HUST

ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

HANOI UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

ONE LOVE. ONE FUTURE.

TOÁN RỜI RẠC

ĐẠI HỌC
BÁCH KHOA HÀ NỘI
HANOI UNIVERSITY
OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

TOÁN RỜI RẠC

ONE LOVE. ONE FUTURE.

PHẦN 1: LÝ THUYẾT TỔ HỢP
(Combinatorial Theory)

PHẦN 2: LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ
(Graph Theory)

Nội dung phần 1

Chương 0. Mở đầu

Chương 1. Bài toán đếm

Chương 2. Bài toán tồn tại

Chương 3. Bài toán liệt kê tổ hợp

Chương 4. Bài toán tối ưu tổ hợp

1. **Nguyên lý cộng và nguyên lý nhân**
2. Các cấu hình tổ hợp cơ bản
3. Nguyên lý bù trừ
4. Công thức đệ quy
5. Hàm sinh

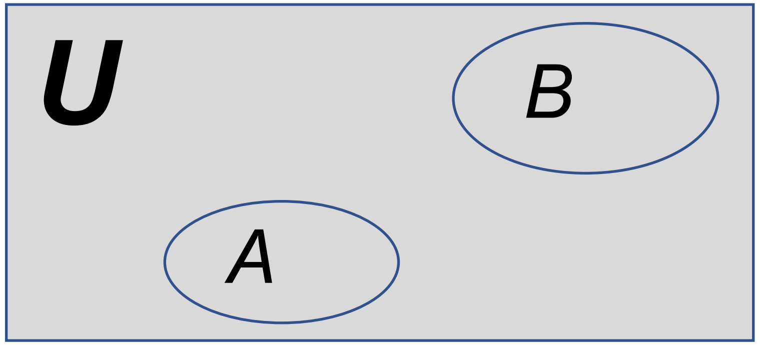
1. Nguyên lý cộng và nguyên lý nhân

- Đây là hai nguyên lý cơ bản của tổ hợp, được vận dụng rộng rãi vào việc giải quyết các bài toán đếm
- Còn gọi là Qui tắc cộng (Sum Rule) và Qui tắc nhân (Product Rule)

Nguyên lý cộng

- *Nếu A và B là hai tập hợp rời nhau thì*

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B)$$



- Nguyên lý cộng được mở rộng cho nhiều tập con rời nhau:

Nếu $A_1, A_2, ..., A_k$ là một phân hoạch của tập hợp X thì

$$N(X) = N(A_1) + N(A_2) + ... + N(A_k)$$

- Một trường hợp riêng hay dùng của nguyên lý cộng:

Nếu A là một tính chất cho trên tập X thì

$$N(A) = N(X) - N(A^c)$$

Nguyên lý cộng

Ví dụ 1. Trong một đợt phổ biến đề tài tốt nghiệp, Ban chủ nhiệm Khoa công bố danh sách các đề tài bao gồm 80 đề tài về chủ đề "xây dựng hệ thông tin quản lý", 10 đề tài về chủ đề "thiết kế phần mềm dạy học" và 10 đề tài về chủ đề "Hệ chuyên gia". Hỏi một sinh viên có bao nhiêu khả năng lựa chọn đề tài?

Giải: Sinh viên có thể lựa chọn đề tài theo chủ đề thứ nhất bởi 80 cách, theo chủ đề thứ hai bởi 10 cách, theo chủ đề thứ ba bởi 10 cách. Vậy tất cả có 100 cách lựa chọn.

Ví dụ 2. Có bao nhiêu số thập phân có 4 chữ số mà có đúng 3 chữ số 9?

Giải: Các số thỏa mãn điều kiện đề bài có thể chia làm 4 loại:

- Chữ số đầu tiên không phải là chữ số 9 (x999)
- Chữ số thứ hai không phải là chữ số 9 (9x99)
- Chữ số thứ ba không phải là chữ số 9 (99x9)
- Chữ số thứ tư không phải là chữ số 9 (999x)

Theo nguyên lý cộng:

$$8+9+9+9 = 35$$

Nguyên lý nhân

- Nếu mỗi thành phần a_i của bộ có thứ tự k thành phần $(a_1, a_2, ..., a_k)$ có m_i khả năng chọn (i = 1, 2, ..., k), thì số bộ sẽ được tạo ra là tích số của các khả năng này $m_1 m_2 \ldots m_k$
- Một hệ quả trực tiếp của nguyên lý nhân:

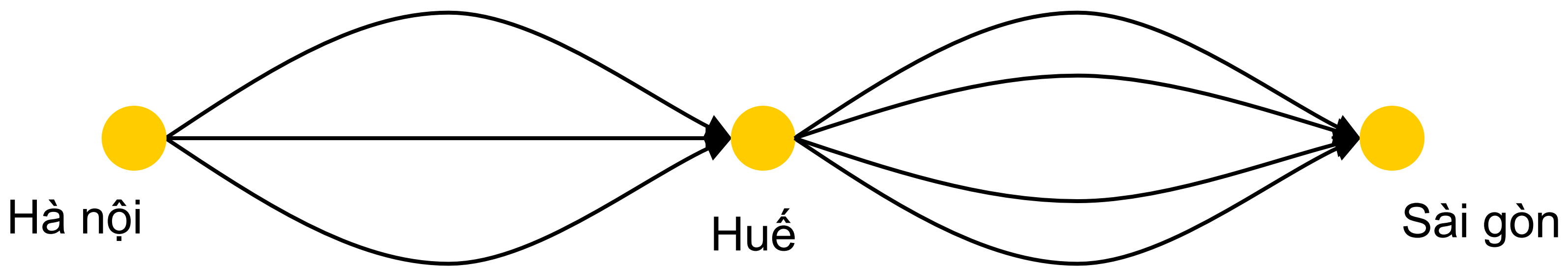
$$N(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k) = N(A_1)\, N(A_2) \ldots N(A_k),$$

với $A_1, A_2, \ldots, A_k$ là những tập hợp nào đó.

Nguyên lý nhân

- **Ví dụ 1.** Từ Hà nội đến Huế có 3 cách đi: máy bay, ô tô, tàu hỏa. Từ Huế đến Sài Gòn có 4 cách đi: máy bay, ô tô, tàu hỏa, tàu thủy. Hỏi từ Hà nội đến Sài Gòn (qua Huế) có bao nhiêu cách đi?

Giải: Mỗi cách đi từ Hà nội đến Sài Gòn (qua Huế) được xem gồm 2 chặng: Hà nội – Huế và Huế - Sài Gòn. Từ đó, theo nguyên lý nhân, số cách đi từ Hà nội đến Sài Gòn là 3x4 = 12 cách



Nguyên lý nhân

Ví dụ 2. Biển số xe của 1 thành phố có dạng: 2 chữ cái – 4 chữ số

LL-DDDD

Hỏi có thể tạo ra bao nhiêu biển số xe nếu

(a) Không có chữ cái và chữ số nào bị lặp lại

(b) Chữ cái và chữ số được phép lặp lại

(c) được lặp lại, nhưng biển số chỉ gồm các nguyên âm và số lẻ

1. Nguyên lý cộng và nguyên lý nhân
2. **Các cấu hình tổ hợp cơ bản**
3. Nguyên lý bù trừ
4. Công thức đệ quy
5. Hàm sinh

2. Các cấu hình tổ hợp cơ bản

- Các cấu hình tổ hợp cơ bản là:
  - ***Hoán vị***
  - ***Chỉnh hợp lặp***
  - ***Chỉnh hợp không lặp***
  - ***Tổ hợp***
- Phép đếm các cấu hình tổ hợp cơ bản được sử dụng để giải các bài toán đếm phức tạp hơn
- Giả sử X là tập n phần tử, mà không giảm tổng quát ta có thể coi X là tập gồm các số 1, 2, ..., n.

Hoán vị

Định nghĩa. Ta gọi hoán vị từ n phần tử của X là bộ có thứ tự gồm n thành phần, mỗi thành phần đều là phần tử của X, *các thành phần khác nhau từng đôi*.

Ví dụ: $X = \{a, b, c\}$, khi đó các hoán vị của X là:

1. (a, b, c)
2. (a, c, b)
3. (b, a, c)
4. (b, c, a)
5. (c, a, b)
6. (c, b, a)

Hoán vị

Định nghĩa. Ta gọi hoán vị từ n phần tử của X là bộ có thứ tự gồm n thành phần, mỗi thành phần đều là phần tử của X, *các thành phần khác nhau từng đôi*.

- Ký hiệu số lượng hoán vị từ n phần tử là P_n.
- Theo định nghĩa, một hoán vị từ n phần tử của X có thể biểu diễn bởi

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n),\ a_i \in X,\ i = 1, 2, \ldots, n,\ a_i \neq a_j,\ i \neq j.$$

- Định lý 1.

$$P_n = n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1 = n!$$

Hoán vị

Ví dụ 1. 6 người đứng xếp thành một hàng ngang để chụp ảnh. Hỏi có thể bố trí bao nhiêu kiểu?

Giải: Mỗi kiểu ảnh là một hoán vị của 6 người. Từ đó nhận được số kiểu ảnh có thể bố trí là 6! = 720.

Ví dụ 2. Cần bố trí việc thực hiện *n* chương trình trên một máy vi tính. Hỏi có bao nhiêu cách?

Giải: đánh số các chương trình bởi 1, 2,..., *n*. Mỗi cách bố trí việc thực hiện các chương trình trên máy có thể biểu diễn bởi 1 hoán vị của 1, 2, ..., *n*. Từ đó suy ra số cách bố trí cần tìm là *n*!

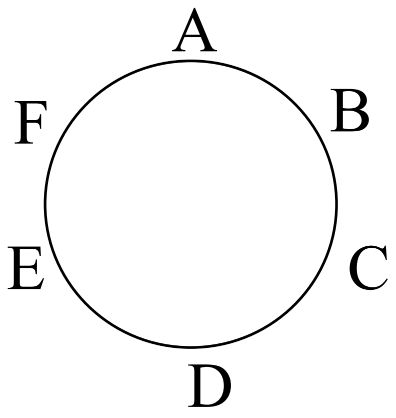
Ví dụ 3. Có bao nhiêu cách bố trí *n* thợ thực hiện *n* việc sao cho mỗi thợ thực hiện một việc và mỗi việc do đúng một thợ thực hiện

Giải: *n*!

Hoán vị vòng tròn

Ví dụ. Xếp 6 người A, B, C, D, E, F ngồi quanh 1 cái bàn tròn, hỏi có bao nhiêu cách xếp, nếu cách sắp xếp x được coi là giống cách sắp xếp y khi ta có thể thu được x từ y bằng 1 phép quay

ABCDEF,
BCDEFA,
CDEFAB,
DEFABC,
EFABCD,
FABCDE



được coi là các cách sắp xếp giống nhau theo vòng tròn

➔ Với mỗi cách xếp, có 6 cách 'quay'

Do đó, tổng cộng có 6!/6 = 5! = 120

Hoán vị vòng tròn

- Một *hoán vị vòng tròn* của tập *X gồm n* phần tử là một bộ có thứ tự gồm *n thành phần của X* sắp xếp vòng tròn; không có phần tử đầu và phần tử kết thúc
- Số lượng hoán vị vòng tròn của tập *n* phần tử = $n!/n = (n-1)!$

Chỉnh hợp lặp

Định nghĩa. Ta gọi *chỉnh hợp lặp chập k từ n* phần tử của *X* là bộ có thứ tự gồm *k* thành phần, mỗi thành phần đều là phần tử của *X*, *các thành phần có thể lặp lại*.

- Ví dụ: *X* = {*a*, *b*, *c*}, khi đó chỉnh hợp lặp chập 2 từ 3phần tử của *X* là:

1. (*a*, *b*)
2. (*a*, *c*)
3. (*b*, *a*)
4. (*b*, *c*)
5. (*c*, *a*)
6. (*c*, *b*)
7. (*a*, *a*)
8. (*b*, *b*)
9. (*c*, *c*)

Chỉnh hợp lặp

- **Định nghĩa.** Ta gọi *chỉnh hợp lặp chập k từ n* phần tử của X là bộ có thứ tự gồm k thành phần, mỗi thành phần đều là phần tử của X, *các thành phần có thể lặp lại*.
- Ký hiệu số lượng chỉnh hợp lặp chập k từ n phần tử là $A_n{}^k$
- Theo định nghĩa, một chỉnh hợp lặp chập k từ n phần tử của X có thể biểu diễn bởi

  $(a_1, a_2, ..., a_k), a_i \in X, i = 1, 2, ..., k.$
- Dễ thấy tập tất cả các chỉnh hợp lặp chập k từ n phần tử của X chính là X^k. Vì vậy, theo nguyên lý nhân ta có

Định lý 2. $A_n^k = n^k$

Chỉnh hợp lặp

Ví dụ. Cần phải phân bổ 100 sinh viên vào 4 nhóm thực tập ACCESS, FOXPRO, EXCEL, LOTUS. Mỗi sinh viên phải tham gia vào đúng một nhóm và mỗi nhóm có thể nhận một số lượng không hạn chế sinh viên

- **Giải:** 4^{100} hay 100^4 ?
  - Mỗi cách phân bố cần tìm có thể biểu diễn bởi bộ có thứ tự gồm 100 thành phần $(b_1, ..., b_{100})$ trong đó $b_i \in$ {ACESS, FOXPRO, EXCEL, LOTUS} là nhóm thực tập của sinh viên thứ i. Từ đó suy ra số cách phân bố cần đếm là 4^{100}.

Chỉnh hợp không lặp

- **Định nghĩa.** Ta gọi chỉnh hợp không lặp chập *k* từ *n* phần tử của *X* là bộ có thứ tự gồm *k* thành phần, mỗi thành phần đều là phần tử của *X*, *các thành phần khác nhau từng đôi*.
- Ký hiệu số lượng chỉnh hợp không lặp chập *k* từ *n* phần tử là P_n^k. Rõ ràng, để tồn tại chỉnh hợp không lặp, thì $k \leq n$.

Ví dụ: $X = \{a, b, c\}$, khi đó chỉnh hợp không lặp chập 2 từ 3 phần tử của *X* là:

1. (a, b)
2. (a, c)
3. (b, a)
4. (b, c)
5. (c, a)
6. (c, b)

Chỉnh hợp không lặp

- **Định nghĩa.** Ta gọi chỉnh hợp không lặp chập k từ n phần tử của X là bộ có thứ tự gồm k thành phần, mỗi thành phần đều là phần tử của X, *các thành phần khác nhau từng đôi*.
- Ký hiệu số lượng chỉnh hợp không lặp chập k từ n phần tử là P_n^k. Rõ ràng, để tồn tại chỉnh hợp không lặp, thì $k \leq n$.
- Theo định nghĩa, một chỉnh hợp không lặp chập k từ n phần tử của X có thể biểu diễn bởi

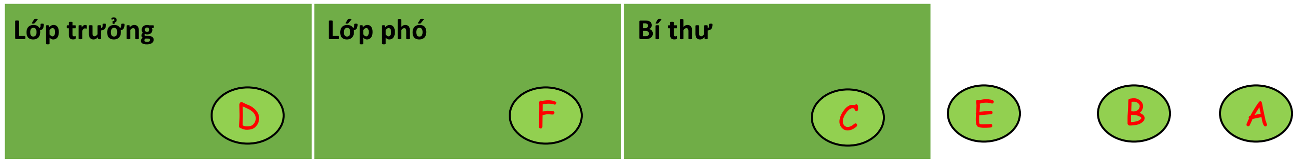
  $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, $a_i \in X$, $i = 1, 2, \ldots, k$, $a_i \neq a_j$, $i \neq j$.
- Việc đếm số lượng chỉnh hợp không lặp chập k từ n phần tử có thể thực hiện theo nguyên lý nhân. Ta có:

  Định lý 3.

$$P_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Chỉnh hợp không lặp

Ví dụ 1. Có bao nhiêu cách chọn ra ban cán sự gồm 1 lớp trưởng, 1 lớp phó, 1 bí thư, từ 6 người A, B, C, D, E, F.



$$6*5*4=\frac{6!}{3!}$$

Ví dụ 2. Có bao nhiêu cách xếp 4 học sinh vào ngồi sau một cái bàn có 10 chỗ ngồi với điều kiện không được phép ngồi lòng.

- **Giải.** Đánh số các học sinh từ 1 đến 4, các chỗ ngồi từ 1 đến 10. Mỗi cách xếp học sinh cần đếm có thể biểu diễn bởi bộ có thứ tự (g_1, g_2, g_3, g_4), trong đó $g_i \in \{1, 2, ..., 10\}$ là chỗ ngồi của học sinh i. Từ điều kiện đầu bài $g_i \neq g_j$, $i \neq j$; do đó mỗi cách xếp cần đếm là một chỉnh hợp không lặp chập 4 từ 10. Vậy số cách xếp cần đếm là P_{10}^{4} = 10.9.8.7 = 5040

Tổ hợp

- **Định nghĩa.** Ta gọi tổ hợp chập *k* từ *n* phần tử của *X* là bộ **không có thứ tự** gồm *k* thành phần, mỗi thành phần đều là phần tử của *X*, *các thành phần khác nhau từng đôi*.
- Ký hiệu số lượng tổ hợp chập *k* từ *n* phần tử là C_n^k (đôi khi ta sẽ sử dụng ký hiệu *C*(*n*,*k*))
- Theo định nghĩa, một tổ hợp chập *k* từ *n* phần tử của *X* có thể biểu diễn bởi **bộ không có thứ tự**

  $\{a_1, a_2, ..., a_k\}$, $a_i \in X$, $i = 1, 2, ..., k$, $a_i \neq a_j$, $i \neq j$.
- Với giả thiết $X=\{1, 2,...,n\}$, một tổ hợp chập *k* từ *n* phần tử của *X* có thể biểu diễn bởi **bộ có thứ tự**

  $(a_1, a_2, ..., a_k)$, $a_i \in X$, $i = 1, 2, ..., k$, $1 \leq a_1 < a_2 < ... < a_k \leq n$.

Định lý 4.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ (cfln k˝ hi÷u lµ } C(n,k) \text{ hay } \binom{n}{k}\text{)}$$

C(*n*,*k*) được gọi là hệ số tổ hợp.

Tổ hợp

Ví dụ 1. Có *n* đội bóng thi đấu vòng tròn. Hỏi phải tổ chức bao nhiêu trận đấu?

Giải: Cứ 2 đội thì có 1 trận. Từ đó suy ra số trận đấu sẽ bằng số cách chọn 2 đội từ *n* đội, nghĩa là bằng

$$C(n,2) = n(n-1)/2$$

Ví dụ 2. Một câu lạc bộ có 25 thành viên.

a. Có bao nhiêu cách chọn ra 4 thành viên của câu lạc bộ để lập ra làm thành ban chấp hành câu lạc bộ?

Chọn 4 thành viên này không quan tâm thứ tự ➔ tổ hợp:

C(25,4) = 25!/4!(25-4)! = 25*23*22 = 12650

b. Có bao nhiêu cách chọn ra 1 chủ tịch, 1 phó chủ tịch, 1 thư kí và 1 thủ quĩ?

Chọn 4 thành viên quân tâm đến thứ tự ➔ chỉnh hợp không lặp:

P(25,4) = 25!/(25-4)! = 25*24*23*22 = 303600

Tổ hợp

Dưới đây là một vài tính chất của các hệ số tổ hợp:

a) Đối xứng

$C(n,k) = C(n,n\text{-}k)$

b) Điều kiện đầu

$C(n,0) = 1;\ \ C(n,n) = 1,\ n \geq 0$

c) Công thức đệ quy

$C(n,k) = C(n\text{-}1,k) + C(n\text{-}1,\ k\text{-}1),\ \ n > k > 0$

- Điều kiện đầu suy trực tiếp từ định nghĩa của hệ số tổ hợp. C¸c tính chất còn lại có thể chứng minh nhờ sử dụng công thức trong định lý 4:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ (cfln k˝ hi÷u lµ } C(n,k) \text{ hay } \binom{n}{k}\text{)}$$

Tổ hợp

- Các hệ số tổ hợp có liên quan chặt chẽ với việc khai triển lũy thừa của một nhị thức. Thật vậy, trong tích $(x+y)^n = (x+y)(x+y) \ldots (x+y)$

  hệ số của $x^m y^{n-m}$ sẽ là số cách chọn m nhân tử (x+y) mà từ đó ta lấy ra x, và đồng thời trong n-m nhân tử còn lại ta lấy ra y, nghĩa là:

$$(x+y)^n = C_n^0 y^n + \ldots + C_n^m x^m y^{n-m} + \ldots + C_n^n x^n$$

$$= \sum_{i=0}^{n} C_n^i x^i y^{n-i}$$

Công thức trên được gọi là khai triển nhị thức Newton và các hệ số tổ hợp còn được gọi là các hệ số nhị thức.

Bài toán chia kẹo

- Tập X gồm *k* loại đối tượng (số lượng đối tượng của mỗi loại là không hạn chế), hỏi có bao nhiêu cách chọn ra *n* đối tượng từ tập X ?
- Cần chia *n* cái kẹo cho *k* em bé B_1, B_2, ...,B_k. Hỏi có bao nhiêu cách chia khác nhau ?

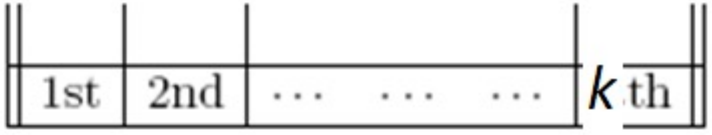
Gọi t_j là số kẹo chia cho em bé B_j, j=1,...,k. Khi đó, vấn đề đặt ra dẫn đến bài toán:

- Cho *k* và *n* là các số nguyên không âm. Hỏi phương trình sau đây có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm?

$$t_1 + t_2 + t_3 + \cdots + t_k = n$$
$$t_1, t_2, \cdots, t_k \in Z_+$$

Bài toán chia kẹo

Khi chọn ra *n* đối tượng từ tập X, ta đặt chúng vào *k* hộp sao cho đối tượng loại *i* sẽ được cho vào hộp *i*, $1 \le i \le k$.

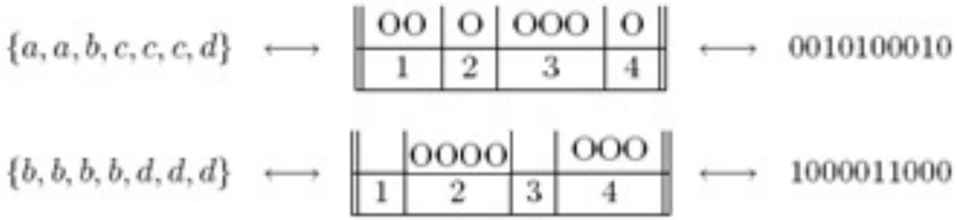


Vì đối tượng thuộc cùng 1 loại là giống nhau, ta dùng “0” kí hiệu cho các đối tượng trong hộp, các đối tượng ở các hộp khác nhau được phân cách bởi vách ngăn “1”.

Khi đó ta thu được dãy 0-1 độ dài $n+(k-1)$ với đúng n số 0 và $(k-1)$ số 1.

Ví dụ: $k = 4$, $n = 7$

4 loại đối tượng: a, b,c,d



Bài toán chuyển thành: đếm số dãy 0-1 độ dài $n+k-1$ với đúng n số 0 và $(k-1)$ số 1

$$=C(n+k-1, n) = C(n+k-1, k-1)$$

Bài toán chia kẹo

Ví dụ 1. Có bao nhiêu cách chia 10 cái kẹo cho 4 em bé (có thể có em bé không được cái kẹo nào)
➔Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm ($x_i \geq 0$):

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$$

Giải:

- 10 lần chọn: mỗi lần chọn 1 trong 4 biến x_1, x_2, x_3, x_4
- Ví dụ nếu x_1 được chọn 2 lần thì $x_1 = 2$ trong lời giải.
- Do đó: bài toán chia kẹo (n = 10, k =4): C(4+10-1,10)

Ví dụ 2. Bất phương trình sau có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_6 < 10 ?$$

1. Nguyên lý cộng và nguyên lý nhân
2. Các cấu hình tổ hợp cơ bản
3. **Nguyên lý bù trừ**
4. Công thức đệ quy
5. Hàm sinh

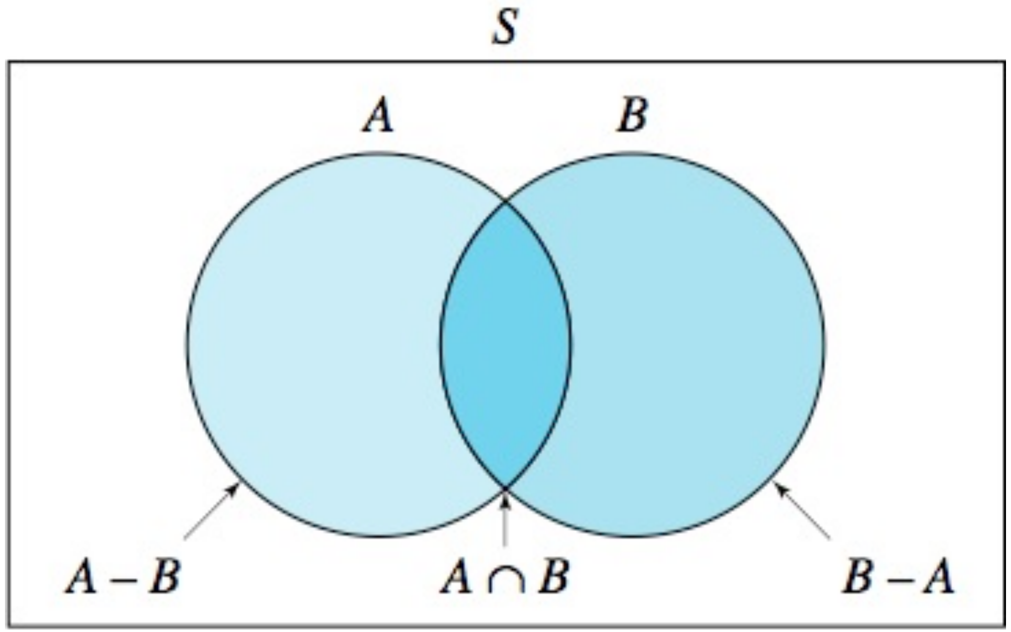
3.1. Phát biểu nguyên lý

3.2. Một số ví dụ áp dụng

3.1. Phát biểu nguyên lý bù trừ

- Nguyên lý bù trừ trong trường hợp hai tập:

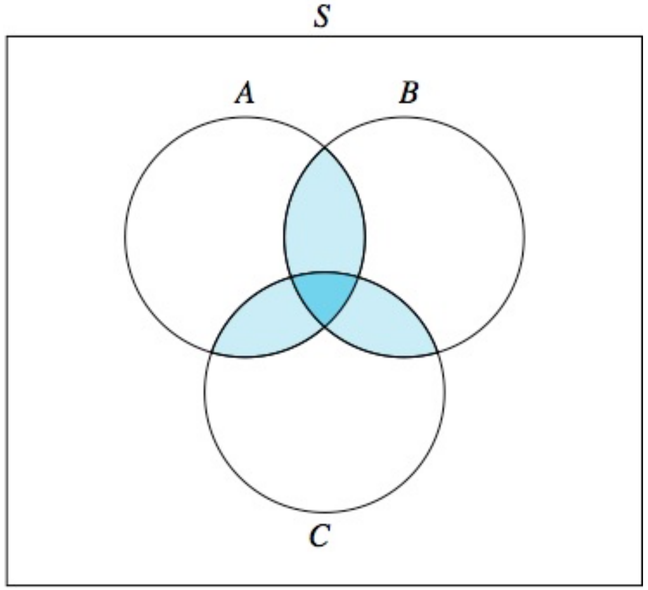
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \qquad (1)$$



3.1. Phát biểu nguyên lý bù trừ

Mở rộng cho trường hợp 3 tập: Giả sử A, B, C là ba tập bất kỳ. Khi đó:

$|A \cup B \cup C| = |A|+|B|+ |C| - |A \cap B| - |A \cap C|- |B \cap C)|+ |A \cap B \cap C)|$ (2)



Chứng minh:

$|A \cup B \cup C|$

$= |(A \cup B) \cup C)|$

$= |A \cup B | + |C| - |(A \cup B) \cap C|$

$= |A| +|B | + |C| - |A \cap B| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)|$

$= |A| +|B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C|- |B \cap C)|+ |A \cap B \cap C)|$

Vậy

$|A \cup B \cup C| = |A|+|B|+ |C| - |A \cap B| - |A \cap C|- |B \cap C)|+ |A \cap B \cap C)|$

Định lý: Giả sử $A_1, A_2, \ldots, A_m$ **là các tập hữu hạn. Khi đó**

$$N(A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_m) = N_1 - N_2 + \ldots + (-1)^{m-1} N_m$$

Trong đó

$$N_k = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le m} N(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}), \quad k = 1, 2, \ldots, m$$

(N_k là tổng số phần tử của tất cả các tập là giao của k tập lấy từ m tập đã cho, nói riêng

$N_1 = N(A_1) + \ldots + N(A_m)$,

$N_m = N(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m)$).

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m| = \sum_{i=1}^{m} |A_i| - \sum_{pairs\ (ij)} |A_i \cap A_j| + \sum_{triples\ (ijk)} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots$$

$$+ (-1)^{m+1} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap \ldots \cap A_m|$$

Chứng minh.

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m| = \sum_{i=1}^{m} |A_i| - \sum_{pairs\ (ij)} |A_i \cap A_j| + \sum_{triples\ (ijk)} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots$$

$$+ (-1)^{m+1} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap \ldots \cap A_m|$$

Chú ý rằng, số các tập giao của *k* tập lấy từ *m* tập bằng *C*(*m*,*k*), *k* = 1,2,...,*m*.

- Để chứng minh công thức của nguyên lý bù trừ, ta sẽ tính xem mỗi phần tử của tập $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m$ được đếm bao nhiêu lần trong vế phải:
  - Xét một phần tử tùy ý $a \in A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m$. Giả sử *a* là phần tử của *k* tập trong số *m* tập đã cho. Khi đó *a* được đếm ở vế phải của công thức

$$C(k,1) - C(k,2) + \ldots + (-1)^{k-1}C(k,k)$$

lần. Do

$$C(k,1) - C(k,2) + \ldots + (-1)^{k-1}C(k,k)$$

$$= 1 - [C(k,0) - (C(k,1) - C(k,2) + \ldots + (-1)^{k-1}C(k,k))] = 1 - (1-1)^k = 1$$

Từ đó suy ra đẳng thức cần chứng minh là đúng.

3.1. Phát biểu nguyên lý bù trừ

Ta tiến hành đồng nhất tập A_k với tính chất A_k cho trên một tập X nào đó và đếm xem có bao nhiêu phần tử của X không thỏa mãn bất cứ một tính chất A_k nào cả :

- Gọi $\overline{N}$ là số cần đếm. Do $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m$ là tập tất cả các phần tử của X thỏa mãn ít nhất một trong số m tính chất đã cho, nên ta có:

$$\overline{N} = N(X) - N(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m)$$
$$= N(X) - N_1 + N_2 - \ldots + (-1)^m N_m$$

trong đó N_k là tổng các phần tử của X thỏa mãn k tính chất lấy từ m tính chất đã cho.

- Công thức thu được cho phép tính $\overline{N}$ qua các N_k trong trường hợp các số này dễ tính toán hơn.

3.1. Phát biểu nguyên lý

3.2. Một số ví dụ áp dụng

3.2. Một số ví dụ áp dụng

Ví dụ 1. Có bao nhiêu số nguyên từ 1 đến 99 có chứa chữ số 3 ?

Có 10 số có chứa chữ số 3 ở vị trí đầu tiên (30,31,...,39) và 10 số có chứa chữ số 3 ở vị trí thứ 2 (3, 13, 23,...,93). Vậy tổng cộng có 20 số có chứa chữ số 3 ???

Giải:

A: tập các số từ 1 đến 99 có chứa chữ số 3 ở vị trí thứ nhất

B: tập các số từ 1 đến 99 có chứa chữ số 3 ở vị trí thứ hai

→Cần tính $|A \cup B|$

Nguyên lý bù trừ trên 2 tập A và B: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

$|A| = 10$, $|B| = 10$

$|A \cap B| = 1$

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 10 + 10 - 1 = 19$

Ví dụ 2. Có bao nhiêu xâu nhị phân độ dài 10 hoặc là bắt đầu bởi 00 hoặc là kết thúc bởi 11 ?

Giải.

A: tập xâu nhị phân độ dài 10 bắt đầu bởi 00

$00\underbrace{xxxxxxxx}$

8 vị trí
Mỗi vị trí: 0/1

B: tập xâu nhị phân độ dài 10 kết thúc bởi 11

$\underbrace{xxxxxxxx}11$

8 vị trí
Mỗi vị trí: 0/1

→Cần tính $|A \cup B|$

Nguyên lý bù trừ trên 2 tập A và B:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - \underbrace{|A \cap B|}_{00\underbrace{xxxxxx}11}$$

6 vị trí
Mỗi vị trí: 0/1

$|A| = 2^8 = 256$

$|B| = 2^8 = 256$

xâu nhị phân độ dài 10 hoặc là bắt đầu bởi 00 hoặc là kết thúc bởi 11 là $2^6 = 64$.

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 256 + 256 - 64 = 448.$

Định nghĩa:

Công thức đệ quy cho dãy số $\{a_n\}$ là công thức biểu diễn a_n dưới dạng một hoặc nhiều thành phần trước nó trong dãy $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$ với mọi số nguyên $n \geq n_0$, n_0 là số nguyên không âm

Một dãy số được gọi là một **lời giải** của công thức đệ quy nếu các thành phần trong dãy số đó thỏa mãn công thức đệ quy.

Ví dụ: Xét công thức đệ quy

$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ với $n = 2, 3, 4, ...$

- Dãy số $a_n=3n$ là lời giải của công thức đệ quy đã cho?

Với $n \geq 2$ ta có: $2a_{n-1} - a_{n-2} = 2(3(n - 1)) - 3(n - 2) = 3n = a_n$

Do đó, dãy số $a_n=3n$ là lời giải của công thức đệ quy đã cho

- Dãy số $a_n=5$ cũng là lời giải của công thức đệ quy này?

Với $n \geq 2$ ta có: $2a_{n-1} - a_{n-2} = 2\cdot5 - 5 = 5 = a_n$

Do đó, dãy $a_n=5$ cũng là lời giải của công thức đệ quy đã cho

4. Công thức đệ quy

Một công thức đệ quy **không có các giá trị đầu (các điều kiện đầu)**.

➔ Có thể có (thường có) **nhiều lời giải**

Ví dụ: $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ với $n = 2, 3, 4, \ldots$ Công thức đệ quy này có các lời giải:

- $a_n=5$
- $a_n=3n$
- $a_n=n+1$

Nếu **cả** công thức đệ quy và các điều kiện đầu đều được xác định, thì dãy số lời giải của công thức đệ quy sẽ được xác định **duy nhất**.

Ví dụ: $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ với $n = 2, 3, 4, \ldots$

với $a_0=0$; $a_1 = 3$

➔Dãy số $a_n=5$ không phải là lời giải

➔Dãy số $a_n=3n$ là lời giải duy nhất

Công thức đệ quy là công thức cho phép tính giá trị của các đại lượng theo từng bước, dựa vào các giá trị tính ở các bước trước và một số giá trị đầu.

4. Công thức đệ quy

Một số ứng dụng của công thức đệ quy:

1. Giải bài toán đếm bằng cách xây dựng công thức đệ quy.
2. Độ phức tạp tính toán của các thuật toán được xây dựng dưới dạng công thức đệ quy của số lượng thao tác trong thuật toán.

4.1. Xây dựng công thức đệ quy

4.2. Giải công thức đệ quy

4.1. Xây dựng công thức đệ quy

Ví dụ. Xây dựng công thức đệ qui cho f_n là số xâu nhị phân độ dài n không chứa hai số 0 liền nhau.

Giải. Ta có

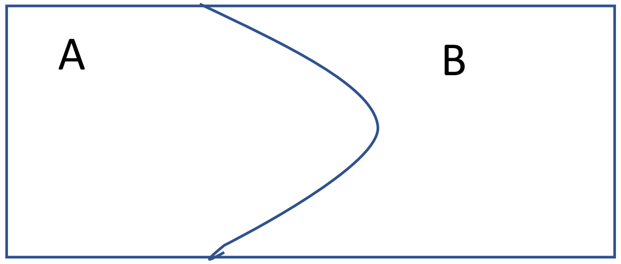
$n = 1 \rightarrow \{0\}, \{1\} \rightarrow f_1 = 2;$

$n = 2 \rightarrow \{01\}, \{10\}, \{11\} \rightarrow f_2 = 3$

Giả sử $n > 2$. Phân tập các chỉnh hợp cần đếm ra thành 2 tập:

- A : tập các xâu cần đếm chứa 1 ở vị trí đầu tiên;
- B : tập các xâu cần đếm chứa 0 ở vị trí đầu tiên;

- Rõ ràng A và B tạo thành phân hoạch của tập tất cả các xâu cần đếm.
- Do đó, theo nguyên lý cộng: $f_n = |A| + |B|$.



4.1. Xây dựng công thức đệ quy

- Do đó, theo nguyên lý cộng: $f_n = |A| + |B|$.
- Ta có:
  - A = {1??????} → do mỗi xâu trong *A* chứa 1 ở vị trí đầu tiên, nên *n*-1 phần tử còn lại sẽ tạo thành một xâu cần đếm độ dài *n*-1, suy ra: $|A| = f_{n-1}$
  - B = {0??????} → do mỗi xâu trong *B* chứa 0 ở vị trí đầu tiên, nên vị trí thứ hai của nó phải là 1, còn *n*-2 phần tử còn lại sẽ tạo thành một xâu cần đếm độ dài *n*-2, suy ra: $|B| = f_{n-2}$

Vậy, ta thu được công thức đệ qui

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2},\ \ n > 2$$

$$f_1 = 2;\ f_2 = 3;$$

4. Công thức đệ quy

Một số ứng dụng của công thức đệ quy:

1. Giải bài toán đếm bằng cách xây dựng công thức đệ quy.
2. Độ phức tạp tính toán của các thuật toán được xây dựng dưới dạng công thức đệ quy của số lượng thao tác trong thuật toán.

4. Công thức đệ quy

Ví dụ: Hàm tính giai thừa

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 1 \\ n \cdot (n-1)! & \text{if } n > 1 \end{cases}$$

Xét thuật toán đệ quy tính *n*!

Algorithm (FACTORIAL)

```
INPUT      : n ∈ ℕ
OUTPUT     : n!
IF n = 1 THEN
    return 1
END
ELSE
    return FACTORIAL(n − 1) × n
END
```

4. Công thức đệ quy

Algorithm (FACTORIAL)

```
    INPUT   : n ∈ ℕ
    OUTPUT  : n!
    IF n = 1 THEN
        return 1
    END
    ELSE
        return FACTORIAL(n − 1) × n
    END
```

Bao nhiêu lần hàm Factorial được gọi khi chúng ta thực hiện lệnh **Factorial(*n*);** ?

- Khi *n* = 1, hàm Factorial được gọi 1 lần➔ T(1) = 1
- Khi *n* > 1:
  - Gọi hàm Factorial 1 lần,
  - Cộng với số lần gọi trong lệnh đệ quy Factorial(*n* − 1) ➔ T(*n*-1)

Do đó ta có công thức đệ quy:

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = 1 + T(n - 1),\ n > 1$$

Tìm **công thức dạng hiện** tính T(*n*) với mọi giá trị của *n*

$T(n) = \ T(n-1) + 1,\ n > 1$

$= [T(n\text{-}2) + 1] + 1$ [có 2 số "1"]

$= [[T(n\text{-}3)+1]+1]+1$ [có 3 số "1"]

$= \ldots.$

$= T(n - (n\text{-}1)) + (n\text{-}1)$ [có n-1 số "1"]

$= T(1) + (n\text{-}1)$

$= 1 + (n\text{-}1)$

$= n$

Algorithm (FACTORIAL)

```
INPUT      : n ∈ ℕ
OUTPUT     : n!
IF n = 1 THEN
      return 1
END
ELSE
      return FACTORIAL(n − 1) × n
END
```

4.1. Xây dựng công thức đệ quy

4.2. Giải công thức đệ quy

4.2. Giải công thức đệ quy

Ta hiểu việc giải công thức đệ qui là việc tìm công thức dưới dạng hiện cho số hạng tổng quát của dãy số thoả mãn công thức đệ qui đã cho.

Ví dụ: Cho công thức đệ quy:

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} \text{ với } n = 2, 3, 4, \ldots$$

$$a_0=0;\ a_1 = 3$$

➔Công thức dạng hiện của công thức đệ quy trên là dãy số $a_n=3n$

➔$a_n=3n$ được gọi là nghiệm (lời giải) của công thức đệ quy trên

- Chưa có phương pháp giải mọi công thức đệ quy.
- Sẽ xét phương pháp giải:
  - Công thức đệ quy tuyến tính thuần nhất hệ số hằng (sẽ viết tắt là CTĐQ TTTNHSH)
  - Công thức đệ quy tuyến tính không thuần nhất hệ số hằng

- **Định nghĩa.** *Công thức đệ quy tuyến tính thuần nhất hệ số hằng bậc k* là công thức đệ quy sau

$$a_n = c_1 a_{n-1} + \ldots + c_k a_{n-k}$$

trong đó c_i là các hằng số, và $c_k \neq 0$.

- Dãy số thoả mãn công thức đã cho là xác định duy nhất nếu đòi hỏi nó thoả mãn k điều kiện đầu:

$$a_0 = C_0,\ a_1 = C_1,\ \ldots,\ a_{k\text{-}1} = C_{k\text{-}1},$$

trong đó $C_0, C_1, \ldots, C_{k\text{-}1}$ là các hằng số.

4.2. Giải công thức đệ quy

Định nghĩa. *Công thức đệ quy tuyến tính thuần nhất hệ số hằng bậc k* là công thức đệ quy sau

$$a_n = c_1 a_{n-1} + \ldots + c_k a_{n-k}$$

trong đó c_i là các hằng số, và $c_k \neq 0$.

Giải thích:

- Tuyến tính: vế phải là tổng của các số hạng trước số hạng a_n trong dãy số với các hệ số (c_1, c_2, ..,c_k) là hằng số (không phải là hàm phụ thuộc vào *n*)
- Thuần nhất: vế phải không có thêm số hạng nào khác với các số hạng a_j của dãy
- Bậc *k*: vế phải có số hạng thứ (*n*-*k*) của dãy

Dãy số thoả mãn công thức đã cho là **xác định duy nhất** nếu đòi hỏi nó thoả mãn *k* điều kiện đầu: $a_0 = C_0$, $a_1 = C_1$, ..., $a_{k-1} = C_{k-1}$,

trong đó C_0, C_1, ..., C_{k-1} là các hằng số.

4.2. Giải công thức đệ quy

- Ta sẽ tìm nghiệm dưới dạng $a_n = r^n$, trong đó r là hằng số.
- Dãy số $\{a_n = r^n\}$ thoả mãn CTĐQ đã cho

$$a_n = c_1 a_{n-1} + \ldots + c_k a_{n-k}$$

nếu r thoả mãn phương trình:

$r^n = c_1 r^{n-1} + \ldots + c_k r^{n-k}$, hay

$r^k - c_1 r^{k-1} - \ldots - c_k = 0$

phương trình đặc trưng, còn nghiệm của nó sẽ được gọi là *nghiệm đặc trưng* của CTĐQ TTTNHSH.

- Ta có thể sử dụng nghiệm đặc trưng để thu được công thức cho dãy số.

4.2. Giải công thức đệ quy

- **Định lý 1.** Cho c_1, c_2 là các hằng số thực.

Giả sử phương trình $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ *có 2 nghiệm phân biệt* r_1 *và* r_2. *Khi đó dãy số* $\{a_n\}$ là nghiệm của công thức đệ quy

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$$

khi và chỉ khi

$$a_n = \alpha_1 (r_1)^n + \alpha_2 (r_2)^n \qquad (1)$$

$n = 0, 1, \ldots$, *trong đó* α_1 , α_2 *là các hằng số.*

Ví dụ: Dãy Fibonaci trong toán học được định nghĩa bằng hệ thức truy hồi:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ n \geq 2,$$

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1.$$

Tìm công thức hiện cho F_n.

Giải: Giải phương trình đặc trưng:

$$r^2 - r - 1 = 0,$$

Ta thu được hai nghiệm đặc trưng

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}; \quad r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

- Do đó công thức hiện có dạng:

$F_0 = \alpha_1 + \alpha_2 = 0$

$F_1 = \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 = 1$

$$F_n = \alpha_1.(r_1)^n + \alpha_2.(r_2)^n$$

trong đó α_1, α_2 là các hằng số cần xác định từ các giá trị ban đầu F_0, F_1. Giải hệ PTTT này, ta có:

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \alpha_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

và từ đó thu được

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right), \quad n \geq 0.$$

4.2. Giải công thức đệ quy

Định lý 2: Cho c_1, c_2 là các hằng số thực, $c_2 \neq 0$. Giả sử phương trình $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ có nghiệm kép r_0. Khi đó dãy số $\{a_n\}$ là nghiệm của công thức đệ qui $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$

khi và chỉ khi

$$a_n = \alpha_1 r_0^n + \alpha_2 n r_0^n$$

$n = 0, 1, \ldots,$ *trong đó* α_1 , α_2 *là các hằng số.*

Ví dụ. Tìm nghiệm cho công thức đệ quy

$$a_n = 6\, a_{n-1} - 9\, a_{n-2}$$

với điều kiện đầu $a_0 = 1$ và $a_1 = 6$.

Giải:

PTĐT: $r^2 - 6r + 9 = 0$ có nghiệm kép $r = 3$. Do đó nghiệm của hệ thức có dạng:

$$a_n = \alpha_1 3^n + \alpha_2 n 3^n$$

Để tìm α_1, α_2, sử dụng điều kiện đầu ta có

$$a_0 = 1 = \alpha_1,$$

$$a_1 = 6 = \alpha_1 . 3 + \alpha_2 .1. 3$$

Giải hệ này ta tìm được $\alpha_1 = 1$ và $\alpha_2 = 1$.

Từ đó nghiệm của hệ thức đã cho là:

$$\boldsymbol{a_n = 3^n + n 3^n}$$

Định lý 3. Cho $c_1, c_2, ..., c_k$ là các số thực. Giả sử phương trình đặc trưng:

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - ... - c_k = 0$$

có k nghiệm phân biệt $r_1, r_2, ..., r_k$. *Khi đó dãy số* $\{a_n\}$ *là nghiệm của công thức:*

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + ... + c_k a_{n-k},$$

khi và chỉ khi

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + ... + \alpha_k r_k^n$$

với $n = 0, 1, 2, ...,$ *trong đó* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ *là các hằng số*

Ví dụ. Tìm nghiệm của công thức đệ quy

$$a_n = 6\, a_{n-1} - 11\, a_{n-2} + 6\, a_{n-3}$$

với điều kiện đầu

$$a_0 = 2,\ \ a_1 = 5,\ \ a_2 = 15.$$

Giải: Phương trình đặc trưng

$$r^3 - 6\, r^2 + 11\, r - 6 = 0$$

có 3 nghiệm $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $r_3 = 3$.

Vì vậy, nghiệm có dạng

$$a_n = \alpha_1\, 1^n + \alpha_2\, 2^n + \alpha_3\, 3^n$$

4.2. Giải công thức đệ quy

Sử dụng các điều kiện đầu ta có hệ phương trình sau đây để xác định các hằng số α_1, α_2, α_3:

$$a_0 = 2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

$$a_1 = 5 = \alpha_1 + \alpha_2.2 + \alpha_3.3$$

$$a_2 = 15 = \alpha_1 + \alpha_2.4 + \alpha_3.9.$$

Giải hệ phương trình trên ta thu được

$\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$ *vμ* $\alpha_3 = 2$.

Vậy nghiệm của công thức đã cho là

$$a_n = 1 - 2^n + 2.\ 3^n$$

Xét CTĐQ TTTNHSH bậc *k*:

$$a_n = \sum_{i=1}^{k} c_i a_{n-i}$$

PTĐT của nó là:

$$r^k - \sum_{i=1}^{k} c_i r^{k-i} = 0$$

Định lý 4: Nếu PTĐT có t nghiệm $r_1,\ldots,r_t$ với bội tương ứng là $m_1,\ldots,m_t$ ($m_1+\ldots+m_t = k$). Khi đó:

$a_n = (\alpha_{1,0} + \alpha_{1,1}n + \ldots + \alpha_{1,m_1-1}n^{m_1-1})\, r_1^n +$

$(\alpha_{2,0} + \alpha_{2,1}n + \ldots + \alpha_{2,m_2-1}n^{m_2-1})\, r_2^n + \ldots$

$(\alpha_{t,0} + \alpha_{t,1}n + \ldots + \alpha_{t,m_t-1}n^{m_t-1})\, r_t^n$

$$a_n = \sum_{i=1}^{t}\left(\sum_{j=0}^{m_i-1} \alpha_{i,j} n^j\right) r_i^n$$

với $n \geq 0$, và α_{ij} là các hằng số.

4.2. Giải công thức đệ quy

Ví dụ. Giải công thức đệ quy:

$$c_n = -4c_{n-1} + 3c_{n-2} + 18c_{n-3}, \quad n \geq 3,$$

$$c_0 = 1;\ c_1 = 2;\ c_2 = 13.$$

Giải: Phương trình đặc trưng

$$r^3 + 4r^2 - 3r - 18 = (r-2)(r+3)^2 = 0$$

Vậy nghiệm tổng quát của công thức:

$$c_n = \alpha_{10} 2^n + (\alpha_{20} + \alpha_{21} n)(-3)^n$$

trong đó α_{10}, α_{20}, α_{21} là các hằng số

- Công thức đệ qui tuyến tính *không thuần nhất* hệ số hằng (Linear *nonhomogeneous* Recurrence Relation with constant coefficients) có chứa số hạng không thuần nhất $F(n)$ phụ thuộc vào n (và không phụ thuộc vào bất cứ a_i nào) :

$$\underbrace{a_n = c_1 a_{n-1} + \ldots + c_k a_{n-k}}_{\text{CTĐQ TTTNHSH tương ứng với công thức không thuần nhất}} + F(n)$$

F(n): phần không thuần nhất

4.2. Giải công thức đệ quy

Kết quả sau đây là cơ sở để giải công thức không thuần nhất:

- Nếu $a_n = p(n)$ là một nghiệm riêng của CTKTN

$$a_n = \left(\sum_{i=1}^{k} c_i a_{n-i}\right) + F(n)$$

Khi đó mọi nghiệm của CTKTN đều có dạng:

$$a_n = p(n) + h(n),$$

trong đó $a_n = h(n)$ là nghiệm tổng quát của CTĐQ TTTNHSH tương ứng

$$a_n = \sum_{i=1}^{k} c_i a_{n-i}$$

4.2. Giải công thức đệ quy

Từ đó ta có cách giải Công thức không thuần nhất:

(a) Tìm nghiệm tổng quát $h(n)$ của công thức thuần nhất tương ứng.

(b) Tìm nghiệm riêng $p(n)$ của công thức không thuần nhất.

(c) Nghiệm của công thức không thuần nhất có dạng: $a_n = h(n) + p(n)$

(d) Xác định các hằng số từ hệ phương trình thu được bởi đòi hỏi a_n thoả mãn các điều kiện đầu

4.2. Giải công thức đệ quy

Tìm nghiệm riêng $p(n)$ của công thức không thuần nhất bằng cách nào?

$$\underbrace{a_n = c_1 a_{n-1} + \ldots + c_k a_{n-k}}_{\text{CTĐQ TTTNHSH tương ứng với công thức không thuần nhất}} + F(n)$$

Phần không thuần nhất

Để tìm nghiệm riêng có thể căn cứ vào dạng của phần không thuần nhất $F(n)$. Ở đây ta chỉ xét $F(n)$ có dạng:

$$F(n) = P(n) \times s^n = (b_t n^t + b_{t-1} n^{t-1} + \ldots + b_0) s^n$$

$P(n)$ là đa thức của n

- Nếu s là hằng số và không là nghiệm đặc trưng, thì hãy tìm nghiệm riêng có dạng giống như $F(n)$
- Nếu s là nghiệm đặc trưng với bội là m, thì hãy tìm nghiệm riêng dưới dạng $n^m \times Q(n) \times s^n$ với $Q(n)$ có dạng giống $P(n)$

Ví dụ. Giải công thức đệ quy:

$a_n = 2a_{n-1} + 1, n \geq 1;$

$a_1 = 1.$

Giải:

(a) Công thức đệ quy thuần nhất tương ứng: $a_n = 2a_{n-1}$

➔ PTĐT: $r - 2 = 0$ có nghiệm $r = 2$

➔ nghiệm tổng quát của CTĐQ thuần nhất tương ứng là: $h(n) = c_1 2^n$

(b) Do phần không thuần nhất $F(n) = 1$, nên nghiệm riêng tìm dưới dạng

$$p(n) = C$$

Thay vào công thức đã cho ta được: $C = 2C+1$ ➔ $C = -1$

Vậy nghiệm riêng là: $p(n) = -1.$

4.2. Giải công thức đệ quy

(c) Nghiệm tổng quát của CTĐQ không thuần nhất là

$$a_n = h(n) + p(n) = c_1 2^n - 1$$

(d) Hệ số c_1 xác định từ điều kiện đầu:

$$a_1 = c_1 2 - 1 = 1$$

➔ $c_1 = 1$

Vậy nghiệm của CTĐQ không thuần nhất là

$$a_n = 2^n - 1, n \geq 1.$$

1. Nguyên lý cộng và nguyên lý nhân
2. Các cấu hình tổ hợp cơ bản
3. Nguyên lý bù trừ
4. Công thức đệ quy
5. **Hàm sinh**

5. Hàm sinh

Hàm sinh có thể được sử dụng để giải các bài toán đếm và công thức đệ quy.

Ví dụ 1.

Có bao nhiêu cách chia 12 quả cam cho 3 em bé: A, B and C sao cho:
A nhận được ít nhất 4 quả, B và C mỗi em nhận được ít nhất 2, nhưng C không nhận nhiều hơn 5

***a*, *b* , *c* lần lượt là số lượng quả cam mà A, B và C nhận được**

Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm

$$a + b + c = 12 \text{ với } a \geq 4,\ b \geq 2,\ 2 \leq c \leq 5$$

Ví dụ 1.

Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm
$a + b + c = 12$ với $a \geq 4$, $b \geq 2$, $2 \leq c \leq 5$

Xét

a: $a(x) = x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8$ (vì $b + c \geq 4 \Rightarrow a \leq 8$)

b : $b(x) = x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$ (vì $a + c \geq 6 \Rightarrow b \leq 6$)

c : $c(x) = x^2 + x^3 + x^4 + x^5$ (vì $2 \leq c \leq 5$)

Hệ số của x^{12} trong khai triển $g(x) = a(x) \times b(x) \times c(x)$

$$=(x^4+ x^5+ x^6+ x^7+ x^8) (x^2+ x^3+x^4+ x^5+ x^6)(x^2+ x^3+x^4+ x^5)$$

Chính là lời giải của bài toán

$g(x)$ được gọi là ***hàm sinh***.

Giả sử x^a, x^b, x^c tương ứng là các số hạng lấy từ thừa số thứ nhất, hai, ba của vế phải, điều đó có nghĩa là: $4 \leq a \leq 8$, $2 \leq b \leq 6$, $2 \leq c \leq 5$

Khi khai triển vế phải, các thừa số này cho ta số hạng x^n với $n = a + b + c$:

$g(x) = (x^4+ x^5+ x^6+ x^7+ x^8) (x^2+ x^3+x^4+ x^5+ x^6)(x^2+ x^3+x^4+ x^5)$

$= .... + Kx^n + ...$

➔ Hệ số của x^n trong $f(x)$ sẽ là số nghiệm nguyên không âm của phương trình:

$a + b + c = n$ thỏa mãn $4 \leq a \leq 8$, $2 \leq b \leq 6$, $2 \leq c \leq 5$

Ví dụ 1.

Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm

a + b + c = 12 với a ≥ 4, b ≥ 2, 2≤ c ≤ 5

Xét

a: $a(x) = x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8$ (vì $b + c \geq 4$ ➔ $a \leq 8$)

b : $b(x) = x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$ (vì $a + c \geq 6$ ➔ $b \leq 6$)

c : $c(x) = x^2 + x^3 + x^4 + x^5$ (vì $2 \leq c \leq 5$)

Hệ số của x^{12} trong khai triển $g(x) = a(x)\times b(x) \times c(x)$

$$=(x^4+ x^5+ x^6+ x^7+ x^8)\ (x^2+ x^3+x^4+ x^5+ x^6)(x^2+ x^3+x^4+ x^5)$$

Là 14, cũng là lời giải của bài toán

$g(x)$ được gọi là *hàm sinh*.

➔việc sử dụng hàm sinh để giải bài toán đếm sẽ đòi hỏi nhiều tính toán khi thực hiện phép nhân các đa thức, và không thích hợp cho việc tính tay. Tuy nhiên, việc đó lại có thể thực hiện nhanh chóng trên máy tính, và vì thế hàm sinh sẽ là một công cụ hữu hiệu để giải nhiều bài toán đếm trên máy tính.

1. $x^4*x^3*x^5$
2. $x^4*x^4*x^4$
3. $x^4*x^5*x^3$
4. $x^4*x^6*x^2$
5. $x^5*x^2*x^5$
6. $x^5*x^3*x^4$
7. $x^5*x^4*x^3$
8. $x^5*x^5*x^2$
9. $x^6*x^2*x^4$
10. $x^6*x^3*x^3$
11. $x^6*x^4*x^2$
12. $x^7*x^2*x^3$
13. $x^7*x^3*x^2$
14. $x^8*x^2*x^2$

5. Hàm sinh

Định nghĩa: Cho $a_0, a_1, a_2, \ldots$ là một dãy các số thực. Hàm

$$g(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

được gọi là *hàm sinh (generating function)* của dãy số đã cho.

- Một dãy hữu hạn phần tử : $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ được chuyển thành dãy vô hạn các phần tử bằng cách đặt cách đặt $a_i = 0, i > n$

  $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots$ [gán 0 cho mọi thành phần từ sau a_n]

và hàm sinh của nó: $g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$

là một đa thức của n.

Ví dụ 2. Ta biết:

➔ $(x+1)^n = C(n, 0) + C(n, 1)x + \ldots + C(n, k)x^k + \ldots + C(n, n)x^n$

➔ $(x+1)^n$ là hàm sinh của dãy số $C(n, 0), C(n, 1), \ldots, C(n, k), \ldots, C(n, n), 0, 0, 0\ldots$

5. Hàm sinh

Ví dụ 3. Có 4 loại bóng bay: đỏ, xanh, trắng, đen. Có bao nhiêu cách chọn ra 24 quả bóng sao cho số lượng bóng trắng là chẵn, và có ít nhất 6 quả bóng đen?

- Trắng: $1+ x^2+ x^4+....+ x^{16} + x^{18}$
- đen: $x^6+ x^7+....+ x^{23}+ x^{24}$
- Đỏ (xanh): $1+ x^1+ x^2+....+ x^{16}+ x^{18}$

$g(x)=(1+ x^2+ x^4+....+ x^{16}+ x^{18})(x^6+ x^7+....+ x^{23}+ x^{24})\ (1+ x^1+ x^2+....+ x^{16}+ x^{18})^2$

Giả sử x^a, x^b, x^c, x^d tương ứng là các số hạng lấy từ các thừa số thứ nhất, hai, ba, tư của vế phải, điều đó có nghĩa là $0 \le a \le 18$, $6 \le b \le 24$, $0 \le c,d \le 18$. Khi khai triển vế phải, các thừa số này sẽ cho ta số hạng x^{24}, với $24 = a + b + c + d$.

Như vậy hệ số của x^{24} trong $g(x)$ sẽ là số nghiệm nguyên không âm của phương trình $24=a + b + c + d$ thoả mãn $0 \le a \le 18$, $6 \le b \le 24$, $0 \le c,d \le 18$

Suy ra hệ số này cũng cho ta số cách chọn *24* quả bóng sao cho số lượng bóng trắng là chẵn, và có ít nhất 6 quả bóng đen

Tuy là chúng ta không có câu trả lời bằng số, nhưng sử dụng hàm sinh xây dựng được ta có thể lập trình trên máy tính để đưa ra đáp số.

Ví dụ 4. Có bao nhiêu cách chọn *n* bông hoa từ 3 bông cúc, 2 bông layơn và 4 bông hồng?

Giải:

Xét hàm sinh: $g(x) = (1 + x + x^2 + x^3)\,(1 + x + x^2)\,(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)$.

- Giả sử x^a, x^b, x^c tương ứng là các số hạng lấy từ các thừa số thứ nhất, hai, ba của vế phải, điều đó có nghĩa là $0 \le a \le 3$, $0 \le b \le 2$, $0 \le c \le 4$. Khi khai triển vế phải, các thừa số này sẽ cho ta số hạng x^n, với $n = a + b + c$.
- Như vậy hệ số của x^n trong $g(x)$ sẽ là số nghiệm nguyên không âm của phương trình

  $n=a + b + c$ thoả mãn $0 \le a \le 3$, $0 \le b \le 2$, $0 \le c \le 4$.

Hệ số này cũng cho ta số cách chọn *n* bông hoa từ 3 bông cúc, 2 bông layơn và 4 bông hồng.

Tuy là chúng ta không có câu trả lời bằng số, nhưng sử dụng hàm sinh xây dựng được ta có thể lập trình trên máy tính để đưa ra bảng đáp số cho các giá trị của *n* mong muốn.

HUST

hust.edu.vn fb.com/dhbkhn

THANK YOU !