Chú ý: Đề nghị sinh viên ghi rõ các thông tin sau và **Nộp lại đề thi**

Họ và tên sinh viên: Lớp:

Ngày - tháng - năm sinh:

Đề 1 - Kiểm tra giữa kỳ: Nhập môn Tối ưu - HK20201
(Thời gian làm bài: 60 phút)
(Không sử dụng tài liệu và điện thoại di động trong phòng thi)

Kí hiệu: $\beta :=$ *ngày sinh* và $\alpha :=$ *tháng sinh* của em.

1. Xét bài toán

$$\min f(u) == 2u_1u_2 + u_2^2 + 3u_1^2 - 8u_2 + 4u_1 + \beta \text{ v.đ.k. } u \in \mathbb{R}^2. \qquad (P_1)$$

   i) Hàm $f(u)$ có phải là hàm lồi trên $\mathbb{R}^2$ không?
   ii) Phát biểu điều kiện cần bậc nhất của nghiệm tối ưu địa phương của bài toán (P_1). Đó có phải điều kiện đủ không? Vì sao?
   iii) Cho $u^0 = (0, \alpha)^T$. Xác định u^1 bằng thuật toán Newton thuần túy. Điểm u^1 có phải là nghiệm tối ưu của bài toán (P_1) không?

2. Xét bài toán

$$\min h(x) = \langle d, x\rangle + \beta \ : \ x \in M\}, \qquad (P_2)$$

trong đó véc tơ $d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ và $M \subset \mathbb{R}^n$ là đa diện khác rỗng.

   i) Nếu $x^1, x^2 \in \text{Argmin}(P_2)$ và x^* là tổ hợp lồi của x^1, x^2 thì x^* có là nghiệm của bài toán (P_2) không? Vì sao?.
   ii) Cho u^0 là đỉnh của đa diện M. Giả sử có đúng h đỉnh kề với u^0 là $u^1, u^2, ..., u^h$ và

$$\langle d, u^0\rangle \le \langle d, u^i\rangle \ \ \forall i = 1, 2, \ldots, h.$$

   Chứng minh u^0 là nghiệm tối ưu của bài toán (P_2).

3. Giải bài toán

$$\max\{k(x) = \langle \omega, x\rangle + \beta \ : \ x \in D\}$$

bằng thuật toán hình học với $\omega = (10, 20)^T$ và

$$D = \{x \in \mathbb{R}^2 : 2x_1 + x_2 \ge 4, \ x_1 - x_2 \le 3, x_1 \ge 1, \ x_2 \ge 0 \}.$$

<u>Chú ý:</u> Đề nghị sinh viên ghi rõ các thông tin sau và **<u>Nộp lại đề thi</u>**

Họ và tên sinh viên: Lớp:

Ngày - tháng - năm sinh:

Đề 2 - Kiểm tra giữa kỳ: Nhập môn Tối ưu - HK20201

(Thời gian làm bài: 60 phút)

(Không sử dụng tài liệu và điện thoại di động trong phòng thi)

Kí hiệu: $\beta :=$ *ngày sinh* và $\alpha :=$ *tháng sinh* của em.

1. Cho $v = (20, 10)^T$ và tập

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^2 : -x_1 + x_2 \leq 3,\ x_1 + 2x_2 \geq 4, x_2 \geq 1,\ x_1 \geq 0\ \}.$$

Giải bài toán sau bằng thuật toán hình học:

$$\min\{\varphi(x) = \langle v, x\rangle + \beta\ \ :\ \ x \in Q\}.$$

2. Cho hàm số $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ và xét bài toán

$$\min \quad f(x) \ \text{ v.đ.k. } \quad x \in \mathbb{R}^n. \qquad (P_1)$$

i) Giả sử $f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx - \langle b, x\rangle + \alpha$, trong đó Q là ma trận cấp $n \times n$ đối xứng, xác định dương và véc tơ $b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Chứng minh rằng, việc giải bài toán (P_1) tương đương với việc giải hệ phương trình tuyến tính $Qx = b$.

ii) Nếu $f(x)$ là hàm afin thì có cần xây dựng thuật toán giải bài toán (P_1) không? Vì sao?

3. Xét bài toán

$$\min k(u) = 3(u_1 - 6)^2 + (u_2 - \alpha)^2 + u_1(u_2 - \alpha) \text{ v.đ.k. } u \in \mathbb{R}^2. \qquad (P_2)$$

i) Hàm $k(u)$ có phải là hàm lồi trên $\mathbb{R}^2$ không?

ii) Phát biểu điều kiện cần bậc nhất của nghiệm tối ưu địa phương của bài toán (P_2). Đó có phải điều kiện đủ không? Vì sao?

iii) Cho $u^0 = (6, \alpha)^T$. Xác định u^1 bằng thuật toán Gradient với thủ tục tìm chính xác theo tia. Điểm u^1 có phải là nghiệm tối ưu của bài toán (P_2) không?

Chú ý: Đề nghị sinh viên ghi rõ các thông tin sau và **Nộp lại đề thi**

Họ và tên sinh viên: Lớp:

Ngày - tháng - năm sinh:

Đề 3 - Kiểm tra giữa kỳ: Nhập môn Tối ưu - HK20201

(Thời gian làm bài: 60 phút)

(Không sử dụng tài liệu và điện thoại di động trong phòng thi)

Kí hiệu: $\beta :=$ *ngày sinh* và $\alpha :=$ *tháng sinh* của em.

1. Cho véc tơ $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, đa diện khác rỗng $X \subset \mathbb{R}^n$. Ký hiệu

$$T = \text{Argmin}\{g(x) = \langle v, x\rangle + \beta \ : \ \ x \in X\}.$$

   i) Cho x^* là tổ hợp lồi của $x^1, x^2 \in T$. Chứng minh rằng $x^* \in T$.

   ii) Giả sử đỉnh x^0 đa diện X có đúng k đỉnh kề là $x^1, x^2, ..., x^k$ và

$$\langle v, x^0\rangle \leq \langle v, x^i\rangle \ \ \forall i = 1, 2, \ldots, k.$$

   Chứng minh $x^0 \in T$.

2. Xét bài toán

$$\min k(u) = 4u_1 + 3u_1^2 + 2u_1u_2 + u_2^2 - 8u_2 + \alpha \text{ v.đ.k. } u \in \mathbb{R}^2. \qquad (P_1)$$

   i) Hàm $k(u)$ có phải là hàm lồi trên $\mathbb{R}^2$ không?

   ii) Phát biểu điều kiện cần bậc nhất của nghiệm tối ưu địa phương của bài toán (P_1). Đó có phải điều kiện đủ không? Vì sao?

   iii) Cho $u^0 = (0, \alpha)^T$. Xác định u^1 bằng thuật toán Newton thuần túy. Điểm u^1 có phải là nghiệm tối ưu của bài toán (P_1) không?

3. Giải bài toán

$$\min\{k(x) = \langle \omega, x\rangle + \beta \ : \ \ x \in D\}$$

   bằng thuật toán hình học với $\omega = (12, 24)^T$ và

$$D = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 - x_2 \leq 5, \ 2x_1 + x_2 \geq 6, x_2 \geq 0, \ x_1 \geq 1\}.$$

Chú ý: Đề nghị sinh viên ghi rõ các thông tin sau và **Nộp lại đề thi**

Họ và tên sinh viên: Lớp:

Ngày - tháng - năm sinh:

Đề 4 - Kiểm tra giữa kỳ: Nhập môn Tối ưu - HK20201
(Thời gian làm bài: 60 phút)
(Không sử dụng tài liệu và điện thoại di động trong phòng thi)

Kí hiệu: $\beta :=$ *ngày sinh* và $\alpha :=$ *tháng sinh* của em.

1. Xét bài toán

$$\min h(u) = (u_1 - \alpha)^2 + 3(u_2 - 6)^2 + (u_1 - \alpha)u_2 \text{ v.đ.k. } u \in \mathbb{R}^2. \qquad (P_1)$$

   i) Hàm $h(u)$ có phải là hàm lồi trên $\mathbb{R}^2$ không?

   ii) Phát biểu điều kiện cần bậc nhất của nghiệm tối ưu địa phương của bài toán (P_1). Đó có phải điều kiện đủ không? Vì sao?

   ii) Cho $u^0 = (\alpha, 6)^T$. Xác định u^1 bằng thuật toán Gradient với thủ tục tìm chính xác theo tia. Điểm u^1 có phải là nghiệm tối ưu của bài toán (P_1) không?

2. Xét bài toán

$$\min \ f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx - \langle c, x\rangle + \beta \quad \text{v.đ.k.} \quad \mathbb{R}^n, \qquad (P_2)$$

   trong đó Q là ma trận cấp $n \times n$ đối xứng, xác định dương và véc tơ $c \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Cho điểm bất kỳ $x^0 \in \mathbb{R}^n$ có $\nabla f(x^0) \neq 0$. Chứng minh rằng, nếu x^1 được xác định bằng thuật toán Newton thuần túy thì $x^1 \in \text{Argmin}(P_2)$.

3. Giải bài toán

$$\max\{\varphi(x) = \langle c, x\rangle + \beta \ : \ x \in P\}$$

   bằng thuật toán hình học với $c = (12, 6)^T$ và

$$P = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ -x_1 + x_2 \leq 5, \ 2x_1 + 5x_2 \geq 10, \ x_2 \geq 1, \ x_1 \geq 0\}.$$

Chú ý: Đề nghị sinh viên ghi rõ các thông tin sau và **Nộp lại đề thi**

Họ và tên sinh viên: Lớp:

Ngày - tháng - năm sinh:

Đề 5 - Kiểm tra giữa kỳ: Nhập môn Tối ưu - HK20201

(Thời gian làm bài: 60 phút)

(Không sử dụng tài liệu và điện thoại di động trong phòng thi)

Kí hiệu: $\beta :=$ *ngày sinh* và $\alpha :=$ *tháng sinh* của em.

1. Xét bài toán

$$\min f(x) = 2x_1x_2 + 3x_2^2 + x_1^2 - 8x_1 + 4x_2 + \alpha \text{ v.đ.k. } u \in \mathbb{R}^2. \qquad (P_1)$$

   i) $f(x)$ có phải làm hàm lồi trên $\mathbb{R}^2$ không?

   ii) Phát biểu điều kiện cần bậc nhất của nghiệm tối ưu địa phương của bài toán (P_1). Đó có phải điều kiện đủ không? Vì sao?

   iii) Cho $x^0 = (\alpha, 0)^T$. Xác định x^1 bằng thuật toán Newton thuần túy. Điểm x^1 có phải là nghiệm tối ưu của bài toán (P_1) không?

2. Giải bài toán

$$\min\{k(x) = \langle \omega, x \rangle + \beta \ : \ x \in D\}$$

   bằng thuật toán hình học với $\omega = (6, 12)^T$ và

$$D = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 - x_2 \le 3, 6x_1 + 3x_2 \ge 12, x_1 \ge 1, \ x_2 \ge 0\}.$$

3. Xét bài toán

$$\min g(x) = \langle v, x \rangle \text{ v.đ.k. } x \in X, \qquad (P_2)$$

   trong đó véc tơ $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ và $X \subset \mathbb{R}^n$ là tập lồi đa diện khác rỗng. Chứng minh rằng bài toán (P_2) không có nghiệm tối ưu khi và chỉ khi tồn tại một hướng lùi xa d^* của X thỏa mãn

$$\langle v, d^* \rangle < 0.$$

Chú ý: Đề nghị sinh viên ghi rõ các thông tin sau và **Nộp lại đề thi**

Họ và tên sinh viên: Lớp:

Ngày - tháng - năm sinh:

Đề 6 - Kiểm tra giữa kỳ: Nhập môn Tối ưu - HK20201

(Thời gian làm bài: 60 phút)

(Không sử dụng tài liệu và điện thoại di động trong phòng thi)

Kí hiệu: $\beta :=$ *ngày sinh* và $\alpha :=$ *tháng sinh* của em.

1. Xét bài toán

$$\min h(x) = (x_1 - \alpha)x_2 + (x_1 - \alpha)^2 + 3(x_2 - 6)^2 \text{ v.đ.k. } x \in \mathbb{R}^2. \qquad (P_1)$$

   i) Hàm $h(x)$ có phải là hàm lồi trên $\mathbb{R}^2$ không?

   ii) Phát biểu điều kiện cần bậc nhất của nghiệm tối ưu địa phương của bài toán (P_1). Đó có phải điều kiện đủ không? Vì sao?

   iii) Cho $x^0 = (\alpha, 6)^T$. Xác định x^1 bằng thuật toán Gradient với thủ tục tìm chính xác theo tia. Điểm x^1 có phải là nghiệm tối ưu của bài toán (P_1) không?

2. Giải bài toán

$$\min\{\varphi(x) = \langle c, x\rangle + \beta \ : \ x \in Q\}$$

   bằng thuật toán hình học với $c = (16, 8)^T$ và

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ -x_1 + x_2 \leq 3, 3x_1 + 6x_2 \geq 12, \ x_2 \geq 1, \ x_1 \geq 0\}.$$

3. Cho điểm bất kỳ $u^0 \in \mathbb{R}^n$ có $\nabla f(u^0) \neq 0$. Xét bài toán

$$\min \ g(u) = \frac{1}{2}u^T M u - \langle d, u\rangle + \beta \quad \text{v.đ.k.} \quad \mathbb{R}^n, \qquad (P_2)$$

   trong đó M là ma trận cấp $n \times n$ đối xứng, xác định dương và véc tơ $d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Giả sử u^1 được xác định bằng thuật toán Newton thuần túy. Chứng minh rằng $u^1 \in \text{Argmin}(P_2)$.

Chú ý: Đề nghị sinh viên ghi rõ các thông tin sau và **Nộp lại đề thi**

Họ và tên sinh viên: Lớp:

Ngày - tháng - năm sinh:

Đề 7 - Kiểm tra giữa kỳ: Nhập môn Tối ưu - HK20201

(Thời gian làm bài: 60 phút)

(Không sử dụng tài liệu và điện thoại di động trong phòng thi)

Kí hiệu: $\beta :=$ *ngày sinh* và $\alpha :=$ *tháng sinh* của em.

1. Xét bài toán
$$\min h(x) = \langle c, x \rangle \text{ v.đ.k. } x \in X, \qquad (P_1)$$
trong đó véc tơ $c \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ và $X \subset \mathbb{R}^n$ là tập lồi đa diện khác rỗng. Chứng minh rằng bài toán (P_1) không có nghiệm tối ưu khi và chỉ khi tồn tại một hướng lùi xa $\bar{d}$ của X thỏa mãn
$$\langle c, \bar{d} \rangle < 0.$$

2. Giải bài toán
$$\min\{k(x) = \langle \omega, x \rangle + \beta \ : \ x \in D\}$$
bằng thuật toán hình học với $\omega = (6, 12)^T$ và
$$D = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 - x_2 \le 3, 8x_1 + 4x_2 \ge 16, x_2 \ge 0, \ \ x_1 \ge 1\}.$$

3. Xét bài toán
$$\min g(x) = 3x_2^2 + x_1^2 - 8x_1 + 4x_2 + 2x_1x_2 + \alpha \text{ v.đ.k. } x \in \mathbb{R}^2. \qquad (P_2)$$
   i) Hàm $g(x)$ có phải là hàm lồi trên $\mathbb{R}^2$ không?
   ii) Phát biểu điều kiện cần bậc nhất của nghiệm tối ưu địa phương của bài toán (P_2). Đó có phải điều kiện đủ không? Vì sao?
   iii) Cho $x^0 = (\alpha, 0)^T$. Xác định x^1 bằng thuật toán Newton thuần túy. Điểm x^1 có phải là nghiệm tối ưu của bài toán (P_2) không?

Chú ý: Đề nghị sinh viên ghi rõ các thông tin sau và **Nộp lại đề thi**

Họ và tên sinh viên: Lớp:

Ngày - tháng - năm sinh:

Đề 8 - Kiểm tra giữa kỳ: Nhập môn Tối ưu - HK20201
(Thời gian làm bài: 60 phút)
(Không sử dụng tài liệu và điện thoại di động trong phòng thi)

Kí hiệu: $\beta :=$ *ngày sinh* và $\alpha :=$ *tháng sinh* của em.

1. Xét bài toán

$$\min h(x) = 3(x_1 - 6)^2 + (x_2 - \alpha)^2 + x_1(x_2 - \alpha) \text{ v.đ.k. } x \in \mathbb{R}^2. \qquad (P_1)$$

   i) Hàm số $h(x)$ có phải là hàm lồi trên $\mathbb{R}^2$ không?

   ii) Phát biểu điều kiện cần bậc nhất của nghiệm tối ưu địa phương của bài toán (P_1). Đó có phải điều kiện đủ không? Vì sao?

   iii) Cho $x^0 = (6, \alpha)^T$. Xác định x^1 bằng thuật toán Gradient với thủ tục tìm chính xác theo tia. Điểm x^1 có phải là nghiệm tối ưu của bài toán (P_1) không?

2. Cho hàm số $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ và xét bài toán

$$\min \quad f(x) \quad \text{v.đ.k.} \quad x \in \mathbb{R}^n. \qquad (P_2)$$

   i) Giả sử $f(x) = \frac{1}{2}x^T Mx - \langle d, x\rangle + \alpha$, trong đó M là ma trận cấp $n \times n$ đối xứng, xác định dương và véc tơ $d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Chứng minh rằng, việc giải bài toán (P_2) tương đương với việc giải hệ phương trình tuyến tính $Mx = d$.

   ii) Nếu $f(x)$ là hàm afin thì có cần xây dựng thuật toán giải bài toán (P_2) không? Vì sao?

3. Giải bài toán

$$\max\{k(x) = \langle \omega, x\rangle + \beta \ : \ x \in D\}$$

   bằng thuật toán hình học với $\omega = (24, 12)^T$ và

$$D = \{x \in \mathbb{R}^2 : 3x_1 + 6x_2 \geq 12, \ -x_1 + x_2 \leq 3, x_2 \geq 1, \ x_1 \geq 0\}.$$

Nhờ các thầy cô coi thi nhắc sinh viên:

1. Điền đầy đủ thông tin Ngày sinh, Tháng sinh vào Đề Thi
2. Nộp lại đề thi cùng bài thi.
3. Bài nào thiếu thông tin về Ngày sinh, Tháng sinh hoặc không nộp đề thi thì bài đó không được tính điểm.