Formale Grundlagen der Informatik II

Aufgabenblatt 1

Jan-Hendrik Briese (TODO)
Lennart Braun (6523742)
Marc Strothmann (6537646)
Maximilian Knapperzbusch (6535090)

zum 20. Oktober 2014

Übungsaufgabe 1.3

1.

$$\begin{aligned} R_n = &(a^0 \cdot d \cdot b^0) + (a^2 \cdot d \cdot b^2) + \cdots + (a^n \cdot d \cdot b^n) \\ &+ (a^1 \cdot c \cdot b^1) + (a^3 \cdot c \cdot b^2) + \cdots + (a^{n-1} \cdot c \cdot b^{n-1}) \\ &+ (a^n \cdot d) \end{aligned} \tag{1}$$

2.

$$M_n = \underbrace{\left(\bigcup_{i=0}^{\frac{n}{2}} \left\{ a^{2i} \cdot d \cdot b^{2i} \right\} \right)}_{A} \cup \underbrace{\left(\bigcup_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \left\{ a^{2i+1} \cdot c \cdot b^{2i+1} \right\} \right)}_{B} \cup \underbrace{\{a^n \cdot d\}}_{C} \tag{2}$$

3. Es ist zu sehen, dass R_n und M_n die gleiche Sprache beschreiben. A entspricht der ersten Zeile von (1), B der zweiten und C der dritten.

Behauptung.

$$M_n = L(A_n) \tag{3}$$

Beweis.

a) $M_n \subseteq L(A_n)$
Sei $w \in M_n$. Dann ist w Element mindestens einer der Mengen A, B, C.

Fall A

$$w \in \bigcup_{i=0}^{\frac{n}{2}} \left\{ a^{2i} \cdot d \cdot b^{2n} \right\} \Leftrightarrow w = xyz \text{ mit } x = a^{2i},\ y = d,\ z = b^{2i} \tag{4}$$

$$(p_0, xyz) \vdash^* (p_{4i}, yz) \vdash (p_{4i+1}, z) \vdash^* (p_1, \epsilon) \tag{5}$$

Da (5) eine Erfolgsrechnung ist, gilt $w \in L(A_n)$.

Fall B

$$w \in \bigcup_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \left\{ a^{2i+1} \cdot c \cdot b^{2n+1} \right\} \Leftrightarrow w = xyz \text{ mit } x = a^{2i+1},\ y = c,\ z = b^{2i+1} \tag{6}$$

$$(p_0, xyz) \vdash^* (p_{4i+2}, yz) \vdash (p_{4i+3}, z) \vdash^* (p_1, \epsilon) \tag{7}$$

Da (7) eine Erfolgsrechnung ist, gilt $w \in L(A_n)$.

Fall C

$$w \in \{a^n \cdot d\} \Leftrightarrow w = xy \text{ mit } x = a^n,\ y = d \tag{8}$$

$$(p_0, xy) \vdash^* (p_{2n}, y) \vdash (p_{2n+1}, \epsilon) \tag{9}$$

Da (9) eine Erfolgsrechnung ist, gilt $w \in L(A_n)$.

b) $L(A_n) \subseteq M_n$
Sei $w \in L(A_n)$. Es gibt drei grundsätzliche Möglichkeiten in einen Endzustand von A_n zu gelangen.

   i. Es wird eine gerade Anzahl $k = 2i \leq n$ an as eingelesen, dann ein d und schließlich k bs. A_n befindet sich im Endzustand p_1. $w = a^{2i}db^{2i} \in M_n$ (Teilmenge A)

   ii. Es wird eine ungerade Anzahl $k = 2i + 1 \leq n$ an as eingelesen, dann ein c und schließlich k bs. A_n befindet sich im Endzustand p_1. $w = a^{2i+1}db^{2i+1} \in M_n$ (Teilmenge B)

   iii. Es werden n as und dann ein d eingelesen. A_n befindet sich im Endzustand p_{2n+1}. $w = a^n d \in M_n$ (Teilmenge C)

Aus $M_n \subseteq L(A_n)$ und $L(A_n) \subseteq M_n$ folgt $M_n = L(A_n)$. □

4. Da n fest gewählt ist, können die Auslassungszeichen in R_n aufgelöst werden. Jede Sprache, die durch einen regulären Ausdruck dargestellt werden kann, wird auch von einem endlichen Automaten akzeptiert und ist daher regulär.

5. TODO

Übungsaufgabe 1.4

1. TODO

2. TODO

3. $$R = (e + f)^* \cdot eef \cdot (e + f)^* \tag{10}$$

4. TODO
5. Begründen Sie die Korrektheit der Lösung.

Behauptung.

$$L(A') = M$$

Beweis.

a) $M \subseteq L(A')$
Sei $w \in M$ ein Wort, dann hat w die Form $w = \{e, f\}^* \cdot fee \cdot \{e, f\}^*$. Wir müssen nun zeigen, dass A' dieses Wort akzeptiert, dass also $w \in L(A')$ gilt. Beginnt w mit e ändert sich der Zustand des Automaten nicht. Sobald ein f gelesen wird, springt der Automat in den Zustand $\{p_3, p_2\}$. Falls weitere f gelesen springt der Automat in keinen anderen Zustand. Wenn ein e gelesen wird, springt der Automat in den Zustand $\{p_3, p_2, p_1\}$. Werden noch ein e gelesen, wechselt der Automat in den Endzustand und es können nun Kombinationen aus $\{e, f\}^*$ gelesen werden, ändert sich der Zustand auch nicht mehr und w wird akzeptiert, da es auch fee enthält. Befindet sich der Automat noch im Zustand $\{p_3, p_2, p_1\}$ und es wird ein f gelesen, so wird in den vorherigen Zustand gesprungen. Dieser Zustandswechsel kann beliebig oft stattfinden. Wenn aber fee gelesen wird, gelangt der Automat in den Endzustand. Daraus folgt $w \in L(A')$.

b) $L(A') \subseteq M$
Sei $w \in L(A')$, d. h. ein Wort, das vom Automaten akzeptiert wird. Wir müssen nun zeigen, dass daraus folgt, dass $w \in M$ gilt. Zunächst bemerken wir, dass im Startzustand beliebig viele es gelesen werden können und dass der Automat nur in den Folgezustand überführt werden kann, wenn ein f gelesen wird. Um den Automaten in den Endzustand überführt werden kann, müssen hintereinander ein f und zwei es gelesen werden. Ist die Kombination nicht Teil des Wortes, so kann der Automat nicht in den Endzustand gelangen. Da w diese Kombination beinhaltet, ist gezeigt dass w gespiegelt ein Eingabewort des Automaten A ist.

Aus a) und b) folgt $L(A') = M$. A' akzeptiert die gespiegelten Wörter aus $L(A)$. □