Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Научно-образовательная корпорация ИТМО»

ФАКУЛЬТЕТ ПРОГРАММНОЙ ИНЖЕНЕРИИ И КОМПЬЮТЕРНОЙ ТЕХНИКИ

Индивидуальное домашнее задание №2
«Оценка параметров закона распределения»

Вариант № 2(502)

Работу выполнили:
студент группы P3209
Зайцева И. С.
студент группы P3217
Русакова Е. Д.

Преподаватель:
Милованович Е. В.

г. Санкт-Петербург
2024 г.

Цель работы:

На основании анализа малой выборки:
1. Построить вариационный ряд и выборочную функцию распределения
2. Найти несмещенные оценки математического ожидания и дисперсии
3. С помощью метода моментов найти оценки параметров закона распределения, оценки плотности и функции распределения

Исходные данные:

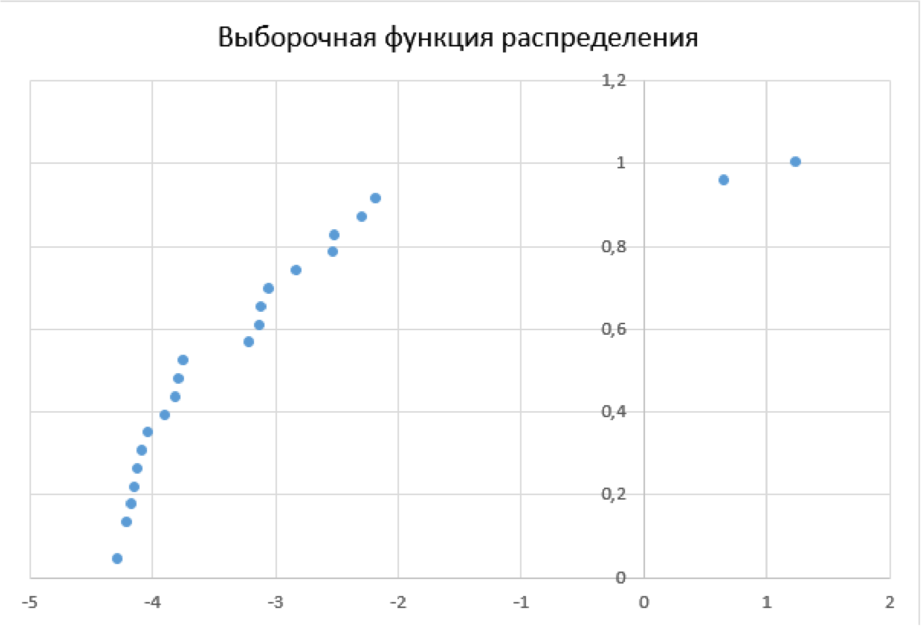
Показательный закон распределения

-4,2	-3,78	-3,1	-4,2	-3,05
-2,51	-4,11	-3,89	-4,16	-2,28
-4,03	-4,07	1,24	-3,8	-2,52
-2,17	-2,82	-3,2	-4,27	
-4,14	0,66	-3,12	-3,74	

Вариационный ряд:

-4,27	-4,11	-3,78	-3,05	-2,17
-4,2	-4,07	-3,74	-2,82	0,66
-4,2	-4,03	-3,2	-2,52	1,24
-4,16	-3,89	-3,12	-2,51	
-4,14	-3,8	-3,1	-2,28	

Выборочная функция распределения:



Функции распределения и плотности распределения для показательного закона:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \lambda * e^{-\lambda(x-a)}, & x\geq a\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ 1-e^{-\lambda(x-a)}, & x\geq a\end{cases}$$

Количество неизвестных параметров равно двум (a, λ), поэтому выберем два момента:

$$\nu_1=\int_{-\infty}^{+\infty} x * f(x) * dx$$

$$\mu_2=\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\nu_1)^2 * f(x) * dx$$

Выразим неизвестные параметры через эти моменты:

$$\nu_1=\int_{-\infty}^{+\infty} x * f(x) * dx=\int_{-\infty}^{a} x * 0 * dx+\int_{a}^{+\infty} x * \lambda * e^{-\lambda(x-a)} * dx=0+\lambda * \int_{a}^{+\infty} x * e^{-\lambda(x-a)} * dx$$

$$\lambda \int x * e^{-\lambda(x-a)} * dx=\lambda * \int x * e^{a\lambda-\lambda x} * dx=\begin{bmatrix}t=a\lambda-\lambda x\\ dt=-\lambda dx\end{bmatrix}=\frac{1}{\lambda}\int e^t(t-a\lambda)dt=$$
$$=\frac{1}{\lambda}\int e^t t dt+a\int e^t dt=\begin{bmatrix}u=t & du=dt\\ dv=e^t dt & v=e^t\end{bmatrix}=\frac{t * e^t}{\lambda}-\frac{1}{\lambda}\int e^t dt+a\int e^t dt=$$
$$=\frac{t * e^t}{\lambda}+\left(-a-\frac{1}{\lambda}\right) * e^t=e^t * \left(\frac{t-1-a\lambda}{\lambda}\right)=-e^{\lambda(a-x)} * \frac{\lambda x+1}{\lambda}$$

$$\nu_1=\lambda * \int_{a}^{+\infty} x * e^{-\lambda(x-a)} * dx=-\frac{(\lambda x+1) * e^{\lambda(a-x)}}{\lambda}\Bigg|_a^{+\infty}=-0+\frac{(\lambda a+1) * e^{\lambda(a-a)}}{\lambda}=\frac{\lambda a+1}{\lambda}=a+\frac{1}{\lambda}$$

$$\widetilde{m}=a+\frac{1}{\lambda}$$

$$\mu_2=\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\nu_1)^2 * f(x) * dx=\int_{-\infty}^{a}\left(x-\frac{1}{\lambda}-a\right)^2 * 0 * dx+\int_{a}^{+\infty}\left(x-\frac{1}{\lambda}-a\right)^2 * \lambda * e^{-\lambda(x-a)} * dx=$$
$$=\int_{a}^{+\infty}\left(\frac{\lambda^2x^2+1+a^2\lambda^2-2\lambda x-2a\lambda^2x+2a\lambda}{\lambda^2}\right) * \lambda * e^{-\lambda(x-a)} * dx=$$
$$=\int_{a}^{+\infty} x^2 * e^{-\lambda(x-a)} * dx-\left(2a+\frac{2}{\lambda}\right)\int_{a}^{+\infty} x * e^{-\lambda(x-a)} * dx+$$
$$+\left(\frac{1}{\lambda^2}+\frac{2a}{\lambda}+a^2\right)\int_{a}^{+\infty} e^{-\lambda(x-a)} * dx$$

$$\int e^{-\lambda(x-a)} * dx=\int e^{a\lambda-\lambda x} * dx=\begin{bmatrix}t=a\lambda-\lambda x\\ dt=-\lambda dx\end{bmatrix}=-\frac{1}{\lambda}\int e^t dt=-\frac{e^t}{\lambda}=-\frac{e^{\lambda(a-x)}}{\lambda}$$

$$\int x * e^{-\lambda(x-a)}dx=\int x * e^{a\lambda-\lambda x} * dx=\begin{bmatrix}t=a\lambda-\lambda x\\ dt=-\lambda dx\end{bmatrix}=\frac{1}{\lambda^2}\int e^t(t-a\lambda)dt=\frac{1}{\lambda^2}\int e^t t dt-\frac{a}{\lambda}\int e^t dt=$$
$$=\begin{bmatrix}u=t & du=dt\\ dv=e^t dt & v=e^t\end{bmatrix}=\frac{t * e^t}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}\int e^t dt-\frac{a}{\lambda}\int e^t dt=\frac{t * e^t}{\lambda^2}-\left(\frac{1}{\lambda^2}+\frac{a}{\lambda}\right) * e^t=e^t\left(\frac{t-1-a\lambda}{\lambda^2}\right)=$$
$$=-e^{\lambda(a-x)} * \frac{\lambda x+1}{\lambda^2}$$

$$\int x^2 * e^{-\lambda(x-a)} * dx = \begin{bmatrix} u = x^2 & du = 2xdx \\ dv = e^{\lambda(a-x)}dx & v = -\dfrac{e^{\lambda(a-x)}}{\lambda} \end{bmatrix} = -\frac{e^{\lambda(a-x)} * x^2}{\lambda} + \int \frac{e^{\lambda(a-x)}}{\lambda} 2xdx =$$

$$= -e^{\lambda(a-x)} * \frac{x^2}{\lambda} + \frac{2}{\lambda}\int x\, e^{\lambda(a-x)}dx = -e^{\lambda(a-x)} * \frac{x^2}{\lambda} - \frac{2}{\lambda} * e^{\lambda(a-x)} * \frac{\lambda x + 1}{\lambda^2} =$$

$$= -e^{\lambda(a-x)} * \frac{2\lambda x + 2 + \lambda^2 x^2}{\lambda^3}$$

$$\mu_1 = \int_a^{+\infty} x^2 * e^{-\lambda(x-a)} * dx - \left(2a + \frac{2}{\lambda}\right)\int_a^{+\infty} x * e^{-\lambda(x-a)} * dx +$$

$$+ \left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{2a}{\lambda} + a^2\right)\int_a^{+\infty} e^{-\lambda(x-a)} * dx =$$

$$= -e^{\lambda(a-x)} * \frac{2\lambda x + 2 + \lambda^2 x^2}{\lambda^3}\Bigg|_a^{+\infty} + \left(2a + \frac{2}{\lambda}\right) * e^{\lambda(a-x)} * \frac{\lambda x + 1}{\lambda^2}\Bigg|_a^{+\infty} -$$

$$-\left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{2a}{\lambda} + a^2\right) * \frac{e^{\lambda(a-x)}}{\lambda}\Bigg|_a^{+\infty}$$

$$= e^{\lambda(a-x)} * \left(-\frac{2\lambda x + 2 + \lambda^2 x^2}{\lambda^3} + \frac{2a\lambda^2 x + 2a\lambda + 2\lambda x + 2}{\lambda^3} - \frac{2\lambda a + 1 + \lambda^2 a^2}{\lambda^3}\right)\Bigg|_a^{+\infty} =$$

$$= e^{\lambda(a-x)} * \left(\frac{-\lambda^2 x^2 + 2a\lambda^2 x - 1 - \lambda^2 a^2}{\lambda^2}\right)\Bigg|_a^{+\infty} = 0 - \left(\frac{-\lambda^2 a^2 + 2a^2\lambda^2 - 1 - \lambda^2 a^2}{\lambda^2}\right) = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

Найдем точечные оценки математического ожидания и дисперсии:

$$\tilde{m} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{23} * (-71{,}26) = -3{,}0982609 \approx -3{,}098$$

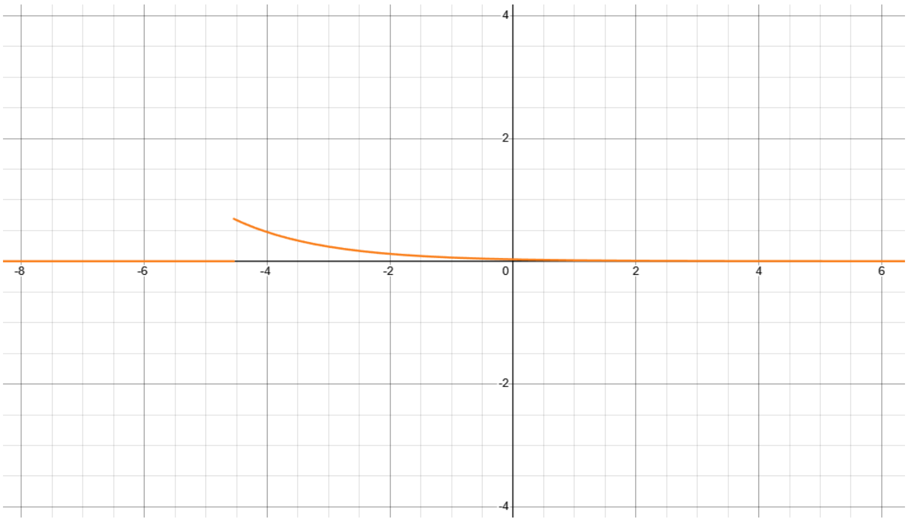
$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \tilde{m})^2 = \frac{1}{23-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - (-3{,}098))^2 = \frac{1}{22} * 46{,}0923304 = 2{,}09510593 \approx 2{,}095$$

Найдем значения неизвестных параметров распределения:

$$\begin{cases} \tilde{m} = a + \dfrac{1}{\lambda} \\ \tilde{\sigma}^2 = \dfrac{1}{\lambda^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{m} = a + \tilde{\sigma} \\ \tilde{\sigma} = \dfrac{1}{\lambda} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \tilde{m} - \tilde{\sigma} \\ \lambda = \dfrac{1}{\tilde{\sigma}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -4{,}5457 \\ \lambda = 0{,}6909 \end{cases}$$

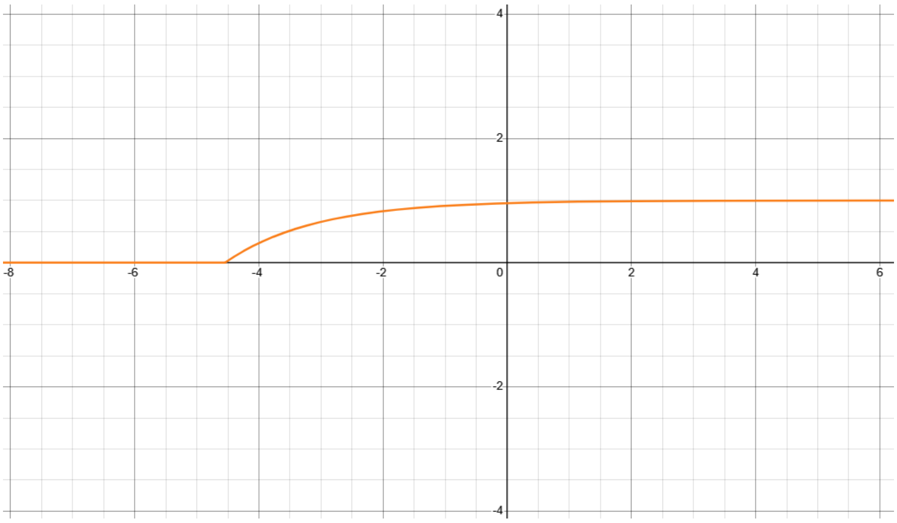
Оценка плотности распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \lambda * e^{-\lambda(x-a)}, & x \geq a \end{cases} = \begin{cases} 0, & x < -4{,}5457 \\ 0{,}6909 * e^{-0{,}6909x - 3{,}1406}, & x \geq -4{,}5457 \end{cases}$$



Оценка функция распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ 1 - e^{-\lambda(x-a)}, & x \geq a \end{cases} = \begin{cases} 0, & x < -4{,}5457 \\ 1 - e^{-0{,}6909x - 3{,}1406}, & x \geq -4{,}5457 \end{cases}$$



Вывод:

Проанализировав исходную выборку, мы нашли оценки математического ожидания и дисперсии и с помощью метода моментов нашли функции распределения и плотности распределения для