Федеральное государственное автономное

образовательное учреждение высшего образования

«Национальный исследовательский университет ИТМО»

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Лабораторная работа № 6

«Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений»

По дисциплине «Вычислительная математика»

Вариант 12

Выполнила:

Студентка группы P3217

Русакова Е.Д.

Преподаватель:

Малышева Т.А.

Санкт-Петербург

2024

Оглавление

Цель работы:

Решить задачу Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений численными методами.

Задание:

1. **Порядок выполнения работы**

2. В программе численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) должен быть реализован в виде отдельного класса /метода/функции;
3. Пользователь выбирает ОДУ вида $y' = f(x, y)$ (не менее трех уравнений), из тех, которые предлагает программа;
4. Предусмотреть ввод исходных данных с клавиатуры: начальные условия $y_0 = y(x_0)$, интервал дифференцирования $[x_0, x_n]$, шаг h, точность ε;
5. Для исследования использовать одношаговые методы и многошаговые методы (см. табл.1);
6. Составить таблицу приближенных значений интеграла дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальным условиям, для всех методов, реализуемых в программе;
7. Для оценки точности одношаговых методов использовать правило Рунге;
8. Для оценки точности многошаговых методов использовать точное решение задачи: $\varepsilon = \max_{0 \le i \le n} |y_{i\text{точн}} - y_i|$;
9. Построить графики точного решения и полученного приближенного решения (разными цветами);
10. Программа должна быть протестирована при различных наборах данных, в том числе и некорректных.
11. Проанализировать результаты работы программы.

Рабочие формулы:

Требуется найти функцию $Y = Y(x)$, удовлетворяющую уравнению $Y' = f(x, Y)$ и принимающую при $x = x_0$ заданное значение Y_0: $Y(x_0) = Y_0$.

$$h = x_{i+1} - x_i = const$$

Метод Эйлера:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

Метод Рунге-Кутта четвертого порядка:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = h * f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = h * f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_1 = h * f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_1 = h * f(x_i + h, y_i + k_3)$$

Метод Милна

Этап прогноза:

$$y_i^{\text{прогн}} = y_{i-4} + \frac{4h}{3} * (2f_{i-3} - f_{i-2} + 2f_{i-1})$$

Этап коррекции:

$$f_i^{\text{прогн}} = f(x_i, y_i^{\text{прогн}})$$

$$y_i^{\text{корр}} = y_{i-2} + \frac{h}{3} * (f_{i-2} + 4f_{i-1} + f_i^{\text{прогн}})$$

Оценка погрешности:

$$\varepsilon = \max_{0 \le i \le n} |y_{i\text{точн}} - y_i|$$

Оценка погрешности по правилу Рунге:

$$R = \frac{y^h - y^{\frac{h}{2}}}{2^p - 1}$$

Программная реализация:

Описание разработанной программы:

Разработанная программа позволяет найти численное решение ОДУ, который пользователь выбирает из предложенных программой, одним из предложенных программой методов или вмести методами. Границы интервала, значение в начале интервала, начальный шаг и точность вычисления вводятся пользователем с клавиатуры. Программа решает оду выбранными методами и находит точное значение. Также программа строит графики точного решения и полученных функций и выводит все результаты на экран.

Исходный код программы:

Полный код программы выложен на Github и доступен по ссылке lenapochemy/comp-math-lab6: вычмат лаба 6 оду (github.com)

Далее приведен код классов, которые отвечают за решения ОДУ.

EulerMethod.java – метод Эйлера

RungeKuttaMethod.java – метод Рунге-Кутта

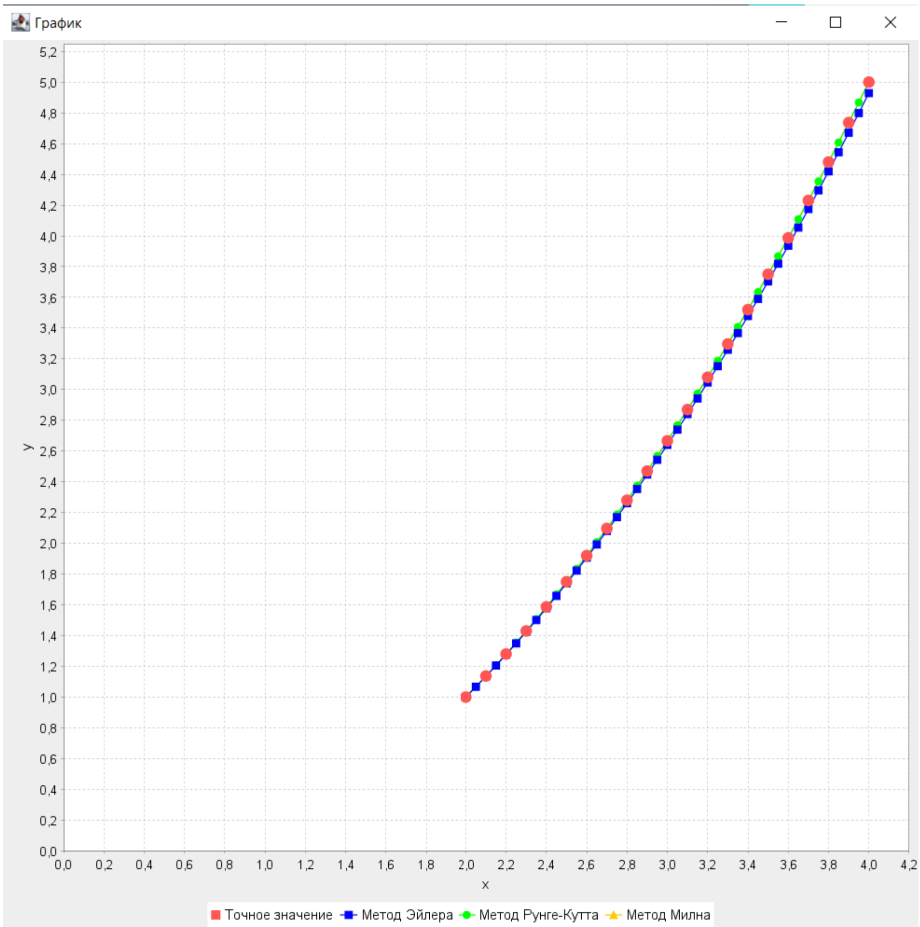
MilneMethod.java – метод Милна

Примеры работы программы:

Пример 1

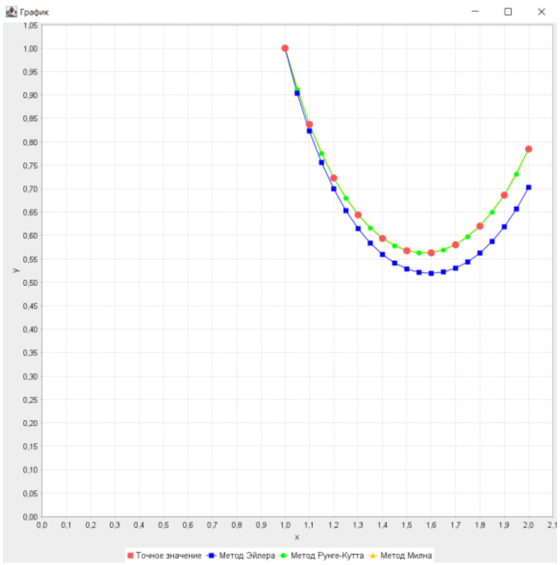
```
Выберите ОДУ для решения:
    1. y'=y+(1+x)y²
    2. y'=2xy/(x²-1)
    3. y'=-(2y+1)*ctg(x)
    4. y'=(y-1)/(x²+x)
2
Введите значение левой границы интервала : 1
Функция не определена в точке 1.0, выберите другой интервал
Введите значение левой границы интервала : 2
Введите значение правой границы интервала : 4
Введите значение начальное условие - значение для точки 2.0 : 1
Введите значение начального шага : 0ю1
Значение начального шага должно быть числом
Введите значение начального шага : 0.1
Введите значение точности [0.000001; 1]: 0.1
Выберите метод решения уравнения:
    1. Метод Эйлера
    2. Метод Рунге-Кутта
    3. Метод Милна
    4. Все методы
4
```

```
-------------------------
 i  | x      | Точное значение  | Метод Эйлера      | Метод Рунге-Кутта| Метод Милна      |
 0  | 2.0    | 1.0              | 1.0               | 1.0              | 1.0              |
 1  | 2.1    | 1.136667         | 1.134947          | 1.136667         | 1.136666         |
 2  | 2.2    | 1.28             | 1.27635           | 1.28             | 1.28             |
 3  | 2.3    | 1.43             | 1.424214          | 1.43             | 1.429999         |
 4  | 2.4    | 1.586667         | 1.578544          | 1.586667         | 1.586666         |
 5  | 2.5    | 1.75             | 1.739342          | 1.75             | 1.75             |
 6  | 2.6    | 1.92             | 1.906612          | 1.92             | 1.919999         |
 7  | 2.7    | 2.096667         | 2.080355          | 2.096667         | 2.096666         |
 8  | 2.8    | 2.28             | 2.260574          | 2.28             | 2.28             |
 9  | 2.9    | 2.47             | 2.447269          | 2.47             | 2.47             |
 10 | 3.0    | 2.666667         | 2.640443          | 2.666667         | 2.666666         |
 11 | 3.1    | 2.87             | 2.840096          | 2.87             | 2.869999         |
 12 | 3.2    | 3.08             | 3.04623           | 3.08             | 3.079999         |
 13 | 3.3    | 3.296667         | 3.258844          | 3.296667         | 3.296666         |
 14 | 3.4    | 3.52             | 3.477941          | 3.52             | 3.519999         |
 15 | 3.5    | 3.75             | 3.70352           | 3.75             | 3.749999         |
 16 | 3.6    | 3.986667         | 3.935582          | 3.986666         | 3.986666         |
 17 | 3.7    | 4.23             | 4.174128          | 4.23             | 4.229999         |
 18 | 3.8    | 4.48             | 4.419157          | 4.48             | 4.479999         |
 19 | 3.9    | 4.736667         | 4.670671          | 4.736666         | 4.736665         |
 20 | 4.0    | 5.0              | 4.92867           | 5.0              | 4.999999         |
```



Пример 2

```
Выберите ОДУ для решения:
    1. y'=y+(1+x)y²
    2. y'=2xy/(x²-1)
    3. y'=-(2y+1)*ctg(x)
    4. y'=(y-1)/(x²+x)
3
Введите значение левой границы интервала : 1
Введите значение правой границы интервала : 2
Введите значение начальное условие - значение для точки 1.0 : 1
Введите значение начального шага : 0.1
Введите значение точности [0.000001; 1]: 0.1
Выберите метод решения уравнения:
    1. Метод Эйлера
    2. Метод Рунге-Кутта
    3. Метод Милна
    4. Все методы
4
-----------------------
Метод Эйлера
Решение с заданной точностью найдено при шаге h = 0.05
-----------------------
Метод Рунге-Кутта
Решение с заданной точностью найдено при шаге h = 0.05
-----------------------
Метод Милна
Решение найдено при h = 0.1
------------------------
```



----

i	x	Точное значение	Метод Эйлера	Метод Рунге-Кутта	Метод Милна
0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
1	1.1	0.837248	0.823168	0.837248	0.837248
2	1.2	0.722648	0.699621	0.722648	0.722647
3	1.3	0.643967	0.614672	0.643967	0.643967
4	1.4	0.593706	0.559402	0.593706	0.594384
5	1.5	0.567451	0.528492	0.567451	0.567752
6	1.6	0.563016	0.519074	0.563016	0.563221
7	1.7	0.58004	0.530163	0.58004	0.580054
8	1.8	0.619921	0.562451	0.619921	0.62056
9	1.9	0.686074	0.618409	0.686074	0.686326
10	2.0	0.78457	0.702708	0.78457	0.784503

Пример 3

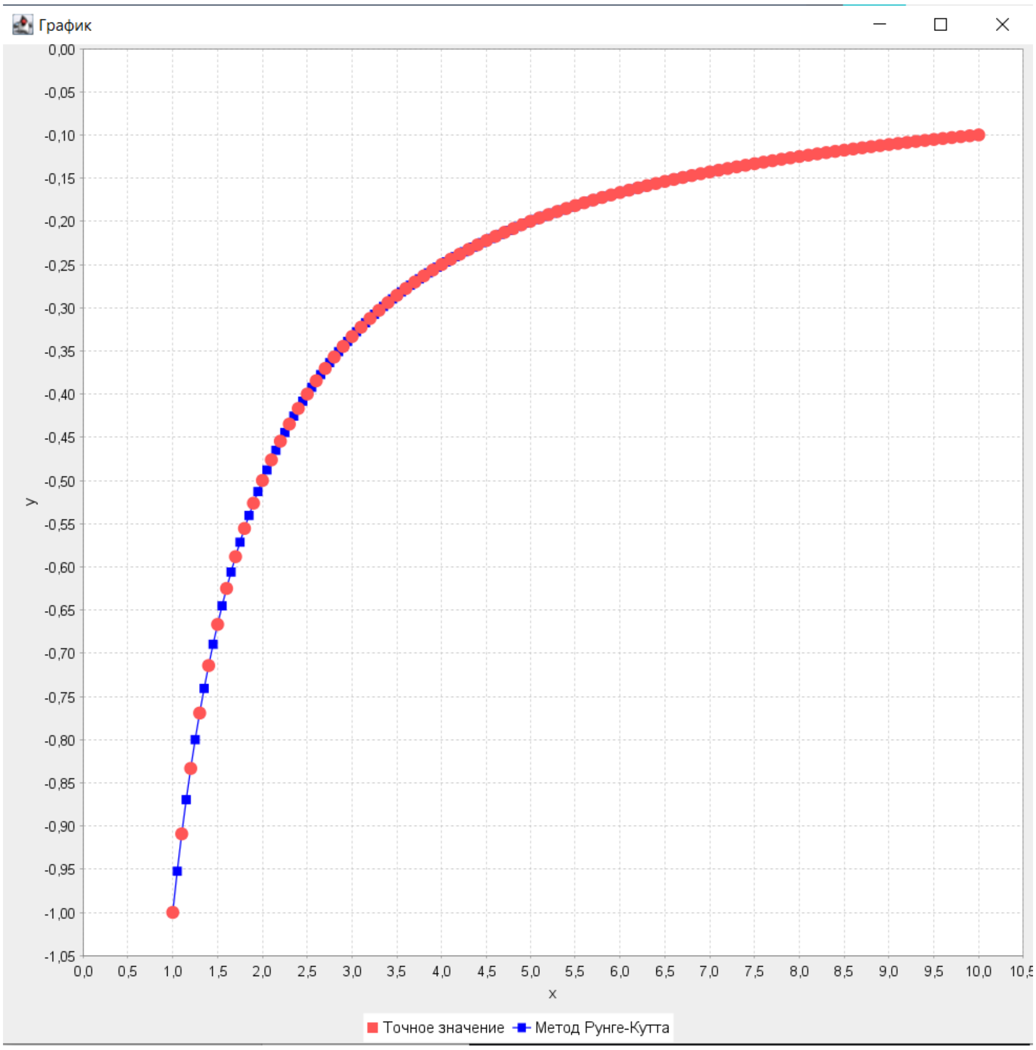
```
Выберите ОДУ для решения:
    1. y'=y+(1+x)y²
    2. y'=2xy/(x²-1)
    3. y'=-(2y+1)*ctg(x)
    4. y'=(y-1)/(x²+x)
1
Введите значение левой границы интервала : 1
Введите значение правой границы интервала : 10
Введите значение начальное условие - значение для точки 1.0 : -1
Введите значение начального шага : 0.1
Введите значение точности [0.000001; 1]: 0.1
Выберите метод решения уравнения:
    1. Метод Эйлера
    2. Метод Рунге-Кутта
    3. Метод Милна
    4. Все методы
2
----------------------
Метод Рунге-Кутта
Решение с заданной точностью найдено при шаге h = 0.05
----------------------
```

```
-----------------------
i  | x     | Точное значение  | Метод Рунге-Кутта|
0  | 1.0   | -1.0             | -1.0             |
1  | 1.1   | -0.909091        | -0.909091        |
2  | 1.2   | -0.833333        | -0.833334        |
3  | 1.3   | -0.769231        | -0.769231        |
4  | 1.4   | -0.714286        | -0.714286        |
5  | 1.5   | -0.666667        | -0.666667        |
6  | 1.6   | -0.625           | -0.625           |
7  | 1.7   | -0.588235        | -0.588235        |
8  | 1.8   | -0.555556        | -0.555556        |
9  | 1.9   | -0.526316        | -0.526316        |
10 | 2.0   | -0.5             | -0.5             |
11 | 2.1   | -0.47619         | -0.476191        |
12 | 2.2   | -0.454545        | -0.454546        |
13 | 2.3   | -0.434783        | -0.434783        |
14 | 2.4   | -0.416667        | -0.416667        |
15 | 2.5   | -0.4             | -0.4             |
16 | 2.6   | -0.384615        | -0.384615        |
17 | 2.7   | -0.37037         | -0.37037         |
18 | 2.8   | -0.357143        | -0.357143        |
19 | 2.9   | -0.344828        | -0.344828        |
20 | 3.0   | -0.333333        | -0.333333        |
21 | 3.1   | -0.322581        | -0.322581        |
22 | 3.2   | -0.3125          | -0.3125          |
23 | 3.3   | -0.30303         | -0.30303         |
```

22	3.2	-0.3125	-0.3125
23	3.3	-0.30303	-0.30303
24	3.4	-0.294118	-0.294118
25	3.5	-0.285714	-0.285714
26	3.6	-0.277778	-0.277778
27	3.7	-0.27027	-0.27027
28	3.8	-0.263158	-0.263158
29	3.9	-0.25641	-0.25641
30	4.0	-0.25	-0.25
31	4.1	-0.243902	-0.243902
32	4.2	-0.238095	-0.238095
33	4.3	-0.232558	-0.232558
34	4.4	-0.227273	-0.227273
35	4.5	-0.222222	-0.222222
36	4.6	-0.217391	-0.217391
37	4.7	-0.212766	-0.212766
38	4.8	-0.208333	-0.208333
39	4.9	-0.204082	-0.204082
40	5.0	-0.2	-0.2
41	5.1	-0.196078	-0.196078
42	5.2	-0.192308	-0.192308
43	5.3	-0.188679	-0.188679
44	5.4	-0.185185	-0.185185
45	5.5	-0.181818	-0.181818
46	5.6	-0.178571	-0.178571
47	5.7	-0.175439	-0.175439
48	5.8	-0.172414	-0.172414
49	5.9	-0.169492	-0.169492
50	6.0	-0.166667	-0.166667

49	5.9	-0.169492	-0.169492
50	6.0	-0.166667	-0.166667
51	6.1	-0.163934	-0.163934
52	6.2	-0.16129	-0.16129
53	6.3	-0.15873	-0.15873
54	6.4	-0.15625	-0.15625
55	6.5	-0.153846	-0.153846
56	6.6	-0.151515	-0.151515
57	6.7	-0.149254	-0.149254
58	6.8	-0.147059	-0.147059
59	6.9	-0.144928	-0.144928
60	7.0	-0.142857	-0.142857
61	7.1	-0.140845	-0.140845
62	7.2	-0.138889	-0.138889
63	7.3	-0.136986	-0.136986
64	7.4	-0.135135	-0.135135
65	7.5	-0.133333	-0.133333
66	7.6	-0.131579	-0.131579
67	7.7	-0.12987	-0.12987
68	7.8	-0.128205	-0.128205
69	7.9	-0.126582	-0.126582
70	8.0	-0.125	-0.125
71	8.1	-0.123457	-0.123457
72	8.2	-0.121951	-0.121951
73	8.3	-0.120482	-0.120482
74	8.4	-0.119048	-0.119048
75	8.5	-0.117647	-0.117647
76	8.6	-0.116279	-0.116279
77	8.7	-0.114943	-0.114943

75	8.5	-0.117647	-0.117647
76	8.6	-0.116279	-0.116279
77	8.7	-0.114943	-0.114943
78	8.8	-0.113636	-0.113636
79	8.9	-0.11236	-0.11236
80	9.0	-0.111111	-0.111111
81	9.1	-0.10989	-0.10989
82	9.2	-0.108696	-0.108696
83	9.3	-0.107527	-0.107527
84	9.4	-0.106383	-0.106383
85	9.5	-0.105263	-0.105263
86	9.6	-0.104167	-0.104167
87	9.7	-0.103093	-0.103093
88	9.8	-0.102041	-0.102041
89	9.9	-0.10101	-0.10101
90	10.0	-0.1	-0.1



Вывод:

При выполнении лабораторной работы я познакомилась с методом численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений и выполнила программную реализацию некоторых из них.