表徵相關文章之一（節錄）

在教學表徵選擇，許多研究已經指出表徵對數學學習與解題佔有重要的角色（Goldin & Kaput, 1996; Kaput, 1991）。關於教學表徵方面，Bruner在發現學習論中，將人類對於其環境中的事物經知覺而將外在物體或事件轉換為內在事件的過程稱為認知表徵（cognitive representation）或知識表徵（representation of knowledge），意指人類是經由認知表徵獲得知識（張春興，1996）。依據Bruner的研究，這樣的認知表徵有三種：動作表徵、圖像表徵、符號表徵（張春興，1996；Resnick & Ford, 1981）。表徵（representation）並非概念本身，而是對於一個被表徵概念的再次呈現（re-present），而這個表徵動作可分為內在表徵（signified; internal）與外在表徵（signifier; external）（Goldin & Kaput, 1996; Hiebert & Carpenter, 1992）。綜合這些論點，對於數學教師而言，選擇適合的數學表徵來協助學生內化數學內容對於學生的數學學習扮演關鍵角色，透過教師與教材所提供的數學外在表徵來與學生內在表徵系統關連起來，對於學生建構內在表徵則有其重要性。從某個角度來看，一個人對某個概念的概念心像與這個個體對這個概念的內在表徵有密切的關係。

在宋玉如（2008）關於中學數學教師應有的數學教學特質研究中，研究者提供了幾個常見的數學表徵，包含：例子、圖畫、比喻、生活例子、實際數值、證明、定義、公式、故事、抽象符號等給中學生選擇，研究發現中學生認為理想教師在數學教學中應儘量以例子、圖畫、恰當比喻、生活物品表徵來傳遞數學概念；其次是使用數值實例、證明、定義；而最不符合學生心中理想教師的表徵使用是公式、故事與抽象符號來傳遞數學概念。這個結果顯示出中學生對於數學學習上認為老師應聚焦於「讓學生理解數學」、「避免僅用形式的、抽象的表徵」，有趣的是，教師們認為應多用於引發學生興趣的「故事」表徵，並非中學生認為理想的數學概念傳遞表徵，代表學生也並非只一昧追求花俏的包裝而不在乎數學內涵的表徵方式。同一個研究，宋玉如（2008）也發現關於媒體的選用與呈現，中學生認為理想的教師應要適當地使用教具（如，圖卡、模型、生活物品）教學，其次是電腦輔助教學，而只使用粉筆黑板的教師則最不受學生青睞。這個研究不僅能帶給實際的數學教師許多省思，也提供我國實徵性研究資料，在台灣不同的表徵對於學生的確有不同的教學期望與感受，此也提供本研究對於數學表徵選擇的分析洞察。

表徵不止對於學生的數學學習有直接的關係，對於教師的數學教學，例如在課堂上精確地使用表徵、選擇並提供學生適合的數學表徵也都是現代的教師知識測量研究十分著重的偵測點（Hill et al., 2007），如SII/LMT的檢定項目就涵蓋教師如何選擇例子與表徵。

本研究發現，實習教師自發性地展現出表徵選擇面向的心像僅約佔全體樣本的21.0%，而這約五分之一的E-FT中，卻有多達85%（11/13）的將焦點放在生活實例或與生活相關的事物表徵中，顯見在沒有任何的提示或干擾下，實習教師仍會主動喚起與生活結合的表徵。FT30就提出：「絕不（或者99.99％）以直接闡述定理或證明定理為教導高中數學的方式，舉例（大量的例子，能與生活結合更好）…才是教學該注意的重心。」

為何實習教師的教學表徵選擇會著重於生活表徵？實習教師是以什麼為考量依據？

在學生參與面向時，我們提到FT38提到：「由生活方面的實體說明，真的能讓學生有高度專注力」，可見實習教師生活實例使用的考量之一是讓學生能專注於課堂上。而另一個讓實習教師使用生活例子或生活問題作為教學表徵選擇的依據考量，是提起學生興趣，例如，FT48所說：「以生活中之問題提起學生的學習興趣。」；FT3也說：「把一些生活中可能會發生的問題和教學做結合，讓學生有興趣去學習數學」。這個觀點我們也同樣可以從學生情意面向的動機成分中已稍加論述，除了貼近學生生活的事物容易消除隔閡（例如FT31所說：「教學時可多用生活化語言引入，讓學生學習較為平順。」），就生活連結的本質看，實際生活問題的實用特徵會讓學生感覺數學並非定義、定理，也不只是抽象的符號，而是實實在在存在於我們的生活周圍。

另外，有些實習教師會強調使用生活相關例子，卻是另一個完全不同的考量。他們認為由於生活中幾乎看不到數學的蹤影，也因此教師必須在數學教學中多使用其他輔助方式。例如，FT1所說：「學生都會覺得數學在生活中很少用到，甚至不會用到，所以數學教學方面盡量吸引學生興致」；FT25也認為：「數學教學最大的困難點在日常生活幾乎不見它的蹤影，尤其用符號操作這件事。」我們可以進一步分析這兩位教師的想法。首先，他們心裡認為數學知識學習有超越日常生活以外更高層次的需求與目的，因此，就算生活幾乎用不到（例如符號操作），學生仍須學習數學。其次，學生對於日常生活中常見的事物接受度較高，因此生活中常用到的也將使得數學教學更為容易。其三，數學並非沒有生活面，僅是以十分隱晦的方式存在於生活當中，學生較無法觀察到，教學必須克服這個困難，以彌補生活中不常見所造成的教學困難。其中，如FT31所說：「教學時可多用生活化語言引入，讓學生學習較為平順。」或是像FT59所提及數學教學要「生活化：不單單是死板的教學，能和生活做聯結。」這些都是透過對學生提供數學的生活實例表徵的方式來彌補數學不夠生活化的缺失。

另一個被實習教師主動提及的教學表徵是「定義」，認為定義是數學概念的基礎，因此，教學學上必須加以強調，例如FT8就提到：「不管忘多少，定義一定不能忘。Ex：就算拋物線內容全忘了，焦準定義一定要記得！」而且定義的給予也必須嚴謹，此部分在數學傳遞面向已有提及。整體而論，實習教師並沒有指出定義表徵如何的使用於數學教學上，且提及的比例僅約15.4%，但數學定義相較於其他表徵的選擇，仍算是一種被關注的表徵。

新概念引入是實習教師容易展現教學表徵選擇面向的情境維度。在[1A]、[1B]沒有教學單元的情形下，有56.5%的實習教師（共計35人）展現出選擇合適表徵以傳達數學概念的心像，其中又以**生活實例**最受實習教師在概念引入之初的喜愛，在35位中有17位實習教師提及，其次則是**故事表徵**，也有7位會考慮使用；其他如數學例子、圖形、定義、符號等表徵也僅零星出現，有此反映出，在沒有教學單元時的思考下，實習教師表達數學的表徵方式仍傾向與生活連結。若加入教學單元，則表徵選擇的情況並未展現，此情形可能受到概念典型表徵影響，亦即**選擇數學概念本身最樸質之表徵**作為教學的表徵使用，以致教師心中不會有喚起其他表徵選擇的思考，例如配方法教學的典型表徵是符號表徵，教師很少選擇其他適合表徵。在第伍章中，我們將對此有更深入的討論。

若比較國、高中實習教師的改變率並試著解釋其背後所象徵的意義，式子表徵無論在國、高中階段都具有低改變率（即高維持度），加上式子表徵的高使用選擇比例，可推得式子表徵是中學教師最為核心的函數教學表徵。而高中教師對於文字表徵與集合表徵的改變率明顯低於國中，表示從時間壓力的角度看，高中教師更堅持在於課堂中提供這兩種表徵，可能的一個原因在於文字表徵（定義）與集合表徵對於高中課程的使用需求與關連性都高於國中課程，也可能因為這兩類的形式化表徵對於國中生來說難度較高。相對的，國中實習教師對於函數機器表徵具有更穩定維持程度，可能在於國中教師認為函數機器屬於較為具體的比喻性表徵，即使在時間的壓力下也應使用以協助國中生瞭解函數。

而在概念引入的表徵選擇上，在時間足夠與不足的情況下教師對於教學表徵選擇確實會受到特殊情況的影響，但仍有一些表徵不會受到時間因素的影響。若比較國、高中實習教師因時間因素表徵選擇的改變率，研究得到式子表徵是國、高中實習教師最為核心的函數教學表徵；而高中教師對於文字表徵與集合表徵則比國中教師有更高的維持率，可能的一個原因在於文字表徵與集合表徵對於高中課程的使用需求與關連性都高於國中課程。相對的，國中實習教師對於函數機器表徵具有更穩定維持程度，可能在於國中教師認為函數機器屬於較為具體的比喻性表徵，即使在時間的壓力下也應使用以協助國中生瞭解函數。

總結新概念引入教學之表徵選擇，教師對於教學表徵選擇確實會受到特殊情況的影響，但由於這些不順遂的情境因素，我們正可看出實習教師心中的核心心像。某種程度也揭露實習教師的表徵選擇不但會受到數學單元的影響（如配方法單元與函數單元的單一與多元），也會受到學生認知程度所影響（對於不同階段展現不同的表徵選擇）。

在單元活動的設計上，我們除了探求一般教學情境，也同時探求實習教師對特殊教學方法的考量。在題[6C]中，我們提供一段敘述：「有一種教學方式是：老師先不講解，而是先拋問讓學生思考。」之後請實習教師回答所提供的哪些等差級數的活動他們覺得適用此方法教學。

表4-18是分析實習教師適合於演示前先讓學生思考之活動統計表。本研究以「0-30-60-100 （%）」作為「低-中-高度適合學生思考活動」的劃分線，研究發現對整體樣本教師而言，「日常生活實例」、「紙板操作活動」與「簡易數值實例」三者屬於高適合思考活動，「含有一般項」與「符號公式」則為低適合思考活動，由此觀之，中學實習教師傾向簡單、具體、學生可操作的活動讓學生思考，反之較為困難、抽象、形式的活動則傾向認為不合適。

表4-18 「等差級數」教學單元適合於演示前先讓學生思考之活動統計表

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 研究 項目 | 表徵形式 | 整體（n=62） | | | 國中（n=28） | | | 高中（n=34） | | | 國高中是否顯著有差異 |
| Sum | Mean | SD | Sum | Mean | SD | Sum | Mean | SD |
| 教學活動適合先讓學生思考 | 高斯故事 | 34 | 0.55 | 0.50 | 14 | 0.50 | 0.51 | 20 | 0.59 | 0.50 | 無顯著差異 |
| 生活實例 | 37 | 0.60 | 0.49 | 14 | 0.50 | 0.51 | 23 | 0.68 | 0.47 | 無顯著差異 |
| 紙板操作 | 44 | 0.71 | 0.46 | 21 | 0.75 | 0.44 | 23 | 0.68 | 0.47 | 無顯著差異 |
| 簡易數值 | 40 | 0.65 | 0.48 | 17 | 0.61 | 0.50 | 23 | 0.68 | 0.47 | 無顯著差異 |
| 公差為正 | 27 | 0.44 | 0.50 | 11 | 0.39 | 0.50 | 16 | 0.47 | 0.51 | 無顯著差異 |
| 含有一般項 | 17 | 0.27 | 0.45 | 4 | 0.14 | 0.36 | 13 | 0.38 | 0.49 | 顯著差異 |
| 公差為負 | 22 | 0.35 | 0.48 | 5 | 0.18 | 0.39 | 17 | 0.50 | 0.51 | 顯著差異 |
| 符號公式 | 7 | 0.11 | 0.32 | 4 | 0.14 | 0.36 | 3 | 0.09 | 0.29 | 無顯著差異 |
| 自選活動一 | 3 |  |  | 1 |  |  | 2 |  |  | - |
| 自選活動二 | 0 |  |  | 0 |  |  | 0 |  |  | - |
| 活動數總計 | | 231 | 3.73 | 1.73 | 91 | 3.25 | 1.48 | 140 | 4.12 | 1.84 | 顯著差異 |

註：顯著差異，p < .05。

若分別檢視國、高中實習教師，會發現對於國中實習教師來說，困難、抽象、形式的活動傾向不適合先讓學生思考之現象更為明顯，其中「含有一般項的實例求和」與「符號公式」仍為「低適合思考活動」，兩者都僅有14%的國中教師認為適合先給學生思考，而「公差為負求級數和」更從全體中學教師的「中適合思考活動」降為國中的「低適合思考活動」，表示國中實習教師認為公差為負的數值實例難度高，不適合在演示前先給學生思考。而「舉日常生活實例認識等差級數」在國中也降為「中適合思考活動」，若分析他們所描述的依據，可推得對於國中實習教師而言，他們認為在新概念剛教學之初，國中生尚未熟悉等差級數時要他們思考並舉生活實例有一定的困難。相對來說，高中實習教師除了「符號公式」之外，其餘皆為中等以上程度的適合學生思考，換言之，對許多高中教師來說，「含有一般項的實例」嘗試讓學生思考是合適的。

本題雖然並無指定教學的對象層級，然而「等差級數」單元屬於國中階段的內容對於中學實習教師來說理應不會有太大爭議，因而對於國、高中實習教師而言不應有太大差異。然而，研究比較國、高中階段的實習教師，發現對於適合學生思考的活動數高中實習教師平均比國中將近多了一個，已達統計上的顯著差異，其中「含有一般項的實例求和」與「公差為負求級數和」兩項的比例高中實習教師明顯多餘國中教師，且皆達顯著差異，合理推斷這些高中的實習教師將於高中實習接觸學生的經驗投射在本題當中，進而影響實習教師思考，換言之，在本題中學生知能面向之心像已被喚出。

進一步檢視實習教師選擇適合學生思考的依據理由，若整體分析原因，則較多實習教師所依據的理由為與被提到的次數如表4-19。其中，最多實習教師展現的選擇因子是屬於**學生知能面向**的「**簡單、學生可以想出來」**，共有22位實習教師展現，這些教師又以勾選紙板操作（17人）、簡易數值實例（17人）為並列最多，高斯故事（15人）次之。值得注意的是，在前一分節時我們將前四個活動（也就是第一群組）視為概念引動活動用來檢測**學生情意**、**學生參與**與**教學表徵面向**的心像，而在本題中適合思考的選擇因子最高的「**簡單、學生可以想出來**」屬於學生知能面向，而他們卻也大都勾選在這四項。本研究對於這個現象的一個解釋是：當實習教師在考量等差級數的活動設計時，安排高斯故事、生活連結、紙板操作等活動時所主要考量的並非從學生知能面向切入（亦即從教材難度適合學生認知或掌握學生瞭解程度等），一旦將教學活動轉為適合學生思考時，教師切入的面向就會改變，學生知能的概念心像就被學生思考面向所引動而突顯出來。

第二多人展現的適合思考的選擇因子是「具體、可實際動手操作」，這個因子牽涉到的面向則傾向**教學表徵選擇**與**教學方法**面向的心像，而以此作為選擇因子的13位實習教師全數都有勾選紙板操作，由此可知，紙板操作不但對學生來說是簡單、容易想出來的之外，也具有具體可動手實際操作的功能。而「與生活連結」則是另一個也是許多人視為適合學生思考的選擇因子，而這些人也大多勾選生活實例認識等差級數（11人），所牽涉到的概念心像也傾向**教學表徵選擇**心像。

在其次的選擇因子如圖形、故事則具有學生情意與教學表徵的面向，整體來說，實習教師對於學生思考的心像會與**學生認知、教學表徵、教學方法**與**學生情意**有不同程度的連結。

表4-19 「等差級數」教學單元適合先讓學生思考之選擇因子與次數統計表

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 選擇因子 | 展現選擇因子的實習教師編號 | 選擇人數 | 選擇活動次數 (%) |
| 簡單、學生程度可解決 | FT08；FT09；FT10；FT12；FT16；FT20；FT21；FT23；FT26；FT27；FT31；FT34； FT37；FT39；FT40；FT43；FT47；FT52；FT53；FT56；FT58；FT60 | 22 | 紙板操作17（77）  簡易數值17（77）  高斯故事15（68）  生活實例14（64） |
| 較具體、可實際動手操作 | FT03；FT07；FT19；FT25；FT32；FT38；FT41；FT46；FT48；FT49；FT51；FT55；FT61 | 13 | 紙板操作13（100）  簡易數值7 （54） |
| 生活連結 | FT01；FT09；FT22；FT23；FT24；FT31； FT33；FT34；FT35；FT36；FT46；FT59 | 12 | 生活實例11（92）  簡易數值9 （75）  高斯故事7 （58） |
| 圖形（能引起興趣） | FT03；FT04；FT14；FT19；FT22；FT25； FT49；FT57 | 8 | 紙板操作6 （75）  高斯故事6 （75） |
| 故事（能引起興趣） | FT04；FT14；FT22；FT35；FT49；FT55；FT62 | 7 | 高斯故事7 （100）  紙板操作6 （86）  生活實例4 （57）  簡易數值4 （57） |
| 容易觀察(規則) | FT01；FT05；FT18；FT49；FT60 | 5 | 簡易數值4 （80）  紙板操作4 （80）  高斯故事3 （60）  公差為正3 （60） |
| 連結既有知識、助於未來發展 | FT08；FT28；FT33；FT36 | 4 | 生活實例4 （100）  高斯故事3 （75）  簡易數值3 （75）  公差為正3 （75） |

註\* ：活動選擇次數係指展現選擇因子的實習教師中，有勾選該活動的人數（%），表中僅列出展現該因子的實習教師超過一半有勾選者之活動。

教學表徵選擇面向

在54位透過選擇其他表徵進行教學的實習教師中，有49位改用數值實例進行對照再推導一次，1位改用與圖形結合，另4位實習教師則堅持維持代數符號表徵再推導一次或改為較簡易的係數，整體來說，選用實際的數字推導是實習教師首先喚起的表徵。在舉實例的這些實習教師其教學概念與用意也並不相同，這些方式又可大致可分成兩種不同的類型。第一類的實習教師透過實例來與代數符號的公式推導進行對照，期望透過對於數值具像來建立符號表徵推導過程的合理性與可接受性。這種方式的心理認知與其說是具體化教材讓學生容易吸收，倒不如視為試圖建立學生面對符號的信心與信念，認為「公式解只是數字的衍生」、「數字都會了符號也可以會」等。對這一類的方式來說，再一次使用數值實例做一次並沒有提供更多認知上的協助（因為數值實例就是配方法，而這個議題在之前早已經熟悉），而就對照的觀點來看，形式與數值實例給予學生的差異並不一定相稱，最大的差別除了數字以形式化符號取代以外，代數符號的一個重要的功能在於他能保留結構的型式與計算痕跡，而數值實例

並沒有這個功能（謝佳叡，2003），例如，公式解中的「」、「」

等，在數值實例中是看不見的。

第二類使用實例的教師則有著完全不同的思考，他們不是透過數值與符號的交叉對照，而是舉數個實例（或者讓學生多題演練），讓學生從多個例子的操作中，結構化「公式解（或配方法）」之運算過程，待學生熟悉後再進入「一般化的符號操作」（如FT6；FT24；FT26；FT34；FT35；FT40；FT41），這種將「**對過程的抽象化**」使得這個方式不同於前一類對於數學物件的抽象化的教師，換言之，這兩類的實習教師背後是兩種不同的數學教學知識在支撐，所展現的教學手法也不同。

另外有4位實習教師能選擇用代數符號推導一次，其中一個完全不改係數（FT13）重新再推一次，另外三個（FT5；FT55；FT60）則簡化係數（拿掉項係數，並兩倍*x*項係數）再推導一次，這種減少未知數個數的難度是否會跨過學生的認知的界線尚不得而知，但教師的策略心像卻十分清楚。