

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Научно-образовательная корпорация ИТМО»

**ФАКУЛЬТЕТ ПРОГРАММНОЙ ИНЖЕНЕРИИ И КОМПЬЮТЕРНОЙ
ТЕХНИКИ**

**Индивидуальное домашнее задание №6
«Оценка двумерной выборки.
Оценивание параметров двумерной случайной величины»**

Вариант № 2

Работу выполнили:
студент группы Р3209
Зайцева И. С.
студент группы Р3217
Русакова Е. Д.

Преподаватель:
Милованович Е. В.

г. Санкт-Петербург
2024 г.

Цель работы:

Цель работы состоит в построении оценок математических ожиданий и дисперсии случайных величин, входящих в систему, а также корреляционной матрицы и коэффициента корреляции.

Исходные данные:

x_i^*	y_i^*	17	27	32	37
12		30	80	0	0
22		0	45	20	0
32		0	0	10	15

Ход работы:

$$n = 200$$

Матрица распределения

x_i^*	y_i^*	17,00	27,00	32,00	37,00	p_i^*
12,00		0,15	0,40	0,00	0,00	0,55
22,00		0,00	0,23	0,10	0,00	0,33
32,00		0,00	0,00	0,05	0,08	0,13
q_j^*		0,15	0,63	0,15	0,08	1,00

x_i^*	12	22	32
p_i^*	0,55	0,325	0,125

$$\tilde{M}(x) = \sum_{i=0}^n x_i^* p_i^* = 12 * 0,55 + 22 * 0,325 + 32 * 0,125 = 17,75$$

$$\tilde{D}(x) = \sum_{i=0}^n x_i^{*2} p_i^* - (\tilde{M}(x))^2 = 12^2 * 0,55 + 22^2 * 0,325 + 32^2 * 0,125 - 17,75^2 = 49,4375$$

$$\tilde{\sigma}(x) = \sqrt{\tilde{D}(x)} = \sqrt{49,4375} = 7,031$$

y_i^*	17	27	32	37
q_j^*	0,15	0,625	0,15	0,075

$$\tilde{M}(y) = \sum_{i=0}^n y_i^* q_i^* = 17 * 0,15 + 27 * 0,625 + 32 * 0,15 + 37 * 0,075 = 27$$

$$\tilde{D}(y) = \sum_{i=0}^n y_i^{*2} q_i^* - (\tilde{M}(y))^2 = 17^2 * 0,15 + 27^2 * 0,625 + 32^2 * 0,15 + 37^2 * 0,075 - 27^2 = 26,25$$

$$\tilde{\sigma}(y) = \sqrt{\tilde{D}(y)} = \sqrt{26,25} = 5,123$$

Ковариация

$$\begin{aligned}\tilde{K}(x, y) &= \text{cov}(x, y) = \sum \sum x_i^* y_j^* p_{ij}^* - \tilde{M}(x) * \tilde{M}(y) \\ &= (30,6 + 129,6 + 133,65 + 70,4 + 51,2 + 88,8) - 17,75 * 27 = 25\end{aligned}$$

Корреляция

$$\widetilde{r}_{xy} = \frac{\widetilde{K}(x, y)}{\widetilde{\sigma}(x) * \widetilde{\sigma}(y)} = \frac{25}{7,031 * 5,123} = 0,694$$

Корреляционная матрица

$$K = \begin{pmatrix} K(x, x) = D(x) & K(x, y) \\ K(y, x) & K(y, y) = D(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49,4375 & 25 \\ 25 & 26,25 \end{pmatrix}$$

Условные ряды распределения y при условии $x = x_i^*$:

$$P(y = y_j | x = x_i) = \frac{P(y = y_j, x = x_i)}{P(x = x_i)}$$

$x = 12$:

y_j	17,00	27,00	32,00	37,00
$P(y = y_j x = 12)$	0,272727	0,727273	0	0

Условное математическое ожидание:

$$\widetilde{M}(y | x = 12) = \sum_{i=0}^n y_j P(y = y_j | x = 12) = 17 * 0,27273 + 27 * 0,7273 + 32 * 0 + 37 * 0 = 24,273$$

$x = 22$:

y_j	17,00	27,00	32,00	37,00
$P(y = y_j x = 22)$	0	0,692308	0,307692	0

Условное математическое ожидание:

$$\widetilde{M}(y | x = 22) = \sum_{i=0}^n y_j P(y = y_j | x = 12) = 17 * 0 + 27 * 0,6923 + 32 * 0,3077 + 37 * 0 = 28,538$$

$x = 32$:

y_j	17,00	27,00	32,00	37,00
$P(y = y_j x = 32)$	0	0	0,4	0,6

Условное математическое ожидание:

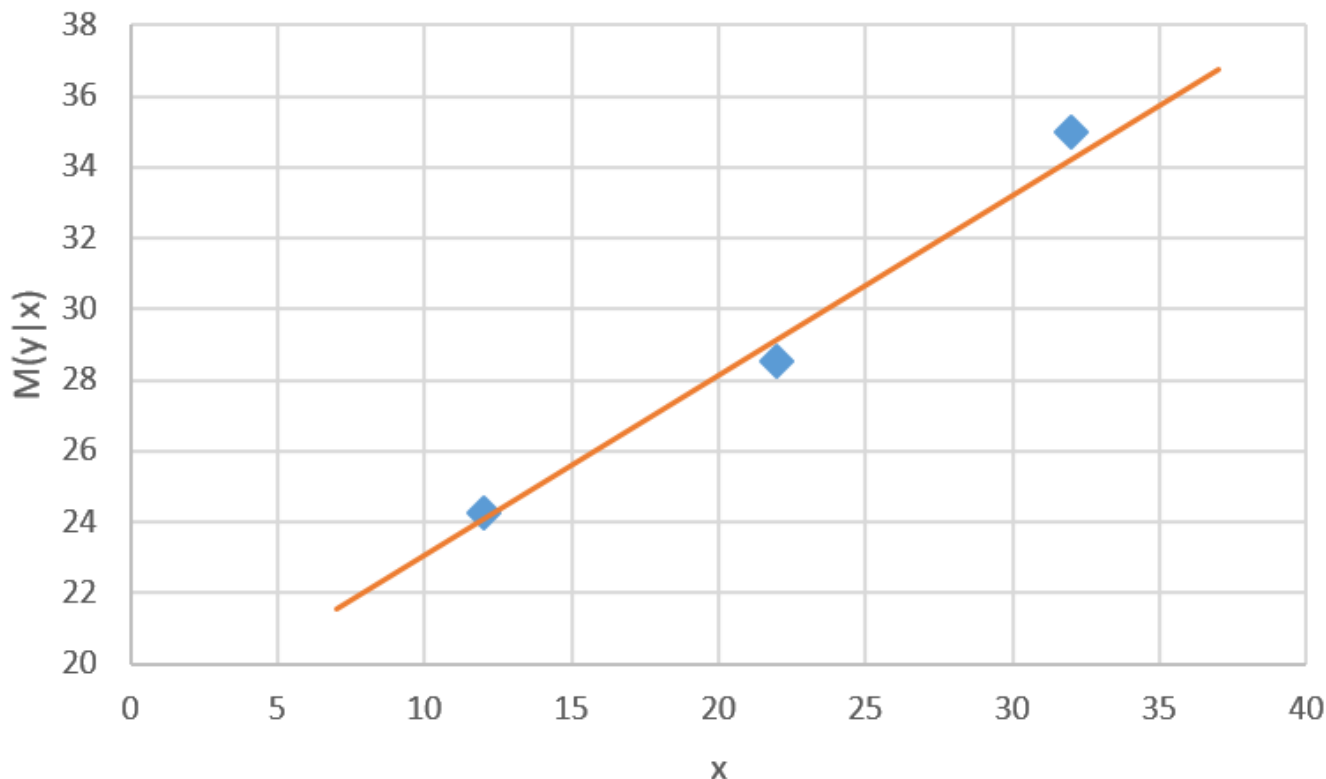
$$\widetilde{M}(y | x = 32) = \sum_{i=0}^n y_j P(y = y_j | x = 32) = 17 * 0 + 27 * 0 + 32 * 0,4 + 37 * 0,6 = 34,206$$

Зависимость условного математического ожидания компоненты Y от значения компоненты X :

x_i	12	22	32
$\widetilde{M}(y x = x_i)$	24,27273	28,53846	34,20607

Сглаживание экспериментальных данных с помощью построения выборочной функции регрессии линейного вида:

$$\begin{aligned} M(y | x = x_i) = \widetilde{y}(x) &= \widetilde{M}(y) + \widetilde{r}_{xy} * \frac{\widetilde{\sigma}(y)}{\widetilde{\sigma}(x)} * (x - \widetilde{M}(x)) = 27 + 0,69398 * \frac{5,123475}{7,031181} * (x - 17,75) \\ &= 27 + 0,505689(x - 17,75) = 0,505689x + 18,02402 = 0,506x + 18,024 \end{aligned}$$



Результаты:

Оценки математических ожиданий:

$$\tilde{M}(x) = 17,75$$

$$\tilde{M}(y) = 27$$

Оценки дисперсий:

$$\tilde{D}(x) = 49,4375$$

$$\tilde{D}(y) = 26,25$$

Корреляционная матрица:

$$K = \begin{pmatrix} 49,4375 & 25 \\ 25 & 26,25 \end{pmatrix}$$

Оценка коэффициента корреляции:

$$\widetilde{r_{xy}} = 0,69398$$

Вывод:

Проанализировав исходные данные, мы нашли значение оценок математического ожидания и дисперсии случайных величин, нашли корреляционную матрицу и коэффициент корреляции, построили линию регрессии, сгладив экспериментальные данные.

