



ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI  
VIỆN CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG

# Toán rời rạc



Phần thứ hai

# LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ

## Graph Theory

# Nội dung phần 2: Lý thuyết đồ thị

Chương 1. Các khái niệm cơ bản

**Chương 2. Biểu diễn đồ thị**

Chương 3. Duyệt đồ thị

Chương 4. Cây và cây khung của đồ thị

Chương 5. Bài toán đường đi ngắn nhất

Chương 6. Bài toán luồng cực đại trong mạng

# Biểu diễn đồ thị

- Có nhiều cách biểu diễn. Việc lựa chọn cách biểu diễn phụ thuộc vào từng bài toán cụ thể cần xét, thuật toán cụ thể cần cài đặt.
- Có hai vấn đề chính cần quan tâm khi lựa chọn cách biểu diễn:
  - Bộ nhớ mà cách biểu diễn đó đòi hỏi
  - Thời gian cần thiết để trả lời các truy vấn thường xuyên đối với đồ thị trong quá trình xử lý đồ thị:
    - Chẳng hạn:
      - Có cạnh nối hai đỉnh  $u, v$  ?
      - Liệt kê các đỉnh kề của đỉnh  $v$  ?

# Nội dung chi tiết

## 2.1. Ma trận kẻ

## 2.2. Ma trận trọng số

## 2.3. Ma trận liên thuộc đỉnh cạnh

## 2.4. Danh sách kẻ

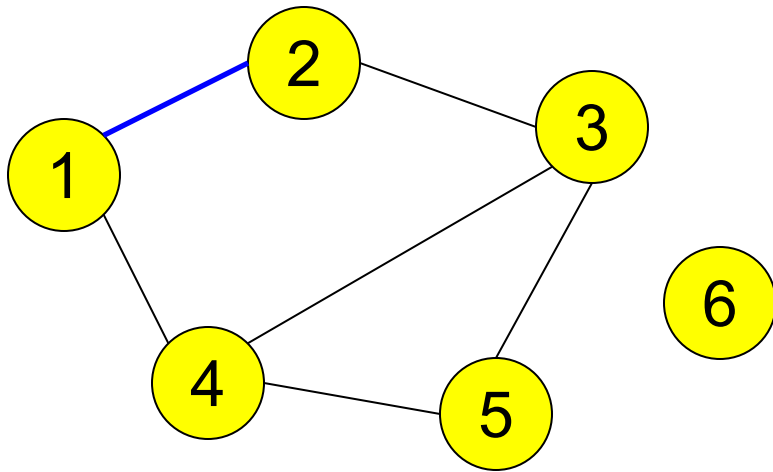
## 2.1. Ma trận kề (Adjacency Matrix)

- Ma trận kề  $A$  kích thước  $|V| \times |V|$ .
- Các đỉnh được đánh số từ 1 đến  $|V|$  theo 1 thứ tự nào đó.
- $A$  xác định bởi:

$$A[i, j] = a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } (i, j) \in E \\ 0 & \text{nếu } \text{tr}_i \neq j \end{cases}$$

$$n = |V|; m = |E|$$

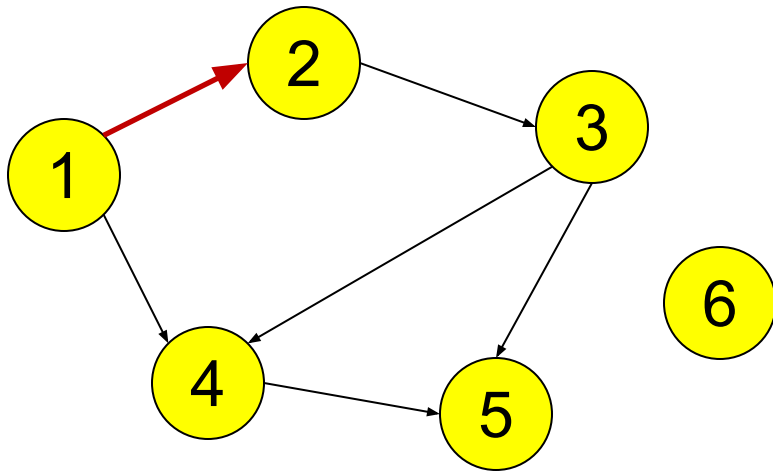
# Ma trận kề của đồ thị vô hướng



$$A[u,v] = \begin{cases} 1 \text{ nếu } (u,v) \in E \\ 0 \text{ nếu trái lại} \end{cases}$$

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	1	0	0
2	1	0	1	0	0	0
3	0	1	0	1	1	0
4	1	0	1	0	1	0
5	0	0	1	1	0	0
6	0	0	0	0	0	0

# Ma trận kề của đồ thị có hướng



$$A[u,v] = \begin{cases} 1 \text{ nếu } (u,v) \in E \\ 0 \text{ nếu trái lại} \end{cases}$$

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	1	0	0
2	0	0	1	0	0	0
3	0	0	0	1	1	0
4	0	0	0	0	1	0
5	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0



# Tính chất của ma trận kề

- Gọi  $A$  là ma trận kề của đồ thị vô hướng:
  - $A$  là ma trận đối xứng:  $A = A^T$  ( $a_{ij} = a_{ji}$ )
  - $\deg(v) =$  Tổng các phần tử trên dòng  $v$  của  $A$
  - Nếu ký hiệu  $A^k = (a^{(k)}[u, v])$  thì  $a^{(k)}[u, v]$  là số lượng đường đi từ  $u$  đến  $v$  đi qua không quá  $k-1$  đỉnh trung gian.
- Khái niệm ma trận kề có thể mở rộng để biểu diễn đa đồ thị vô hướng:  $a_{uv}$  – số lượng cạnh nối hai đỉnh  $u$  và  $v$ .

# Nội dung chi tiết

## 2.1. Ma trận kề

## **2.2. Ma trận trọng số**

## 2.3. Ma trận liên thuộc đỉnh cạnh

## 2.4. Danh sách kề

## 2.2. Ma trận trọng số

- Trong trường hợp đồ thị có trọng số trên cạnh, thay vì ma trận kề, để biểu diễn đồ thị ta sử dụng **ma trận trọng số**

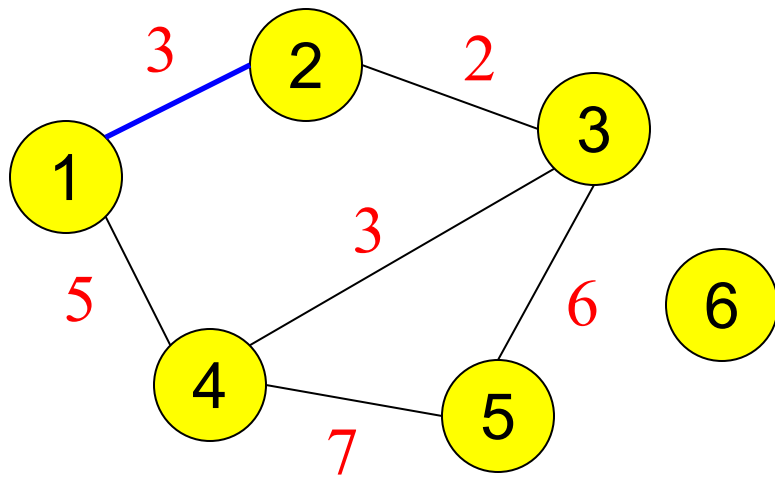
$$C = c[i, j], \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

với

$$c[i, j] = \begin{cases} c(i, j), & \text{nếu } (i, j) \in E \\ \theta, & \text{nếu } (i, j) \notin E, \end{cases}$$

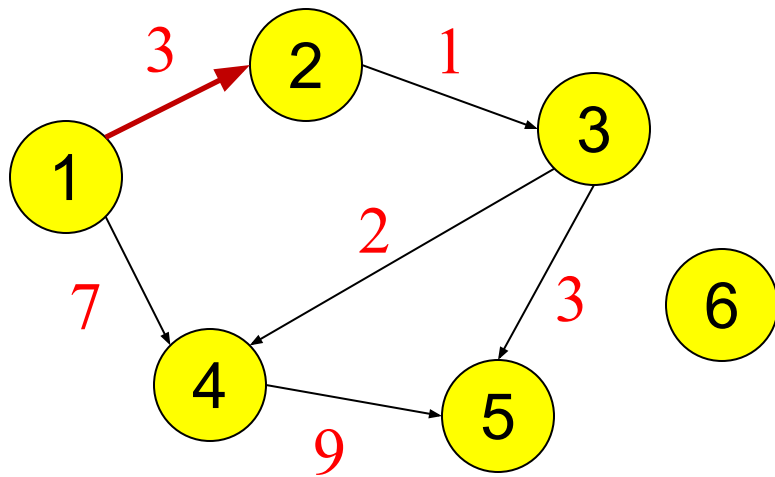
trong đó  $\theta$  là giá trị đặc biệt để chỉ ra một cặp  $(i, j)$  không là cạnh, tùy từng trường hợp cụ thể, có thể được đặt bằng một trong các giá trị sau:  $0, +\infty, -\infty$ .

# Ma trận trọng số của đồ thị vô hướng



	1	2	3	4	5	6
1	0	3	0	5	0	0
2	3	0	2	0	0	0
3	0	2	0	3	6	0
4	5	0	3	0	7	0
5	0	0	6	7	0	0
6	0	0	0	0	0	0

# Ma trận kề của đồ thị có hướng



	1	2	3	4	5	6
1	0	3	0	7	0	0
2	0	0	1	0	0	0
3	0	0	0	2	3	0
4	0	0	0	0	9	0
5	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0

# Nội dung chi tiết

2.1. Ma trận kẻ

2.2. Ma trận trọng số

**2.3. Ma trận liên thuộc đỉnh cạnh**

2.4. Danh sách kẻ

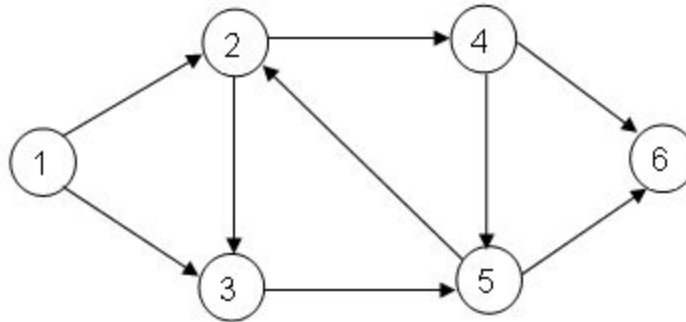
## 2.3. Ma trận liên thuộc đỉnh cạnh

- Xét  $G = (V, E)$ , ( $V = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ ), là đơn đồ thị có hướng.
- Ma trận liên thuộc đỉnh cạnh  $A = (a_{ij} : i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m)$ , với

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{nếu đỉnh } i \text{ là đỉnh đầu của cung } e_j, \\ -1, & \text{nếu đỉnh } i \text{ là đỉnh cuối của cung } e_j, \\ 0, & \text{nếu đỉnh } i \text{ không là đầu mút của cung } e_j, \end{cases}$$

- Ma trận liên thuộc đỉnh-cạnh là một trong những cách biểu diễn rất hay được sử dụng trong các bài toán liên quan đến đồ thị có hướng mà trong đó phải xử lý các cung của đồ thị.

## 2.3. Ma trận liên thuộc đỉnh cạnh



$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} (1,2) & (1,3) & (2,3) & (2,4) & (3,5) & (4,5) & (4,6) & (5,2) & (5,6) \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$



# Nội dung chi tiết

2.1. Ma trận kê

2.2. Ma trận trọng số

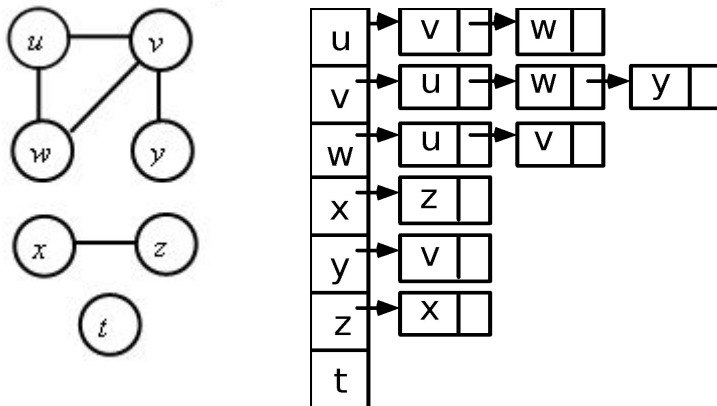
2.3. Ma trận liên thuộc đỉnh cạnh

**2.4. Danh sách kê**

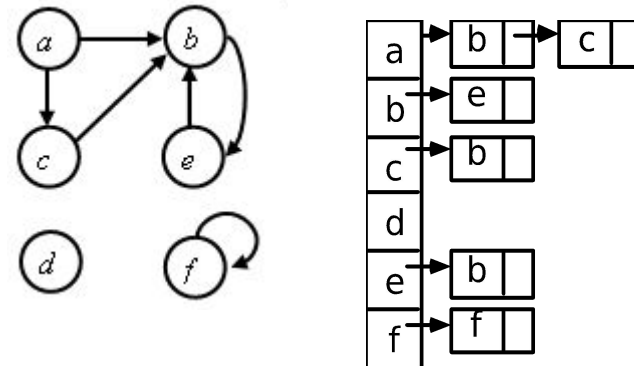
## 2.4. Danh sách kề

- **Danh sách kề (Adjacency Lists):** Với mỗi đỉnh  $v$  cất giữ danh sách các đỉnh kề của nó.
  - Là mảng  $Ke$  gồm  $|V|$  danh sách.
  - Mỗi đỉnh có một danh sách.
  - Với mỗi  $u \in V$ ,  $Ke[u]$  bao gồm tất cả các đỉnh kề của  $u$ .
- **Ví dụ:**

Đồ thị vô hướng



Đồ thị có hướng



# Yêu cầu bộ nhớ

- Tổng cộng bộ nhớ:  $\Theta(|V|+|E|)$
- Thường là nhỏ hơn nhiều so với  $|V|^2$ , nhất là đối với đồ thị thưa (sparse graph).
- Đồ thị thưa là đồ thị mà  $|E| \leq k |V|$  với  $k < 10$ .
- **Chú ý:**
  - *Phần lớn các đồ thị trong thực tế ứng dụng là đồ thị thưa!*
  - *Cách biểu diễn này được sử dụng nhiều nhất trong ứng dụng*