Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)
Физтех-школа аэрокосмических технологий

Микропроект

Моделирование линейной упругой задачи: прогиб балки со свободным концом под собственным весом и силой, приложенной к свободному концу.

Работу выполнил:
Брага Александр, 004 группа.

г. Долгопрудный
2022 год

Возьмем тело Ω. Малые деформации этого тела можно описать уравнением:

$$-\nabla \cdot \sigma = f \text{ in } \Omega \tag{1}$$

В данном уравнении f — сила на единицу объема, σ — тензор напряжений.

$$\sigma = \lambda \mathrm{tr}(\varepsilon) I + 2\mu\varepsilon \tag{2}$$

В уравнении (2) ε — симметричный тензор деформации, который выражается через смещение следующим образом:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\left(\nabla u + (\nabla u)^{\mathrm{T}}\right) \tag{3}$$

В уравнении (2) λ и μ — коэффициенты Ламе, они выражаются через модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{4}$$

Объединяя уравнения (2) и (3) получаем:

$$\sigma = \lambda(\nabla \cdot u) I + \mu\left(\nabla u + (\nabla u)^{\mathrm{T}}\right) \tag{5}$$

Воспользуемся вариационной формулировкой, то есть поиском максимума и минимума функционала.

В данной задаче вариационная формулировка уравнений (1)-(3) состоит из формирования скалярного произведения (1) и тестовой векторной функции v, где V — пространство векторных тестовых функций, и интегрирования по области Ω:

$$-\int_\Omega (\nabla \cdot \sigma) \cdot v \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f \cdot v \,\mathrm{d}x\,. \tag{6}$$

Поскольку $\nabla \cdot \sigma$ содержит производные второго порядка от неизвестного u, мы интегрируем этот член по частям:

$$-\int_\Omega (\nabla \cdot \sigma) \cdot v \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \sigma : \nabla v \,\mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} (\sigma \cdot n) \cdot v \,\mathrm{d}s, \tag{7}$$

где оператор двоеточия - это внутреннее произведение тензоров (суммированное попарное произведение всех элементов), а n - внешняя единица, нормальная к границе. Величина $\sigma \cdot n$ известна как вектор тяги или напряжения на границе. Здесь мы предполагаем, что она задана на части T границы как $\sigma \cdot n = T$. На оставшейся части границы мы предполагаем, что значение смещения задается как условие Дирихле.Таким образом, мы получаем

$$\int_\Omega \sigma : \nabla v \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f \cdot v \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega_T} T \cdot v \,\mathrm{d}s\,. \tag{8}$$

Учитывая (5) в уравнении (7), получаем вариационную форму с u как неизвестным. Заметим, что граничный интеграл обращается в нуль из-за условия Дирихле.

Теперь обобщим вариационную формулировку следующим образом: найти $u \in V$, такое, что:

$$a(u,v) = L(v) \quad \forall v \in \hat{V}, \tag{9}$$

где:

$$\begin{gathered} a(u,v) = \int_\Omega \sigma(u) : \nabla v \,\mathrm{d}x, \\ \sigma(u) = \lambda(\nabla \cdot u) I + \mu(\nabla u + (\nabla u)^\top), \\ L(v) = \int_\Omega f \cdot v \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega_T} T \cdot v \,\mathrm{d}s\,. \end{gathered} \tag{10, 11, 12}$$

В силу свойств произведения тензоров мы получаем более упрощенную вариационную форму:

$$a(u,v) = \int_\Omega \sigma(u) : \varepsilon(v)\,\mathrm{d}x, \tag{10}$$

где $\varepsilon(v)$ — симметричная часть ∇v:

$$\varepsilon(v) = \frac{1}{2}\left(\nabla v + (\nabla v)^\top\right) . \tag{11}$$

1 Моделирование балки.

Данный микропроект является частью макропроекта, который будет рассчитывать прогибы конструкций (мосты, сложные формы балок) при больших деформациях.

В первых экспериментах мы будем задавать прогиб балки под своим весом в зависимости от параметров самой балки. Балка из стали с усредненными параметрами. Численный рассчет проводится с многими упрощениями координатным методом, а модель считается через тензоры, которые не подразумевают координаты, что является более точным способом расчета. Результат прогиба под своим весом:

№	Прогиб через программу, мм	Прогиб через численный расчет, мм	Длина, м	Ширина, м	Высота, м
1	0,56	0,59	1	0,1	0,1
2	2,30	2,37	2	0,2	0,1
3	8,67	9,48	2	0,1	0,2
4	9,31	9,48	2	0,1	0,01
5	826,83	948,04	2	0,01	0,1

В первых четырех экспериментах видно, что погрешность не превосходит 10%, однако в 5 эксперименте данные сильно разняться, что можно связать с большими деформациями, которые не рассматриваются в данном микропроекте.

Приложим силу к правому краю балки и посмотрим на результаты:

№	F, Н	Прогиб через программу, мм	Прогиб через численный расчет, мм	Длина, м	Ширина, м	Высота, м
1	500	0,212	0,16	1	0,1	0,1
2	500	0,113	0,11	1	0,2	0,1
3	500	0,031	0,03	1	0,1	0,2
4	1000	0,025	0,03	1	0,2	0,2
5	1000	0,008	0,01	1	0,3	0,3

Видим, что практически все численные данные сходятся с данными моделирования, поэтому можем сделать вывод, что модель достаточно точная.

2 Вывод.

Моделирование выполнено верно в пределах погрешности, которую можно объяснить разными значениями коэффициентов, которые зависят от марки стали, которые не учитываются в численном расчете, так как учитывается только модуль Юнга E. Средняя погрешность равна 7,6% без учета экспериментов, которые явно разнятся.