(Cảnh báo: Các proof đi kèm là nhà làm, đọc cho vui thôi chứ mình không chắc đúng sai do sản phẩm này không phải là thuốc và không các tác dụng thay thế thuốc chữa bệnh, kiểu vậy :)).)

1 Tập lồi

1.1 Khái niệm

(Lưu ý: Một vector/điểm thuộc không gian $R^n, n > 1$ thì ký hiệu là x^k thay vì x_k để phân biệt vector với scalar (điểm thuộc R). Các vector trong R^n đều xét là ma trận cỡ $n \times 1$)

1. Đường thẳng đi qua x^1, x^2: $\{x \mid x = \lambda x^i + (1-\lambda)x^2, \lambda \in R\}$
2. Tập Affine: $M \in R^n : x^i, x^2 \in M, \lambda \in R \Rightarrow \lambda x^i + (1-\lambda)x^2 \in M$. Giao của 1 họ hữu hạn các tập Affine là 1 tập Affine.
3. Tổ hợp Affine: $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$ với $\lambda_i \in R$ khi $i = \overline{1,k}$ và $\sum_{i=1}^k \lambda = 1$
4. Bao Affine $affE$ của tập $E \in R^n$ là giao của tất cả các tập Affine chứa E.
5. Không gian con: $L \in R^n : x^i, x^2 \in L, \lambda_1, \lambda_2 \in R \Rightarrow \lambda_1 x^i + \lambda_2 x^2 \in L$. Không gian con là 1 tập Affine chứa vector không. Không gian con song song với 1 tập Affine M là duy nhất và xác định bởi $L = M - x$ với $x \in M$. $dimM := dimL$.
6. Số chiều của 1 không gian $E \in R^n$: $dimE = dim(affE)$.
7. Điểm trong x: $\exists\omega \geq 0 : x + B(x,\omega) \in E$. Tập tất cả điểm trong của tập E: $intE$. $intE \neq \emptyset \Leftrightarrow dimE = n$.
8. Tập mở M: $\forall x \in M, \exists\omega > 0 : B(x,\omega) \subset M$. M là tập mở $\Leftrightarrow M = intM$. $intM$ là tập mở lớn nhất được chứa bởi M.
9. Tập đóng M là tập mà mọi dãy trong M đều hội tụ tới 1 điểm thuộc M. Tập đóng và bị chặn là tập compact.
10. Điểm trong tương đối x: $\exists\omega \geq 0 : B(x,\omega) \cap affE \in E$. Tập tất cả điểm trong của tập E: riE. $intE \subset riE$.
11. Đoạn thẳng $[x_1, x_2]$ nối x^1, x^2: $\{x \mid x = \lambda x^i + (1-\lambda)x^2, \lambda \in [0,1]\}$
12. Tập lồi: $M \in R^n : x^i, x^2 \in M, \lambda \in [0,1] \Rightarrow \lambda x^i + (1-\lambda)x^2 \in M$. Giao của 1 họ hữu hạn các tập lồi là 1 tập lồi. Tổ hợp tuyến tính của 2 tập lồi $aM_1 + bM_2$ là 1 tập lồi.

    Lưu ý: Xét $x \in R^n$, hiển nhiên $\{x\}$ là 1 tập lồi nên với mọi tập lồi M thì $M + x = M + \{x\}$ cũng là tập lồi.
13. Tổ hợp lồi: $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$ với $\lambda_i \in [0,1]$ khi $i = \overline{1,k}$ và $\sum_{i=1}^k \lambda = 1$. Nếu $\lambda_i > 0$ thì x là tổ hợp lồi chặt.
14. Điểm cực biên x của tập M là điểm không thể biểu diễn được dưới dạng tổ hợp lồi chặt của 2 điểm phân biệt bất kỳ nào của M. Khi có hữu hạn điểm cực biên thì các điểm cực biên còn gọi là đỉnh. 1 điểm cực biên là 1 điểm biên.

15. Bao lồi $convE$ của tập $E \in R^n$ là giao của tất cả các tập lồi chứa E.

16. Hàm tuyến tính: (trên R^n có dạng) $f(x) =< c, x >$.

17. Hàm Affine: (trên R^n có dạng) $f(x) =< c, x > +\alpha$.

18. Siêu phẳng H là tập $\{x \in R^n | \langle a, x\rangle = \alpha\}$ với $a \in R^n/\{0\}, \alpha \in R$. Siêu phẳng H trong $R^n, n \geq 1$ là 1 tập Affine với $dimH = n - 1$ (với $\alpha = 0$ thì là không gian con). a được gọi là vector pháp tuyến của H.

19. Nửa không gian đóng có dạng $\{x \in R^n | \langle a, x\rangle \leq \alpha\}$ với $a \in R^n/\{0\}$. Nửa không gian mở có dạng $\{x \in R^n | \langle a, x\rangle < \alpha\}$. (Với "$\geq$","$>$" chỉ cần đổi dấu 2 vế).

20. Siêu phẳng tựa: Siêu phẳng H được gọi là siêu phẳng tựa của $M \in R^n$ tại $x^0 \in M$ nếu $x^0 \in H$ và M nằm trọn trong nửa không gian đóng $\{x \in R^n | \langle a, x\rangle \leq \alpha\}$ xác định bởi H. x^0 là 1 điểm biên của M.

21. Tập $M \subset R^n$ được gọi là nón nếu $x \in M, \lambda \geq 0 \Rightarrow \lambda x \in M \Rightarrow \lambda x \in M$. Nón bao gồm các phần tử là tổ hợp của các vector thuộc $\left\{v^1, ..., v^k\right\} \subset R^n$ được gọi là nón sinh bởi tập vector đó, ký hiệu $cone\left\{v^1, ..., v^k\right\}$.

22. Phương lùi xa d của tập lồi M khác rỗng là vector khác 0 thỏa mãn $x \in M, \lambda \geq 0$ thì $x + \lambda d \geq 0$. Tập lồi khác rỗng M không bị chặn khi và chỉ khi nó có phương lùi xa. Tập các phương lùi xa của M tạo thành 1 nón lồi, ký hiệu $recM$. Hai phương lùi xa d^1, d^2 được gọi là khác biệt nếu $d^1 \neq \alpha d^2$.

23. Phương cực biên của tập lồi M khác rỗng nếu nó không thể biểu diễn được dưới dạng tổ hợp tuyến tính dương của 2 phương lùi xa khác biệt (tức dưới dạng $\lambda_1 d^1 + \lambda_2 d^2$ với $\lambda_1, \lambda_2 > 0, d^1 \in recM, d^2 \in recM, d^1 \neq \alpha d^2 (\forall \alpha \in R)$).

24. Định lý tách tập lồi:

    (a) Hai tập lồi C, D trong R^n khác rỗng, rời nhau thì tồn tại siêu phẳng tách chúng, tức:

    $$\begin{aligned}&C, D \text{ lồi}, C, D \subset R^n, C \cap D = \emptyset, c \neq \emptyset, D \neq \emptyset\\ &\Rightarrow \exists \alpha \in R^n, a \in R, \forall x^1 \in C, x^2 \in D : \left\langle \alpha, x^1\right\rangle \leq a \leq \left\langle \alpha, x^2\right\rangle\\ &\Leftrightarrow \exists \alpha \in R^n, \forall x^1 \in C, x^2 \in D : \left\langle \alpha, x^1 - x^2\right\rangle \leq 0\end{aligned}$$

    (b) Nếu cả C, D là đóng và 1 trong 2 tập C, D là compact thì tồn tại siêu phẳng tách hẳn chúng, tức:

    $$\begin{aligned}&C, D \text{ lồi, đóng}; C \text{ compact}; C, D \subset R^n, C \cap D = \emptyset, c \neq \emptyset, D \neq \emptyset\\ &\Rightarrow \exists \alpha \in R^n, a \in R, \forall x^1 \in C, x^2 \in D : \left\langle \alpha, x^1\right\rangle < a < \left\langle \alpha, x^2\right\rangle\\ &\Leftrightarrow \exists \alpha \in R^n, \mu \in R, \forall x^1 \in C, x^2 \in D : \left\langle \alpha, x^1 - x^2\right\rangle \leq \mu < 0\end{aligned}$$

25. Bổ đề Farkas: Cho vector $a \in R^n$, ma trận A cấp $m \times n$

    $$\langle a, x\rangle \geq 0 \text{ với mọi } x \text{ thỏa mãn } Ax \geq 0$$

    khi và chỉ khi

    $$\exists y \in R^m_+ = \{y \in R^m | y \geq 0\} : a = A^T y$$

26. Tập lồi đa diện $P \subset R^n$ là giao của 1 số hữu hạn nửa không gian đóng, tức là

$$\{x|Ax \geq b\}$$

Tập lồi đa diện là 1 tập lồi, đóng. Một TẬP LỒI ĐA DIỆN BỊ CHẶN được gọi là ĐA DIỆN LỒI (hay đa diện). Với tập lồi đa diện, khái niệm đỉnh và điểm cực biên trùng nhau.

27. Cho tập lồi đa diện P, nếu rằng buộc $\langle a^{i_0}, x \rangle \geq b_{i_0}$ xẩy ra dấu bằng tại x^0 thì ta nói x^0 thỏa mãn rằng buộc chặt i_0. Tập $I(x^0) = \left\{ i \in 1, 2, ..., l | \langle a^i, x^0 \rangle = b_i \right\}$ là tập chỉ số những rằng buộc thỏa mãn chặt tại $x^0 \in P$.

28. Diện F của tập lồi đa diện P là một tập con của P sao cho 1 điểm trong tương đối của 1 đoạn thẳng trong P thuộc diện diện thì cả đoạn thẳng đó thuộc diện, tức:

$$y \in P, z \in P, x = \lambda y + (1 - \lambda)z \in F \Rightarrow \{y, z\} \subset F$$

Đỉnh là 1 diện thứ nguyên (dim) bằng 0, cạnh là 1 diện thứ nguyên bằng 1.

29. Đỉnh x^0 của 1 tập lồi đa diện P được gọi là đỉnh không suy biến nếu nó thỏa mãn chặt đúng n rằng buộc độc lập tuyến tính trong hệ rằng buộc xác định P và là đỉnh suy biến nếu thỏa mãn chặt nhiều hơn n.

30. Hai đỉnh của 1 tập lồi đa diện được gọi là kề nhau nếu đoạn thẳng nối chúng là 1 cạnh.

1.2 Một số tính chất

1. Một tập lồi đóng khác rỗng $M \in R^n$ có điểm cực biên khi và chỉ khi nó không chứa một đường thẳng nào.

Chứng minh. (a) Xét tập lồi đóng khác rỗng $M \in R^n$ có điểm cực biên x.
Giả sử tồn tại đường thẳng d nằm trọn trong M.
Xét $x^1, x^2 \in d, x^1 \neq x^2$, với mọi $\lambda \in R$ có $x^3 = \lambda(x^2 - x^1) + x^1 \in M$.
Lấy $\lambda > 1$ thì do M lồi nên có $(x^2 - x^1) + \dfrac{1}{\lambda}x^1 + \left(1 - \dfrac{1}{\lambda}\right)x = \dfrac{1}{\lambda}x^3 + \left(1 - \dfrac{1}{\lambda}\right)x \in M$.
Cho $\lambda \to +\infty$ thì vì tính đóng của M ta có $(x^2 - x^1) + x \in M$
Tương tự ta có $(x^1 - x^2) + x \in M$.
Do $x^1 \neq x^2$ nên $(x^1 - x^2) + x \neq (x^2 - x^1) + x$ và $x = \dfrac{1}{2}((x^1 - x^2) + x) + \dfrac{1}{2}((x^2 - x^1) + x)$ trái với giả thiết x là điểm cực biên.
Vậy không tồn tại d.

(b) Tập lồi đóng khác rỗng $M \in R$ có 1 trong các dạng $[\alpha, +\infty), [-\infty, \alpha), [\alpha, \beta]$ với α, β hữu hạn. Khi đó, α là điểm cực biên của M.
Giả sử với mọi $k \in N$ thỏa mãn $n \geq k \geq 1$ thì tập lồi đóng khác rỗng $M \in R^k$ không chứa đường thẳng nào luôn có ít nhất 1 điểm cực biên.

Xét tập lồi đóng $M' \in R^{n+1}$ không chứa đường thẳng nào.

Với $0 \leq a < b \leq n+1$ xét $f_{a,b} : M' \to R^b$ sao cho với mọi $x = (x_1, x_2, ..., x_{n+1})^T \in M'$ $f_{a,b}(x) = (x_a, x_2, ..., x_b)^T$.

Do tính tuyến tính của $f_{a,b}$ nên $f_{a,b}(M')$ là 1 tập lồi đóng không chứa đường thẳng nào. Vậy do giả thiết quy nạp, $f_{a,b}(M')$ chứa ít nhất 1 điểm cực biên.

Xét $u = (u_1, ..., u_n)^T, v$ lần lượt là các điểm cực biên của tập $f_{0,n}(M'), f_{n,n+1}(M')$.

Giả sử tồn tại $\lambda \in (0,1); x^1, x^2 \in M, x^1 \neq x^2 : x^0 = (u_1, ..., u_n, v)^T = \lambda x^1 + (1-\lambda)\lambda x^2$ $(*)$. Ta có

$$\begin{cases} u = f_{1,n}(x^0) = \lambda f_{1,n}(x^1) + (1-\lambda)\lambda f_{1,n}(x^2) \\ v = f_{n,n+1}(x^0) = \lambda f_{n,n+1}(x^1) + (1-\lambda)\lambda f_{n,n+1}(x^2) \end{cases}$$

Do u, v là các điểm cực biên nên điều này xảy ra khi và chỉ khi $f_{1,n}(x^1) = f_{1,n}(x^2), f_{n,n+1}(x^1) = f_{n,n+1}(x^2)$, đồng nghĩa với $x^1 = x^2$ mâu thuẫn với giả thiết $(*)$. Vậy không tồn tại λ, x^1, x^2 thỏa mãn $(*)$, tức x^0 là 1 điểm cực biên của M'.

□

2. Mọi điểm trong tập lồi đóng khác rỗng có điểm cực biên đều là tổ hợp lồi của các điểm cực biên của nó.

   Chứng minh. Xét M là tập lồi đóng khác rỗng có điểm cực biên. Gọi B là tập các điểm cực biên của M.

   Xét tập hợp $S \subset M$ sao cho S gồm các điểm không phải tổ hợp lồi của các điểm cực biên của M, tức

$$S = \left\{ x \in M \mid \nexists \lambda_i, i = \{1, 2, ..., |B|\} : \sum_{i=1}^{|B|} \lambda_i = 1, \sum_{i=1}^{|B|} \lambda_i b^i = x \text{ với } b^i \in B \right\}$$

   Dễ thấy S là 1 tập lồi đóng và các điểm trong S là tổ hợp lồi chặt của hữu hạn điểm trong S. Do S là tập con của M nên S không chứa đường thẳng. Nếu $S \neq \emptyset$ thì trong S tồn tại điểm cực biên. Điều này vô lý nên $S = \emptyset$. □

3. (Krein-Milman) Một tập lồi đóng, bị chặn trong R^n là bao lồi của các điểm cực biên của nó.

4. Qua mỗi điểm biên của x^0 của tập lồi $M \in R^n$ tồn tại ít nhất 1 siêu phẳng tựa M tại x^0.

5. Một tập lồi đóng khác rỗng $M \subset R^n$ là giao của họ các nửa không gian tựa của nó.

6. 1 nón là tập lồi khi nó chứa tất cả tổ hợp tuyến tính không âm của các phần tử của nó.

7. Một diện của tập lồi đa diện P cũng là 1 tập lồi đa diện. Đỉnh của diện cũng là đỉnh của tập lồi đa diện ứng với diện đó.

8. Cho F là diện của tập lồi đa diện P. F chứa 1 điểm trong của P (hay $intP \cap F \neq \emptyset$) khi và chỉ khi $F = P$. Có F là diện của P và $dimF < dimP$ khi và chỉ khi F là 1 tập lồi đa diện gồm các phần tử là biên của P (hay $F \subset P/intP$).

Chứng minh. (a) Xét $x \in F \cap intP$. Giả sử tồn tại điểm $y \in P/F$. Do $x \in intF$ nên tồn tại $1 > \omega > 0$ sao cho $B(x, \omega) \subset F$. Vì vậy, $z = x + \omega \dfrac{x-y}{\|x-y\|} \in P$. Lại có $x = \left(1 - \dfrac{\omega}{\omega + \|x-y\|}\right) z + \dfrac{\omega}{\omega + \|x-y\|} y$ và $\dfrac{\omega}{\omega + \|x-y\|} \neq 0$ do $x \neq y$ nên $z, y \in P$, trái ngược với giả thiết. Vậy $P/F = \emptyset$. Khi $F = P$ thì hiển nhiên $intP \subset F$. Mệnh đề 1 được chứng minh.

(b) Xét F là 1 tập lồi gồm các phần tử là biên của P. Nếu $dimF = dimP = n$ khi và chỉ khi F có điểm trong, và vì $F \subset P$ nên đây cũng là điểm trong của P, mâu thuẫn với giả thiết. Vi vậy, $dimF < dimP$. Ngược lại, xét F là diện của P và $dimF < dimP = n$. Hiển nhiên F là 1 tập lồi đa diện. Vì $dimF < n$ nên do mệnh đề 1 có $F \subset P/intP$.

□

9. Cho tập lồi đa diện $P \subset R^n$ xác định bởi

$$\begin{cases} Ax \geq a \\ Bx = b \end{cases}$$

với $\{x | Ax > a\} \cap P \neq \emptyset$. Một điểm x^0 là điểm biên của P khi và chỉ khi x^0 thỏa mãn chặt ít nhất 1 rằng buộc của hệ $Ax \geq b$.

Chứng minh. Bổ đề: Hàm tuyến tính bị chặn trong R^n là hàm liên tục.

Xét $x^1 \in P$ thỏa mãn $Ax > a$. Ứng với mỗi rằng buộc $\langle a^i, x \rangle \geq a$ tồn tại $\omega_i > 0$ sao cho $B(x^i, \omega_i) \subset \{x | \langle a^i, x \rangle > a\}$. Lấy $\omega = \inf \omega_i$, ta có $B(x^i, \omega) \subset \{x | Ax > a\}$. Vậy x^1 phải là điểm trong của P. □

10. Một điểm x^0 là đỉnh của tập lồi đa diện $P \subset R^n$ (xác định bởi hệ $Ax \geq b$) khi và chỉ khi x^0 thỏa mãn chặt n rằng buộc độc lập tuyến tính của hệ $Ax \geq b$.

Chứng minh. Xét điểm x^0 là đỉnh của tập lồi đa diện $P \subset R^n$. Do hệ quả của tính chất trên, x^0 phải thỏa mãn ít nhất n rằng buộc độc lập tuyến tính trong hệ $Ax \geq b$

Xét điểm x^0 thỏa mãn chặt n rằng buộc độc lập tuyến tính $Bx \geq c$ của hệ $Ax \geq b$. Giả sử tồn tại $x^1, x^2 \in P, x^1 \neq x^2$ và $\lambda > 0$ sao cho $x^0 = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2$. Ta có $c = Bx^0 = \lambda Bx^1 + (1-\lambda)Bx^2$ mà $x^1, x^2 \in P$ nên nó thỏa mãn rằng buộc $Bx \geq c$. Vì vậy $x^1, x^2 \in \{x | Bx = c\}$. Do $Bx \geq c$ gồm n rằng buộc độc lập tuyến tính nên $r(B|c) = r(B)$. Vậy hệ $Bx = c$ có 1 nghiệm duy nhất, $x^1 = x^2 = x^0$ mâu thuẫn giả thiết. Do đó, x^0 là 1 điểm biên của P. □

11. Cho tập lồi đa diện $P \subset R^n$. Một đoạn thẳng (hoặc nửa đường thẳng, hoặc đường thẳng) $\Gamma \subset P$ là 1 cạnh P khi và chỉ khi nó là tập các điểm thỏa mãn chặt $(n-1)$ ràng buộc độc lập tuyến tính trong các rằng buộc xác định P.

12. Cho tập lồi đa diện $P \subset R^n$, một tập lồi $M \subset R^n$. Các khẳng định sau đây là tương đương:

(a) M có các phần tử là điểm biên của P.

(b) M là tập các điểm thỏa mãn chặt $n - dimM$ rằng buộc trong hệ các rằng buộc xác định P.

(c) M là 1 diện của P.

13. Các điểm trong 1 tập lồi đa diện có thể biểu diến dưới dạng tổng của tổ hợp lồi của các đỉnh với tổ hợp tuyến tính không âm của các phương cực biên của nó.

14. Một hàm khả vi 2 lần là hàm lồi khi ma trận Hessen của nó xác định không âm, là hàm lồi chặt nếu ma trận Hessen của nó xác định dương.

1.3 Bài tập phần Tập lồi

Bài 1/35:

Chứng minh. Xét $M := \{x|x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i; x_1, ...x_k \in E, \sum_{i=1}^{k} = 1\}$

- Lấy $x, y \in M$: $\begin{cases} x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i; x_1, ...x_k \in E, \sum_{i=1}^{k} = 1 \\ y = \sum_{i=1}^{h} \lambda_i y_i; y_1, ...y_h \in E, \sum_{i=1}^{h} = 1 \end{cases}$

  Với $\alpha \in \mathbb{R}$, xét $z = \alpha x + (1-\alpha)y = \alpha \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i + (1-\alpha) \sum_{i=1}^{h} \lambda_i y_i$ Có $\alpha \sum_{i=1}^{k} + (1-\alpha) \sum_{i=1}^{h} = \alpha + (1-\alpha) = 1$ nên $z \in M$ Vì vậy, M là 1 tập affine. Đồng thời với mọi $x \in E$ thì $x = 1.x \Rightarrow x \in M$ nên $E \subset M$. Mà $affE$ là tập affine nhỏ nhất bao E nên $affE \subset M$.

- Ta có $z_2 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ với $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ và $x_1, x_2 \in E$ thì $z_2 \in affE$.

  Giả sử với $k \geq 2$ thì khi $z_h = \sum_{i=1}^{h} \lambda_i x^i; x_1, ...x_h \in E, \sum_{i=1}^{h} = 1, 2 \leq h \leq k$ ta có $z_h \in affE$.

  Xét $z_{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x^i; x_1, ...x_{k+1} \in E, \sum_{i=1}^{k+1} = 1$. Tồn tại ít nhất 1 giá trị $m \in 1, ..., k+1 : \lambda_m \neq 1$ vì nếu không thì $\sum_{i=1}^{k+1} = k + 1 \geq 3 \neq 1$. Ta có $z_{k+1} = \lambda_m x_m + (1 - x_m) \sum_{i \neq m; 1 \leq i \leq k+1} \dfrac{\lambda_i}{1 - x_m} x_i = \lambda_m x_m + (1 - x_m)\omega$. Dễ thấy $\omega \in affE$ nên $z_{k+1} \in affE$.

  Vì vậy, $x \in M \Rightarrow x \in affE$ hay $M \subset affE$.

Vậy $M = affE$ □

Bài 2/25:

Chứng minh. Giả sử tập afin M có 2 không gian con song song L, L' thỏa mãn

$$M = L + x = L' + x' \text{ với } x, x' \in M$$

Từ đây, ta có

$$L' = L + (x - x')$$

mà $x' = x' + 0 \in M = L + x \Rightarrow x' \in (L + x) \Rightarrow x' - x \in L$ hay $x - x' \in L$ nên $L' = L$ □

Bài 3/25:

Chứng minh. 1. Xét x,y bất kỳ thuộc giao của hữu hạn n tập lồi $A_1, A_2, ..., A_n$. Ta có

$$\begin{cases} \lambda x + (1-\lambda)y \in A_1, \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ \lambda x + (1-\lambda)y \in A_2, \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ ... \\ \lambda x + (1-\lambda)y \in A_n, \forall \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Tức là

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i, \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Vậy $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ là 1 tập lồi.

2. Một trường hợp không thỏa mãn: Xét hai tập lồi $A_1, A_2 \subset R^n$ sao cho

$$\begin{cases} A_1 \cap A_2 = \emptyset \\ A_1 \neq \emptyset, A_2 \neq \emptyset \end{cases}$$

□

Bài 4/35:

Chứng minh. Xét $x, y \in A$ sao cho $\begin{cases} Ax = b \\ Ay = b \end{cases}$. Ta có

$$A(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda b + (1-\lambda)b = b, \lambda x + (1-\lambda)y \geq 0 \text{ với } \forall \lambda \in [0,1]$$

$$\Rightarrow \lambda x + (1-\lambda)y \in M, \forall \lambda \in [0,1]$$

Vì vây, M là tập lồi. □

P/s: Bỏ điều kiện $x \geq 0$ thì M là tập Affine.
Bài 5/35:

Chứng minh. Dễ thấy tập D là lồi. Xét d_1, d_2 là hướng lùi xa của D. Xét $x \in D; \omega_1, \omega_2 \geq 0$ có $x + 2\omega_1 d_1, x + 2\omega_2 d_2 \in D$. Vì D lồi nên

$$\frac{1}{2}(x + 2\omega_1 d_1) + \frac{1}{2}(x + 2\omega_2 d_2) = x + \omega_1 d_1 + \omega_2 d_2 \in D$$

Vì vậy $\omega_1 d_1 + \omega_2 d_2$ là 1 hướng lùi xa của D với $\omega_1, \omega_2 \geq 0$.
Giả sử $s_k = \sum_{i=1}^{k} \omega_i d_i$ với $\omega_i \geq 0$ cho mọi $k \in [1, n], n \geq 2$ là 1 hướng lùi xa của D.
Xét 1 hướng lùi xa của D là d_{k+1}. Với $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$, áp dụng giả sử với $k = 2$ có

$$\alpha_1 d_{k+1} + \alpha_2 s_k \in D$$

Thay $\alpha_1 = \omega_{k+1}$ và $\alpha_2 = 1$ có

$$s_{k+1} = \omega_{k+1} d_{k+1} + s_k \in D$$

Vậy $s_{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1} \omega_i d_i$ là 1 hướng lùi xa của D. □

Bìa 6/35:

Chứng minh.

$$\begin{aligned} \text{Có } d \text{ là phường lùi xa của } P &\Leftrightarrow \forall x \in P, \lambda \geq 0 : x + \lambda d \in P. \\ &\Leftrightarrow \forall x \in P, \lambda \geq 0 : b = A(x + \lambda d) = Ax + A\lambda d = b + A\lambda d \\ &\Leftrightarrow Ad = 0 \end{aligned}$$

□

Bìa 7/36:

Chứng minh. Ta có $x \in D \Rightarrow x \geq 0$. Nếu $d \neq 0$ là 1 phương lùi xa của D thì

$$\begin{aligned} x + \lambda d \in D \text{với} \forall x \in D, \lambda \geq 0 &\Rightarrow x + \lambda d \geq 0 \text{ với } \forall x \in D, \lambda \geq 0 \\ &\Rightarrow d \geq -\frac{1}{\lambda} x \text{ với } \forall x \in D, \lambda > 0 \end{aligned}$$

Với $\lambda \to +\infty$ thì ta có $d \geq 0$. Mà $d \neq 0$ nên $d > 0$. Vì vậy, $-d < 0$ không thể là 1 phương lùi xa của D. □

Bài 8/36:
Xét $w \in \mathbb{R}^2$ sao cho

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_1 + w_1 + x_2 + w_2 \geq 1 \\ -x_1 - w_1 + x_2 + w_2 \leq 2 \\ x_1 + w_1, x_2 + w_2 \geq 0 \end{cases} \quad (\forall x = (x_1, x_2) \in M) &\Leftrightarrow \begin{cases} w_1 + w_2 \geq 1 - x_1 - x_2 \\ -w_1 + w_2 \leq 2 + x_1 - x_2 \\ w_1 \geq -x_1, w_2 \geq -x_2 \end{cases} \quad (\forall x = (x_1, x_2) \in M) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} w_1 + w_2 \geq 0 \\ -w_1 + w_2 \leq 0 \\ w_1 \geq 0, w_2 \geq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} w_2 \leq w_1 \\ w_1 \geq 0, w_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Đặt $\omega = \lambda d, \forall \lambda \geq 0$ có

$$\begin{cases} w_2 \leq w_1 \\ w_1 \geq 0, w_2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d_2 \leq d_1 \\ d_1 \geq 0, d_2 \geq 0 \end{cases} \quad \text{(I)}$$

(I) là điều kiện cần và đủ để $d = (d_1, d_2)$ là 1 phương lùi xa của M. Từ đó, ta có, các phương lùi xa của M có thể biểu diễn được dưới dạng

$$d = (d_1, d_2) = (d_1 - d_2)(1, 0) + d_2(1, 1)$$

với $d_1 \geq d_2$ do điều kiện (I).Vì vậy, mọi phương lùi xa khác $(1, 0), (1, 1)$ đều không là phương cực biên của M. Ta cần xét xem $(1, 0), (1, 1)$ có là phương cực biên của M hay không.

1. Giả sử tồn tại d^1, d^2 là 2 phương lùi xa khác biệt của M sao cho $(1, 0) = \lambda_1 d^1 + \lambda_2 d^2$ với $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. Khi đó, $\lambda_1(d^1)_1 + \lambda_2(d^2)_1 = 1, \lambda_a(d^1)_2 + \lambda_b(d^2)_2 = 0$. Vậy d^1, d^2 đều có dạng $\alpha(1, 0)$ với $\alpha > 0$ (mâu thuẫn với giả sử). Vậy $(1, 0)$ là 1 cực biên của M.

2. Giả sử tồn tại d^1, d^2 là 2 phương lùi xa khác biệt của M sao cho $(1, 1) = \lambda_1 d^1 + \lambda_2 d^2$ với $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. Khi đó, $\lambda_1(d^1)_1 + \lambda_2(d^2)_1 = \lambda_1(d^1)_2 + \lambda_2(d^2)_2 = 1$. Vì từ (I), ta có $(d^1)_1 \geq (d^1)_2, (d^2)_1 \geq (d^2)_2$ nên $\lambda_1(d^1)_1 + \lambda_2(d^2)_1 \geq \lambda_1(d^1)_2 + \lambda_2(d^2)_2$. Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow (d^1)_1 = (d^1)_2, (d^2)_1 = (d^2)_2$, khi đó d^1, d^2 không khác biệt (trái với giả sử). Vậy $(1, 1)$ là 1 cực biên của M.

Từ đó, ta có

$$\begin{aligned} recM &= \{d = (d_1, d_2) = (d_1 - d_2)(1, 0) + d_2(1, 1); d_1, d_2 \in \mathbb{R}^2; d_1 \geq d_2 \geq 0\} \\ &= \{d = (d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2 | d_1 \geq d_2 \geq 0\} \end{aligned}$$

P/s: Theo GV dạy mình thì bài tập không cần chứng minh 2 điểm là điểm cực biên.

Bài 10/36:

Kiểm tra thấy $x \in P$. x thỏa mãn chặt 3 rằng buộc $Ax = b$ và 3 rằng buộc dấu. Nhận thấy:

$$r\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 5$$

Nên có tổng cộng 5 rằng buộc độc lập tuyến tính mà x thỏa mãn chặt. Do $P \subset R^6$ mà $5 < 6$ vậy x không phải là điểm cực biên của P.

Bài 11/36:

Điểm cực biên: $(0, 0), (0, 12), (6, 24)$ Phương cực biên: $(2, 3), (1, 0)$

Bài 12/36:

$f(x_1, x_2) = \dfrac{86}{3} + 6(x_1 - 1) + 3(x_2 - 2) + o(\|(x_1 - 1, x_2 - 2)\|^2)$

Bài 16/37:

1. $f(x) = |x|$ với $x \in R$
   (a) Với $\forall x_1, x_2 \in R, \lambda \in [0, 1]$ có $|\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2| \leq \lambda |x_1| + (1 - \lambda) |x_2|$
   (b) $epi(f) = \left\{(x, t) \in R^2 | \left\langle (x, t)^T, (1, 1)\right\rangle \geq 0, \left\langle (x, t)^T, (-1, 1)\right\rangle \geq 0\right\}$ là 1 tập lồi đa diện nên f lồi.

2. $f(x) = e^x + 1 + 5x$ với $x \in R$
   (a) $f''(x) = e^x > 0 \forall x \in R$ nên $f(x)$ lồi chặt.
   (b) $f(x)$ là tổ hợp của 3 hàm lồi nên nó lồi.
3. $f(x) = -lnx + 3x^3$ với $0 < x < +\infty$

   Nhận thấy $D = (0, +\infty)$ là tập lồi. $f''(x) = \dfrac{1}{x^2} + 18x > 0$ với $\forall x \in D$ nên x là hàm lồi trên D.
4. $f(x) = arctg(x)$ với $0 < x < +\infty$

   Nhận thấy $D = (0, +\infty)$ là tập lồi.
   (a) $f''(x) = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2} < 0$ với $x \in D$ nên $f(x)$ không phải là hàm lồi.
   (b) $\dfrac{1}{2}\left(arctg(\sqrt{3}) + arctg(\dfrac{1}{\sqrt{3}})\right) = 0,25\pi < 0,27\pi = arctg\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$ nên $f(x)$ không phải là hàm lồi.
5. $f(x) = \begin{cases} |x| \text{ nếu } x \leq 1 \\ (x-2)^2 - 1 \text{ nếu } x > 1 \end{cases}$
   (a) Hàm f gián đoạn tại $x = 1$ nên nó không liên tục trên tập mở R, tức f không lồi.
   (b) $-\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}(f(0) + f(2)) < f(1) = 1$ nên f không lồi.
6. $f(x) = \begin{cases} e^x \text{ nếu } x < 0 \\ 3 \text{ nếu } x = 0 \end{cases}$ với $x \in (-\infty, 0]$
   (a) Có e^x là hàm lồi trên $(-\infty, 0)$. Lại có, với $\forall \lambda \in [0,1], x \in (-\infty, 0]$ thì $f(\lambda x + (1-\lambda)0) = e^{\lambda x} \leq \lambda e^x + (1-\lambda)e^0 < \lambda e^x + (1-\lambda)3 = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(0)$. Nên $f(x)$ lồi trên $x \in (-\infty, 0]$.
   (b) Dễ thấy $epif$ lồi.

   Bài 17/37: Các bài này đều xét ma trận Hessan được.

   Bài 18/37:

   Hiển nhiên hàm hằng là hàm affine bị chặn.

   Ngược lại, xét hàm affine bị chặn trên 1 tập affine X là $f(x) = \langle a, x \rangle + b$. Xét $x^1 \in X$ có $\lim_{\lambda \to +\infty} f(\lambda x^0) = \lim_{\lambda \to +\infty} \lambda \left\langle a, x^0 - x^1 \right\rangle + f(x^1)$ bị chặn với $\forall x^0 \in X$ biết $f(x^1)$ bị chặn khi $a = 0$. Khi đó, $f(x) = b$.

   Bài 19/37:

   Hàm Affine trong R^n có dạng $f(x) = \langle a, x \rangle + b$. Đây là hàm vừa lồi, vừa lõm.

   Bài 23/37:

Chứng minh. Xét $c = \inf \{\|x-y\| | x \in C_1, y \in C_2\} > 0$. Xét $x^* \in clC_1, y^* \in clC_2$ là các điểm tại đó $\|x^* - y^*\| = c$ với clX là hợp giữa tập X và biên của nó. Do kết quả của bài 22 ta có $\langle x-y, a\rangle \geq \langle x^* - y, a\rangle \geq c^2 > 0$ với $a = x^* - y^*$. Vậy $\langle a, x\rangle$ là 1 siêu phẳng tách chặt clC_1, clC_2, tức tách chặt C_1, C_2. □

Bài 24/38:

Nếu $Ax = c$ thì $1 = c^T y = x^T A^T y$ nên $A^T y \neq 0$. Nếu $A^T y = 0$. Giả sử $Ax = c$. $0 = y^T Ax = y^T c = 1$ vô lý, tức $Ax \neq c$ Lại có ít nhất 1 trong 2 hệ có nghiệm phụ thuộc theo rA so với n

Bài 25/38: Bđt tam giác.

2 Quy hoạch phi tuyến không rằng buộc

(P^{krb}) : $\min f(x)$ với $x \in R^n$ trong đó $f : R^n \to R$ là hàm phi tuyến.

(Lưu ý: Trong SGT, mình thấy nói nghiệm tối ưu khi xét ứng với bài toán, điểm tối ưu khi xét ứng với hàm f)

2.1 Điều kiện tối ưu

1. Điều kiện tối ưu bậc nhất: Nghiệm tối ưu địa phương của bài toán quy hoạch phi tuyến với hàm mục tiêu khả vi (nếu tồn tại) là 1 điểm dừng của f.

   Nếu hàm mục tiêu f là lồi khả vi thì điểm dừng là nghiệm tối ưu toàn cục của bài toán.

2. Điều kiện tối ưu bậc hai:

   (a) Nếu x là điểm cực tiểu địa phương của f khả vi 2 lần thì

   $$\begin{cases} \nabla f(x) = 0 \\ \nabla^2 f(x) \geq 0 \end{cases}$$

   (b) Nếu x thỏa mãn

   $$\begin{cases} \nabla f(x) = 0 \\ \nabla^2 f(x) > 0 \end{cases}$$

   thì x là điểm cực tiểu địa phương của f.

   Lưu ý: Trong các ma trận với các phần tử là số thực:

   (a) Ma trận nửa xác định dương là ma trận đối xứng có các trị riêng không âm. Ma trận A cỡ $n \times n$ là ma trận nửa xác định dương thì $v^T Av \geq 0$ với mọi vector $v \in R^n$.

   (b) Ma trận xác định dương là ma trận đối xứng có các trị riêng dương. Một ma trận xác định dương là ma trận nửa xác định dương không suy biến (khả nghịch). Ma trận A cỡ $n \times n$ là ma trận nửa xác định dương thì $v^T Av > 0$ với mọi vector $v \in R^n/\{0\}$.

(c) Cho ma trận đối xứng A. Qua các phép biến đổi sơ cấp, đưa A về ma trận có dạng bậc thang B. Xét S là tập các phần tử khác không đầu tiên của từng hàng của B. Có

$$A \text{ là ma trận xác định dương khi và chỉ khi } S \subset R_+$$
$$A \text{ là ma trận nửa xác định dương khi và chỉ khi } S \subset R_+ \cup \{0\}$$

(d) (Chuẩn Sylvester) Ma trận A đối xứng là xác định dương khi và chỉ khi các định thức con chính của A là dương.

(e) (Mở rộng chuẩn Sylvester) Cho ma trận A đối xứng và tập S các ma trận con của A được hình thành bằng cách xóa đi cột thứ $i_1, i_2, ..., i_k$ và hàng thứ $i_1, i_2, ..., i_k$ với $k < n$ và $1 \leq i_1, ..., i_k \leq n$. A xác định dương khi và chỉ khí định thức của các ma trận trong S là không âm.

(f) Một ma trận A là ma trận xác định dương nếu tồn tại ma trận vuông R sao cho $A = R^T R$. Nếu các cột/hàng R độc lập tuyến tính thì A xác định dương.

(g) Một ma trận chéo có các phần tử trên đường chéo chính không âm (dương) thì ma trận nửa xác định dương (xác định dương).

VD:

- $f(x_1, x_2) = e^{3x_2} - 3x_1e^{x_2} + x_1^3$ có

  Có $\nabla f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -3e^{x_2} + 3x_1^2 = 0 \\ 3e^{3x_2} - 3x_1e^{x_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x_2} = x_1^2 \\ x_1^6 - x_1^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x_1, x_2) = (1; 0)$

  Có $\nabla^2 f(1, 0) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$. Các định thức con chính đều dương nên $\nabla^2 f(1, 0)$ xác định dương.

  Vậy có $(1, 0)^T$ là điểm cực tiểu địa phương của f.

- $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^2 - 3x_1 - 2x_2 + 12$

  Có $\nabla f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1^2 - 3 = 0 \\ 2x_2 - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x_1, x_2) \in \{(\pm 1, 1)\}$

  Có $\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 6x_1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Với $x = (1, 1)^T$ thì ma trận Hessan xác định dương, $x = (-1, 1)^T$ thì ma trận Hessan không nửa xác định dương, không nửa xác định âm.
  Vậy hàm có 1 cực tiểu địa phương là $(1, 1)^T$.

- $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 3(x_1 + x_2 - 2)$

  Có $\nabla f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x_1, x_2) = (-1, -1)$

  Có $\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Ma trận Hessan xác định dương với mọi $x \in R^2$ vì các định thức con chính dương. Do đó, hàm f là hàm lồi chặt.
  Vậy $(-1, -1)^T$ là điểm cực tiểu toàn cục của hàm.

- $f(x_1, x_2) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 6)^2$
  Dễ thấy $(4, 6)^T$ là điểm cực tiểu toàn cục của hàm. Hàm không còn điểm cực trị nào khác.

- $f(x) = x_2e^{-(x_1+x_2)}$
  Có $\nabla f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x_2e^{-(x_1+x_2)} = 0 \\ e^{-(x_1+x_2)} - x_2e^{-(x_1+x_2)} = 0 \end{cases}$ vô nghiệm. Vậy hàm không có điểm cực trị.

Lưu ý: Hầu hết các hàm xét đều có đạo hàm riêng f''_{xy}, f''_{yx} bằng nhau theo Clairaut nên ma trận Hessan thường là ma trận đối xứng. Nhưng nếu không thì không sử dụng điều kiện bậc hai được.

2.2 Phương pháp hướng giảm

1. Hướng giảm: Cho $x^0 \in R^n$. Vector $d \in R^n$ được gọi là hướng giảm của hàm f tại x^0 nếu tồn tại $\omega > 0$ sao cho $\sup f(x^0 + (0, \omega)d) = f(x^0)$.

   VD:

   - $f(x) = x_2e^{-(x_1+x_2)}$
     Xét $f\left((2,1)^T + t(3,-1)^T\right) = (1-t)e^{-3-2t}$. Với $1 > t$ thì $1 > 1-t > 0, e^{-3} > e^{-3-2t} > 0$ nên $f\left((2,1)^T + t(3,-1)^T\right) \leq f(2,1)$. Vậy $(3,-1)^T$ là 1 hướng giảm của hàm f tại điểm $(2,1)^T$.
   - $f(x) = x^3$ có 1 hướng giảm tại 0 là -1.

2. Thủ tục tìm chính xác theo tia: Cho điểm $x^k \in R^n$ và d^k là hướng giảm của hàm f tại x^k. Thủ tục này chọn độ dài bước chính xác $t_k > 0$ (nếu t_k bằng 0 thì dừng rồi) là nghiệm cực tiểu của hàm f theo tia $\{x^k + td^k, t \geq 0\}$. Đặt
   $$\phi_k(t) = f(x^k + td^k)$$
   Khi đó, t_k là nghiệm cực tiểu của hàm 1 biến $\phi(t_k)$ với $t \geq 0$, tức $t_k = argmin\{\phi_k(t) | t \geq 0\}$.

3. (Điều kiện Armijo) Cho hàm f khả vi trên R^n, $x^k \in R^n$, $d^k \in R^n$ thỏa mãn $\left\langle \nabla f(x^k), d^k \right\rangle < 0$ và $m_1 \in (0,1)$. Khi đó,
   $$\exists t \geq 0 : f(x^k + td^k) \leq f(x^k) + mt\left\langle \nabla f(x^k), d^k \right\rangle$$

4. Thủ tục quay lui: Giảm bước t đến mức đủ nhỏ để thỏa mãn bất đẳng thức trong điều kiện Armijo, sau đó tiếp tục lặp tìm x.

5. Cho hàm f khả vi trên R^n, $x^0 \in R^n$, $d \in R^n$. Nếu $\langle \nabla f(x), d \rangle < 0$ thì d là hướng giảm của f tại x^0.

   VD:

   - $f(x) = x_2e^{-(x_1+x_2)}$
     Có $\left\langle \nabla f(2,1), (3,-1)^T \right\rangle = \left\langle (-e^{-3}, 0)^T, (3,-1)^T \right\rangle = -3e^{-3} < 0$ nên $(3,-1)^T$ là 1 hướng giảm của hàm f tại điểm $(2,1)^T$.
   - $f(x) = x^3$ có 1 hướng giảm tại 0 là -1. Tuy nhiên $\left\langle \nabla f(0), d^T \right\rangle = 0, \forall d \in R$

6. Cho hàm f khả vi trên R^n, $x^0 \in R^n$. Nếu $\nabla f(x^0) \neq 0$ thì d=$-\nabla f(x^0)$ là 1 hướng giảm tại x^0. Trong các hướng giảm d của hàm f tại x^0 có $\|d\| = 1$ thì hàm f giảm nhanh nhất theo hướng $d = -\dfrac{\nabla f(x^0)}{\|\nabla f(x^0)\|}$.

Chứng minh. Vì $\left\langle \nabla f(x^0), -\nabla f(x^0) \right\rangle \leq 0$ nên với $\nabla f(x^0) \neq 0$ thì $\nabla f(x^0)$ là 1 hướng giảm của f tại x^0. Với $f : R^n \to R$ thì $\nabla f : R^n \to R^n$ hay $\nabla f(x) \in R^n$. Ứng với mỗi $x^0 \in R^n$ tồn tại 1 hệ $\left\{v_1, ..., v_{n-1}, \nabla f(x^0)\right\} \subset R^n$ độc lập tuyến tính. Trực chuẩn hóa Gram-Schmidt hệ này với vector đầu là $\nabla f(x^0)$ ta có hệ trực chuẩn $\left\{s_1, ..., s_{n-1}, \dfrac{\nabla f(x^0)}{\|\nabla f(x^0)\|}\right\}$. Xét 1 vector $d \in R^n, d \neq 0$, tồn tại duy nhất 1 biểu diễn của d dưới dạng $d = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i s_i + \lambda_n \dfrac{\nabla f(x^0)}{\|\nabla f(x^0)\|}$. Ta có

$$\left\langle \nabla f(x^0), \frac{d}{\|d\|} \right\rangle = \lambda_n \frac{\left\|\nabla f(x^0)\right\|^2}{\left\|\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i s_i + \lambda_n \dfrac{\nabla f(x^0)}{\|\nabla f(x^0)\|}\right\|} = \lambda_n \frac{\left\|\nabla f(x^0)\right\|^2}{\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|} \geq -\left\|\nabla f(x^0)\right\|^2$$

Dấu bằng xảy ra khi $\lambda_n = 1$, tức $d = -\nabla f(x^0)$. □

7. Tốc độ hội tụ :

2.2.1 Hướng giảm gradient

Chọn Gradient làm hướng giảm.
VD: Bài toàn (P^{krb}) với hàm mục tiêu

1. $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^2 - 3x_1 - 2x_2 + 12$
   Có $\nabla f(x_1, x_2) = (3x_1^2 - 3, 2x_2 - 2)$
   Lấy $\omega = 0.1$

   (a) Chính xác theo tia:
   Lần 1: Chọn $x^0 = 0$ có $\nabla f(0) = (-3, -2), \|\nabla f(0)\| = 5 > \omega$.
   Xét $\phi(t) = f(3t, 2t)$ có

   $$\phi'(t) = 3(27t^2 - 3) + 2(4t - 2) = 81t^2 + 8t - 13 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t \approx 0.35 \\ t \approx -0.45 \end{cases}$$

   Lại có $\phi''(t) = 192t + 8$. $\phi''(-0.45) < 0$ nên không phải là điểm cực tiểu của hàm f. $\phi''(0.35) > 0$ nên là điểm cực tiểu của hàm f. Vậy chọn $t_0 = 0.35 > 0$.
   Đặt $x^1 = x^0 + (0.35)\nabla f(x^0) = (1.05; 0.7)^T$.
   Lần 2: Có $\nabla f(x^1) = (0.3075, -0.6)^T, \left\|\nabla f(x^1)\right\| > \omega$.
   Xét $\phi(t) = f(1.05 - 0.3075t, 0.7 + 0.6t)$ có...

   (b) Thủ tục quay lui: Chọn $m = 0.5, \alpha = 0.5$
   Chọn $x^0 = 0$ có $f(0, 0) = 12\nabla f(0) = (-3, -2)^T, -m\|\nabla f(0)\|^2 = -6.5$. Xét $x^1(t) = x^0 - t\nabla f(0) = (3t, 2t)^T$.
   Với $t = 1$, có $f(3, 2) - f(0, 0) = 18 > -6.5 \cdot 1$.

Với $t = 0.5$ có $f(1,5;1) - f(0,0) = -2.125 > -3.25 = -6.5 \cdot 0,5$.

Với $t = 0.25$ có $f\left(\frac{3}{4};\frac{1}{4}\right) - f(0,0) \approx -2.58 < -1.625 = -6.5 \cdot 0,25$.

Vậy chọn $t^0 = \frac{1}{4}, x^1 = \left(\frac{3}{4};\frac{1}{4}\right)^T$

Xét ...

2.2.2 Phương pháp Newton

Với (P^{krb}) có f khả vi 2 lần, dùng phương pháp Newton trong phương pháp tính giải hệ phương trình phi tuyến:

$$\nabla f(x) = 0$$

1. Phương pháp Newton thuần túy:
   (a) Độ dài bước nhảy bằng 1.
   (b) Hướng giảm tại 1 điểm x^k là hướng Newton của hàm f tại x^k: $p^k = -\left[\nabla^2 f(x^k)^{-1}\right]\nabla f(x^k)$.
   (c) Có thể xác định p^k bằng cách giải hệ $\left[\nabla^2 f(x^k)\right] p^k = -\nabla f(x^k)$ thay vì tính ma trận nghịch đảo của Hessan.
2. Phương pháp Newton với bước điều chỉnh hay phương pháp Newton suy rộng là phương pháp Newton thuần túy với bước nhảy t được xác định bởi thủ tục quay lui.
3. Phương pháp tựa Newton với thuật toán D.F.P.

2.3 Bài tập quy hoạch phi tuyến không rằng buộc

Bài 3/289:

Chứng minh. Có $\nabla f(x) = Ax + b, \nabla^2 f(x) = A$. Vì A xác định dương nền $f(x)$ là hàm lồi chặt. Một điểm x là điểm cực tiểu toàn cực của $f(x)$ khi và chỉ khi $\nabla f(x) = 0$, tức $Ax + b = 0$ □

Bài 4/289:

1. Điều kiện cần bậc 1: $Ax = b$. Điều kiện cần bậc 2: $\begin{cases} Ax = b \\ A \text{ nửa xác định dương} \end{cases}$. Hàm $f(x)$ có điểm dừng khi và chỉ khi hệ $Ax = b$ có nghiệm, tức $r(A|b) = r(A)$.
2. Hàm $f(x)$ có cực tiểu địa phương khi hệ $\begin{cases} Ax = b \\ A \text{ xác định dương} \end{cases}$ có nghiệm, tức $r(A|b) = r(A)$ và A xác định dương.
3. Hàm $f(x)$ có điểm dừng khi và chỉ khi hệ $Ax = b$ có nghiệm, tức $r(A|b) = r(A)$. Nghiemj này không phải cực trị địa phương khi A không nửa xác định dương, cũng không nửa xác định âm.

Bài 5/289:

1. $\nabla f(x) = (2\alpha x_1 - 2x_2, 2x_2 - 2x_1 - 2)^T$. Điểm dừng của f thỏa mãn $\nabla f(x) = 0$, tức

$$\begin{cases} 2\alpha x_1 - 2x_2 = 0 \\ 2x_2 - 2x_1 - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = 0, (x_1, x_2) = (-1, 0) \\ \alpha \notin \{0, 1\}, (x_1, x_2) = \left(\dfrac{1}{\alpha - 1}, \dfrac{\alpha}{\alpha - 1}\right) \end{array}\right.$$

2. Có $\nabla f(x, y) = \left(-3e^y + 3x^2, 3e^{3y} - 3xe^y\right)^T, \nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 6x & -3e^y \\ -3e^y & 9e^{3y} - 3xe^y \end{pmatrix}$. Tại điểm $(1, 0)^T, \nabla f(1, 0) = 0$ và $\nabla^2(1, 0) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ là ma trận xác định dương vì các định thức con chính dương. Vậy $(1, 0)^T$ là điểm tối ưu địa phương chặt. Nếu cố định $y = 0$ và cho $x \to -\infty$ thì $f(x, y) \to -\infty$ nên hàm không có điểm tối ưu toàn cục.

Bài 7/290:

1. (easy)

2. (easy)

3. $f(x_1, x_2) = 8x_1^2 + 3x_1x_2 + 7x_2^2 - 25x_1 + 31x_2 - 29$

   Có $\nabla f(x) = (16x_1 + 3x_2 - 25, 3x_1 + 14x_2 + 31)^T, \nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 16 & 3 \\ 3 & 14 \end{pmatrix}$. Ma trận Hessan xác định dương trên R^n nên hàm $f(x)$ lồi, mọi điểm dừng là cực tiểu toàn cục của hàm $f(x)$. Xét $\nabla f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 16x_1 + 3x_2 - 25 = 0 \\ 3x_1 + 14x_2 + 31 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \left(\dfrac{443}{215}, -\dfrac{571}{215}\right)$

4. $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_1^3 + x_1^4$

   Có $\nabla f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 6x_1^2 + 4x_1^3 = 0 \\ 2x_2 - 2x_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_2 = x_1 \in \left\{\dfrac{-1}{2}, -1, 0\right\}$. Xét $\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 4 + 12x_1 + 12x_1^2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ có các định thức con chính $d_1 = 4 + 12x_1 + 12x_1^2, d_2 = 4 + 24x_1 + 24x_1^2$. Với $x_2 = x_1 \in \left\{\dfrac{-1}{2}, -1, 0\right\}$ thì $d_2 < 0$ nên hàm không có điểm cực tiểu địa phương. Bài toán không có phương án tối ưu.

Bài 8/290:

Có $\nabla f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2 - 2 + e^{x_1 + x_2}, -x_1 + 4x_2 + e^{x_1 + x_2})^T$. Tại điểm $x = 0$ có $\nabla f(x) = (-1, 1) \neq 0$ nên $x = 0$ không phải là điểm cực tiểu địa phương của hàm f. 1 hướng giảm của f tại $x = 0$ là $-\nabla f(0) = (1, -1)$.

Bài 10/290:

Hướng giảm d của hàm f tại x^* trong bài toán (P^{krb}) là vector thỏa mãn:

$$\exists \omega > 0 : f(x^* + (0,\omega)d) = f(x^*)$$

Điều kiện đủ để nhận biết $d \in R^n$ hướng giảm tại điểm x là $\langle \nabla f(x), d\rangle < 0$.
Bài 11/290:

1. $\nabla f(u) = (2u_1, 4u_2)^T, \nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Do Hessan xác định dương với mọi u nên hàm f là lồi chặt, nên mọi điểm dừng của f là điểm cực tiểu toàn cục.
   Với $u^0 = (2,1)^T$ thì ta có $\nabla f(2,1) = (4,4), \phi(t) = f(2-4t, 1-4t), \phi'(t) = -4(2(2-4t) + 4(1-4t)) = -16(2-6t)$. $\phi'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{3}$ là điểm cực tiểu của $\phi(t)$.
   Ta có $u^1 = \left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)$. Ta có $\nabla f(u^1) = \dfrac{4}{3}(1,-1)^T, \phi(t) = f\left(\dfrac{2}{3} - \dfrac{4}{3}t, -\dfrac{1}{3} + \dfrac{4}{3}t\right), \phi'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{3}$.
   Ta có $u^2 = \left(\dfrac{2}{9}, \dfrac{1}{9}\right)$. Ta có $\nabla f(u^2) = \dfrac{4}{9}(1,1)^T, \phi(t) = f\left(\dfrac{2-4t}{9}, \dfrac{1-4t}{9}\right)$. $\phi'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{3}$.
   Ta có $u^3 = \left(\dfrac{2}{27}, -\dfrac{1}{27}\right)$.

Bài 13/291:
Điều kiện cần của cực tiểu địa phương với bài toán (P^{krb}) với hàm mục tiêu f khả vi 2 lần là

$$\begin{cases} \nabla f(x) = 0 \\ \nabla^2 f(x) \geq 0 \end{cases}$$

2.4 Code C++ 1 số thuật toán phi tuyến không rằng buộc

3 Quy hoạch tuyến tính

$$\min\{f(x) = \langle c, x\rangle \,|x \in D\} \text{ trong đó } c \in R^n \text{ và } D \text{ là tập lồi đa diện.}$$

1. Dạng chuẩn tắc

$$\begin{aligned} \min f(x) = \langle c, x\rangle \\ \text{v.đ.k } Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{aligned}$$

   $Ax \geq b$ là các rằng buộc chính. $x \geq 0$ là các rằng buộc dấu.

2. Dạng chính tắc

$$\begin{aligned} \min f(x) = \langle c, x\rangle \\ \text{v.đ.k } Ax = b \\ x \geq 0 \end{aligned}$$

với $b \geq 0$

3. Phương án cực biên là điểm cực biên của tập nghiệm chấp nhận được D.
4. Nếu tập nghiệm chấp nhận được D khác rỗng và bị chặn thì bài toán quy hoạch tuyến tính luôn có nghiệm tối ưu. Nếu tập nghiệm chấp nhận được D khác rỗng và hàm mục tiêu bị chặn dưới thì bài toán quy hoạch tuyến tính luôn có nghiệm tối ưu.
5. Nghiệm tối ưu của bài toán quy hoạch tuyến tính là 1 diện của tập lồi đa diện chấp nhận được.
6. Nếu 1 quy hoạch tuyến tính có nghiệm tối ưu và tập lồi đa diện rằng buộc có đỉnh thì nghiệm tối ưu phải đạt tại ít nhất 1 đỉnh, tức đạt tại ít nhất 1 phương án cực biên.
7. Nghiệm tối ưu của bài toán quy hoạch tuyến tính cũng là nghiệm tối ưu toàn cục.

3.1 Phương pháp hình học với bài toán QHTT 2 biến

Kẻ đường mức của f đi qua 1 điểm trong tập chấp nhận được D. Tịnh tiến đường mức này theo hướng ngược với vector gradient của hàm mục tiêu f cho đến khi đường mức không còn cắt tập chấp nhận được D. Nghiệm tối ưu là tập các điểm của D nằm trên đường mức cuối cùng.

3.2 Phương pháp đơn hình

1. Xét bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc:

   $$\min\{\langle c, x\rangle \,|x \in D\} \text{ trong đó } c \in R^n/\{0\} \text{ với } D = \{x|Ax = b, x \geq 0\} \text{ với } A \text{ là ma trận cấp } m \times n, \; m < n \text{ và } b \geq 0.$$

   Nếu $m \geq n$ và $rA = n$ thì hệ phương trình $Ax = b$ cho 1 nghiệm duy nhất. Bài toán không có nhiều ý nghĩa.

   Nếu $m \geq n$ và $rA < n$ thì hệ phương trình dưới dạng $A'x = b'$ với A' gồm rA hàng độc lập tuyến tính của A và b' gồm các phần tử của b ứng với các hàng đó.

2. Xét 1 đỉnh $x^0 \in D$, có 3 trường hợp xảy ra:

   (a) Trên mọi cạnh của tập chấp nhận được xuất phát từ x^0 giá trị hàm mục tiêu đều không giảm. Khi đó, x^0 là nghiệm tối ưu toàn cục của (LP^{ct}).

   Chứng minh. Giả sử mọi cạnh của tập chấp nhận được xuất phát từ x^0 giá trị hàm mục tiêu đều không giảm nhưng x^0 không phải là nghiệm tối ưu toàn cục của (LP^{ct}). Vậy tồn tại 1 đỉnh x^1 khác x^0 sao cho x^1 là nghiệm tối ưu toàn cục. Khi đó, xét $x \in [x^0, x^1]$, tồn tại $\lambda \in [0, 1]$ sao cho $x = \lambda x^0 + (1 - \lambda)x^1$. Khi đó, có $\langle c, x\rangle = \lambda < c, x_0 > +(1 - \lambda) < c, x_1 > \leq < c, x_0 >$ mâu thuẫn với giả thiết. Vậy x^0 là nghiệm cực tiểu toàn cục của bài toán. □

   (b) Mọi cạnh xuất phát từ x^0, theo đó giá trị hàm mục tiêu giảm, đều là cạnh hữu hạn. Đi theo 1 cạnh như thế, ta sẽ đến 1 đỉnh x^1 kề với x^0 mà

   $$\left\langle c, x^1 \right\rangle < \left\langle c, x^0 \right\rangle$$

(c) Có 1 cạnh vô hạn xuất phát từ x^0, theo đó giá trị hàm mục tiêu giảm. Khi đó, giá trị hàm mục tiêu sẽ tiến đến $-\infty$ theo cạnh này và bài toán không có nghiệm tối ưu.

3. Trong bài toán quy hoạch chính tắc trên. Ký hiệu A_j là cột thứ j của ma trận $A, j = \overline{1,n}$. Ký hiệu $J(x^0) = \{j \in \{1, ..., n\} | x_j^0 > 0\}$. Điều kiện cần và đủ để 1 điểm $x^0 \in D$ là phương án cực biên là

$$\text{hệ } \{A_j | j \in J(x^0)\} \text{ độc lập tuyến tính}$$

4 Đề giữa kỳ 20201

4.1 Đề 1

(a) i. Có $\nabla f(u) = (2u_2 + 6u_1 + 4, 2u_1 + 2u_2 - 8)^T, \nabla^2 f(u) = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Ma trận Hessan xác định dương do các định thức con chính dương nên hàm $f(u)$ lồi chặt trên R^2.

ii. Điều kiện cần bậc nhất của bài toán là $\nabla f(x) = 0$, tức $\begin{cases} 2u_2 + 6u_1 + 4 = 0 \\ 2u_1 + 2u_2 - 8 = 0 \end{cases}$. Đây là điều kiện đủ vì hàm mục tiêu $f(x)$ là hàm lồi trên R^2.

iii. Có $\nabla f(u^0) = (2\alpha + 4, 2\alpha - 8)^T, \nabla^2 f(u^0) = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Xét phương trình ẩn $p \in R^2$ là $\nabla^2 f(u^0) p = \nabla f(u^0)$, tức

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} p = (2\alpha + 4, 2\alpha - 8)^T$$

Giải hệ phương trình ta được $p = (3, \alpha - 7)^T$. Theo thuật toán Newton, ta có $u^1 = u^0 - p = (-3, 7)^T$. Ta có $\nabla f(u^1) = 0$ và hàm $f(u)$ lồi trên R^2 nên u^1 là nghiệm tối ưu toàn cục của bài toán.

(b) Nghiệm tối ưu địa phương của bài toán quy hoạch tuyến tính là nghiệm tối ưu toàn cục của bài toán ấy. Vì vậy cần chứng minh: $B(u^0, \omega) \cap D = B(u^0, \omega) \cap conv\{u^0, u^1, ..., u^h\}$.

Đến đây thì chưa biết làm. Hehe.

(c) D là 1 tập lồi đa diện. Xét bài toán quy hoạch tuyến tính (A):

$$\min \{q(x) = -k(x) + \beta = \langle -\omega, x \rangle | x \in D\}$$

Xét đường mức $L(0, q) = \{x = (x_1, x_2) \in D | x_1 = -2x_2\}$. Chọn điểm $x^0 = (2, 1)^T \in D$ ta có $L = L(x^0, q) = \{x = (x_1, x_2) \in D | x_1 + 2x_2 = 4\}$. Tịnh tiến L theo hướng $-(-\omega) = (10, 20)^T$ đến mức L không còn cắt D nữa thì dừng. Tuy nhiên, $(10, 20)^T$ là 1 phương lùi xa trong D nên phép tịnh tiến như vậy luôn cho $L \cap D \neq \emptyset$. Vậy bài toán (A) không có nghiệm tối ưu, từ đó ta có bài toán $\max \{k(x) = \langle \omega, x \rangle + \beta\}$ không có nghiệm tối ưu.

4.2 Đề 2

(a) Đặt bài toán đã cho là A. Nhận thấy Q là 1 tập lồi đa diện. Xét bài toán quy hoạch tuyến tính B:

$$\min \{f(x) = \phi(x) - \beta = \langle v, x \rangle \, | x \in Q\}$$

Xét đường mức $L(0, f) = \{x = (x_1, x_2) \in Q | 2x_1 + x_2 = 0\}$. Chọn điểm $x^0 = (1, 4)^T \in Q$, ta có $L = L(x^0, q) = \{x = (x_1, x_2) \in Q | 2x_1 + x_2 = 6\}$. Tịnh tiến L theo hướng $-v = (-20, -10)^T$ đến mức L không còn cắt D nữa thì dừng. Tập các điểm của D nằm trên đường mức cuối cùng là $\left\{(0, 1)^T\right\}$. Vậy $(0, 1)^T$ là nghiệm tối ưu của (B), từ đó ta có $(0, 1)^T$ là nghiệm tối ưu của (A).

(b) i. *Chứng minh.* Có $\nabla f(x) = Qx - b, \nabla^2 f(x) = Q$. Vì Q xác định dương nên hàm $f(x)$ lồi chặt trên R^n. Từ đó, ta có điều kiện cần và đủ để x là nghiệm tối ưu toàn cục của bài toán là $\nabla f(x) = 0$, tức $Ax = b$. □

ii. Nếu $f(x)$ là hàm Affine thì xảy ra 2 trường hợp:

A. Nếu $f(x)$ bị chặn dưới thì hàm $f(x)$ là hàm đồng nhất bằng hằng số, bài toán có tập nghiệm tối ưu là R^n.

B. Nếu $f(x)$ không bị chặn dưới thì bài toán không có nghiệm tối ưu.

Vì vậy, không cần xây dựng thuật toán.

(c) i. Có $\nabla k(u) = (6u_1 + u_2 - 36 - \alpha, u_1 + 2u_2 - 2\alpha)^T, \nabla^2 k(u) = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Ma trận Hessan của k xác định dương theo chuẩn Sylvester nên hàm $k(u)$ lồi trên R^2.

ii. Điều kiện bậc nhất là điều kiện đủ đối với bài toán (P_2) vì hàm mục tiêu $k(u)$ lồi trên tập nghiệm chấp nhận được R^2. Điều kiện bậc nhất của bài toán là $\nabla k(u) = 0$, tức $\begin{cases} 6u_1 + u_2 - 36 - \alpha = 0 \\ u_1 + 2u_2 - 2\alpha = 0 \end{cases}$

iii. Có $u^0 = (6, \alpha)^T, \nabla k(u^0) = (0, 6)^T$. Xét $\phi(t) = f(6, \alpha - 6t), \phi'(t) = -6(6 + 2(\alpha - 6t) - 2\alpha) = -6(6 - 12t), \phi''(t) = 72 > 0$. Do $\phi''(t) > 0$, xét $\phi'(t) = 0$ được $t = \dfrac{1}{2} > 0$ là điểm cực tiểu của hàm $\phi(t)$. Theo thủ tục, ta có $u^1 = u^0 - \dfrac{1}{2}\nabla f(u^1) = (6, \alpha - 3)^T$. Xét $\nabla k(u^1) = (-3, 0)^T$ nên u^1 không phải là nghiệm tối ưu của bài toán (P_2).

4.3 Đề 3

(a) Xem câu 2 đề 1.

(b) i. Có $\nabla f(u) = (6u_1 + 2u_2 + 4, 2u_1 + 2u_2 - 8), \nabla^2 f(u) = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ Hàm $f(u)$ là lồi chặt trên R^2 do ma trận Hessan dương theo chuẩn Sylvester.

ii. Điều kiện bậc nhất là điều kiện đủ do hàm $f(u)$ lồi trên R^2:

$$\nabla f(u) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 6u_1 + 2u_2 + 4 = 0 \\ 2u_1 + 2u_2 - 8 = 0 \end{cases}$$

iii. Có $u^0 = (0, \alpha)^T, \nabla f(u^0) = (2\alpha + 4, 2\alpha - 8)^T$. Xét phương trình ẩn $p \in R^2$ là $\nabla^2 f(u^0)p = \nabla f(u^0)$, tức

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} p = (2\alpha + 4, 2\alpha - 8)^T$$

Giải hệ phương trình có $p = (3, -7 + \alpha)^T$. Theo thuật toán Newton, ta có $u^1 = u^0 - p = (-3, 7)^T$. Ta có $\nabla f(u^1) = 0$ và hàm $f(u)$ lồi trên R^2 nên u^1 là nghiệm tối ưu toàn cục của bài toán.

(c) Đặt bài toán đã cho là (A). Tập D là tập lồi đa diện. Xét bài toán quy hoạch tuyến tính (B):

$$\min \{h(x) = k(x) - \beta = \langle \omega, x \rangle\}$$

Xét đường mức $L(0, h) = \{x = (x_1, x_2)^T \in D | x_1 + 2x_2 = 0\}$. Chọn điểm $x^0 = (4, 1) \in D$ có $L = L(x^0, h) = \{x = (x_1, x_2)^T \in D | x_1 + 2x_2 = 6\}$. Tịnh tiến L theo hướng $-\omega = (-12, -24)^T$ cho đến khi L không cắt D nữa thì dừng. Tập các điểm thuộc D nằm trên đường mức cuối cùng là $\{(3, 0)^T\}$. Vậy $(3, 0)^T$ là nghiệm tối ưu của bài toán (B), tức cũng là nghiệm tối ưu của bài toán (A).

4.4 Một số câu lạ từ các đề còn lại

Câu 3/Đề 5:

Chứng minh. Nếu tồn tại 1 hướng lùi xa d^* của X thỏa mãn $\langle v, d^* \rangle < 0$ thì với $x \in X$ có $\lim_{\lambda \to +\infty} g(x + \lambda d^*) = g(x) + \lim_{\lambda \to +\infty} \lambda \langle v, d^* \rangle = -\infty$. Vì nghiệm tối ưu địa phương của bài toán quy hoạch tuyến tính (nếu có) cũng là nghiệm tối ưu toàn cục nên bài toán đã cho không có nghiệm tối ưu.

Nếu không tồn tại hướng lùi xa d^* như trên thì với mọi phương lùi xa d của X thì $\langle v, d \rangle = 0$, tức $recX = \{0\}$ hay tập lồi đa diện X không có phương lùi xa. Khi đó, X là hàm đóng, bị chặn. Bài toán có nghiệm tối ưu. □