') = \sum_i |y'_i - y''_i| = \sum_i |\sum_j a_{ij}(x'_j - x''_j)| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_i \sum_j |a_{ij}||x'_j - x''_j| \leqslant (\max_j \sum_i |a_{ij}|)\rho(x', x'').$$

Отсюда условие сжимаемости

$$\sum_i |a_{ij}| \leqslant \alpha < 1, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

в) Прострaство $\boldsymbol{R}^n$, т. е. $\rho(x,y) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$. На основании неравенства Коши-Буняковского имеем

$$\rho^2(y', y'') = \sum_i (\sum_j a_{ij}(x'_j - x''_j))^2 \leqslant (\sum_i \sum_j a^2_{ij})\rho^2(x', x'').$$

Отсюда условие сжимаемости

$$\sum_i \sum_j a^2_{ij} \leqslant \alpha < 1. \tag{4}$$

Таким образом, если выполнено хотя бы одно из условий [1]) (2) - (4), то существует одна и только одна точка $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

[1]) В частности из любого из условий (2) - (4) вытекает, что

$$\begin{vmatrix} a_{11} - 1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - 1 & \ldots & a_{2n} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - 1 \end{vmatrix} \neq 0$$