

LỜI GIẢI - CHỨNG MINH BÀI TẬP NHÓM 10

Nhóm 13: Đạt Trần Xuân - Nguyễn Quốc Phú

1 Phân tích bài toán

Đây là bài toán liên quan đến cây (cấu trúc quản lý) và kiểm tra điều kiện về độ phức tạp của công việc cho mỗi nút dựa trên tập con các con được sa thải.

Dữ liệu đầu vào:

- n : Số lượng nhân viên (gốc là nhân viên số 1)
- m : Giới hạn độ phức tạp tối đa
- w_i : Khối lượng công việc của nhân viên i ($1 \leq i \leq n$)
- p_i : Quản lý trực tiếp của nhân viên i (với $i > 1$)

Độ phức tạp công việc của nhân viên i :

$$c_i = w_i + \sum_{j \in \text{children}(i)} c_j^*$$

trong đó:

$$c_j^* = \begin{cases} c_j, & \text{nếu không sa thải } j \\ c_j - 1, & \text{nếu sa thải } j \end{cases}$$

Yêu cầu: Chọn tập nhân viên sa thải (ngoại trừ số 1) sao cho:

- Độ phức tạp của mỗi quản lý không vượt quá m tại mọi thời điểm: $c_i \leq m \quad \forall i$
- Số nhân viên bị sa thải là lớn nhất có thể.

2 Ý tưởng

Tại mỗi nút u , ta cố gắng chọn tập con $S \subset \text{children}(u)$ để sa thải sao cho:

$$w_u + \sum_{j \in S} (c_j - 1) + \sum_{j \notin S} c_j \leq m$$

và số lượng phần tử trong S là lớn nhất.

Thuật toán tham lam: chọn các con có c_j nhỏ nhất được sa thải trước để đạt tối đa số lượng sa thải.

3 Chứng minh tính đúng đắn của thuật toán tham lam

Lập luận tối ưu cục bộ

Tại mỗi nút, việc sa thải những con có độ phức tạp c_j nhỏ nhất trước giúp giảm tổng độ phức tạp truyền lên quản lý một cách hiệu quả nhất, tạo không gian cho việc sa thải nhiều nhân viên con hơn.

Chứng minh bằng phản chứng

Giả sử tồn tại một cách chọn tối ưu khác phá vỡ thứ tự tham lam này mà cho số lượng sa thải lớn hơn. Gọi j và k là hai nhân viên con với $c_j < c_k$, trong đó cách chọn tối ưu sa thải k nhưng không sa thải j .

Xét hai trường hợp:

1. **Trường hợp 1:** Nếu ta hoán đổi - sa thải j thay vì k , thì tổng độ phức tạp giảm thêm $(c_k - c_j) > 0$, cho phép có khả năng sa thải thêm nhân viên khác.
2. **Trường hợp 2:** Ngay cả khi không thể sa thải thêm, việc hoán đổi này vẫn giữ nguyên số lượng sa thải nhưng làm giảm tổng độ phức tạp, tạo điều kiện thuận lợi cho các nút cha xử lý.

Trong cả hai trường hợp, việc trì hoãn sa thải các con có độ phức tạp nhỏ hơn sẽ làm tổng độ phức tạp truyền lên lớn hơn sớm hơn, hạn chế khả năng sa thải thêm.

Kết luận

Do đó, lựa chọn tham lam tại mỗi nút là tối ưu cục bộ. Áp dụng nguyên lý quy hoạch động từ lá lên gốc, ta suy ra thuật toán cho kết quả tối ưu toàn cục cho toàn bộ cây.