# Formale Grundlagen der Informatik II

**Aufgabenblatt 1**

Jan-Hendrik Briese (TODO)
Lennart Braun (6523742)
Marc Strothmann (6537646)
Maximilian Knapperzbusch (6535090)

zum 20. Oktober 2014

## Übungsaufgabe 1.3

1.

$$\begin{aligned} R_n = &(a^0 \cdot d \cdot b^0) + (a^2 \cdot d \cdot b^2) + \cdots + (a^n \cdot d \cdot b^n) \\ &+ (a^1 \cdot c \cdot b^1) + (a^3 \cdot c \cdot b^2) + \cdots + (a^{n-1} \cdot c \cdot b^{n-1}) \\ &+ (a^n \cdot d) \end{aligned} \tag{1}$$

2.

$$M_n = \underbrace{\left( \bigcup_{i=0}^{\frac{n}{2}} \left\{ a^{2i} \cdot d \cdot b^{2i} \right\} \right)}_{A} \cup \underbrace{\left( \bigcup_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \left\{ a^{2i+1} \cdot c \cdot b^{2i+1} \right\} \right)}_{B} \cup \underbrace{\{a^n \cdot d\}}_{C} \tag{2}$$

3. Es ist zu sehen, dass $R_n$ und $M_n$ die gleiche Sprache beschreiben. $A$ entspricht der ersten Zeile von (1), $B$ der zweiten und $C$ der dritten.

**Behauptung.**

$$M_n = L(A_n) \tag{3}$$

*Beweis.*

a) $M_n \subseteq L(A_n)$
Sei $w \in M_n$. Dann ist $w$ Element mindestens einer der Mengen $A, B, C$.

Fall $A$

$$w \in \bigcup_{i=0}^{\frac{n}{2}} \left\{ a^{2i} \cdot d \cdot b^{2n} \right\} \Leftrightarrow w = xyz \text{ mit } x = a^{2i},\ y = d,\ z = b^{2i} \tag{4}$$

$$(p_0, xyz) \vdash^* (p_{4i}, yz) \vdash (p_{4i+1}, z) \vdash^* (p_1, \epsilon) \tag{5}$$

Da (5) eine Erfolgsrechnung ist, gilt $w \in L(A_n)$.

Fall $B$

$$w \in \bigcup_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \left\{a^{2i+1} \cdot c \cdot b^{2n+1}\right\} \Leftrightarrow w = xyz \text{ mit } x = a^{2i+1},\ y = c,\ z = b^{2i+1} \tag{6}$$

$$(p_0, xyz) \vdash^* (p_{4i+2}, yz) \vdash (p_{4i+3}, z) \vdash^* (p_1, \epsilon) \tag{7}$$

Da (7) eine Erfolgsrechnung ist, gilt $w \in L(A_n)$.

Fall $C$

$$w \in \{a^n \cdot d\} \Leftrightarrow w = xy \text{ mit } x = a^n,\ y = d \tag{8}$$

$$(p_0, xy) \vdash^* (p_{2n}, y) \vdash (p_{2n+1}, \epsilon) \tag{9}$$

Da (9) eine Erfolgsrechnung ist, gilt $w \in L(A_n)$.

b) $L(A_n) \subseteq M_n$
Sei $w \in L(A_n)$. Es gibt drei grundsätzliche Möglichkeiten in einen Endzustand von $A_n$ zu gelangen.

i. Es wird eine gerade Anzahl $k = 2i \leq n$ an $a$s eingelesen, dann ein $d$ und schließlich $k$ $b$s. $A_n$ befindet sich im Endzustand $p_1$. $w = a^{2i}db^{2i} \in M_n$ (Teilmenge $A$)

ii. Es wird eine ungerade Anzahl $k = 2i + 1 \leq n$ an $a$s eingelesen, dann ein $c$ und schließlich $k$ $b$s. $A_n$ befindet sich im Endzustand $p_1$. $w = a^{2i+1}db^{2i+1} \in M_n$ (Teilmenge $B$)

iii. Es werden $n$ $a$s und dann ein $d$ eingelesen. $A_n$ befindet sich im Endzustand $p_{2n+1}$. $w = a^n d \in M_n$ (Teilmenge $C$)

Aus $M_n \subseteq L(A_n)$ und $L(A_n) \subseteq M_n$ folgt $M_n = L(A_n)$. □

4. Da $n$ fest gewählt ist, können die Auslassungszeichen in $R_n$ aufgelöst werden. Jede Sprache, die durch einen regulären Ausdruck dargestellt werden kann, wird auch von einem endlichen Automaten akzeptiert und ist daher regulär.

5. TODO

## Übungsaufgabe 1.4

1. TODO

2. TODO

3. $$R = (e + f)^* \cdot eef \cdot (e + f)^* \tag{10}$$

4. TODO

5. Begründen Sie die Korrektheit der Lösung.
   $L(A') \subseteq M_n$
   Sei $w \in M_n$ ein Wort, das vom Automaten A' akzeptiert werden soll. So muss w die gespiegelte Form eines Wortes sein, welches vom Automaten A akzeptiert wird. Im Startzustand $\{p_3\}$ können zunächst beliebig viele e gelesen werden. Damit A' in den Folgezustand $\{p_3, p_2\}$ wechseln kann, muss ein f gelesen. Sobald sich der Automat A' in diesem Zustand ist, können beliebig viele f gelesen werden. Beim Lesen eines e wechselt A' in den Zustand $\{p_3, p_2, p_1\}$. In diesem Zustand kann durch das Lesen eines f in den vorherigen Zustand wechseln, oder durch das Lesen eines weiteren e in den Endzustand springen. Im Endzustand können beliege e und f gelesen werden. Anhand der Übergänge vom Startzustand bis zum Endzustand kann man erkennen, dass der Endzustand nur erreicht werden kann, wenn jede Zerlegung von w die Kombination fee enthält. Spiegelt man das Wort w, erhält man in der Zerlegung die Kombination eef. Daraus folgt, dass der Automat A' die gespiegelten Wörter des Automaten A akzeptiert.

   $L(A') \subseteq M_n$
   Sei $w \in L(A')$, d.h. ein Wort, das vom Automaten akzeptiert wird. Wir müssen nun zeigen, dass daraus folgt, dass $w \in M$ gilt. Zunächst bemerken wir, dass im Startzustand beliebig viele e gelesen werden können und der Automat kann nur in den Folgezustand überführt werden, wenn ein f gelesen wird. Um den Automaten in den Endzustand überführt werden kann, müssen hintereinander ein f und zwei e gelesen werden. Ist die Kombination nicht Teil des Wortes, so kann der Automat nicht in den Endzustand gelangen. Da w diese Kombination beinhaltet, ist gezeigt dass w gespiegelt ein Eingabewort des Automaten A ist.
   Insgesamt folgt, dass $L(A') = M$ gilt und das A' die gespiegelten Wörter von A akzeptiert.