Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Научно-образовательная корпорация ИТМО»

ФАКУЛЬТЕТ ПРОГРАММНОЙ ИНЖЕНЕРИИ И КОМПЬЮТЕРНОЙ ТЕХНИКИ

Индивидуальное домашнее задание №8
«Метод наименьших квадратов и сглаживание экспериментальных зависимостей»

Вариант № 2

Работу выполнили:
студент группы P3209
Зайцева И. С.
студент группы P3217
Русакова Е. Д.

Преподаватель:
Милованович Е. В.

г. Санкт-Петербург
2024 г.

Цель работы:

1. По исходным данным, используя метод наименьших квадратов, построить регрессионные модели четырех видов ($z = \frac{1}{a+bt}, z = \frac{t}{a+bt}, z = ae^{bt}, z = at^b$) и выбрать наилучшую из них.

Исходные данные:

t	1,2500	0,6250	0,5000	0,4000	0,3100	0,2500	0,2100	0,1800
z	1,3200	0,7800	0,6900	0,5500	0,4300	0,3600	0,3100	0,2600

Ход работы:

1. $z = \frac{1}{a+bt}$

$$y = \frac{1}{z} => y = a + bt$$

$$S = \sum (y_i - a - bt_i)^2$$

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a} = 2\sum (y_i - a - bt_i)(-1) = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial b} = 2\sum (y_i - a - bt_i)(-t_i) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum (-1)y_i + \sum a + \sum bt_i = 0 \\ \sum (-t_i)y_i + \sum at_i + \sum bt_i^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8a + 3.725b = 17.4824 \\ 3.725a + 2.5982b = 5.9853 \end{cases}$$

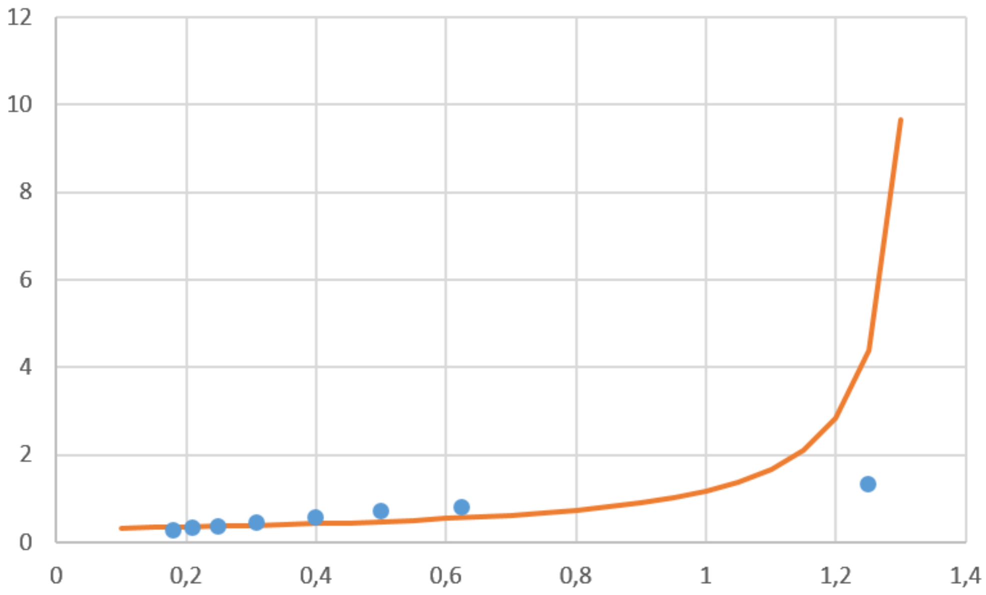
$$a = 3.347015$$

$$b = -2.49493$$

$$y = 3.347015 - 2.49493t$$

$$z = \frac{1}{3.347015 - 2.49493t}$$

$$S_{min}^{(1)} = \sum \left(z_i - \frac{1}{a + bt_i} \right)^2 = 9,4796$$



2. $z = \frac{t}{a+bt}$

$$y = \frac{1}{z}, x = \frac{1}{t} => y = b + ax$$

$$S = \sum (y_i - b - ax_i)^2$$

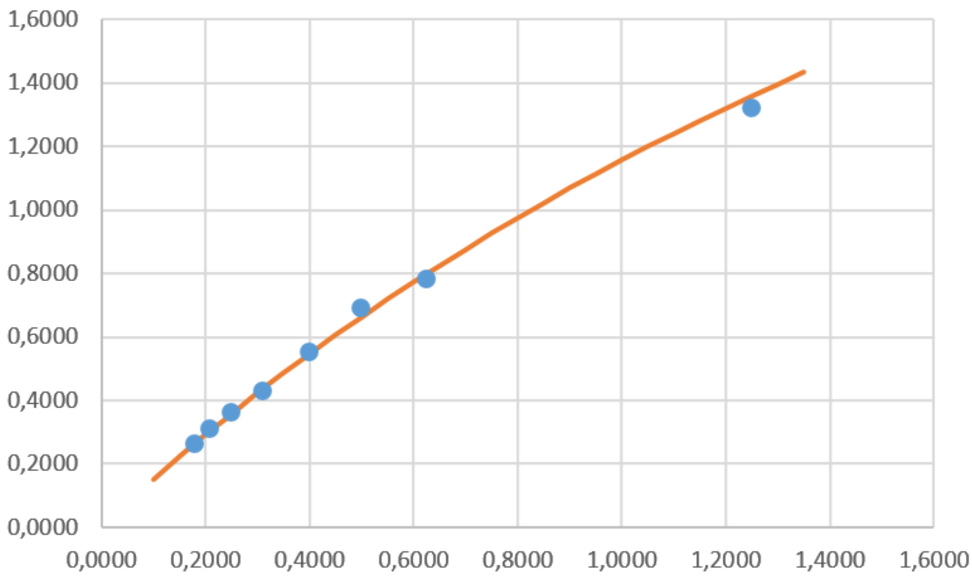
$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a} = 2\sum (y_i - b - ax_i)(-x_i) = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial b} = 2\sum (y_i - b - ax_i)(-1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum (-1)y_i + \sum b + \sum ax_i = 0 \\ \sum (-x_i)y_i + \sum bx_i + \sum ax_i^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8b + 24.4433a = 17.4824 \\ 24.4433b + 93.3958a = 65.4428 \end{cases}$$

$$a = 0.642754$$
$$b = 0.22142$$
$$y = 0.22142 + 0.642754x$$
$$z = \frac{t}{0.642754 + 0.22142t}$$

$$S_{min}^{(2)} = \sum \left(z_i - \frac{t_i}{a + bt_i}\right)^2 = 0{,}0027$$



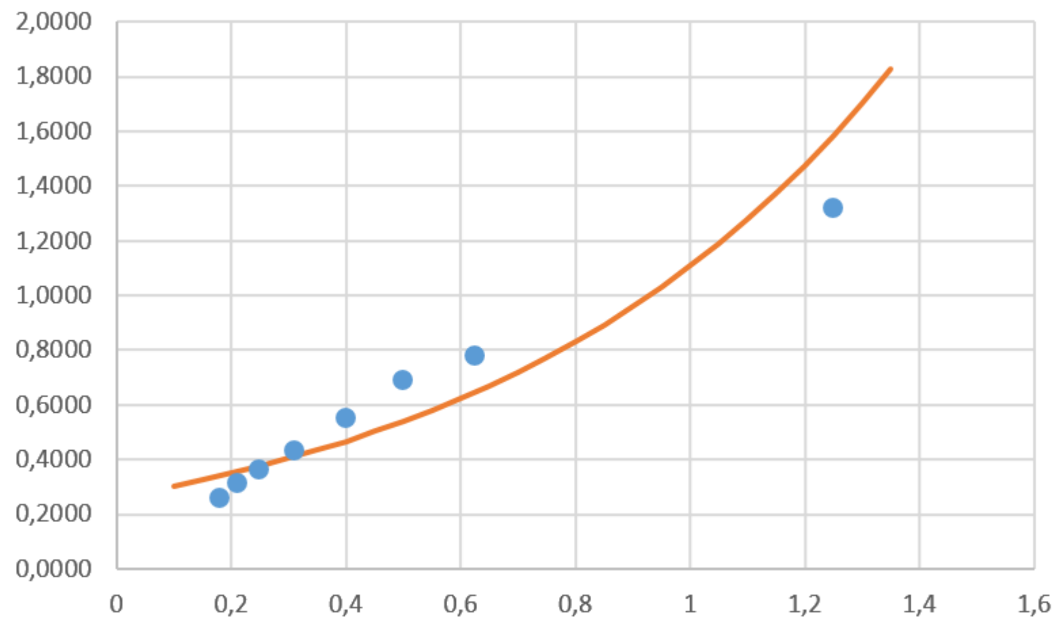
3. $z = ae^{bt}$

$$lnz = lna + bt$$
$$y = lnz, A = lna$$
$$=> y = A + bt$$
$$y = \frac{1}{z}, x = \frac{1}{t} => y = b + ax$$
$$S = \sum (y_i - A - bt_i)^2$$
$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial A} = 2\sum (y_i - A - bt_i)(-1) = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial b} = 2\sum (y_i - A - bt_i)(-t_i) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum (-1)y_i + \sum A + \sum bt_i = 0 \\ \sum (-t_i)y_i + \sum At_i + \sum bt_i^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8A + 3.725b = -5.3236 \\ 3.725A + 2.5982b = -1.2384 \end{cases}$$

$$A = -1.33412$$
$$b = 1.43607$$
$$y = -1.33412 + 1.43607t$$
$$a = e^A = 0.26339$$
$$z = 0.26339 * e^{1.43607\mathrm{t}}$$
$$S_{min}^{(3)} = \sum \left(z_i - ae^{bt_i}\right)^2 = 0{,}127$$



4. $z = at^b$

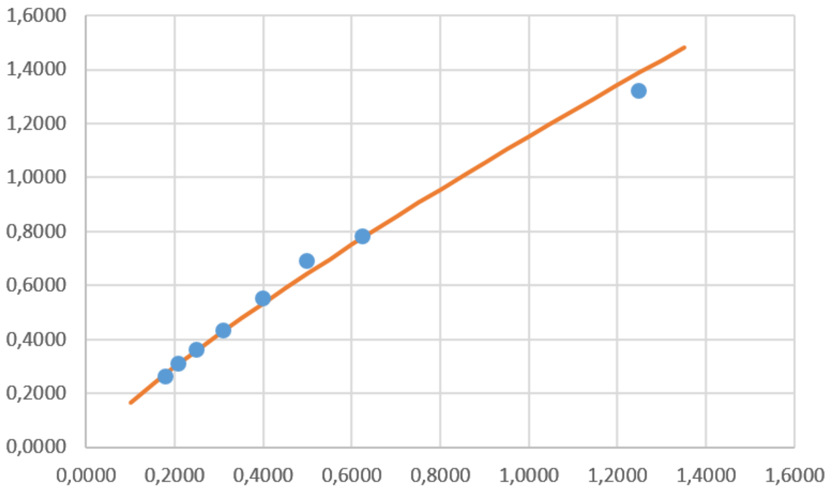
$$lnz = lnat^b = lna + blnt$$
$$y = lnz$$
$$x = lnt$$
$$A = lna$$
$$=> y = A + bx$$
$$S = \sum (y_i - A - bx_i)^2$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial A} = 2\sum (y_i - A - bx_i)(-1) = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = 2\sum (y_i - A - bx_i)(-x_i) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum (-1)y_i + \sum A + \sum bx_i = 0 \\ \sum (-x_i)y_i + \sum Ax_i + \sum bx_i^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8A - 7.6892b = -5.3236 \\ -7.6892A + 10.2604b = 7.5262 \end{cases}$$

$$A = 0.141475$$
$$b = 0.839542$$
$$y = 0.141475 + 0.839542x$$
$$a = e^A = 1.151972$$
$$z = 1.151972 * t^{0.839542}$$
$$S_{min}^{(4)} = \sum \left(z_i - at_i^b\right)^2 = 0,0074$$



Результаты:

Исходя из полученных значений $S_{min}^{(i)}$, сделаем вывод о том, что лучшая из регрессионных моделей – вторая, она обладает минимальным значением $S_{min}^{(2)} = 0{,}0027$.

Вывод:

Проанализировав данные, мы выбрали лучшую регрессионную модель.