

# Turbulenzspektren (Dokumentation)

Lena Müller

20. Dezember 2023

## 1 Metriken

**Komponenten der Luftbewegung** Zur Analyse von Turbulenzen ist die Zerlegung der meteorologischen (gemessenen oder simulierten) Zeitreihe (der momentanen Luftbewegung  $u$ ) in den mittleren Wind  $\bar{U}$  und einen turbulenten Anteil  $u'$  notwendig. Eine solche Zerlegung ist für alle meteorologischen Größen und Spurenstoffkonzentrationen möglich.

$$u = \bar{U} + u' \quad (1)$$

**Turbulente Intensität** Die turbulente Intensität kann unterschiedlich berechnet werden. Als absolute Größe beschreibt sie die Perturbation des Windes (z.B. als Standardabweichung vom Mittelwert  $\sigma_x$ ).

$$I_a = \sigma_x \quad (2)$$

Als relative Größe (auch: Turbulenzgrad) ist sie auf den mittleren Wind  $\bar{x}$  bezogen.

$$I_r = \frac{\sigma_x}{\bar{x}} \quad (3)$$

**Taylor's frozen turbulence-Hypothese (1938)** Die Annahme eingefrorener Eddies erlaubt den Schluss von mittlerer Horizontal-Windgeschwindigkeit  $\bar{x}$  und typischer Dauer eines Eddies  $P$  auf den Eddy-Durchmesser  $\lambda$  (Gl. 4). Kleine Eddies sind kurzlebiger als große Eddies. Begründet liegt diese Annahme darin, dass sich turbulente Elemente nur wenig ändern (eingefroren sind), wenn sie mit dem mittleren Wind advektiv herangetragen werden. Voraussetzung ist, dass die relative turbulente Intensität gering ist ( $I_r < 0,5$ ).

$$P = \frac{\lambda}{\bar{x}} \quad (4)$$

**Normierung der Frequenz** Für den Vergleich von Windgeschwindigkeiten unterschiedlicher Messhöhen, wird die Frequenz  $f$  auf der x-Achse häufig mit dem Verhältnis aus Höhe  $z$  und mittlerem Wind  $\bar{u}$  normiert (Gl. 5) [Foken, 2017].

$$f_n = f \frac{z}{\bar{u}} \quad (5)$$

**Kovarianz** Die Kovarianz ist ein Maß für die gemeinsame Beziehung zweier Variablen (Gl. 6). Beispielsweise kann ein Wärme- bzw. Feuchtefluss (Transfer einer Größe pro Einheitsfläche und Einheitszeit) über die Kovarianz von Windgeschwindigkeit und Temperatur bzw. Feuchte beschrieben werden. Ein solcher Advektionsfluss hat jeweils eine Ost-West-, eine Nord-Süd- und eine vertikale Komponente (mittlerer Anteil:  $\overline{U} \cdot \theta$ ;  $\overline{V} \cdot \theta$ ;  $\overline{W} \cdot \theta$ , turbulenter Anteil:  $\overline{u' \theta'}$ ;  $\overline{v' \theta'}$ ;  $\overline{w' \theta'}$ ).

$$Cov(A, B) = \frac{\sum_{i=1}^n (A_i - \bar{A})(B_i - \bar{B})}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n a'_i b'_i}{n} = \overline{a' b'} \quad (6)$$

**Korrelationskoeffizient** Der Korrelationskoeffizient  $r_{AB}$  [Wertebereich: -1 ... +1] ist die Kovarianz zweier Variablen  $A$  und  $B$ , normiert mit dem Produkt ihrer Standardabweichungen (Gl. 7).

$$r_{AB} = \frac{\overline{a' b'}}{\sigma_A \sigma_B} \quad (7)$$

**MKE und TKE** Analog zu Gl. 1 kann auch die kinetische Energie in eine mittlere und eine fluktuierende Komponente unterteilt werden. Die kinetische Energie besteht aus der mittleren kinetischen Energie (MKE) und der turbulenten kinetischen Energie (TKE). Nachfolgende Gleichungen beziehen sich auf eine Einheitsmasse.

$$MKE/m = 0,5(\overline{U} + \overline{V} + \overline{W}) \quad (8)$$

$$TKE/m = 0,5(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}) \quad (9)$$

## 2 Schritte der Fourier-Analyse

### 1. Aufbereitung der Zeitreihe:

Die Fouriertransformation impliziert, dass sich der Datensatz unendlich lang periodisch wiederholt, was natürlicherweise nicht der Fall ist. Bei Verlängerung der Messreihe in beide Richtungen können Unstetigkeitsstellen am Beginn und Ende des Messzeitraums entstehen, welche ein „spectral leakage“ verursachen. Insgesamt sollten die Daten allerdings nur so viel wie nötig aufbereitet werden, da auch die Schritte der Datenaufbereitung Unsicherheiten erzeugen können.

- (a) Schritt 1: Füllen von Datenlücken: Der FFT-Algorithmus erfordert eine vollständige, äquidistante Zeitreihe.
- (b) Schritt 2: Entfernen eines Zeitreihentrends: Subtraktion des Trends von der Zeitreihe im additiven Komponentenmodell für Zeitreihen
- (c) Schritt 3: Tapering: Die ersten und letzten 10 % der Zeitreihe werden mit einer symmetrischen Funktion, (engl. window function, z.B. Blackman, Hanning, flattop, Tukey, Parzen), welche am Rand Null

beträgt und in der Mitte ihr Maximum erreicht, skaliert, um die Grenzen des Messzeitraums abzurunden [Stull, 1988].

## 2. Berechnung der Fourier-Terme:

Wird weißes Licht durch ein Prisma gelenkt, werden die Spektralfarben mit ihren unterschiedlichen Wellenlängen aufgeschlüsselt, welche im weißen Licht überlagert waren. Mittels Fourier-Transformation können die unterschiedlichen Wellenlängen mit ihrer relativen Stärke am Signal aufgeschlüsselt werden. Bei der Fourier-Transformation wird die Zeitreihe als Summe von trigonometrischen Funktionen dargestellt (Fourierreihe). Für  $n$  Datenpunkte resultieren  $n$  komplexe Zahlen.

FFT steht für Fast Fourier Transform und beschreibt die Laufzeitverbesserung der „normalen“ Fouriertransformation von  $O(N)$  Operationen auf  $O(N \log_2 N)$  Operationen. Dieser Algorithmus ist bereits in sämtlichen Programmiersprachen (auch in inverser Form) implementiert.

Mithilfe der Eulerschen Formel ( $e^{ix} = \cos(x) + i \cdot \sin(x)$ ) können die Fourier-Terme in Exponentialfunktion (Gl. 10) in ihre trigonometrische Funktion (Gl. 11) (und v.v.) umgewandelt werden.

$$F_A(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \left[ \frac{A(k)}{N} \right] \cdot e^{-i2\pi nk/N} \quad (10)$$

$$F_A(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} A(k) \cdot \cos(2\pi nk/N) - \frac{i}{N} \sum_{k=0}^{N-1} A(k) \cdot \sin(2\pi nk/N) \quad (11)$$

## 3. Reduktion der Fourier-Terme:

Dies betrifft Wellenlängen, welche die Messdauer überschreiten und Wellenlängen, welcher kleiner als die der Nyquist-Frequenz sind. Die Nyquist-Frequenz  $n_f = N/2$  ist die Frequenz, welche gerade noch von  $N$  Datenpunkten aufgelöst werden kann, da jede Welle von mindestens 2 Datenpunkten getragen werden muss, um korrekt dargestellt zu werden [Stull, 1988].

## 4. Berechnung des Quadrats der Norm der komplexen Terme:

Die Norm der Fourier-Terme gibt die Amplitude des jeweiligen Frequenzkomponenten im Signal an (wie stark best. Frequenz in Zeitreihe vertreten ist). Das Quadrat der Norm (Gl. 12) ist proportional zur Energie dieser Frequenzkomponente und wird verwendet, um die Energieverteilung der Frequenzen zu verstehen.

$$|F_A(n)|^2 = [F_{real}(n)]^2 + [F_{imag}(n)]^2 \quad (12)$$

Summiert man die Terme von  $n = 1 \dots N - 1$  auf, erhält man die gesamte Varianz der Zeitreihe (Gl. 13). Die Frequenz  $n=0$  entspricht dem Mittelwert, welcher keinen Beitrag zur Varianz leistet.

$$\sigma_A^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (A_k - \bar{A})^2 = \sum_{n=1}^{N-1} |F_A(n)|^2 \quad (13)$$

#### 5. Berücksichtigung der negativen Frequenzen:

Wenn wir die Amplitude extrahieren, erhalten wir nur den Beitrag der positiven Frequenzen. Die Multiplikation mit 2 ist notwendig, um auch den Beitrag der negativen Frequenzen zu berücksichtigen (Ausnahme:  $n_f$  bei geradem  $N$ ). Die Frequenzen  $> n_f$  sind die komplex konjugierte Version der ersten  $N/2$  Terme.

$$\text{Wenn } N \text{ ungerade: } E_A(n) = 2|F_A(n)|^2 \text{ für } n=1 \dots n_f \quad (14)$$

$$\text{Wenn } N \text{ gerade: } E_A(n) = 2|F_A(n)|^2 \text{ für } n=1 \dots n_f-1 \quad (15)$$

#### 6. Darstellung des Spektrums:

Das Spektrum wird i.d.R. mit der Frequenz  $f$  auf der x-Achse und der spektralen Energie  $S(f)$  auf der y-Achse dargestellt. Es kann als diskretes oder kontinuierliches Spektrum dargestellt werden. Beide Achsen können linear oder (semi-)logarithmisch skaliert sowie in ihrem Wertebereich limitiert sein. Da atmosphärische Prozesse über viele Skalen reichen, ist meist eine logarithmische skalierte x-Achse sinnvoll. Die Frequenz  $f$  kann zudem als normierte Frequenz (Gl. 5) angegeben sein. Um den Fokus auf geringe Frequenzen zu erhöhen, wird die spektrale Energie auf der y-Achse häufig mit der Frequenz multipliziert:  $f \cdot S(f)$ . Die Art der Darstellung ist beim Vergleich mit Ergebnissen anderer Studien zu beachten.

## 3 Messungen

---

Fußweg, Gustav-Adolf-Straße 01219 Dresden  
Fußweg, Ermischstr. 01067 Dresden  
Grünanlage, Ermischstr. 01067 Dresden  
Balkon, Ermischstr. 01067 Dresden

---

Tabelle 1: Übersicht der Messstandorte

EXPE (BME280) [Bosch Sensor- tec, 2015]	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Temperatur [°C]</li> <li>• relative Feuchte [%]</li> <li>• Luftdruck [P]</li> <li>• geografische Position (Lat, Lon, Elev)</li> <li>• Zeit [UTC]</li> </ul>	Abtast- frequenz 1 Hz
SONIC [Young Meteo- rological Instru- ments, 2004]	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Windgeschw. in x-Richtung [m/s]</li> <li>• Windgeschw. in y-Richtung [m/s]</li> <li>• Windgeschw. in z-Richtung [m/s]</li> <li>• Schalltemperatur [°C]</li> <li>• Zeit [UTC+1]</li> </ul>	Abtast- frequenz 2 Hz

Tabelle 2: Übersicht der Messgeräte

## Literatur

- Bosch Sensortec. BME 280: Final data sheet, 2015. URL [https://cdn-shop.adafruit.com/datasheets/BST-BME280\\_DS001-10.pdf](https://cdn-shop.adafruit.com/datasheets/BST-BME280_DS001-10.pdf). Letzter Zugriff 15.11.2023.
- T. Foken. *Micrometeorology*. Springer Berlin Heidelberg, 2017. doi: 10.1007/978-3-642-25440-6. URL <https://doi.org/10.1007/978-3-642-25440-6>.
- R. Stull. *An Introduction to Boundary Layer Meteorology*. Kluwer Academic, 1988. ISBN : 978-90-277-2769-5, 670 pp.
- Young Meteorological Instruments. Ultrasonic Anemometer Model 81000. Instructions, 2004.